Une introduction aux fractales

M. Gentes

Niveau : Première
Difficulté : ★★
Durée : 1h30
Rubrique(s) : Analyse (suites, limites), Géométrie, Informatique (algorithmique) .

Voici un atelier dans lequel on étudie un objet aux propriétés intéressantes. Il est nécessaire pour cela d'avoir quelques notions sur les suites, étudiées en classe de Première, disponibles dans les fiches de fondamentaux « Étude basique de suites » et « Calculs de limites ».

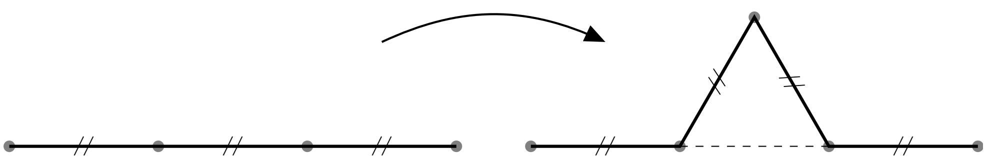
La petite histoire...
Le flocon de Koch est l'une des premières courbes fractales à avoir été décrite (bien avant l'invention du terme « fractal(e) »).
Elle a été inventée en 1904 par le mathématicien suédois Helge von Koch.
De nombreuses fractales ont été ainsi construites par les mathématiciens, c'est notammant Benoît Mandelbrot qui le premier a permis de théoriser ces objets qui représentent de manière assez surprenantes des objets que l'on rencontre dans la nature.

Monsieur et Madame
Estlepérimètreduncerclederayonhère
ont deux fils...

Exercice 1 (Le flocon de Koch).

1. Procédé itératif de construction.

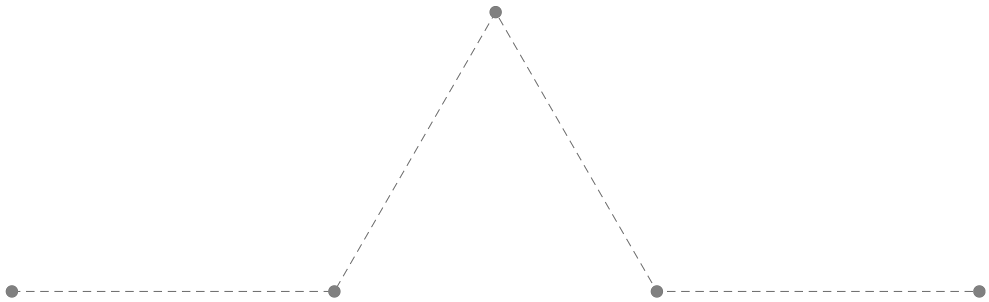
a. Décrire précisément la transformation suivante :



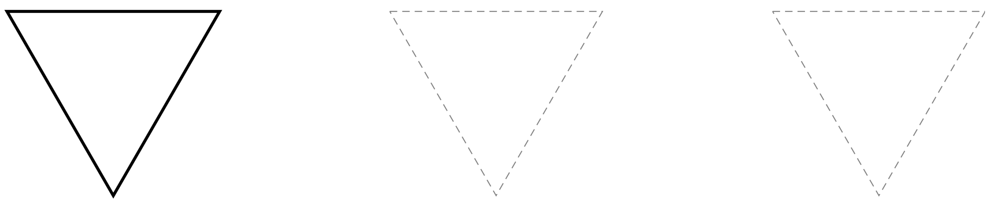
étape 0 étape 1

Réponse : Pierre et Pierre

b. On applique cette transformation à tout segment obtenu à l'étape 1. Dessiner le résultat obtenu à l'étape 2.



c. On applique maintenant cette transformation aux trois côtés d'un triangle équilatéral, dont les côtés sont de longueur 1, de façon à ce que la figure obtenue ait une aire supérieure à celle du triangle équilatéral initial. On note F_0 le triangle équilatéral initial, et F_n la figure obtenue après avoir appliqué n fois cette transformation à tous les segments. Esquisser F_1 et F_2.



F_0 F_1 F_2

On appelle *flocon de Koch* la figure obtenue après une infinité d'étapes.

2. Nombre de côtés de F_n.
On note c_n le nombre de côtés de la figure F_n.

a. Que valent c_0, c_1, c_2 ?

b. Quelle relation y a-t-il entre c_{n+1} et c_n ?

c. En déduire la nature de la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ et une expression de c_n en fonction de n.

3. Calcul du périmètre de F_n.
Les côtés de la figure F_n ont même longueur. On note ℓ_n cette longueur et p_n le périmètre de F_n.

a. Montrer que $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire une expression de ℓ_n en fonction de n.

c. Exprimer p_n à l'aide de c_n et ℓ_n. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

4. Calcul de l'aire de F_n.

On note a_n l'aire de la figure F_n.

a. Donner l'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur ℓ. Calculer a_0.

b. Que représente l'aire $a_1 - a_0$? En déduire la valeur de a_1.

c. Exprimer $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n. Que dire de la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 0}$?

d. Calculer $(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0)$ de deux manières différentes.

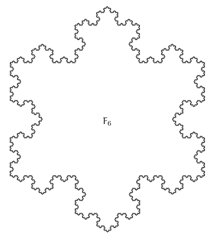
e. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

5. Et quand n tend vers l'infini ?

a. Que dire du périmètre du flocon de Koch ?

b. Calculer l'aire du flocon de Koch.

c. Conclure.



Exercice 2 (Avec l'ordinateur).

On voit qu'il peut être fastidieux de tracer le flocon de Koch à la main. On peut donc demander à un ordinateur de le faire et donc de concevoir un algorithme pour le tracé. C'est tout à fait possible en créant une fonction récursive. Cela que signifie que la fonction s'appelle dans son code et oui certains langages informatiques permettent de le faire.

Prenez donc un ordinateur et tapez le code suivant en langage Python (c'est un langage gratuit qui est très utilisé dans le supérieur). Et ensuite admirez !

```
from turtle import *

clear()
reset()

def koch(l,n):
    # Fractacle de Koch
    if n<=0:
        forward(l)
    else:
        koch(l/3,n-1)
```



```
        left(60)
        koch(l/3,n-1)
        right(120)
        koch(l/3,n-1)
        left(60)
        koch(l/3,n-1)

def flocon(l,n):
    # Flocon de Koch
    koch(l,n)
    right(120)
    koch(l,n)
    right(120)
    koch(l,n)
```

1. Que répresentent les variables `l` et `n` dans le programme ?

2. Exécutez la commande `flocon(l,n)` dans votre console d'éxécution pour différentes valeurs de `l` et `n`. Attention à ne pas être trop gourmand car demandez vous le nombre d'opérations efféctuées par l'ordinateur pour représenter le flocon.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

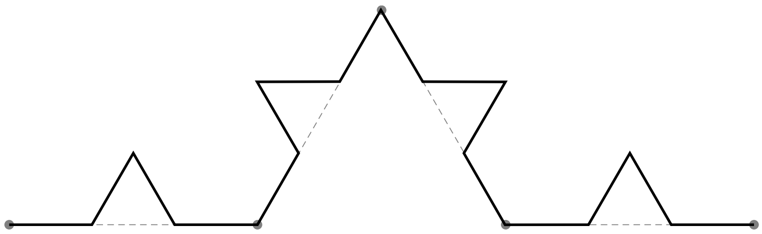
4.d. On rappelle que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison s différente de 1 et de premier terme u_0 vaut $u_0\,(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1}) = u_0\,(1-s^n)/(1-s)$.

Corrections

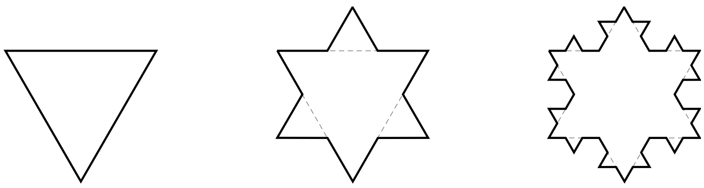
Correction de l'Exercice 1

1.a. Le segment initial est décomposé en trois parties de longueurs égales. La transformation remplace le segment central par les deux autres côtés du triangle équilatéral qui s'appuie sur ce segment.

1.b.



1.c.



F_0 F_1 F_2

2.a. On compte $c_0 = 3$, $c_1 = 12$, $c_2 = 48$.

2.b. On remarque qu'à partir de chaque segment, la transformation en génère quatre.
Si à l'étape n on a c_n côtés, à l'étape $n+1$ on en aura $4c_n$, d'où $c_{n+1} = 4c_n$.

2.c. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $c_0 = 3$.
L'expression de c_n en fonction de n est donc $c_n = c_0 \times q^n = 3 \times 4^n$.

3.a. Par hypothèse, ℓ_0 est le côté du triangle initial, soit $\ell_0 = 1$.
Par construction, tout segment obtenu à l'étape $n+1$ a pour longueur le tiers de la longueur d'un segment à l'étape n, c'est-à-dire $\ell_{n+1} = \frac{1}{3}\ell_n$.
Ainsi, $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $\ell_0 = 1$.

3.b. On en déduit que pour tout entier positif n, $\ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

3.c. Les c_n côtés de la figure F_n ayant même longueur ℓ_n, le périmètre p_n vaut $p_n = c_n \times \ell_n$.
En substituant c_n et ℓ_n par les expressions obtenues en **2.c)** et **3.b)**, on trouve

$$p_n = (3 \times 4^n) \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

4.a. La hauteur d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur ℓ étant $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ (utilisez le théorème de Pythagore !), l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle équilatéral est donc

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell \times \frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2.$$

Pour $\ell = \ell_0 = 1$, on en déduit $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4.b. a_1 étant l'aire de la figure F_1, $a_1 - a_0$ représente l'aire des triangles équilatéraux ajoutés à la figure F_0 pour obtenir F_1. On en compte 3 dont les côtés sont de longueur $\frac{1}{3}$.
L'aire de chacun étant $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$, on a

$$a_1 - a_0 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Finalement, a_1 vaut

$$a_1 = a_0 + (a_1 - a_0) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.c. $a_{n+1} - a_n$ représente l'aire des c_n triangles équilatéraux de côtés de longueur ℓ_{n+1} qu'il faut ajouter à F_n pour obtenir la figure F_{n+1}. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= c_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_{n+1})^2 = (3 \times 4^n) \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{4^n}{3^{2n+2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{4^n}{9 \times 9^n} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

La suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
4.d. Calculons cette expression de deux manières différentes :
• C'est la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 0}$ de raison $s = \frac{4}{9}$ (différente de 1) et de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{12}$, d'où :

$$(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + s + s^2 + \cdots + s^{n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - s^n}{1 - s}.$$

En remplaçant, il vient :

$$(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0) = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

• En déplaçant les parenthèses, on remarque que des simplifications s'opèrent :

$$\begin{aligned} (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0) &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) \\ &= a_n \underbrace{-a_{n-1} + a_{n-1}}_{=0} + \cdots + \underbrace{-a_1 + a_1}_{=0} - a_0 \\ &= a_n - a_0. \end{aligned}$$

On parle de *somme télescopique.*
4.e. En égalant les deux expressions trouvées à la question précédente, on trouve

$$a_n - a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

Finalement, en utilisant la valeur de a_0 calculée à la question **4.a)**, on a pour tout entier positif n,

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

5.a. On a $\frac{4}{3} > 1$, d'où

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Le flocon de Koch a un périmètre infini !

5.b. On a $\frac{4}{9} < 1$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

L'aire du flocon de Koch est de $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (soit $\frac{8}{5}$ de l'aire du triangle initial).

5.c. Le flocon de Koch est d'aire finie mais de périmètre infini !

Cette propriété est caractéristique d'une famille d'objets mathématiques appelés *fractales*.

$\square$

