Applications polynômes du second degré

L. Gerin, S. Léocard, M. Bouvel

Niveau : Première, Terminale
Difficulté : ★ à ★★★★
Durée : 2 heures
Rubrique(s) : Algèbre.

La petite histoire...
Pour rappel. Une application polynôme du second degré est une application de la forme $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$). On parle aussi de *trinôme* car il y a... trois termes, ou trois monômes. Il ne faut pas oublier qu'une application polynôme peut s'écrire sous une forme différente : par exemple $x \mapsto (x-2)^2$ malgré son apparence correspond bien au trinôme $x^2 - 4x + 4$.
Rappelons le résultat le plus connu : si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, alors l'application polynôme admet des racines réelles r_1 et r_2. Il s'agit de deux racines distinctes si $\Delta > 0$, et d'une racine double (c'est-à-dire que $r_1 = r_2$) si $\Delta = 0$. On a les formules suivantes pour r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Il existe aussi des relations entre les cœfficients (a, b, c) du trinôme et la somme et le produit de ses racines. En effet, partant des formules ci-dessus pour r_1 et r_2, on peut calculer que

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces résultats peuvent être retrouvés aisément, sans même utiliser les formules pour r_1 et r_2, de la manière suivante. Si l'application $x \mapsto ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles r_1 et r_2 (distinctes, ou éventuellement une racine double $r_1 = r_2$), alors on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

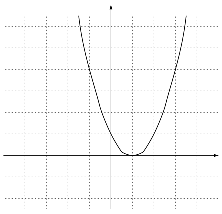
et en développant le membre de droite on obtient $ax^2 + bx + c = ax^2 - ax(r_1 + r_2) + ar_1r_2$. En identifiant terme à terme on obtient bien les expressions données ci-dessus pour $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$.
L'important est de savoir que ces relations entre racines et cœfficients existent, et de savoir les retrouver rapidement.

Exercice 1 (À chaque trinôme sa courbe).

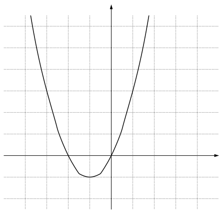
1. Associer à chaque application polynôme sa représentation graphique :

$$x \mapsto 1 - x^2, \qquad x \mapsto (x-1)^2, \qquad x \mapsto x^2 + 2x, \qquad x \mapsto 1 - (x-1)^2$$

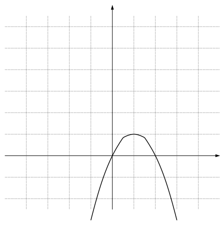
Courbe 1



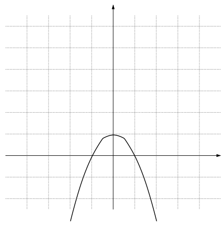
Courbe 2



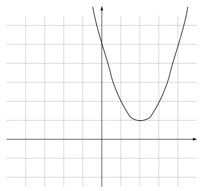
Courbe 3



Courbe 4



2. Donner le trinôme dont la représentation graphique est :



Pour résoudre une équation du second degré, mieux vaut toujours chercher s'il y a une (ou des) racine(s) évidente(s) avant de se lancer dans les calculs.

Exercice 2 (Trouver des racines... évidemment !).
Résoudre (vite !) les équations suivantes :

1. $x^2 = 8x - 7$.

2. $-x^3 - 4x^2 + 5x = 0$.

3. $x^4 + 5x^2 = 36$.

4. $(\cos x)^2 - 2\cos x + 1 = 0$.

Exercice 3 (Trois valeurs pour un trinôme).
Chacune des conditions suivantes caractérise un unique trinôme P. Lequel ?

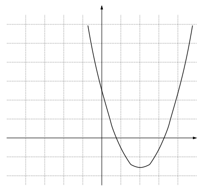
1. P admet deux racines, la somme de ces deux racines vaut 1, le produit vaut -2 et $P(0) = -4$.

2. $P''(0) = 1$, $P'(0) = 1$, $P(0) = 1$.

3. $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$, $P(1) = 2$.

4. $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$.

Exercice 4 (Positif ou négatif ?).
On considère le trinôme $P(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) dont la représentation graphique est la suivante :



Donner à chaque fois la bonne réponse.

1. A-t-on $a > 0$ ou $a < 0$?

2. A-t-on $c \geq 0$ ou $c < 0$?

3. A-t-on $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$?

4. A-t-on $a + b + c \geq 0$ ou $a + b + c < 0$?

5. A-t-on $a - b + c > 0$ ou $a - b + c \leq 0$?

6. A-t-on $b \geq 0$ ou $b < 0$?

Exercice 5 (Inéquations de degré 2).
Résoudre les inéquations

1. $x^2 \leq 4x$;

2. $-2x^2 + 16x + 40 \geq 0$.

Exercice 6 (Optimisation de rectangle).
Le but de cet exercice est de déterminer, parmi tous les rectangles de périmètre 20 cm, celui qui a la plus grande aire.

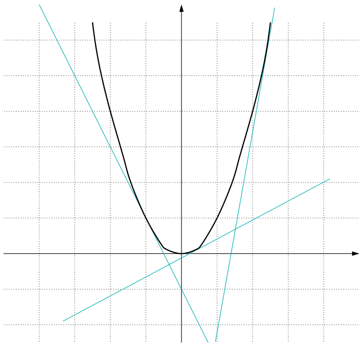
1. Supposons qu'un tel rectangle existe. On note A son aire (en cm^2), h (comme hauteur) et ℓ (comme largeur) les longueurs (en cm) de deux côtés consécutifs. (Remarquez qu'on ne sait pas si $h \leq \ell$ ou le contraire.) Exprimer A en fonction de ℓ uniquement.

2. Déterminer le nombre x tel que la quantité $x(10 - x)$ est maximale et conclure.

Commentaires sur l'Exercice 6

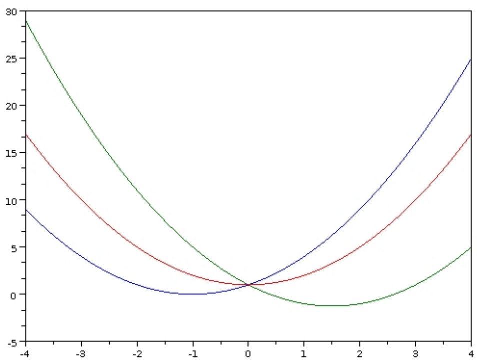
Les problèmes où il s'agit de trouver la figure qui a la plus grande aire à périmètre fixé sont appelés des problèmes isopérimétriques (en grec, *iso* signifie « même »). Cela a occupé les mathématiciens depuis l'Antiquité jusqu'au début du XX^e siècle. On a commencé ici par le seul cas accessible au lycée : celui des rectangles.

Exercice 7 (Parabole et ses tangentes).
Démontrer que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ est au-dessus de toutes ses tangentes (nous en avons représenté trois ci-dessous).



Exercice 8 (Des paraboles paramétrées).
Pour tout paramètre réel m, on appelle $\mathcal{P}_m$ la parabole d'équation $y = x^2 + mx + 1$.

1. Retrouver dans le graphique ci-dessous laquelle est $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_{-3}$?



2. Calculer, en fonction de m, les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}_m$. On notera ce sommet S_m.

3. Lorsque m varie dans $\mathbb{R}$, quelle est la courbe décrite par S_m ?

Indications

Indications sur l'Exercice 2

2. Penser à factoriser par x.

3. On peut faire le changement de variable $X = x^2$.

4. On peut faire un changement de variable.

Indications sur l'Exercice 6

1. Puisque le rectangle est de périmètre 20 cm, alors $2h + 2\ell = ?$

2. On peut faire l'étude de la fonction $x \mapsto x(10 - x)$.

Indications sur l'Exercice 7

Commencer par donner, en fonction de n'importe quel réel a, l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point a.

On rappelle que la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Lorsque le coefficient dominant (c'est-à-dire a dans $ax^2 + bx + c$) est strictement positif, la parabole est tournée "vers le haut", sinon elle est tournée "vers le bas". Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses fournissent les valeurs des racines. On obtient ainsi la correspondance suivante entre les trinômes et les courbes proposées.

- $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$: coefficient dominant négatif, racines en 1 et -1, donc courbe 4.
- $(x - 1)^2$: coefficient dominant positif, racine double en 1, donc courbe 1.
- $x^2 + 2x = x(x + 2)$: coefficient dominant positif, racines en -2 et 0, donc courbe 2.
- Pour $1 - (x - 1)^2$, on peut d'abord écrire

  $$1 - (x - 1)^2 = 1^2 - (x - 1)^2 = (1 + x - 1)(1 - x + 1) = x(2 - x).$$

  Donc coefficient dominant négatif, racines en 0 et 2, donc courbe 3.

2. On voit que le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2, 1)$. Ainsi, le trinôme $f(x)$ recherché est tel quel $f(2) = 1$.
On voit aussi que la courbe passe par les points de coordonnées $(1, 2)$ et $(3, 2)$. Ainsi, 1 et 3 sont solutions de l'équation $f(x) = 2$, qui s'écrit aussi $f(x) - 2 = 0$. On obtient donc que $f(x) - 2 = a(x - 1)(x - 3)$, c'est-à-dire que $f(x) = a(x - 1)(x - 3) + 2$.
On détermine ensuite a en utilisant le fait que $f(2) = 1$. En effet, en substituant $x = 2$ dans l'équation $f(x) = a(x - 1)(x - 3) + 2$, on obtient $f(2) = a(2 - 1)(2 - 3) + 2$, qui se simplifie en $1 = 2 - a$, dont la résolution donne $a = 1$.
On conclut que le trinôme $f(x)$ dont la courbe est celle représentée est $f(x) = (x-1)(x-3)+2$, ou en forme développée $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

□

Correction de l'Exercice 2

1. On remarque que $x = 1$ est solution de l'équation.
De plus, l'équation se réécrit $x^2 - 8x + 7 = 0$. On sait que le produit des deux racines du polynôme doit être égal à 7. On a vu que 1 était une racine évidente du polynôme. La deuxième racine est donc 7. Ainsi, l'équation admet 2 solutions : 1 et 7.

2. On remarque que $-x^3 - 4x^2 + 5x = x(-x^2 - 4x + 5)$. Rappelant qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, on obtient donc $x = 0$ ou $-x^2 - 4x + 5 = 0$.
Notons Δ le discriminant du polynôme $-x^2 - 4x + 5$. On a

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36 = 6^2.$$

Le trinôme admet donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{-(-4) - 6}{2 \times (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-4) + 6}{2 \times (-1)} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Autre méthode, plus rapide. On remarque que 1 est une racine évidente du trinôme. Le produit des deux racines étant égal à -5, on déduit que la deuxième racine est -5.
En conclusion, l'équation $-x^3 - 4x^2 + 5x = 0$ admet trois solutions : $x = 0$, $x = 1$ et $x = -5$.

3. Posons $X = x^2$. L'équation se réécrit $X^2 + 5X = 36$. On cherche donc les racines du polynôme $X^2 + 5X - 36$.
On remarque que 4 est une racine évidente. Le produit des deux racines étant égal à -36, on en déduit que la deuxième racine est -9.
Ainsi, on a $X = 4$ ou $X = -9$. Or, on a posé $X = x^2$ donc on a $x^2 = 4$ ou $x^2 = -9$. La deuxième égalité est impossible car un carré est toujours positif. On obtient donc $x = 2$ ou $x = -2$.
On conclut que les solutions de l'équation sont $x = 2$ et $x = -2$.
4. On a

$$(\cos x)^2 - 2\cos x + 1 = (\cos x - 1)^2,$$

donc l'équation de l'énoncé est équivalente à $\cos x = 1$ et donc $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

□

Correction de l'Exercice 3

1. Notons r_1 et r_2 les deux racines du polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$. On sait que $r_1+r_2 = \frac{-b}{a}$ et $r_1r_2 = \frac{c}{a}$. On a donc $\frac{-b}{a} = 1$, $\frac{c}{a} = -2$ et $P(0) = c = -4$. Ainsi, $b = -a$, $c = -2a$ et $c = -4$, d'où $a = 2, b = -2$ et $c = -4$, et ainsi $P(x) = 2x^2 - 2x - 4$.
2. Soit P le trinôme défini par $P(x) = ax^2+bx+c$. On a alors $P'(x) = 2ax+b$ et $P''(x) = 2a$. On a donc $P''(0) = 2a = 1$; $P'(0) = b = 1$ et $P(0) = c = 1$. Ainsi, $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1$ et le trinôme recherché est $\frac{x^2}{2} + x + 1$.
3. Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$. On a $P(-1) = a - b + c, P(0) = c$ et $P(1) = a + b + c$. On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} a-b+c=1 \\ c=-1 \\ a+b+c=2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} a-b-1=1 \\ c=-1 \\ a+b-1=2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a=2+b \\ c=-1 \\ (2+b)+b=3 \end{cases}$.
On obtient donc $c = -1$, $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{5}{2}$. Ainsi, le polynôme recherché est $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.
4. De même, on doit résoudre le système : $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} c=0 \\ a+b=1 \\ 4a+2b=2 \end{cases}$. On peut diviser la dernière équation par 2 et lui soustraire la deuxième : on obtient $a = 0$, d'où $b = 1 - a = 1$.
Remarquer que comme $a = 0$, il ne s'agit pas d'un trinôme ici ; mais on obtient tout de même un polynôme (de degré 1). Plus précisément, le polynôme recherché est x.

□

Correction de l'Exercice 4

1. $a > 0$, car la parabole est orientée vers le haut.
2. $c \geq 0$, puisque c est l'ordonnée à l'origine ($c = P(0)$).

3. $\Delta > 0$. En effet, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts donc le polynôme admet deux racines distinctes.

4. $a + b + c < 0$, car $P(1) = a + b + c$ et $P(1) < 0$.

5. $a - b + c > 0$, car $P(-1) = a - b + c$ et $P(-1) > 0$.

6. $b < 0$. En effet, la somme des racines vaut $\dfrac{-b}{a}$. Or les deux racines sont positives donc leur somme aussi, et on a vu plus haut que a est positif.

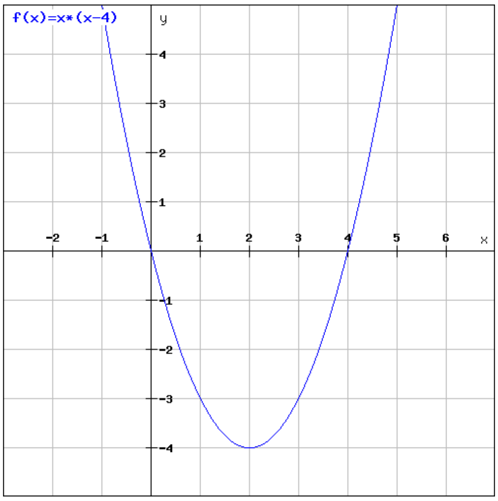
□

Correction de l'Exercice 5

1. Pour tout x, $x^2 \leq 4x$ équivaut à $x^2 - 4x \leq 0$, c'est-à-dire $x(x-4) \leq 0$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions est $[0;4]$.
Une autre méthode consiste à dire que le polynôme $f(x) = x(x-4)$ a la représentation graphique figurant ci-dessous. Ainsi, l'ensemble des solutions de $x(x-4) \leq 0$ (qui est équivalent à $x^2 \leq 4x$ comme expliqué plus haut) est $[0;4]$.



2. On remarque que l'on peut diviser tous les coefficients par 2. Cela ne change pas le sens de l'inégalité. On obtient $-x^2 + 8x + 20 \geq 0$.
Cherchons les racines du trinôme $-x^2+8x+20$. On remarque que -2 est une racine évidente. Le produit des racines étant égal à -20, l'autre racine est 10. Ainsi le trinôme se factorise sous la forme $-(x+2)(x-10)$ et l'inéquation est équivalente à $-(x+2)(x-10) \geq 0$, c'est-à-dire $(x+2)(x-10) \leq 0$.
On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		10		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

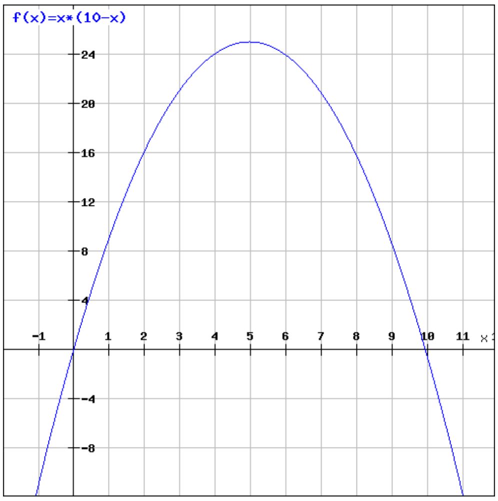
Ainsi, l'ensemble des solutions est $[-2;10]$.

$\square$

Correction de l'Exercice 6

1. On a $20 = 2\ell + 2h$ donc $h = 10 - \ell$. De plus, $A = \ell \times h$ d'où $A = \ell(10-\ell)$.

2. Pour tout x, on pose $f(x) = x(10-x)$, dont la courbe représentative est la suivante.



Le sommet de cette parabole (qui est le point le plus haut) a pour coordonnées $(5,25)$. Ainsi, la quantité $x(10-x)$ est maximale lorsque $x = 5$.
Conclusion : le rectangle de périmètre 20cm qui a la plus grande aire a une largeur de 5cm. On a vu que $h = 10 - \ell$ donc sa hauteur est aussi de 5cm. Ainsi, le rectangle recherché est un carré de 5cm de côté.

$\square$

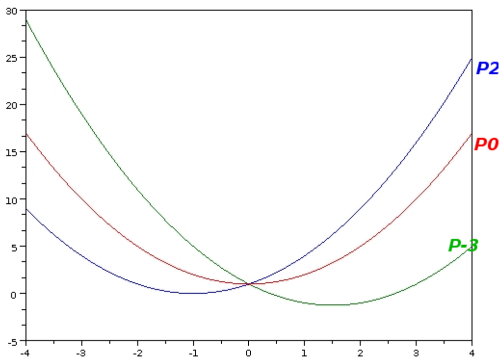
Correction de l'Exercice 7

Soit a un nombre réel quelconque. On va démontrer que la tangente à la parabole au point d'abscisse a est située en-dessous de la parabole. Notons T_a cette tangente.
Calculons l'équation de T_a. Notons, pour tout réel x, $P(x) = x^2$. On a alors $P'(x) = 2x$. Ainsi, T_a a pour équation $y = P'(a)(x-a)+P(a)$, c'est-à-dire $y = 2a(x-a)+a^2$, autrement dit $y = 2ax - a^2$.
Pour démontrer que cette tangente est en-dessous de la parabole, on étudie le signe de $P(x) - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2$. On reconnaît une identité remarquable, qui permet d'écrire que $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$. On en déduit que $P(x) - (2ax - a^2) = (x-a)^2$ et donc $P(x) - (2ax - a^2) \geq 0$. Ainsi, $P(x) \geq 2ax - a^2$, et donc la parabole est bien située au-dessus de T_a.
Le réel a étant quelconque, on conclut que la parabole est au-dessus de toutes ses tangentes.

□

Correction de l'Exercice 8

1. Posons $P(x) = x^2 + mx + 1$. On a alors $P(1) = m + 2$. On voit que la valeur de $P(1)$ augmente lorsque m augmente. Ainsi, la courbe verte est $\mathcal{P}_{-3}$, la courbe rouge est $\mathcal{P}_0$ et la courbe bleue est $\mathcal{P}_2$.



2. Pour tout réel x, on a $P'(x) = 2x + m$, donc $P'(x)$ s'annule lorsque $x = \frac{-m}{2}$. Ainsi, le minimum est atteint lorsque $x = \frac{-m}{2}$ et ce minimum est égal à

$$P\left(\frac{-m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} + m \times \frac{-m}{2} + 1 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 1 = -\frac{m^2}{4} + 1.$$

Ainsi, le sommet S_m a pour coordonnées $\left(\frac{-m}{2}; -\frac{m^2}{4} + 1\right)$.

3. La courbe décrite par S_m consiste en l'ensemble des points de coordonnées $\left(\frac{-m}{2}; -\frac{m^2}{4} + 1\right)$. Faisons un changement de variable en posant $x = \frac{-m}{2}$, c'est-à-dire $m = -2x$. On a alors $-\frac{m^2}{4} + 1 = -\frac{(-2x)^2}{4} + 1 = -x^2 + 1$.
Remarquons que quand m varie dans $\mathbb{R}$ tout entier, $x = \frac{-m}{2}$ varie dans $\mathbb{R}$ tout entier lui aussi. Ainsi, la courbe décrite par les points S_m passe par tous les points de coordonnées $(x; -x^2 + 1)$ (et seulement ceux-ci) ; donc c'est la parabole d'équation $y = -x^2 + 1$.

□

