Initiation au(x) logarithme(s)

L. Gerin

Niveau : Première
Difficulté : ★★
Durée : 2h
Rubrique(s) : Analyse (étude de fonctions, dérivation, algorithmique, graphe)

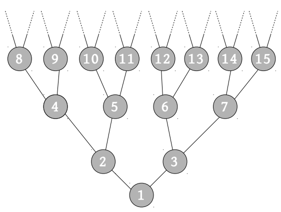
En classe de Seconde, vous avez étudié les fonctions affines, les fonctions polynomiales du second degré, la fonction inverse, les fonctions homographiques et en particulier la fonction inverse, la fonction racine carrée. En Première, la dérivation a permis d'améliorer ces études de fonctions. En Terminale, on étudie d'autres fonctions dont la fonction logarithme népérien. Dans cet atelier, cette fonction y est introduite avec une autre approche que celle que vous étudierez ou avez étudiée en classe de Terminale.

La petite histoire...
Au XVI^e^ siècle, pour le commerce, la navigation, l'astronomie, on avait besoin de multiplier des grands nombres vite et bien. Mais les calculatrices de cette époque avaient assez peu de mémoire vive et de puissance, on appelait ça des cerveaux et ça se trouvait dans la tête. Comme il est plus simple d'effectuer une addition qu'une multiplication, John Napier (Écosse, 1550-1617) a eu l'idée d'inventer des fonctions qui "transforment les produits en sommes", ce sont les fonctions logarithmes.
Le but de cet atelier est de comprendre ce que cela signifie, et comment l'introduction de ces *tables de logarithmes* a permis de développer le calcul.

Monsieur et Madame
Deœuçafaitun ont une fille...

Exercice 1 (Logarithmes et arbre binaire).

Vous savez peut-être que dans un ordinateur on stocke très souvent les données sous forme d'arbre. Par exemple, on peut stocker tous les entiers dans cet arbre infini :



On note alors $H(n)$ la hauteur de l'entier n dans cet arbre, en partant de 1 qui est à la hauteur 0. Par exemple, 10 est la hauteur 3 dans l'arbre donc $H(10) = 3$.

1. Remplir le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$H(n)$	0	1	1															

2. Soient $k \geq 0$ et $\ell(k)$ le nombre d'entiers qui sont à la hauteur k. Montrer que $(l(k))_{k\geq 0}$ est une suite géométrique. En déduire une expression de $l(k)$ en fonction de k.

3. Démontrer que pour n'importe quel entier $k \geq 0$, la ligne k commence par 2^k et que, en particulier, on a $H(2^k) = k$.

4. Combien vaut $H(1092)$?

5. Soient a et b deux puissances de deux, démontrer que $H(ab) = H(a) + H(b)$.

Commentaires sur l'Exercice 1

Nous avons ainsi rencontré une première fonction qui "transforme les produits en sommes". Cette fonction est appelée le **logarithme en base deux** et nous voyons qu'elle "neutralise" les puissances de deux, c'est en quelque sorte la réciproque de la fonction $n \mapsto 2^n$.

Exercice 2 (Logarithmes et puissances de 10**).**
Pour un entier naturel n, on note $L(n)$ le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10, moins un. Par exemple, 2061983 s'écrit avec 7 chiffres, donc $L(2061983) = 7 - 1 = 6$. De même, $L(8) = 1 - 1 = 0$, $L(233) = 3 - 1 = 2$. Une autre façon (utile pour la suite) de définir $L(n)$ est de dire que c'est l'unique entier tel que

$$10^{L(n)} \leq n < 10^{L(n)+1}.$$

On a bien $10^2 \leq 233 < 10^3$.

1. Soit k un entier ≥ 0, combien vaut $L(10^k)$?

2. Montrer que si a et b sont deux puissances de dix, alors $L(ab) = L(a) + L(b)$.

3. Si a et b ne sont pas des puissances de dix, alors la formule $L(ab) = L(a) + L(b)$ n'est plus forcément vraie : par exemple, $L(90 \times 9) = L(810) = 2 \neq L(90) + L(9) = 1 + 0$. Montrer que, tout de même, pour a et b quelconques,

$$L(a) + L(b) \leq L(ab) \leq L(a) + L(b) + 1.$$

Commentaires sur l'Exercice 2

Nous avons ainsi rencontré une autre fonction qui "transforme les produits en sommes", c'est le **logarithme en base dix**.

Exercice 3 (Propriétés des fonctions logarithmes).
Dans cet exercice, nous allons étudier les différentes propriétés que doivent vérifier une fonction f qui transforme les produits en sommes ; c'est-à-dire que pour tous x et y dans son ensemble de définition, cette fonction vérifie

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que si f est définie en 0 alors f est identiquement nulle.

2. On suppose à partir de maintenant que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.

a. Calculer $f(1)$.

b. Soit $n \geq 0$, exprimer $f(x^n)$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$.

c. Exprimer $f(\sqrt{x})$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$.

d. Pour un nombre réel positif a et un entier nature $q \geq 1$, on note $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$, l'unique solution réelle de l'équation

$$x^q = a.$$

Exprimer $f(x^{1/q})$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$.

e. Pour deux entier naturel non nul p, q et un nombre réel positif a, on note

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}.$$

Exprimer $f(x^{p/q})$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$.

f. Exprimer $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$. En déduire une expression de $f(x^r)$ en fonction de $f(x)$, pour tout $x > 0$ et nombre rationnel r.

Commentaires sur l'Exercice 3

Conclusion. Nous avons vu les deux principaux aspects des fonctions logarithmes, ces fonctions qui transforment les produits en sommes :

(i) Ce sont en quelque sorte les réciproques des fonctions puissance (Exercice 1 et 2) ;

(ii) En les dérivant, on doit retomber sur quelque chose du genre de $1/x$ (Exercice 3).

Nous allons maintenant voir comment l'introduction de cette fonction *logarithme népérien* a permis de nettement simplifier les opérations. Imaginons que l'on veuille effectuer 9325594×88235, on commence par écrire

$$\ln(9325594 \times 88235) = \ln(9325594) + \ln(88235).$$

Ensuite, on regarde dans une table de logarithmes (telle que celles publiées par Napier au XVI^e) et on trouve

x	$\ln(x)$
88235	11.3878
···	
9325594	16.0483

Alors on effectue l'addition (nettement plus aisée que la multiplication) et on écrit

$$\ln(9325594 \times 88235) = 11.3878 + 16.0483 = 27.4361.$$

Maintenant, on sait que le logarithme de ce qu'on cherche vaut 27.4361. On regarde alors plus loin dans la table et on tombe sur

x	$\ln(x)$
822843786590	27.4361

Et alors on a trouvé que $9325594 \times 88235 = 822843786590$.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

5. L'entier a peut s'écrire sous la forme 2^i, l'entier b peut s'écrire 2^j, où i et j sont des entiers positifs ou nuls. Donc $H(ab) = H(2^i 2^j)$, et $H(a) + H(b) = H(2^i) + H(2^j)$. Il reste à calculer ces deux quantités.

Indications sur l'Exercice 2

1. 10^k s'écrit avec un 1 et combien de zéros ?

2. a et b peuvent s'écrire respectivement sous la forme 10^i et 10^j, où i, j sont des entiers positifs. Il reste à calculer $L(10^i 10^j)$ et $L(10^i) + L(10^j)$.

3. Il faut partir des deux inégalités $10^{L(a)} \leq a < 10^{L(a)+1}$ et $10^{L(b)} \leq b < 10^{L(b)+1}$, et faire subir certaines opérations licites à ces inégalités.

Indications sur l'Exercice 3

1. Calculer d'abord $f(0)$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$H(n)$	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4

2. Par définition de l'arbre binaire, on a, pour tout $k \geq 0$, $\ell(k+1) = 2\ell(k)$, donc $(\ell(k))_{k\geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\ell(0) = 1$. On en déduit que, pour tout $k \geq 0$, $\ell(k) = 2^k$.

3. Montrons par récurrence, que pour tout entier $k \geq 0$, la k-ème ligne commence par le nombre 2^k. L'initialisation se fait toujours sur le dessin. Supposons que la k-ème ligne commence par 2^k, alors la $k+1$-ème ligne commence par

$$2^k + \ell(k) = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Et donc on a montré que la k-ème ligne commençait par le nombre 2^k, pour tout $k \geq 0$.

4. Comme 1092 est compris entre $2^{10} = 1024$ et $2^{11} = 2048$, on a $H(1092) = 10$.

5. Posons $a = 2^i$ et $b = 2^j$. Alors d'une part

$$H(ab) = H(2^i 2^j) = H(2^{i+j}) = i + j,$$

d'après la question précédente. D'autre part,

$$H(a) + H(b) = H(2^i) + H(2^j) = i + j.$$

□

Correction de l'Exercice 2

1. 10^k s'écrit avec un 1 et k zéros, donc $L(10^k) = 1 + k - 1 = k$.

2. Posons $a = 10^i$ et $b = 10^j$. Alors d'une part $H(ab) = H(10^i 10^j) = H(10^{i+j}) = i + j$, d'après la question précédente. D'autre part, $H(a) + H(b) = H(10^i) + H(10^j) = i + j$.

3. Écrivons

$$\begin{array}{ccccc} 10^{L(a)} & \leq & a & < & 10^{L(a)+1}, \\ 10^{L(b)} & \leq & b & < & 10^{L(b)+1}. \end{array}$$

Ces deux encadrements concernent des nombres positifs, on peut donc les multiplier terme à terme :

$$10^{L(a)+L(b)} \leq ab < 10^{L(a)+L(b)+2}.$$

Maintenant, de deux choses l'une,

$$10^{L(a)+L(b)} \leq ab < 10^{L(a)+L(b)+1} \qquad \textbf{ou alors} \qquad 10^{L(a)+L(b)+1} \leq ab < 10^{L(a)+L(b)+2}.$$

En revenant à la définition, ces deux cas correspondent respectivement à $L(ab) = L(a) + L(b)$ et $L(ab) = L(a) + L(b) + 1$. □

Correction de l'Exercice 3

1. On a

$$f(0) = f(0 \times 0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

donc $f(0) = 0$. Maintenant quel que soit x dans l'ensemble de définition de f, on a

$$f(x \times 0) = f(x) + f(0),$$

et donc $f(x) = 0$.

2.

a. On a

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1),$$

et donc $f(1) = 0$.

b. On a pour tout $n \geq 0$,

$$f(x^n) = f(x \times x^{n-1}) = f(x) + f(x^{n-1}) = f(x) + f(x) + f(x^{n-2}) = \cdots = nf(x).$$

Montrons le par récurrence. Si $n = 0$ alors $f(x^0) = f(1) = 0$. Si $f(x^n) = nf(x)$ pour un certain $n \geq 0$ alors on a

$$f(x^{n+1}) = f(x) + f(x^n) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x).$$

c.

$$f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = 2f(\sqrt{x})$$

et donc $f(\sqrt{x}) = f(x)/2$.

d. En utilisant l'une des questions précédentes, on montre que $f(x^{1/q}) = f(x)/q$. En effet, on a

$$f(x) = f((x^{1/q})^q) = qf(x^{1/q}).$$

e. Via les questions précédentes, on a $f(x^{p/q}) = f(x) \times p/q$.

f. On a $1 = x \times 1/x$ et donc $f(1/x) = -f(x)$. Si $r \geq 0$ alors on avait déjà montré que $f(x^r) = rf(x)$. Maintenant si $r < 0$ alors $-r > 0$ est

$$f(x^r) = f(1/x^{-r}) = -(-r)f(x) = rf(x).$$

Finalement, dans tout les cas $f(x^r) = rf(x)$. □

