C'est logique !

V. Bansaye, S. Léocard

Niveau : Première
Difficulté : ★ (facile au début, plus difficile sur la fin)
Durée : 1h30-2h
Rubrique(s) : logique (Quantificateurs)

Le but de cet atelier est de se familiariser avec les divers types de raisonnement logique ainsi qu'avec la manipulation de propositions logiques. Le dernier exercice revient sur les paradoxes.
Au lycée vous avez déjà abordé des notions de logique et vous avez rencontré ces différents symboles mathématiques $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ \ldots$ *Il faut en faire bon usage et cela signifie bien les maîtriser car ils peuvent générer des erreurs dans vos démonstrations du point de vue logique justement !*

La petite histoire...
Aristote est un des pères de la logique. C'est notamment lui qui a été le premier à formaliser le syllogisme qui est un raisonnement logique à deux propositions (les prémisses) conduisant à une conclusion. Son exemple bien connu est

« Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme donc Socrate est mortel »

Imparable ? pas vraiment. Épiménide, un poète et chaman crêtois aurait dit « Tous les crêtois sont des menteurs. »Voyez-vous un souci dans cette affirmation ? Ce paradoxe appelé paradoxe du Crêtois (ou paradoxe d'Épiménide) aurait été inventé par Eubulide, un adversaire d'Aristote.

Monsieur et Madame,
Bienaiderlalogiquepourlasuite ont un fils...

Exercice 1 (Connecteurs et liens logiques).

On rappelle que les propositions expriment un fait, fixe ou variable, réalisé ou non.
Par exemple « $2+2=4$ » ; « $2x+8y=20$ » ; « $1+1=0$ » ; « la Terre est

Réponse : oussama

plate » ; « il fait plus de 20 degrés ».
On remarque que la proposition « le mois de février comporte 30 ou 31 jours » est une proposition fausse.
Profitons-en pour rappeler également qu'en mathématiques, le *ou* est inclusif, c'est-à-dire que les deux sont possibles :

« rejoignez-nous si vous êtes une fille ou russe »

n'exclut pas que la personne qui nous rejoint soit une fille, ou bien une personne de nationalité russe, ou bien une fille russe. Pour prendre un exemple plus mathématique :

« un parallélogramme est un rectangle s'il possède un angle droit ou des diagonales de même longueur. »

Nous utiliserons donc ici le *ou inclusif*, contrairement au langage courant qui utilise plutôt le *ou exclusif*.

1. Donner la négation des propositions suivantes, c'est-à-dire la proposition qui est vraie (respectivement fausse) quand la proposition de départ est fausse (respectivement vraie).

a. Tous les orchestres possèdent au moins un excellent violoniste.

b. Pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $x + y < 0$.

c. Il y a au moins une pièce du bâtiment qui possède moins de trois prises de courant.

d. Il existe $x \in A$ tel que $f(x) < 3$.

e. Tous les soirs, je lis un livre ou je regarde la télé.

f. $x \in A \Rightarrow (x \leq 0$ ou $x \in \mathbb{Q})$.

g. La température restera la même les prochains jours.

h. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire que la suite est constante à partir d'un certain rang).

i. La température augmentera continûment les prochains jours.

j. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante,
(c'est-à-dire que pour tous nombres réels $a < b$, $f(a) \leq f(b)$).

k. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leq M$).

l. Je me bats si et seulement si on m'attaque et que mon adversaire est moins fort.

m. Soit F un ensemble de fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.
$f \in F \Leftrightarrow (f$ est croissante et $f(0) \leq 0)$.

2. Le journal sportif local a affirmé hier :

« il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui est constituée uniquement de joueurs français. »

C'était une erreur et le journal a publié un démenti. Cela veut-il dire que (plusieurs réponses peuvent être possibles) :

a. « Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui ne possède aucun joueur français. »

b. « Il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui soit constituée uniquement de joueurs français. »

c. « Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui ne soit pas constituée que de joueurs francais. »

d. « Il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui ne soit pas constituée uniquement de joueurs français. »

3. Justifier pourquoi les implications suivantes sont fausses.

a. Soit une fonction $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$.
« f continue et $f(a) = f(b) = 0$ » donc « pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ ».

b. Soit une fonction $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$.
« f est croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ » donc « il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 1/2$ ».

4. Deux propositions sont équivalentes quand elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses. En justifiant la réponse, dire lesquels parmi les couples de propositions suivantes correspondent à des propositions équivalentes. Dans le cas où une implication serait vraie et l'autre fausse, le préciser.

a. « J'ai eu le permis de conduire » – « J'ai eu le code et la conduite ».

b. « J'ai eu le bac S » – « J'ai eu 20 en maths, en physique-chimie et en SVT au baccalauréat ».

c. « Toutes nos salles de bains sont équipées d'une douche ou d'une baignoire » – « Aucune de nos salles de bains ne possède ni douche ni baignoire ».

d. Soit x un nombre réel. « $x + 1 = 2$ » – « $2x < x + 2$ ».

e. « $ABCD$ est un rectangle » – « $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur ».

f. Soit x un nombre réel. « $x \geq 2$ » – « $x^2 \geq 4$ ».

g. « Pour tout $\epsilon > 0$, $x < \epsilon$ » – « $x < 0$ ».

h. Soit x un nombre réel. « Pour tout $y \in \mathbb{N}$, $xy = y$ » – « $x = 1$ ».

i. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ » – « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$ ».

j. Soient a un nombre réel et b un nombre réel positif. « $\sqrt{b} < a$ » et « $a \geq 0$ et $b < a^2$ ».

Commentaires sur l'Exercice 1

Soit $P(a)$ une proposition dépendant de a. On rappelle que

- la négation de « pour tout $a \in A$, $P(a)$ est vraie » est « il existe $a \in A$ tel que $P(a)$ est fausse ».
- la négation de « il existe $a \in A$ tel que $P(a)$ est vraie » est « pour tout $a \in A$, $P(a)$ est fausse ».
- la négation de « P implique Q » est « P et non Q ».

Notons aussi que la place des termes a son importance. Plus précisément, on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes. Par exemple :

« pour tout bracelet b, il existe une somme d'argent s telle que s permet d'acheter b. »

ne signifie pas la même chose que

« il existe une somme d'argent s telle que pour tout bracelet b, s permet d'acheter b. »

La première phrase dit que la somme d'argent à dépenser dépend du bracelet. La deuxième phrase dit qu'il existe une somme d'argent s permettant d'acheter tout bracelet (ce qui est accessible pour peu de personnes !).

Enfin, pour montrer qu'une proposition est fausse, on peut exhiber un exemple, appelé *contre-exemple*, pour lequel elle est fausse.

Exercice 2 (Une enquête disjonctée).

L'inspecteur LaTruffe cherche le voleur du trésor de la reine. Il a trois suspects : Éric, Brice et Frédéric. Il sait que le voleur est l'une de ces trois personnes. Il sait également que le voleur ment systématiquement, tandis que les deux autres, qui ne sont pas des voleurs, disent toujours la vérité. Voici où en est l'inspecteur :

« Éric dit que Brice a volé et Brice dit que c'est Frédéric le voleur. »

Qui est le voleur ?

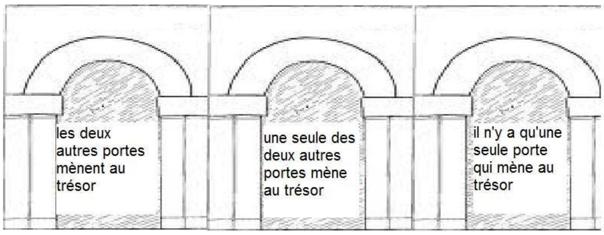
Commentaires sur l'Exercice 2

Nous vous conseillons la lecture des *Énigmes de Shéhérazade*, de Raymond Smullyan, pour d'autres exemples...

Attention, ce n'est pas parce qu'une configuration semble possible que c'est la bonne. Il pourrait y en avoir une autre...

Exercice 3 (La bonne porte).

Rodolphe se retrouve devant trois portes et n'a le droit d'en ouvrir qu'une seule pour accéder au trésor. Sur chacune des portes figure une inscription. Il sait que, sur ces portes, une seule inscription est vraie et que les deux autres sont fausses.



Quelle porte doit-il choisir ?

Exercice 4 (Paradoxe).
Quel est le problème avec les deux énoncés suivants ?

1. « Je mens ».

2. « Soit n_0 le plus petit entier naturel qui ne peut être défini en moins de dix-neuf mots ».

Indications

Indications sur l'Exercice 3

Faire une disjonction de cas, en distinguant si c'est sur la première, la deuxième ou la troisième porte que se trouve écrite la vérité.

Indications sur l'Exercice 4

2. La première phrase est-elle vraie ? Est-elle fausse ?
Combien la phrase qui définit n_0 comporte-t-elle de mots ?

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Voici les négations des différentes propositions

a. Il existe un orchestre qui ne possède pas d'excellent violoniste.

b. Il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in B$, $x + y \geq 0$.

c. Aucune pièce du bâtiment ne possède moins de trois prises de courant, ou toutes les pièces du bâtiment possèdent au moins trois prises de courant.

d. Pour tout $x \in A$, $f(x) \geq 3$.

e. Certains soir, je ne lis pas de livre et je ne regarde pas la télé.

f. Il existe $x \in A$ tel que $x > 0$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

g. La température va varier au cours des prochains jours.

h. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \neq u_{n+1}$.

i. Il y aura une baisse de la température à un moment dans les prochains jours.

j. La fonction f n'est pas croissante, c'est-à-dire qu'il existe $a < b$ tel que $f(a) > f(b)$.

k. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0}| > M$.

l. On doit nier ici une équivalence, c'est-à-dire deux implications. En effet, $P \Leftrightarrow Q$, c'est ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$). La négation est donc (P et $nonQ$) ou (Q et $nonP$). Pour notre cas particulier :

« Il arrive que je me batte alors que l'on ne m'attaque pas ou que mon adversaire est plus fort, ou que je ne me batte pas alors que l'on m'attaque et que mon adversaire est moins fort. »

m. ($f \notin F$ et f est croissante et $f(0) \leq 0$) ou ($f \in F$ et f est non croissante) ou ($f \in F$ et $f(0) > 0$).

n. Il existe une fonction $f \in F$ qui n'est pas croissante ou qui ne vérifie pas $f(0) > 0$, ou il existe une fonction f croissante, telle que $f(0) \leq 0$, qui n'appartient pas à F.

2. On veut ici la négation de

« il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui est constituée uniquement de joueurs français. »

Rappelons que la négation de « il y a P tel que Q » est « il n'y a pas P, tel que Q », qui n'est pas très bon en pratique et on lui préfère « pour tout P, il n'y a pas Q ». La négation de l'information est donc « il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui soit constituée uniquement de joueurs français ; »et on préférera :
« toute équipe de Ligue 1 possède au moins un joueur étranger ».
La bonne réponse est donc l'assertion **b)**.

3.a. Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x, \text{ si } x \in [0, 1/2] \text{ et } f(x) = 1 - 2x, \text{ si } x \in [1/2, 1].$$

La fonction f est est continue, $f(0) = f(1) = 0$, mais f n'est pas identiquement nulle. L'implication est donc fausse.

b. Comme contrexemple, on peut prendre f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, 1/2] \text{ et } f(x) = 1, \text{ si } x \in]1/2, 1].$$

4.a. Pour avoir le permis, il est nécessaire d'avoir à la fois le code et la conduite. Et cela suffit : une fois que l'on a le code et la conduite, on a le permis. Les deux propositions s'impliquent l'une l'autre ; elles sont équivalentes.

b. Si vous avez 20 en maths, en physique-chimie et en SVT dans la filière S, vous aurez votre Bac : un petit calcul en utilisant les coefficients (forts) de ces matières va vous en convaincre facilement. Par contre si vous avez le bac (ce que nous vous souhaitons), cela n'implique pas que vous ayez 20 dans ces matières, ni même la moyenne dans une seule. Il n'y a qu'une implication de vraie, et donc les propositions ne sont pas équivalentes.

c. Les deux propositions sont équivalentes : dans les deux cas, on trouvera dans toutes les salles de bain de quoi se laver, une douche, une baignoire ou les deux. Ici, on a l'exemple d'une phrase du type « Pour tous ..., alors *boum* », qui est équivalente à « Pour aucun ..., il n'y a pas de *boum* ».

d. $x + 1 = 2$ est équivalent à $x = 1$. Tandis que $2x < x + 2$ est équivalent à $x < 2$. Donc $x + 1 = 2$ implique $2x < x + 2$, mais la réciproque n'est pas vraie. Il n'y a pas équivalence.

e. Un rectangle est un parallélogramme et ses diagonales ont même longueur. Réciproquement, un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur est un rectangle. Donc les deux propositions sont équivalentes.

f. $x \geq 2$ implique que $x^2 \geq 4$. Mais $x^2 \geq 4$ implique $x \geq 2$ ou $x \leq -2$. Donc l'implication réciproque n'est pas vraie, et il n'y a pas équivalence.

g. Clairement, si $x < 0$ et $\epsilon > 0$, alors $x < \epsilon$. Donc l'implication réciproque est vraie : « $x < 0$ » implique « pour tout $\epsilon > 0$, $x < \epsilon$ ». Mais $x = 0$ vérifie « pour tout $\epsilon > 0$, $x < \epsilon$ » sans vérifier « $x < 0$ ».
Profitons-en pour signaler une erreur classique. Si pour tout $\epsilon > 0$, $x < \epsilon$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1/n > 0$ et donc $x < 1/n$. En faisant tendre n vers l'infini, *l'inégalité stricte devient large à la limite* donc $x \leq 0$ (et pas $x < 0$).

h. Les deux propositions sont équivalentes : prendre $y = 1$ pour la première implication, multiplier par y pour la réciproque.

i. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$, alors $u_{n+1} = u_0$, et donc $u_n = u_{n+1}$. Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.
L'égalité est triviale pour $n = 0$ (initialisation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = u_0$. Alors $u_{n+1} = u_n = u_0$ (hérédité).
Ceci prouve la réciproque et les deux propositions sont équivalentes.

j. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$. Si « $\sqrt{b} < a$ », alors $a \geq 0$ et on peut élever cette inégalité au carré *car les deux termes sont positifs* en utilisant la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On obtient $b < a^2$. Donc « $\sqrt{b} < a$ » implique « $a \geq 0$ et $b < a^2$ ».
Réciproquement, si $a \geq 0$ et $b < a^2$, en passant cette inégalité à la racine carrée par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui est possible car $b \geq 0$), on obtient $\sqrt{b} < a$. Il y a donc équivalence entre les deux propositions. Notons que si l'on retire $a \geq 0$, la réciproque devient fausse, par exemple $a = -2$ et $b = 1$, $1 < (-2)^2$ mais $-2 < 1$. □

Correction de l'Exercice 2
On sait qu'il y a un (et un seul) menteur, qui est le voleur. On utilise la disjonction des cas.

- Éric est le menteur, et donc le voleur. Il dit que Brice a volé, ce qui est bien faux puisque c'est Éric. Mais Brice dit la vérité puisqu'il y a un seul menteur-voleur et donc Frédéric est le voleur. Ce qui fait deux voleurs : impossible ! !

- Brice est le menteur, et donc le voleur. Donc il ment en accusant Frédéric, qui est donc innocent. Éric dit également la vérité puisqu'il n'y a qu'un coupable, et il accuse Brice, qui semble donc bien être le coupable. Tout est cohérent.
- Frédéric est le menteur, et donc le voleur. Alors Éric et Brice sont innocents et disent la vérité. Mais Éric accuse Brice et il y aurait donc deux coupables : impossible ! !

Brice est donc le voleur-menteur. □

Correction de l'Exercice 3
On raisonne par disjonction de cas.

- Supposons que sur la première porte soit écrite la vérité. Alors les deux autres portes mènent au trésor. Et elles mentent. Comme la deuxième porte ment, c'est que ni la première ni la troisième ne mènent au trésor, ou bien les deux mènent au trésor. Or on vient de dire que la troisième porte mène au trésor, donc les première et troisième portes mènent au trésor, et la deuxième aussi. *Les 3 portes mènent au trésor.*
- Supposons que sur la deuxième porte soit écrite la vérité. Alors une seule des deux autres portes mène au trésor, c'est-à-dire la première et pas la troisième, ou bien la troisième et pas la première. La troisième porte ment et donc il y a deux ou trois portes qui mènent au trésor. Comme la première porte ment également, au moins une des autres portes ne mène pas au trésor.
  Récapitulons. Dans ce cas, il y a exactement deux portes qui mènent au trésor, dont la première ou (exclusif) la troisième, tandis que la deuxième ou (inclusif) la troisième ne mène pas au trésor.
  Supposons que la deuxième porte ne mène pas au trésor, alors la première et la troisième mèneraient au trésor, ce qui est exclu.
  Donc *la deuxième porte mène forcement au trésor. On en déduit que la troisième n'y mène pas et que la première y mène.*
- Supposons que sur la troisième porte soit écrite la vérité. Il y a une seule porte qui mène au trésor. Donc il n'est pas possible que les deuxième et troisième portes mènent au trésor. Or la deuxième porte ment, ce qui veut dire que ni la première ni la troisième porte ne mènent au trésor. Donc *seule la deuxième porte mène au trésor.*

On remarque que dans chaque cas *la deuxième porte mène au trésor.* C'est celle-ci qu'il faut choisir ! □

Correction de l'Exercice 4
1. Si la phrase « je mens » est vraie, alors je suis un menteur et donc je devrais dire un mensonge, donc je dis la vérité. Absurde.
Si la phrase « je mens » est fausse, alors je dis la vérité. Or je dis que je mens, absurde également.
Cette phrase ne peut être ni vraie, ni fausse, ce n'est donc pas une proposition.

2. Cette phrase contient 18 mots et donc n_0 qui est défini par cette phrase est défini en moins de 19 mots, ce qui est en contradiction avec sa propre définition.

Ce point soulève un problème en théorie des ensembles : certaines définitions ne sont pas correctes, à cause d'une « boucle » dans la définition. Vous pouvez également penser « au barbier qui rase toutes les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes »... qui rase le barbier ?

□

