Équations du troisième degré et du quatrième degré

N. Jacquet

Niveau : Première
Difficulté : ★★
Durée : 3h
Rubrique(s) : Algèbre (polynômes, racines), Analyse (étude de fonctions, dérivation, trigonométrie) .

Au collège vous avez appris à résoudre des équations du 1^{er} degré à une inconnue, en classe de Première, les équations du second degré à une inconnue, mais bien sûr vous avez demandé à votre professeur(e) ce qu'il en était pour les degrés supérieurs ? Et bien dans cet atelier, les réponses vous attendent...

La petite histoire...
Dans un premier temps, nous donnons ici des méthodes pour la résolution des équations de degré 3 du type $x^3+px+q=0$. Nous en déduisons ensuite la façon de résoudre les équations de degré trois puis quatre. Pour l'aspect historique de ces équations nous vous invitons à lire la petite histoire de l'atelier « équations de degré deux, trois et quatre » dans le chapitre suivant.
Quelles différences entre ces deux ateliers ? Dans l'atelier qui vient, nous cherchons les solutions réelles d'une équation. Mais en terminale, vous étudierez un autre ensemble plus gros que $\mathbb{R}$ que l'on appelle $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes. Par ailleurs, les preuves seront bien différentes.

Monsieur et Madame,
Riendecalculerdeltapourixedeuxmoinsdeuzixe ont une fille...

Un petit rappel : pour y dans $\mathbb{R}$ fixé, l'équation $x^3 = y$ d'inconnue réelle x admet une unique solution que l'on note $x = y^{\frac{1}{3}}$ ou $x = \sqrt[3]{y}$. x est alors appelé la racine cubique de y.

Réponse : ⅄ɐɔǝɹ

Exercice 1 (Équations de degré 3).
Soit l'équation (E) : $x^3+px+q=0$ d'inconnue x, où p et q sont deux nombres réels.

1. Soient p,q deux nombres réels (avec $p \neq 0$), et on pose $\widetilde{\Delta} = 4p^3 + 27q^2$. On cherche les solutions réelles de (E) ; pour cela on introduit la fonction f définie pour x dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

a. Pour x réel, calculer $f'(x)$ et en déduire que si $p > 0$ alors (E) a au plus une solution réelle.

b. On suppose $p < 0$. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et montrer que :

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{\widetilde{\Delta}}{27}.$$

c. Établir que

- si $\widetilde{\Delta} > 0$ alors (E) a au plus une solution réelle ;
- si $\widetilde{\Delta} < 0$ alors (E) a au plus trois solutions réelles ;
- si $\widetilde{\Delta} = 0$ alors (E) a au plus deux solutions réelles.

d. Étudier le cas particulier $p = 0$.

Dans toute la suite on considérera p non nul. Nous montrerons que

- si $\widetilde{\Delta} > 0$ alors (E) a une et une seule solution réelle ;
- si $\widetilde{\Delta} < 0$ alors (E) a trois solutions réelles ;
- si $\widetilde{\Delta} = 0$ alors (E) a deux solutions réelles, dont une peut être considérée comme « double ».

En particulier, nous donnerons des expressions explicites pour ces solutions.

2. À présent, nous allons chercher les solutions de (E) dans le cas où l'on a $\widetilde{\Delta} \geq 0$.

a. Montrer que pour deux réels S, P, x_1 et x_2 sont les deux solutions (éventuellement confondues) de $x^2 - Sx + P = 0$ si et seulement si $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$.

b. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que l'on ait :

$$a + b = -q \text{ et } ab = -\frac{p^3}{27}.$$

Donner une expression possible pour a et b en fonction de p et q.

c. En déduire l'existence de deux réels u, v tels que :

$$u^3 + v^3 = -q \text{ et } uv = -\frac{p}{3}.$$

Donner une expression possible pour u et v en fonction de p et q.

d. Montrer que l'on a alors :

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

e. En déduire que l'équation (E) admet une solution dans le cas où l'on a $\widetilde{\Delta} > 0$ et exprimez cette solution en fonction de p et q.

f. On suppose dans cette question que l'on a $\widetilde{\Delta} = 0$.

(i) A l'aide des questions précédentes, donner une solution particulière de (E) et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{3q}{p}$.

(ii) Trouver deux réels α, β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + px + q = \left(x - 3\frac{q}{p}\right)(x^2 + \alpha x + \beta).$$

(iii) En déduire que l'équation (E) admet exactement deux solutions, exprimer toutes les solutions de (E) et préciser la solution que l'on peut qualifier de double.

g. Application : donner le nombre de solutions réelles et les solutions réelles de :

$$x^3 - 6x - 6 = 0.$$

3. Nous allons traiter le cas $\widetilde{\Delta} < 0$. On cherche une solution sous la forme

$$x_0 = \sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos(\theta)$$

où θ est un réel qu'il faut déterminer.

a. Montrer que nécessairement, on a : $p < 0$.

b. Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si on a

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = -q\sqrt{-\frac{27}{4p^3}}.$$

c. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}$, on a $4\cos^3(u) - 3\cos(u) = \cos(3u)$.

d. Justifier l'existence de θ dans $]0; \frac{\pi}{3}[$ pour que x_0 soit solution de (E).

e. Montrer que toutes les solutions de (E) sont

$$\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos(\theta),\ \sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\ \text{ et }\ \sqrt{-\frac{4p}{3}}\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

(on montrera bien que ces trois solutions sont deux à deux distinctes).

f. Application : donner le nombre de solutions réelles et les solutions réelles de l'équation :

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

4. Nous allons maintenant donner quelques clés pour résoudre une équation générale du troisième degré du type : (E') : $\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avec a, b, c, d quatre réels tels que $a \neq 0$.

a. Montrer que (E') est équivalente à l'équation :

$$\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \quad (E'')$$

b. Expliquer ainsi comment on peut déterminer le nombre de solutions de (E') et les donner.

c. Application : résoudre : $2x^3 + 6x^2 - 6x - 22 = 0$.

Exercice 2 (Équations de degré 4).

Nous allons maintenant résoudre les équations de degré 4, c'est-à-dire de la forme

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres réels et a non nul.

1. On pose $X = x + \frac{b}{4a}$. Montrer qu'avec ce changement d'inconnue, on se ramène à la résolution d'une équation de la forme $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$, avec p, q et r dans $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant donner la méthode de résolution d'une équation de la forme $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$.

2.a. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$X^4 + pX^2 + qX + r = (X^2 + y)^2 - (2y - p)X^2 + qX - y^2 + r.$$

b. Nous voulons trouver $y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout X dans $\mathbb{R}$, l'expression $(2y - p)X^2 - qX + y^2 - r$ puisse s'écrire sous la forme d'un carré $(AX + B)^2$.

Autrement dit il faut trouver $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe deux nombres réels A et B, tels que :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ (2y-p)X^2 - qX + y^2 - r = (AX+B)^2.$$

Montrer que ceci est équivalent à avoir

$$8y^3 - 4py - 8ry + 4rp - q^2 = 0.$$

c. Donner une méthode pour trouver une solution de l'équation :

$$8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0.$$

On appelle y_0 une solution de cette équation que l'on fixe jusqu'à la fin de l'exercice et on note A et B les deux réels vérifiant ;

$$\forall X \in \mathbb{C},\ (2y_0-p)X^2 - qX + y_0^2 - r = (AX+B)^2.$$

d. Montrer ainsi que l'équation $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$ est équivalente à $X^2 - AX + y_0 - B = 0$ ou bien à $X^2 + AX + y_0 + B = 0$.

e. Comment obtenir les solutions de l'équation initiale $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$?

f. Application : Résoudre $2x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 28x + 6 = 0$.

Commentaires sur l'Exercice 2

Vous verrez ultérieurement que l'on trouvera plus de solutions pour ces équations dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et vous aurez toutes les solutions de n'importe quelle équation de degré trois ou quatre. Cela sous-entendrait-il que l'on a oublié des solutions dans l'atelier qui nous occupe ici ? Regardons de plus près le lien entre le degré et le nombre de solutions. Vous avez vu que les trinômes du second degré possèdaient soient deux racines, soit une racine que l'on appelle double (on obtient une factorisation de notre trinôme sous la forme $a(x-\alpha)^2$ d'où le fait que l'on « compte » deux fois α), soit pas de racines du tout. Pour le degré trois, nous verrons aussi que l'on peut avoir soit trois racines, soit deux racines dont une double (dans ce cas notre polynôme de degré trois possède une factorisation de la forme $a(x-\alpha)^2(x-\beta)$, et dans ce cas α est considérée comme une racine double), soit une racine. Nous constatons qu'il y a donc au plus trois racine. De même pour le quatrième degré, il y aura au plus quatre racines. Lorsque nous ne faisons pas le plein des racines, c'est-à-dire que le nombre de racines trouvées est strictement inférieur au degré du polynôme, nous allons chercher celles-ci dans un ensemble plus gros $\mathbb{C}$ pour avoir le bon nombre de racines. Ainsi l'atelier « équations de degré deux, trois et quatre » sur le même thème traite du problème des équations de degré trois ou quatre dans sa globalité, mais il faudra attendre encore un an ! Bien plus tard, après le lycée, vous verrez qu'un polynôme de degré n possède exatcement n racines dans $\mathbb{C}$ avec des répétitions possibles de racines (racines multiples). On dit que $\mathbb{C}$ est algèbriquement clos.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

1.c. Utiliser le tableau de variation de f et regarder les signes de $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$. Ne pas oublier de regarder le signe de p.

1.d. Étudier les variations de $x \mapsto x^3 + q$.

2.c. Utiliser 2.b) pour l'existence de u et v tels que l'on ait $u^3 = a$ et $v^3 = b$. Toujours en utilisant la même question en déduire que $(uv)^3 = (-p/3)^3$ implique que l'on a $uv = -p/3$. Pour trouver u et v, chercher d'abord a et b en cherchant les solutions de $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$.

2.e. $u + v$ est une solution de (E).

2.f. i) Donner une expression simplifiée de la solution $u + v$ en tenant compte de $\widetilde{\Delta} = 0$. Pour avoir $3q/p$, injecter la solution trouvée dans l'équation (E).

3.b. Se rappeler que $|x| = \sqrt{x^2}$.

3.c. Écrire $\cos(3u) = \cos(2u + u)$ et se rappeler les formules avec $\cos(2u)$ et $\sin(2u)$. On pourra également se référer à la fiche **trigonométrie** disponible à l'adresse web .

3.d. On a $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ et ceci n'est possible que si $-q\sqrt{-27/4p^3}$ est dans $[-1, 1]$. Montrer que l'on a $|q\sqrt{-27/4p^3}| < 1$ à l'aide de $\widetilde{\Delta} < 0$.

3.e. Remplacer dans les questions précédentes θ par $\theta + 2\pi/3$ et $\theta + 4\pi/3$.
Vérifier que $\cos(\theta)$, $\cos(\theta + 2\pi/3)$ et $\cos(\theta + 4\pi/3)$ sont deux à deux distincts. Pour ceci se rappeler à quelle condition $\cos(a) = \cos(b)$ et raisonner avec les mesures principales.

4.a. Une remarque sur ce calcul : le but est d'enlever le terme en x^2 et donc le but est d'intégrer celui-ci dans une produit remarquable d'où le premier terme $(x + b/3a)^3$.

4.b. Former une équation de X où l'on a $X = x + b/3a$ et reconnaître un type d'équation déjà étudié.

Indications sur l'Exercice 2

2.b. Considérer $(2y - p)X^2 - qX + y^2 - r$ comme un trinôme du second degré en X, avec y une constante et calculer son discriminant.

2.c. Utiliser 2)a) et 2)c).

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.a. Immédiatement, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + p$. Si $p > 0$ alors $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et l'équation (E) (*i.e.* $f(x) = 0$) admet au plus une solution réelle.

b. Pour $p < 0$ on note (dans toute la suite) $\alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}}$.
On peut alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x^2 - \alpha^2) = 3(x-\alpha)(x+\alpha)$, ce qui donne le signe de $f'(x)$ et permet de trouver :

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Par ailleurs si $\varepsilon = \pm 1$ et en remarquant que l'on a $\alpha^3 = \alpha^2\alpha = -\frac{p}{3}\alpha$, on a :

$$f(\varepsilon\alpha) = -\varepsilon\frac{p}{3}\alpha + \varepsilon p\alpha + q = q + \varepsilon\frac{2p\alpha}{3}.$$

D'où : $f(\alpha)f(-\alpha) = \left(q + \frac{2p\alpha}{3}\right)\left(q - \frac{2p\alpha}{3}\right) = q^2 - \left(\frac{2p\alpha}{3}\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{\widetilde{\Delta}}{27}$.

c.

- Si $\widetilde{\Delta} < 0$, nécessairement $p < 0$, et par la question précédente $f(\alpha)f(-\alpha) < 0$. Ainsi $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$ sont de signe contraire. Le tableau de variations de f dressé à la question précédente permet de voir que $f(-\alpha) > 0 > f(\alpha)$ puis que f s'annule au plus trois fois : une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, -\alpha[$, $]-\alpha, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
- Si $\widetilde{\Delta} > 0$ et si $p > 0$ alors d'après la question 1.a), (E) a au plus une solution réelle.
- Si $\widetilde{\Delta} > 0$ et si $p < 0$ alors par la question précédente on voit que $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$ ont le même signe ; puis grâce au tableau de variations on constate que f s'annule au plus une fois : ou bien sur $]-\infty, -\alpha[$ ou bien sur $]\alpha, +\infty[$ suivant le signe commun de $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$.
- Si $\widetilde{\Delta} = 0$ alors nécessairement $p < 0$, de sorte que l'on peut appliquer les résultats de la question précédente : $f(\alpha) = 0$ ou $f(-\alpha) = 0$. Là encore le tableau de variations permet de conclure que f a deux racines réelles dont l'une est $\pm\alpha$ que l'on considère comme étant une « racine double ».
- En résumé : (E) a au plus $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$ solutions suivant que $\begin{cases} \widetilde{\Delta} > 0 \\ \widetilde{\Delta} = 0 \\ \widetilde{\Delta} < 0. \end{cases}$

d. D'après le rappel, cette équation admet une unique solution noté $(-q)^{1/3}$.

2.a. Montrons ceci par double implication.
Commençons par montrer : x_1 et x_2 sont les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$ implique $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases}$. Supposons que x_1 et x_2 sont les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$. On appelle

Δ le discriminant de cette équation. Les solutions de cette équation sont $x_1 = \frac{S+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{S-\sqrt{\Delta}}{2}$. On a donc

$$x_1 + x_2 = S \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{S^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4} = \frac{S^2-\Delta}{4} = \frac{S^2-(S^2-4P)}{4} = P.$$

Montrons l'autre implication :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases} \quad \text{implique que } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les solutions de } x^2 - Sx + P = 0.$$

On suppose que l'on a $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1x_2 = P \end{cases}$. On a donc les équivalences :
$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$.
Nous avons donc montré l'équivalence voulue.

b. Les deux réels a et b vérifiant $a + b = -q$ et $ab = \frac{-p^3}{27}$ sont les racines (si elles existent) du trinôme du second degré : $x^2 + qx - \frac{p^3}{27}$, grâce à la question précédente. Le discriminant de ce polynôme est $q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{\widetilde{\Delta}}{27}$ qui est positif. Ainsi le trinôme $x^2 + qx - \frac{p^3}{27}$ admet bien deux racines a et b (éventuellement confondues) qui vérifiant donc les propriétés voulues.

c. En utilisant la question 2.b), les équations $x^3 - a = 0$ et $x^3 - b = 0$ admettent une unique solution que l'on note respectivement u et v. On a donc $u^3 = a$ et $v^3 = b^3$. Ainsi on a $(uv)^3 = ab = \left(\frac{-p}{3}\right)^3$. Comme l'équation $x^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ admet une unique solution grâce à la question 2.b) et que uv et $\frac{-p}{3}$ sont tous les deux solutions de cette équation, on a donc : $uv = \frac{-p}{3}$.
Cherchons une expression possible pour a et b. Grâce à la question précédente, on a

$$a = \frac{-q - \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}; \; b = \frac{-q + \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On a donc

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

d. On a : $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = u^3+v^3+3u^2v+3uv^2-3u^2v-3uv^2-u^3-v^3 = 0$.

e. Grâce à la question précédente, on a donc : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$. Ainsi $u + v$ est une solution particulière de (E) qui s'écrit :

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Dans notre cas (E) admet une seule solution, c'est donc l'unique solution de (E).

f. Pour i), en utilisant ce qui précède, $u + v$ est encore une solution particulière de (E). Dans notre cas, comme on a $\widetilde{\Delta} = 0$, on a donc $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Ainsi $2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$ est une solution particulière de (E).
Donnons une autre expression de celle-ci. Cette solution vérifie donc :
$\left(2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)^3 + 2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + q = 0$, soit $-\frac{8q}{2} + 2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + q = 0$, soit $2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - 3q = 0$ soit $2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \frac{3q}{p}$. Ainsi cette solution s'écrit aussi $\frac{3q}{p}$.

Passons à ii). Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\left(x-\frac{3q}{p}\right)(x^2+\alpha x+\beta)=x^3+\alpha x^2+\beta x-\frac{3q}{p}x^2-\frac{3q}{p}\alpha x-\frac{3q}{p}\beta.$$

En identifiant, on a

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha-\frac{3q}{p}=0\\ \beta-\frac{3q}{p}\alpha=p\\ -\frac{3q}{p}\beta=q\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=\frac{3q}{p}\\ \beta-\frac{3q}{p}\alpha=p\\ \beta=-\frac{p}{3}\end{array}\right.$$

En ayant les égalités $\alpha=\frac{3q}{p}$ et $\beta=-\frac{p}{3}$, on a $\beta-\frac{3q}{p}\alpha=-\frac{p}{3}-\frac{9q^2}{p^2}$. Mais nous avons $\widetilde{\Delta}=0$ soit $q^2=-\frac{4p^3}{27}$ et donc on a $\beta-\frac{3q}{p}\alpha=-\frac{p}{3}+\frac{4p}{3}=p$.
Enfin pour iii), cherchons donc les racines de $x^2+\frac{3q}{p}x-\frac{p}{3}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré est

$$\frac{9q^2}{p^2}+\frac{4p}{3}=\frac{27q^2+4p^3}{3p^2}=\frac{\widetilde{\Delta}}{3p^2}=0.$$

Ainsi l'équation admet une racine double qui est $-\frac{3q}{2p}$. Comme on est dans le cas $\widetilde{\Delta}=0$, on a exactement deux solutions distinctes qui sont $\frac{3q}{p}$ et $-\frac{3q}{2p}$. Ces solutions sont bien distinctes car q est non nul. En effet si q est nul alors on a $0=\widetilde{\Delta}=4p^3$ et donc p est nul, ce qui est contradictoire. La solution $\frac{3q}{p}$ peut être qualifiée de double car c'est une solution de $x-\frac{3q}{p}$ et $x^2+\alpha x+\beta$.

g. Calculons le discriminant de cette équation. On a $\widetilde{\Delta}=4\times(-6)^3+27\times(-6)^2=108>0$
L'équation admet donc une unique solution réelle.
En utilisant la formule précédente, cette solution réelle est donnée par

$$\sqrt[3]{\frac{6}{2}-\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{6}{2}+\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$
$$=\sqrt[3]{3-\sqrt{9-8}}+\sqrt[3]{3+\sqrt{9-8}}=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}.$$

3.a. On a $27q^2+4p^3<0$ soit $p^3<-\frac{27q^2}{4}\leq 0$. On a donc : $p<0$.

b. Tout d'abord,

$$x_0^3+px_0+q=\sqrt{\left(\frac{-4p}{3}\right)^3}\cos^3(\theta)+p\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta)+q.$$

Par ailleurs $\sqrt{p^2}=|p|=-p$, car p est négatif. On a donc

$$x_0^3+px_0+q=\sqrt{4^2\frac{-4p^3}{27}}\cos^3(\theta)-\sqrt{9p^2\frac{-4p}{27}}\cos(\theta)+q=\sqrt{\frac{4p^3}{-27}}\left(4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right)+q.$$

Ainsi x_0 est une solution de (E) si et seulement si on a :

$$\sqrt{\frac{4p^3}{-27}}\left(4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right)+q=0$$

soit :

$$\sqrt{\frac{4p^3}{-27}}\left(4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right)=-q$$

soit :

$$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}.$$

c. Soit $u \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(3u) &= \cos(2u+u) = \cos(2u)\cos(u) - \sin(2u)\sin(u)\\ &= (2\cos^2(u)-1)\cos(u) - 2\sin^2(u)\cos(u)\\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2(1-\cos^2(u))\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u).\end{aligned}$$

d. Grâce aux deux questions précédentes, il faut donc chercher θ vérifiant :

$$\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}.$$

Comme la fonction cos atteint toutes les valeurs de l'intervalle $[-1,1]$, il suffit de montrer que $-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ est dans $[-1,1]$ soit $\left|-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| \leq 1$. Or on a

$$\left|-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \left||q|\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \left|\sqrt{q^2}\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}}.$$

Donc $\widetilde{\Delta} < 0$ soit $-4p^3 > 27q^2$ soit $1 > \frac{27q^2}{-4p^3}$, car p est strictement négatif et donc $-4p^3$ est strictement positif. Ainsi,

$$\sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}} < 1$$

et donc $-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ est dans $]-1,1[$. Comme l'image de $]0,\pi[$ par la fonction cos est $]-1,1[$, on a donc l'existence de φ dans $]0,\pi[$ tel que $\cos(\varphi) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$, et donc en posant $\theta = \frac{\varphi}{3}$, on a $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$, d'où l'existence de θ tel que x_0 soit solution de (E) et avec θ dans $]0,\frac{\pi}{3}[$.

e. En reprenant les notations de la question précédente, on a :

$$\cos\left(3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3\theta + 2\pi) = \cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}.$$

Donc $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ est aussi une solution. On montre de même que $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ est une solution de (E). Ces trois solutions sont deux à deux distinctes. En effet comme θ est dans $]0,\frac{\pi}{3}[$, alors $\theta + \frac{2\pi}{3}$ est dans $]0,\pi[$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ est dans $]0,\frac{5\pi}{3}[$.
Comme θ et $\theta + \frac{2\pi}{3}$ sont dans $]0,\pi[$ et que ces deux angles sont distincts, alors ils n'ont pas le même cosinus.
Montrons que $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ est différent de $\cos(\theta)$ et de $\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$. Raisonnons par l'absurde. On suppose que l'on a $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\theta)$. Soit θ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ ont la même mesure principale, soit $\theta + \frac{4\pi}{3}$ et $-\theta$ ont la même mesure principale. Le premier cas est exclus car θ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ sont tous les deux dans $[0,2\pi[$. Pour le deuxième cas, comme $2\pi - \theta$ est dans $]\frac{5\pi}{3},2\pi[$, alors c'est la mesure principale de $-\theta$ et donc on a $2\pi - \theta = \theta + \frac{4\pi}{3}$. Ceci est impossible car $2\pi - \theta$ est dans $]\frac{5\pi}{3},2\pi[$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ est dans $]0,\frac{5\pi}{3}[$.
On suppose maintenant que l'on a $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$. Ainsi soit $\theta + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ ont la même mesure principale, soit $\theta + \frac{4\pi}{3}$ et $-\theta - \frac{2\pi}{3}$ ont la même mesure principale. Le premier cas est impossible car $\theta + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ sont dans $[0,2\pi[$. Pour le deuxième cas, comme $2\pi - \theta - \frac{2\pi}{3}$ est dans $]\pi,2\pi[$, c'est la mesure principale de $-\theta - \frac{2\pi}{3}$ et donc on a $\theta + \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \theta - \frac{2\pi}{3}$, ce qui équivaut à $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ce qui est exclus.
Ainsi les trois solutions de (E) qui sont deux à deux distinctes sont :

$$\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta),\quad \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right).$$

f. On a $\widetilde{\Delta} = 4(-3)^3 + 27 \times 1 = -81 < 0$. Ainsi l'équation admet trois solutions réelles. On cherche une solution sous la forme $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta) = \sqrt{\frac{12}{3}}\cos(\theta) = 2\cos(\theta)$. On doit avoir $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}} = -\frac{1}{2}$. Ainsi on a $3\theta = \frac{2\pi}{3}$ soit $\theta = \frac{2\pi}{9}$. Ainsi les solutions de (E) sont données par $2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ et $2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) = 2\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

4.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} =$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x - \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{cb}{3a^2} - \frac{b^3}{9a^3} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a}.$$

Ainsi comme a est non nul, l'équation (E') est équivalente à l'équation $(E^{''})$.

b. Grâce à la question précédente, on remarque qu'en posant $X = x + \frac{b}{3a}$, résoudre (E'') (ce qui équivalent à résoudre (E')), revient à résoudre l'équation

$$X^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)X + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0.$$

C'est une équation du type $X^3 + pX + q = 0$, avec

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Ainsi pour avoir les solutions de (E'') ou de (E'), il suffit de connaître les solutions de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ que l'on sait résoudre. On trouve ainsi les X convenables, puis les x solutions de (E').

c. On pose $X = x + \frac{6}{3\times 2} = x + 1$. On doit donc résoudre l'équation

$$X^3 + \left(\frac{-6}{2} - \frac{36}{3\times 4}\right)X + \frac{2\times 6^3}{3^3 \times 2^3} + \frac{36}{3\times 4} + \frac{-22}{2} = 0,$$

soit $X^3 - 6X - 6 = 0$. On a déjà vu que cette équation admet une seule solution réelle qui est $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Ainsi l'équation $2x^3 + 6x^2 - 6x - 22 = 0$ admet une seule solution réelle qui est $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1$. □

Correction de l'Exercice 2

1.a. On a divisé tout d'abord l'équation par a qui est non nul. On obtient donc

$$x^4 + \tfrac{b}{a}x^3 + \tfrac{c}{a}x^2 + \tfrac{d}{a}x + \tfrac{e}{a} = 0.$$

Ensuite, on remplace x par $X - \frac{b}{4a}$. Quand on développe on a :

$$(X - \tfrac{b}{4a})^4 = (X^2 - \tfrac{b}{2a}X + \tfrac{b^2}{16a^2})(X^2 - \tfrac{b}{2a}X + \tfrac{b^2}{16a^2}) = X^4 - \tfrac{b}{a}X^3 + R(X),$$

où $R(X)$ rassemble des termes de degré au plus 2. Or $\frac{b}{a}(X - \frac{b}{4a})^3 - \frac{b}{a}X^3$ est un polynôme de degré au plus 2.
Comme $\frac{c}{a}(X - \frac{b}{4a})^2 + \frac{d}{a}(X - \frac{b}{4a}) + \frac{e}{a}$ n'est constitué que de termes en des puissances de X de degré inférieur ou égale à 2, on a donc :

$$(X - \tfrac{b}{4a})^4 + \tfrac{b}{a}(X - \tfrac{b}{4a})^3 + \tfrac{c}{a}(X - \tfrac{b}{4a})^2 + \tfrac{d}{a}(X - \tfrac{b}{4a}) + \tfrac{e}{a} = X^4 + R_2(X),$$

où $R_2(X)$ rassemble des termes de degré au plus 2.

2.a. Il suffit de développer le membre de droite.

b. On s'intéresse à l'équation $(2y-p)X^2 - qX + y^2 - r = 0$ d'inconnue X, avec p, q, r et y considérés comme des constantes. Si $(2y-p)X^2 - qX + y^2 - r$ s'écrit sous la forme d'un carré $(AX+B)^2$, alors ce dernier trinôme du second degré admet une racine double et donc son discriminant est nul. Ceci signifie que l'on a $q^2 - 4(2y-p)(y^2-r) = 0$ soit en développant et en multipliant par -1 donne : $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$.

c. L'exercice précédent nous dit que l'on a au moins une solution pour cette équation. Nous appliquons donc ce qui a été vu dans cet exercice pour trouver une solution.

d. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X^4 + pX^2 + qX + r = 0 &\Leftrightarrow (X^2+y_0)^2 - (2y_0-p)X^2 + qX - y_0^2 + r = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^2+y_0)^2 - (AX+B)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^2+y_0-AX-B)(X^2+y_0+AX+B) = 0 \\
&\Leftrightarrow X^2 - AX + y_0 - B = 0 \text{ ou } X^2 + AX + y_0 + B = 0.
\end{aligned}$$

e. On résout avec la méthode habituelle les deux équations du second degré $X^2 - AX + y_0 - B = 0$ et $X^2 + AX + y_0 + B = 0$. On trouve donc toutes les solutions X possibles de $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$. Pour finir il faut revenir à l'équation de départ et donc retrancher à toutes ces solution $\frac{b}{4a}$, pour avoir les solutions $x = X - \frac{b}{4a}$ de $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

f. Commençons par diviser l'équation par 2. On obtient donc $x^4 - 4x^3 - x^2 - 14x + 3 = 0$. Nous devons maintenant supprimer le terme en x^3. Nous allons donc faire le changement d'inconnue $X = x - 1$. On a donc :

$$(X+1)^4 - 4(X+1)^3 - (X+1)^2 - 14(X+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(X^2+2X+1)(X^2+2X+1) - 4(X^3+3X^2+3X+1) - (X^2+2X+1) - 14X - 14 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - 4X^3 - 13X^2 - 28X - 16 = 0 \Leftrightarrow X^4 - 7X^2 - 24X - 15 = 0.$$

Ici $p = -7$, $q = -24$ et $r = -15$.
Maintenant nous devons donc résoudre l'équation : $8y^3 + 28y^2 + 120y - 156 = 0$, soit $2y^3 + 7y^2 + 30y - 39 = 0$.
On peut se lancer dans des calculs compliqués avec la méthode vue dans l'exercice précédent pour trouver une solution de cette équation. Mais si on prend le temps de bien regarder cette équation, elle admet une solution évidente à savoir 1.
Ainsi pour $y_0 = 1$, on a $(2y_0 - p)X^2 - qX + y_0^2 - r = 9X^2 + 24 + 16 = (3X+4)^2$.
Ici on a donc $A = 3$ et $B = 4$.

Nous devons donc résoudre les équations $X^2 - 3X - 3 = 0$ et $X^2 + 3X + 5 = 0$.

La première équation admet pour racine $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$, alors que la deuxième n'admet pas de solutions réelles.

Donc on a $X = \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ et donc $x = X + 1 = \frac{3\pm\sqrt{21}}{2} + 1 = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$. □

