Étude de suites

R. Danflous, M. Bouvel

Niveau : Première (sauf question 2 de l'exercice 8)
Difficulté : ★ à ★★★★
Durée : 5h
Rubrique(s) : Analyse.

Exercice 1 (Suites arithmétiques et suites géométriques).

1. Soit (t_n) la suite arithmétique de premier terme $t_0 = 0,5$ et de raison $-\frac{1}{4}$.
Calculer t_{13}.

2. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_2 = 2$ et $u_{15} = 67$.
Calculer u_0 et la raison de la suite (u_n).

3. Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $a = 2$ telle que $v_{71} = 326$.
Calculer v_0.

4. Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison 1,0325.
Calculer w_{10} (arrondir à 10^{-2}).

5. Soit (x_n) la suite géométrique telle que $x_2 = 9$ et $x_4 = 16$.
Calculer x_0 ainsi que la raison de la suite (x_n).

6. Soit (y_n) la suite géométrique de raison $q = 0,8$ telle que $y_5 = 32\,768$.
Calculer y_0.

7. Soit (z_n) la suite géométrique telle que $z_{75} = 16\,777\,216$ et
$z_{91} = 4\,294\,967\,296$.
Calculer z_0 (arrondir à trois chiffres significatifs).

Exercice 2 (Variations).
Étudier le sens de variations des suites ci-dessous :

1. (u_n) telle que $u_n = \frac{n^2}{5} + n - 3$;

2. (v_n) telle que $v_n = \dfrac{n-2}{n+3}$;

3. (w_n) telle que $w_n = \dfrac{3^n}{5^{n+2}}$;

4. (x_n) telle que $x_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.

Exercice 3 (À la limite).

1. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 + \dfrac{1}{n+3}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et que, pour tout entier naturel n, $v_n \geq 2$.

b. À partir de quel rang n a-t-on $v_n \in]1,99\,;2,01[$?

c. Même question pour l'intervalle $]1,999;2,001[$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 5n$.

a. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

b. Déterminer le plus petit rang n à partir duquel $u_n < -10^6$.

Commentaires sur l'Exercice 3

On découvre avec cet exercice la notion de limite d'une suite : lorsqu'elle existe, c'est la "valeur" dont u_n s'approche de plus en plus lorsque n grandit vers $+\infty$. Ainsi, la suite v a pour limite 2 et la suite u tend vers $-\infty$. On dit que v converge vers 2 (car il s'agit d'une limite finie) et que u diverge vers $-\infty$. Attention ! Il existe des suites qui n'ont pas de limite ! Par exemple, w définie par $w_{2n} = 0$ et $w_{2n+1} = 1$ pour tout n n'a pas de limite (puisqu'elle oscille sans arrêt entre 0 et 1).

Exercice 4 (Arithmétique des toitures).

Pour couvrir un toit conique, un couvreur dispose les ardoises en rangs successifs en partant du bas. La pointe du toit est couverte en zinc.
Le nombre d'ardoises nécessaires pour chaque rang est donné par les termes d'une suite numérique u.
Le premier rang comporte $u_0 = 213$ ardoises.
Le deuxième rang comporte $u_1 = 207$ ardoises.
Le troisième rang comporte $u_2 = 201$ ardoises.
Le quatrième rang comporte $u_3 = 195$ ardoises.
...et ainsi de suite en suivant la même progression.

1. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Autrement dit, quelle semble être la nature de cette suite ?

2. On suppose que la conjecture faite à la question précédente est vérifiée. Combien le couvreur disposera-t-il d'ardoises sur le $22^{\text{ième}}$ rang ?

3. Le dernier rang comporte 9 ardoises. De combien d'ardoises le couvreur a-t-il besoin en tout ?

Exercice 5 (Combien ça coûte ?).
M. Dupont désirant creuser un puits, il demande des devis pour le forage. Dans chaque cas, étant donnés la technicité de l'ouvrage et la nature du sol sur le terrain de M. Dupont, le prix du mètre est établi en fonction de la profondeur atteinte.

Devis A : 200 euros le premier mètre, puis tout mètre supplémentaire coûte 10 euros de plus que le précédent.

Devis B : 100 euros le premier mètre, puis tout mètre supplémentaire coûte 5% de plus que le précédent.

Quel est le devis le plus avantageux pour un puits de 5m de profondeur ? Et pour un puits de 55m de profondeur ? Et en général ?

Exercice 6 (Suite arithmético-géométrique).
On dispose de 1 000 euros sur un compte courant et d'une rentrée mensuelle de 100 euros à chaque début de mois, y compris le premier mois. On décide de dépenser 20% de notre compte chaque mois.
Comment le compte va-t-il évoluer ?

Commentaires sur l'Exercice 6
Si on note u_n la somme disponible sur le compte à la fin du n-ième mois, on remarquera que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique. Mais la relation entre u_n et u_{n+1} est très particulière. Elle est de la forme $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$. Les suites qui vérifient une telle relation sont appelées *arithmético-géométriques*. La méthode pour résoudre cet exercice (voir l'indication et/ou la correction) est adaptée à l'étude de toute suite arithmético-géométrique.

Exercice 7 (Boing boing boing boing ...).
Une balle est jetée de 5m de haut et perd 25% de sa hauteur à chaque rebond. Quelle distance aura-t-elle parcouru au moment du n-ième rebond (pour $n \geq 1$) ? Cette distance tend-elle vers une limite lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 8 (Avec une suite auxiliaire).
Soit f l'application définie sur $[\frac{1}{2};+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{4x+1}$.

1. Pour tout $x > \frac{1}{2}$, calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f sur $[\frac{1}{2};+\infty[$, puis que pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a $f(x) > \frac{1}{2}$.

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{4u_n + 1}.$$

2. (Cette question est de niveau Terminale S. En Première, on pourra donc simplement admettre cette partie et poursuivre l'exercice.)
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Est-ce une suite arithmétique ? Géométrique ?

4. Soit (v_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{u_n - \dfrac{1}{2}}.$$

Justifier l'existence de la suite v, puis démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire le terme général u_n de la suite (u_n) en fonction de n. Que peut-on dire de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 9 (Prolifération de bactéries).
Des biologistes étudient le développement de la bactérie *Neisseira meningitidis*, responsable de certaines méningites. In vitro, on a constaté que le nombre de bactéries augmente de 25% toutes les heures. On place au début de l'expérience 10 bactéries dans une éprouvette.
Au bout de combien de temps le nombre de bactéries est-il supérieur à 100 000 ?

Indications

Indications sur l'Exercice 1

On rappelle que le terme général d'une suite arithmétique (a_n) de premier terme a_0 et de raison r est $a_n = a_0 + r \cdot n$. On rappelle aussi qu'une suite géométrique (g_n) de premier terme g_0 et de raison q a pour terme général $g_n = g_0 \cdot q^n$.

Indications sur l'Exercice 6

On pourra suivre les questions suivantes.

- De quelle somme dispose-t-on sur le compte au bout d'un mois ? Au bout de deux mois ?
- On note u_n la somme disponible sur le compte à la fin du n-ième mois. Que valent u_0, u_1, u_2 ?
- Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
- Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 400$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique.
- En déduire la valeur de v_n puis de u_n.

Indications sur l'Exercice 8

Pour simplifier l'exercice, on pourra commencer à la question **3)** en admettant l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. $t_{13} = t_0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 13 = \frac{1}{2} - \frac{13}{4} = \frac{-11}{4}$.

2. Notons r la raison de la suite (u_n). Alors $u_2 = u_0 + 2r$ et $u_{15} = u_0 + 15r$. Ainsi, u_0 et r sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} u_0 + 2r = 2 \\ u_0 + 15r = 67 \end{cases}.$$

Et on a :

$$\begin{cases} u_0 + 2r = 2 \\ u_0 + 15r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 2r = 2 \\ 2 - 2r + 15r = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 2r = 2 \\ 13r = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ u_0 = -8 \end{cases}.$$

3. $v_{71} = v_0 + 2 \cdot 71$ donc $v_0 = v_{71} - 2 \cdot 71 = 326 - 142 = 184$.

4. $w_{10} = w_0 \cdot 1,0325^{10} = 2 \cdot 1,0325^{10} \approx 2,75$ à 10^{-2} près.

5. Notons q la raison de la suite (x_n). Alors $x_2 = x_0 \cdot q^2$ et $x_4 = x_0 \cdot q^4$. Ainsi, x_0 et q sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_0 \cdot q^2 = 9 \\ x_0 \cdot q^4 = 16 \end{cases}.$$

Et on a :

$$\begin{cases} x_0 \cdot q^2 = 9 \\ x_0 \cdot q^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \cdot q^2 = 9 \\ q^2 = \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{9}{q^2} \\ q^2 = \frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{81}{16} \\ q = \frac{4}{3} \text{ ou } q = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

6. $y_5 = y_0 \cdot 0,8^5$ donc $y_0 = \frac{y_5}{0,8^5} = \frac{32\,768}{0,8^5} = 100\,000$.

7. Notons q la raison de la suite (z_n). Alors $z_{75} = z_0 \cdot q^{75}$ et $z_{91} = z_0 \cdot q^{91}$. Ainsi, z_0 et q sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} z_0 \cdot q^{75} = 16\,777\,216 \\ z_0 \cdot q^{91} = 4\,294\,967\,296 \end{cases}.$$

Et on a :

$$\begin{cases} z_0 \cdot q^{75} = 16\,777\,216 \\ z_0 \cdot q^{91} = 4\,294\,967\,296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 \cdot q^{75} = 16\,777\,216 \\ \frac{q^{91}}{q^{75}} = \frac{4\,294\,967\,296}{16\,777\,216} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 \cdot q^{75} = 16\,777\,216 \\ q^{16} = 256 \end{cases}.$$

On s'intéresse ensuite plus particulièrement à déterminer q tel que $q^{16} = 256$, c'est-à-dire tel que $q^{16} - 256 = 0$. En remarquant que $256 = 2^8 = (2^4)^2$, et que q^{16} peut aussi s'écrire $(q^8)^2$, et en utilisant une identité remarquable, on obtient

$$q^{16} - 256 = (q^8)^2 - (2^4)^2 = (q^8 + 2^4)(q^8 - 2^4).$$

Or $q^8 = (q^4)^2$ donc est positif, et ainsi $q^8 + 2^4 > 0$. On en déduit donc l'équivalence suivante : $q^{16} - 256 = 0 \Leftrightarrow q^8 - 2^4 = 0$. Par le même raisonnement, en écrivant que

$$q^8 - 2^4 = (q^4)^2 - (2^2)^2 = (q^4 + 2^2)(q^4 - 2^2),$$

on obtient que $q^8 - 2^4 = 0 \Leftrightarrow q^4 - 2^2 = 0$. Une étape supplémentaire suivant toujours la même méthode donne $q^4 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 2 = 0$. Mettant bout à bout les équivalences démontrées, cela donne

$$q^{16} - 256 = 0 \Leftrightarrow q^8 - 2^4 = 0 \Leftrightarrow q^4 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 2 = 0.$$

On poursuit alors la résolution du système :

$$\begin{cases} z_0 \cdot q^{75} = 16\,777\,216 \\ z_0 \cdot q^{91} = 4\,294\,967\,296 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{16\,777\,216}{q^{75}} \\ q^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{16\,777\,216}{q^{75}} \\ q = \sqrt{2} \text{ ou } q = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

On en déduit que $z_0 = \frac{16\,777\,216}{(\sqrt{2})^{75}}$ ou $z_0 = \frac{16\,777\,216}{(-\sqrt{2})^{75}}$,
et ainsi $z_0 \approx 8,63 \times 10^{-5}$ ou $z_0 \approx -8,63 \times 10^{-5}$.

□

Correction de l'Exercice 2

1. Soit n un entier naturel. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{(n+1)^2}{5} + (n+1) - 3\right) - \left(\frac{n^2}{5} + n - 3\right) = \frac{n^2 + 2n + 1}{5} - \frac{n^2}{5} + 1 = \frac{2n+6}{5}.$$

Comme $\frac{2n+6}{5} \geq 0$, on en déduit que $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on conclut que la suite (u_n) est croissante.

2. Méthode 1 : par différence. Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n-1}{n+4} - \frac{n-2}{n+3} = \frac{(n-1)(n+3) - (n-2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - 3 - n^2 - 2n + 8}{(n+4)(n+3)} = \frac{5}{(n+4)(n+3)}. \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$, et ainsi la suite (v_n) est croissante.
Méthode 2 : par quotient. Soit n un entier naturel, $n > 2$. Alors $v_n \neq 0$ et on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)-2}{(n+1)+3}}{\frac{n-2}{n+3}} = \frac{(n-1)(n+3)}{(n+4)(n-2)} = \frac{n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2n - 8}.$$

Comme $n > 2$, on a $n^2 + 2n - 3 > n^2 + 2n - 8 > 0$, donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$. Or, pour tout $n > 2$, on a $v_n > 0$. Et on conclut que pour tout $n > 2$, $v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante à partir du rang $n = 3$.
Regardons ce qu'il en est sur les premiers termes. On a $v_0 = -2/3$, $v_1 = -1/4$, $v_2 = 0$ et $v_3 = 1/6$, et ces valeurs sont bien classées en ordre croissant. On conclut donc que (v_n) est croissante (à partir du rang $n = 0$).

3. Soit n un entier naturel. Comme w_n n'est pas égal à 0, on peut écrire :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}}{\frac{3^n}{5^{n+2}}} = \frac{3^{n+1} \cdot 5^{n+2}}{5^{n+3} \cdot 3^n} = \frac{3}{5}.$$

Donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$. Et en observant que $w_n > 0$, on conclut que $w_{n+1} \leq w_n$. Ainsi, (w_n) est décroissante.

4. Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n &= \frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1} = \frac{(n+1)2^{n+1}-(n+2)2^n}{(n+2)(n+1)} = \frac{n2^{n+1}+2^{n+1}-n2^n-2\cdot 2^n}{(n+2)(n+1)}\\ &= \frac{n2^{n+1}-n2^n}{(n+2)(n+1)} = \frac{n2^n(2-1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n2^n}{(n+2)(n+1)}.\end{aligned}$$

Donc $x_{n+1}-x_n \geq 0$ et la suite (x_n) est croissante.

□

Correction de l'Exercice 3

1. On rappelle que la suite (v_n) est définie par $v_n = 2+\frac{1}{n+3}$ pour tout entier naturel n.

a. Soit n un entier naturel. Alors :

$$v_{n+1}-v_n = 2+\frac{1}{n+4}-2-\frac{1}{n+3} = \frac{(n+3)-(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{(n+3)(n+4)}.$$

Donc $v_{n+1} \leq v_n$, pour tout entier naturel n. Ainsi, la suite v est décroissante.
D'autre part, comme $\frac{1}{n+3} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n \geq 2$ pour tout entier naturel n.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on sait que $v_n \geq 2$. En particulier, on a toujours $v_n > 1,99$. D'autre part,

$$v_n < 2,01 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{n+3} < 2,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} < 0,01 \Leftrightarrow n+3 > 100 \Leftrightarrow n > 97.$$

On conclut que $v_n \in \,]1,99\,;2,01[$ à partir du rang $n = 98$.

c. Comme précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n > 1,999$. Et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n < 2,001 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{n+3} < 2,001 \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} < 0,001 \Leftrightarrow n+3 > 1000 \Leftrightarrow n > 997.$$

On conclut que $v_n \in \,]1,999\,;2,001[$ à partir du rang $n = 998$.

2. On rappelle que (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -n^2+5n$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

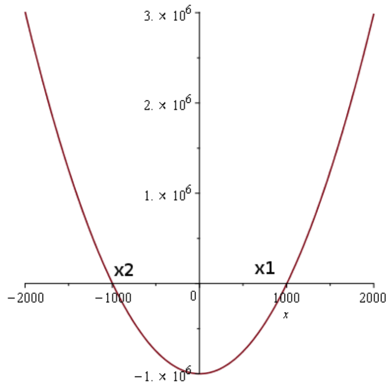
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= -(n+1)^2+5(n+1)-\left(-n^2+5n\right) = -(n+1)^2+5(n+1)+n^2-5n\\ &= -n^2-2n-1+5n+5+n^2-5n = -2n+4 = -2(n-2).\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1}-u_n \leq 0$ si et seulement si $n \geq 2$. On en déduit que $(u_n)_{n\geq \mathbf{2}}$ est décroissante (et le calcul des premiers termes donne $u_0 \leq u_1 \leq u_2$).

b. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n < -10^6 \Leftrightarrow -n^2+5n < -10^6 \Leftrightarrow 0 < n^2-5n-10^6.$$

On définit $P(x) = x^2-5x-10^6$, qui est un polynôme du second degré (dont la courbe est représentée un peu plus bas). Son discriminant est $\Delta = (-5)^2-4\times(-10^6) = 4\,000\,025$, et il admet donc deux racines : $x_1 = \frac{5+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{5-\sqrt{\Delta}}{2}$. Le coefficient de x^2 dans $P(x)$ étant positif, $P(x) > 0$ si et seulement si $x < x_2$ ou $x > x_1$. On remarque que $x_2 < 0$ et $x_1 > 0$.

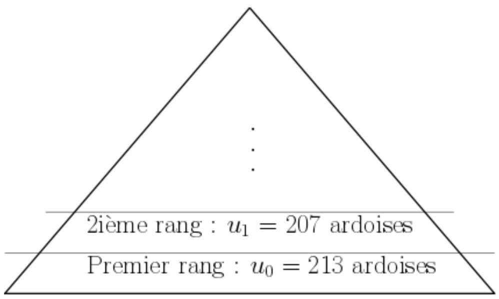


On déduit donc que $u_n < -10^6$ si et seulement si $n > x_1$. Comme $x_1 \approx 1002,5$, on conclut que $u_n < -10^6$ à partir du rang $n = 1003$.

□

Correction de l'Exercice 4

Commençons par un petit schéma du toit.



1. Remarquons que la différence entre deux termes successifs de la suite est toujours égale à -6. Ainsi, on peut formuler la conjecture suivante : la suite (u_n) semble être une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 213$ et de raison $r = -6$. Pour la suite de l'exercice, on supposera que cette conjecture est vérifiée.

2. On suppose donc que (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = -6$ et de premier terme $u_0 = 213$. D'après notre conjecture de la première question, u_n représente le nombre d'ardoises que comporte le $(n+1)$-ième rang. Le nombre d'ardoises sur le 22ième rang est donc $u_{21} = u_0 + 21r = 213 - 6 \times 21 = 87$.

3. Déterminons d'abord pour quelle valeur de n on a $u_n = 9$. On a les équivalences suivantes :

$$u_n = 9 \Leftrightarrow u_0 + nr = 9 \Leftrightarrow 213 - 6n = 9 \Leftrightarrow 6n = 213 - 9 \Leftrightarrow 6n = 204 \Leftrightarrow n = 34.$$

Remarquons au passage que ce calcul indique aussi que la toiture comporte exactement 35 rangs.

Le nombre total d'ardoises utilisées est donc $u_0 + u_1 + \ldots + u_{34}$. Pour connaître sa valeur, il nous faut donc calculer la somme des termes consécutifs de la suite (u_n), qui est une suite arithmétique. Cette somme vaut $\frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2}$ $\times$ nombre de termes. Ainsi, le nombre total d'ardoises utilisées est

$$\frac{u_0 + u_{34}}{2} \times 35 = \frac{213 + 9}{2} \times 35 = 3\,885.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 5

Notons a_n le coût en euros du n-ième mètre dans le devis A. L'énoncé indique donc que $a_1 = 200$ et $a_{n+1} = a_n + 10$ pour tout entier naturel n. On en déduit que $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de premier terme $a_1 = 200$ et de raison $r = 10$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $a_n = a_1 + (n-1)r = 200 + 10(n-1)$.
Attention ! Il faut remarquer que, la suite commençant au terme d'indice 1 et non 0, il faut bien écrire $10(n-1)$ dans la formule ci-dessus (et non $10n$).
En notant p la profondeur (en mètres) du puits souhaité par M. Dupont, le coût total (en euros) du forage pour le devis A sera donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_p &= \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes} \\ &= \frac{a_1 + a_p}{2} \times p = \frac{200 + (200 + 10(p-1))}{2} \times p \\ &= \frac{400 + 10p - 10}{2} \times p = (200 + 5p - 5) \times p = 5p^2 - 195p. \end{aligned}$$

De la même façon, notons b_n le coût en euros du n-ième mètre dans le devis B. Ainsi, $b_1 = 100$ et $b_{n+1} = 1,05\,b_n$ pour tout entier naturel n. On en déduit que $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $b_1 = 100$ et de raison $q = 1,05$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $b_n = 100 \times 1,05^{n-1}$ (avec la même remarque que précédemment concernant la puissance $n-1$ dans cette formule).
En notant p la profondeur (en mètres) du puits souhaité par M. Dupont, le coût total (en euros) du forage pour le devis B est obtenu comme somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_p &= \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \\ &= b_1 \times \frac{1 - q^p}{1 - q} = 100 \times \frac{1 - 1,05^p}{1 - 1,05} = \frac{100}{0,05}(1,05^p - 1) = 2\,000(1,05^p - 1). \end{aligned}$$

Pour un puits de 5m de pronfondeur (c'est-à-dire pour $p = 5$), le coût par le devis A est donc $5 \times 5^2 + 195 \times 5 = 1\,100$ euros, alors que le coût par le devis B est $2\,000(1,05^5 - 1) \approx 552,56$ euros. Dans ce cas, le devis B est plus avantageux.
Pour un puits de 55m de pronfondeur, les coûts par les devis A et B sont respectivement $5 \times 55^2 + 195 \times 55 = 25\,850$ euros et $2\,000(1,05^{55} - 1) \approx 27\,271,26$ euros. Dans ce cas, c'est le devis A qui est plus économique.
En fait, pour aller plus loin, on pourrait même démontrer que le devis B est le plus avantageux pour n'importe quelle profondeur jusqu'à 52m, et qu'à partir de 53m de profondeur, le devis A sera toujours plus économique.

$\square$

Correction de l'Exercice 6

Comme suggéré dans l'indication, notons u_n la somme disponible à la fin du n-ième mois (en euros). Le compte contenant au départ 1 000 euros, on a $u_0 = 1\,000$. Le premier mois,

100 euros sont crédités sur le compte, portant la somme totalisée à 1 100 euros. Puis on dépense 20% de cette somme, c'est-à-dire 220 euros. À la fin du premier mois, il reste donc $1\,100 - 220 = 880$ euros sur le compte. Ainsi, $u_1 = 880$. De la même manière, la somme restant sur le compte au bout du deuxième mois est $u_2 = (880 + 100) - 0,2 \times (880 + 100) = 0,8 \times 980 = 784$ euros.
Le raisonnement qui précède est valable pour tout entier n, et ainsi pour tout n, on a

$$u_{n+1} = (u_n + 100) - 0,2 \times (u_n + 100) = 0,8 \times (u_n + 100).$$

Posons ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 400$. En utilisant la relation entre u_{n+1} et u_n, on a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 400 = 0,8 \times (u_n + 100) - 400 = 0,8 \times u_n + 80 - 400 \\ &= 0,8 \times u_n - 320 = 0,8 \times u_n - 0,8 \times 400 = 0,8 \times (u_n - 400) = 0,8 \times v_n. \end{aligned}$$

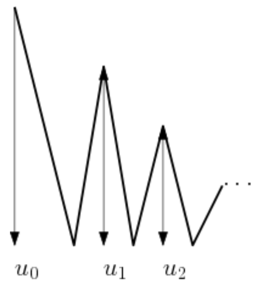
Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont la raison est $q = 0,8$ et dont le premier terme est $v_0 = u_0 - 400 = 600$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 600 \times 0,8^n$. Et ainsi, la somme contenue sur le compte au bout du n-ième mois est $u_n = v_n + 400 = 600 \times 0,8^n + 400$ euros. On peut par exemple en conclure aussi que le compte contiendra toujours au moins 400 euros.

$\square$

Correction de l'Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons u_n la hauteur atteinte par la balle après le n-ième rebond (en mètres). Les données de l'énoncé se traduisent par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 0,25u_n = \frac{3}{4}u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = 5$. On déduit que le terme général est $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
Pour obtenir la distance parcourue par la balle depuis son départ jusqu'au moment où elle rebondit pour la n-ième fois, on va voir qu'il suffit de calculer la somme suivante :

$$u_0 + 2 \times u_1 + 2 \times u_2 + 2 \times u_3 + \ldots + 2 \times u_{n-1} \text{ (que l'on peut aussi écrire } u_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} u_k).$$

En effet, comme illustré ci-dessous, depuis sa position initiale jusqu'au sol, la balle parcourt u_0 mètres. Puis elle rebondit pour la première fois, parcourt u_1 mètres vers le haut, et revient au sol parcourant à nouveau u_1 mètres (vers le bas), soit $2 \times u_1$ mètres entre le premier et le deuxième rebond. De la même façon, pour tout $k \geq 1$, entre le k-ième et le $(k+1)$-ième rebond, elle parcourt $2 \times u_k$ mètres.



Ceci justifie donc la formule donnée ci-dessus pour la distance parcourue par la balle depuis son départ jusqu'au n-ième rebond :

$$u_0 + 2 \times u_1 + 2 \times u_2 + 2 \times u_3 + \ldots + 2 \times u_{n-1} = u_0 + 2 \times (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}).$$

Nous avons vu plus haut que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{3}{4}$. On peut ainsi calculer la somme qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} u_0 + 2 \times (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) &= u_0 + 2 \times u_1 \times \frac{1 - q^{n-1}}{1-q} = 5 + 2 \times \left(5 \times \tfrac{3}{4}\right) \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 5 + \frac{30}{4} \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n-1}}{\frac{1}{4}} = 5 + 30\big(1 - (\tfrac{3}{4})^{n-1}\big) \\ &= 35 - 30 \times (\tfrac{3}{4})^{n-1}. \end{aligned}$$

On conclut que la distance (en mètres) parcourue par la balle jusqu'au n-ième rebond est $35 - 30 \times (\frac{3}{4})^{n-1}$.
On s'intéresse maintenant à la limite (si elle existe) de cette distance lorsque n tend vers l'infini. Comme $q = \frac{3}{4}$ est compris entre -1 et 1 strictement, on sait que q^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il en va de même de $q^{n-1} = \frac{1}{q} \times q^n$. La quantité $35 - 30 \times (\frac{3}{4})^{n-1}$ tend donc vers 35 lorsque n tend vers l'infini. On peut en conclure que la distance totale parcourue par la balle est 35 mètres.

$\square$

Correction de l'Exercice 8

1. On étudie les variations de la fonction f définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{4x+1}$. Cette fonction f est dérivable partout sur son intervalle de définition. Elle s'écrit comme un quotient $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 5x - 1$ et $v(x) = 4x + 1$. La dérivée de f est donc donnée par $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On calcule que pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 4$. Ainsi, pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{5(4x+1) - 4(5x-1)}{(4x+1)^2} = \frac{(20x+5) - (20x-4)}{(4x+1)^2} = \frac{9}{(4x+1)^2}.$$

En particulier, f' est strictement positive, et ainsi f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$. Le tableau des variations de f est

$$\begin{array}{c|lcr} x & \frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline & & & \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \\ f(x) & & \nearrow & \\ & f(1/2) & & \end{array}$$

On en conclut que pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. On calcule $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, dont on déduit que pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

2. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : u_n existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a par définition $u_0 = 1$, donc u_0 existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour un certain entier $n \geq 0$, et démontrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, u_n existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. De la question précédente, on déduit que $f(u_n)$ existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Et comme la définition de u_{n+1} est $u_{n+1} = \frac{5u_n-1}{4u_n+1} = f(u_n)$, ceci démontre bien que u_{n+1} existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
Conclusion. Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n, u_n existe et est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.
3. Dans la question précédente, on a en particulier démontré que u_n existe pour tout entier naturel n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.
La relation qui relie u_{n+1} à u_n est $u_{n+1} = \frac{5u_n-1}{4u_n+1}$. Elle n'est ni de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, ni de la forme $u_{n+1} = q \cdot u_n \ldots$ ou en tout cas, pas de manière évidente. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne semble être ni arithmétique, ni géométrique. Pour s'en assurer, on calcule les premières valeurs $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{4}{5}$ et $u_2 = \frac{5}{7}$, et on vérifie que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.
4. Sachant que $u_n > \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}.$$

En effet, le dénominateur de cette fraction ne sera jamais égal à 0.

Notre objectif est de montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Pour déterminer quels seraient dans ce cas son premier terme et sa raison r, on calcule

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0 - 1/2} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \\ v_1 &= \frac{1}{u_1 - 1/2} = \frac{1}{4/5 - 1/2} = \frac{10}{8-5} = \frac{10}{3} \\ r &= v_1 - v_0 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

On veut donc démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $r = 4/3$. Fixons un entier naturel n. On a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5u_n-1}{4u_n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{2\,(4u_n+1)}{2\,(5u_n-1) - (4u_n+1)} = \frac{8u_n+2}{6u_n-3}.$$

D'autre part, comme $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$, on a aussi $u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2}$. On en déduit donc que

$$v_{n+1} = \frac{8\left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{2}\right) + 2}{6\left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{2}\right) - 3} = \frac{\frac{8}{v_n} + 4 + 2}{\frac{6}{v_n} + 3 - 3} = \frac{v_n}{6}\left(\frac{8}{v_n} + 6\right) = \frac{8}{6} + v_n = v_n + \frac{4}{3}.$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite arithmétique de raison $\frac{4}{3}$.
On a calculé plus haut que son premier terme est $v_0 = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $v_n = 2 + \frac{4n}{3}$.
5. Par définition, pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$, et donc aussi $u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2}$.
La question précédente donne donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2 + \frac{4n}{3}} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6+4n} + \frac{1}{2} = \frac{3 + (2n+3)}{4n+6} = \frac{n+3}{2n+3}.$$

On peut par exemple en déduire la suite (u_n) a pour limite $\frac{1}{2}$ (voir l'exercice 3 pour la notion de limite). En effet, pour tout $n \geq 1$, on peut écrire

$$u_n = \frac{n+3}{2n+3} = \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(2+\frac{3}{n})} = \frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}},$$

et sachant que $\frac{3}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend vers $\frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$.

□

Correction de l'Exercice 9

Modélisons le problème. Pour tout entier naturel n, notons b_n le nombre de bactéries dans l'éprouvette au bout de n heures. Les données de l'énoncé se traduisent par $b_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + 0,25 \cdot b_n = 1,25 \cdot b_n$. Le nombre de bactéries dans l'éprouvette après n heures est donc donné par le n-ième terme d'une suite géométrique de premier terme 10 et de raison $1,25$, et donc par $b_n = 10 \times 1,25^n$.

Pour déterminer quand le nombre de bactéries dépasse $100\,000$, on cherche à connaître la plus petite valeur de n pour laquelle $b_n > 100\,000$. On a :

$$b_n > 100\,000 \Leftrightarrow 10 \times 1,25^n > 100\,000 \Leftrightarrow 1,25^n > 10\,000.$$

Avec la calculatrice, on voit que $1,25^{41} \approx 9\,404$ et $1,25^{42} \approx 11\,755$. On en déduit ainsi que $b_n > 100\,000 \Leftrightarrow n \geq 42$. C'est donc après 42 heures (soit un peu moins de deux jours) que l'éprouvette contient plus de $100\,000$ bactéries.

□

