Inégalités

N. Jacquet, M. Bouvel

Niveau : Première
Difficulté : ★ à ★★★★
Durée : 3h
Rubrique(s) : Analyse.

Exercice 1 (Un classique).
Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (Encadrements).
Donner un encadrement des expressions suivantes lorsque t varie dans $[-4;1]$:

1. $2t^2 - t + 9$, **2.** $\dfrac{2}{t^2+5}$, **3.** $\left|t - \dfrac{1}{2}\right|$.

Exercice 3 (Systèmes d'inéquations).
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0 \end{cases}$, **2.** $|x^2 + 2x - 3| < 6$.

Exercice 4 (Vrai ou faux ?).
Pour chacune des propositions ci-dessous : lorsque l'affirmation est vraie, la justifier ; lorsqu'elle est fausse, donner un contre-exemple et rajouter des conditions pour qu'elle devienne vraie.

1. $\begin{cases} a \leqslant b \\ a' \leqslant b' \end{cases} \Rightarrow aa' \leqslant bb'$

2. $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$

3. $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 < a' \leqslant b' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{a'} \leqslant \dfrac{b}{b'}$

4. $a \leqslant b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$

5. Pour a positif : $x^2 \geqslant a^2 \Leftrightarrow x \geqslant a$

6. $a \leqslant b \Rightarrow a^3 \leqslant b^3$

7. $|a| \leqslant |b| \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$

Exercice 5 (Une infinité d'inégalités).

1. Soit $x \in]0;1[$. Montrer que : $0 < \cdots < x^n < x^{n-1} < \cdots < x^3 < x^2 < x < 1$.

2. Soit $x \in]1;+\infty[$. Montrer que : $1 < x < x^2 < x^3 < \cdots < x^n < x^{n+1} < \cdots$.

3. Que dire des inégalités précédentes lorsque x est négatif ?

Exercice 6 (Disparition de racines).
Compléter les équivalences suivantes par une proposition ne faisant plus intervenir de symbole $\sqrt{}$. Ci-dessous, A désigne un nombre réel positif.

1. $\sqrt{A} \leqslant B \Leftrightarrow$ **2.** $\sqrt{A} \geqslant B \Leftrightarrow$

Exercice 7 (Inégalités remarquables).

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

3. Applications de 2). Montrer :

a. Pour tous réels a, b et c positifs, $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$;

b. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$\sqrt{1+x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant 2\sqrt{2}\,;$$

c. Pour tout réel x, $\left|\dfrac{2x\cos(x)}{x^2+1}\right| \leqslant 1$.

Exercice 8 (Soyons brefs).
Énoncer trois méthodes différentes pour montrer la proposition suivante et faire la preuve de celle-ci avec la méthode la plus rapide : pour tout réel positif x, $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{2x-1}{x+2} < 2$.

Exercice 9 (L'habit ne fait pas le moine. . .).
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n)+(-1)^n\cos(n)}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 10 (Puissances de x et inégalités).
Montrer :

1. pour tout réel x différent de 2, $\dfrac{4x-x^2}{(x-2)^2} \geqslant -1$;

2. pour tout réel x appartenant à $]-1;1[$, $|x^2+2x| < 3|x|$;

3. pour tout réel x supérieur à 6, $x^2 \leqslant x^3 - 5x^2 + 5 \leqslant 2x^3$;

4. pour tout réel x supérieur à 3, $\left|\dfrac{3-x}{2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x}$;

5. pour tout x réel, $\dfrac{1}{2(3+x^2)} \leqslant \dfrac{2+\sin(x)}{3+x^2}$.

Exercice 11 (Étude d'une fonction).
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|}} - 1$

1. Vérifier que $f(x)$ est bien défini pour tout réel x.

2. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{-|x|}{(1+\sqrt{1+|x|})\sqrt{1+|x|}}$.

3. En déduire que pour tout x réel, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x|$.

Exercice 12 (Que de racines !).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

Exercice 13 (Généralisation d'une identité remarquable).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant n+1$.

Exercice 14 (Les carrés à la rescousse).
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| < 1$;

2. $-1 < \frac{x+a}{1+ax} < 1$, où $a \in]-1;1[$ est un paramètre réel.

Exercice 15 (La somme des parties est mieux que le tout. . .).
Montrer que pour tous réels a et b, $a + b < 2 + a^2 + b^2$.

Indications

Indications sur l'Exercice 7

1. On pourra remarquer que $(x-y)^2 \geq 0$.

3.a. Développer le membre de gauche, et regrouper astucieusement les termes.

3.b. En élevant au carré, on pourra chercher à appliquer la question 3.a. en écrivant l'expression $(1+x)(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ sous la forme $(a+b)(b+c)(a+c)$ avec a, b et c positifs et vérifiant $abc = 1$.

Indications sur l'Exercice 10

1. On reconnaît dans $x^2 - 4x$ le début du carré de $(x-2)^2$.

3. Penser à l'inégalité triangulaire.

Indications sur l'Exercice 11

2. On pourra partir du membre de droite et démontrer qu'il est égal à $f(x)$.

Indications sur l'Exercice 14

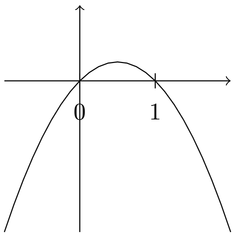
1. On remarquera comme le suggère le titre de l'exercice que $|a| < 1$ équivaut à $a^2 < 1$.

Indications sur l'Exercice 15

On pourra commencer par étudier le signe de $x^2 - x + 1$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1
On peut commencer par le vérifier graphiquement :



Dans le graphe de cette fonction $x \mapsto x(1-x)$ on reconnaît le graphe d'une parabole dont la concavité est tournée vers le bas, et qui admet donc un maximum. La fonction s'annulant en 0 et en 1, le sommet a pour abscisse $\frac{1}{2}$.

Remarquons d'abord que pour tout $x \in [0;1]$, $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, donc $x(1-x) \geqslant 0$.
Ensuite, en développant $x(1-x)$, on trouve $-x^2+x$, qui est un polynôme du second degré. On rappelle que le polynôme ax^2+bx+c admet un optimum en $x = \frac{-b}{2a}$, et que cet optimum est un minimum si a est positif, et un maximum si a est négatif. Dans le cas de $-x^2+x$, on sait donc qu'un maximum est atteint pour $x = \frac{-1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$, c'est-à-dire $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Une autre façon de vérifier la seconde inégalité est de remarquer que

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Un carré étant toujours positif, on obtient donc que pour tout réel x, $x^2 - x + \frac{1}{4} \geqslant 0$ ce qui équivaut à $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
En combinant les deux inégalités, on obtient que pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

□

Correction de l'Exercice 2

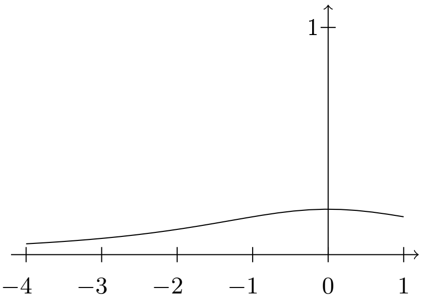
1. Il s'agit de nouveau de l'étude du signe d'un trinôme, par les résultats rappelés dans l'exercice précédent, on sait que $2t^2 - t + 9$ admet un minimum pour $t = \frac{-(-1)}{2\times 2} = \frac{1}{4}$. Ainsi, la fonction (que l'on note f) qui à $t \in [-4;1]$ associe $2t^2 - t + 9$ est décroissante sur $[-4;\frac{1}{4}]$ et croissante sur $[\frac{1}{4};1]$. Comme $f(-4) = 45$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{71}{8}$ et $f(1) = 10$, on a donc le tableau de variations suivant :

t	-4		$\frac{1}{4}$		1
$f(t)$	45	$\searrow$	$\frac{71}{8}$	$\nearrow$	10

On en déduit que

$$\text{pour tout } t \in [-4;1],\ \frac{71}{8} \leqslant 2t^2 - t + 9 \leqslant 45.$$

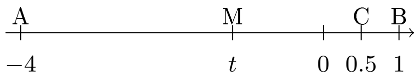
2.



Soit $t \in [-4;1]$. Alors $0 \leqslant t^2 \leqslant 16$, dont on déduit $5 \leqslant t^2+5 \leqslant 21$ puis $\frac{1}{21} \leqslant \frac{1}{t^2+5} \leqslant \frac{1}{5}$. Ainsi, on conclut que

$$\text{pour tout } t \in [-4;1],\ \frac{2}{21} \leqslant \frac{2}{t^2+5} \leqslant \frac{2}{5}.$$

3.



La quantité $|t-\frac{1}{2}|$ représente la distance du point M d'abscisse t au point C d'abscisse $\frac{1}{2}$. On cherche donc à encadrer la longueur CM lorsque M décrit le segment AB.

Pour tout $t \in [-4;1]$, $|t-\frac{1}{2}| \geqslant 0$ et cette borne est atteinte pour $t=\frac{1}{2}$.
D'autre part,lorsque t varie de -4 à $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire lorsque M décrit le segment AC) $|t-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}-t$ et la distance décroît de $\frac{9}{2}$ à 0. Lorsque t varie de $\frac{1}{2}$ à 1, (c'est-à-dire lorsque M décrit le segment CB) $|t-\frac{1}{2}| = t-\frac{1}{2}$ et la distance croît de 0 à $\frac{1}{2}$. Ceci se résume par le tableau de variations suivant :

x	-4		$\frac{1}{2}$		1
$\lvert x-\frac{1}{2}\rvert =$		$\frac{1}{2}-x$	0	$x-\frac{1}{2}$	
$\lvert x-\frac{1}{2}\rvert$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Ainsi, on conclut que

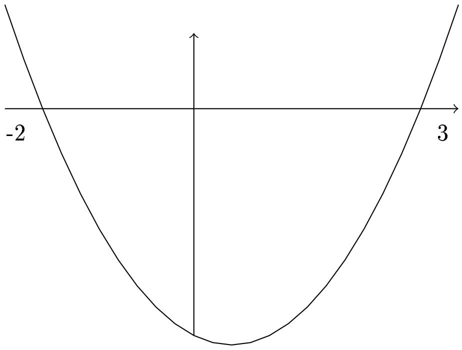
$$\text{pour tout } t \in [-4;1], 0 \leqslant \left|t-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{9}{2}.$$

Remarque : Dans la correction de tout cet exercice, les encadrements proposés sont optimaux, c'est-à-dire que pour chaque inégalité (large) il existe une valeur de t dans l'intervalle $[-4;1]$ pour laquelle il y a égalité. La consigne ne demandant pas des encadrements optimaux, des encadrements plus larges peuvent être acceptés comme “bonne réponse” …mais sont cependant moins précis.

□

Correction de l'Exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $P(x) = x^2-x-6$ et $Q(x) = x^2+3x-4$.



$P(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est

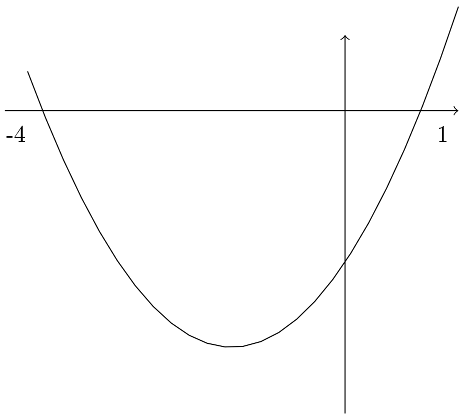
$$\Delta_P = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2.$$

Il admet donc deux racines distinctes :

$$\frac{1+5}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{1-5}{2} = -2.$$

Comme le cœfficient de x^2 dans $P(x)$ est positif,

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[.$$



$Q(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est

$$\Delta_Q = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 = 5^2.$$

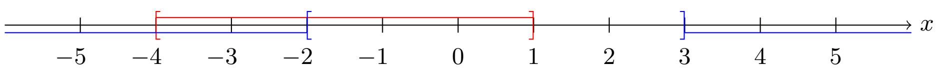
Il admet donc deux racines distinctes :

$$\frac{-3+5}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Comme le cœfficient de x^2 dans $Q(x)$ est positif,

$$Q(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 1].$$

Le système proposé est équivalent à « $P(x) > 0$ et $Q(x) \leqslant 0$ ». La solution du système est donc donnée par l'intersection de $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$ (domaine bleu) avec $[-4; 1]$ (domaine rouge).



On conclut que

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in [-4; -2[.$$

2. L'inéquation proposée $|x^2 + 2x + 3| < 6$ est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 6 \\ x^2 + 2x - 3 > -6 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire à} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 9 < 0 \\ x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases} .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $R(x) = x^2 + 2x - 9$ et $S(x) = x^2 + 2x + 3$.
$R(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est

$$\Delta_R = 2^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 40 = (2\sqrt{10})^2.$$

Il admet donc deux racines distinctes, $\frac{-2+2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} - 1$ et $\frac{-2-2\sqrt{10}}{2} = -\sqrt{10} - 1$. Comme le cœfficient de x^2 dans $R(x)$ est positif,

$$R(x) < 0 \iff x \in]-\sqrt{10} - 1; \sqrt{10} - 1[.$$

$S(x)$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_S = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$. Il n'admet donc aucune racine réelle. Comme le cœfficient de x^2 dans $S(x)$ est positif :

$$S(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

x est solution de l'inéquation proposée si et seulement si $R(x) < 0$ et $S(x) > 0$, c'est-à-dire si et seulement si x appartient à l'intervalle $]-\sqrt{10} - 1; \sqrt{10} - 1[$.

□

Correction de l'Exercice 4

Pour cet exercice, il est important de rappeler que les inégalités "changent de sens" lorsque l'on passe à l'inverse pour des quantités de même signe, ou lorsqu'on en multiplie les deux membres par des quantités négatives.

1. L'affirmation proposée est fausse.
En effet, par exemple pour $a = -1$, $b = 1$, $a' = -5$ et $b' = 0$, on a bien $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$ et pourtant $aa' = 5$ et $bb' = 0$ ne sont pas en ordre croissant.
Pour rendre l'affirmation vraie, il est suffisant de demander que les conditions supplémentaires $a \geqslant 0$ et $a' \geqslant 0$ soient vérifiées. En effet, sous ces conditions supplémentaires, comme $a' \geq 0$, en multipliant la première inégalité par a', on obtient $aa' \leq a'b$ puis en multipliant la seconde par b qui est positif car supérieur à a) on trouve $a'b \leq bb'$. Par transitivité de la relation $\leq$, on vérifie bien que $aa' \leq bb'$.

2. L'affirmation proposée est fausse.
En effet, par exemple pour $a = -1$ et $b = 0$, on a bien $a \leqslant b$ et pourtant $a^2 = 1$ et $b^2 = 0$ ne sont pas en ordre croissant.
Pour rendre l'affirmation vraie, il est suffisant de demander que la condition supplémentaire $a \geqslant 0$ soit vérifiée. C'est un cas particulier de la précédente avec $a' = a$ et $b' = b$.

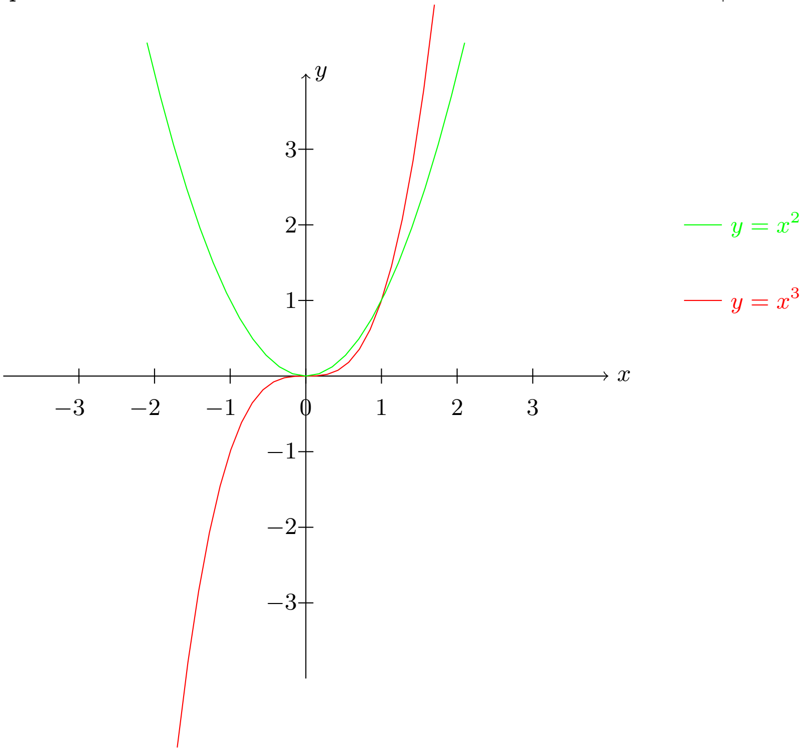
3. L'affirmation proposée est fausse.
En effet, par exemple pour $a = b = 1$, $a' = 1$ et $b' = 2$, on a bien $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 < a' \leqslant b'$ et pourtant $\frac{a}{a'} = 1$ et $\frac{b}{b'} = \frac{1}{2}$ ne sont pas en ordre croissant.
Pour rendre l'affirmation vraie, il est suffisant de remplacer l'inégalité $0 < a' \leqslant b'$ par $0 < b' \leqslant a'$. En effet dans ce cas, $0 < \frac{1}{a'} \leqslant \frac{1}{b'}$ et l'inégalité est celle de la première inégalité en remplaçant a' et b' par leurs inverses.

4. L'affirmation proposée est fausse.
En effet, par exemple pour $a = -2$ et $b = -1$, on a bien $a \leqslant b < 0$ et pourtant $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{b} = -1$ ne sont pas en ordre croissant.
Pour rendre l'affirmation vraie, il est suffisant de remplacer l'inégalité $a \leqslant b < 0$ par $b \leqslant a < 0$(voir la remarque en début d'exercice).

5. L'affirmation proposée est fausse.

En effet, par exemple pour $x=-1$ et $a=1$, on a bien $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant a^2$ et pourtant $x=-1$ et $a=1$ ne sont pas en ordre décroissant.
Pour rendre l'affirmation vraie, il est suffisant de demander en outre que x soit positif car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

6. L'affirmation proposée est vraie. Elle démontre la croissance de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Soient a et b tels que $a \leqslant b$. On peut démontrer que $a^3 \leqslant b^3$ en distinguant trois cas, selon que a et b sont positifs ou négatifs.
Cas 1 : Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors par le rappel $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ et $0 \leqslant a^3 \leqslant b^3$.
Cas 2 : Si $a \leqslant 0 \leqslant b$, alors $a^3 \leqslant 0$ et $0 \leqslant b^3$, donc $a^3 \leqslant b^3$.
Cas 3 : Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 0$. Comme $-a \geqslant -b \geqslant 0, -a^3 \geqslant -b^3$ et $a^3 \leqslant b^3 \leqslant 0$.
Dans tous les cas, on a bien $a^3 \leqslant b^3$, ce qui termine la démonstration.

7. L'affirmation proposée est vraie. Pour démontrer cette équivalence, on démontre les deux implications qui la composent.
Implication $\Rightarrow$: Supposons que $|a| \leqslant |b|$. Les valeurs absolues étant toujours positives, on a en fait $0 \leqslant |a| \leqslant |b|$, donc $0 \leqslant |a|^2 \leqslant |b|^2$ (toujours par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$). Comme pour tout x, $|x|^2 = x^2$, on en déduit en particulier que $a^2 \leqslant b^2$.
Implication $\Leftarrow$: Supposons que $a^2 \leqslant b^2$. Les carrés étant toujours positifs, on a en fait $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$, donc par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{b^2}$. Comme pour tout x, $\sqrt{x^2} = |x|$, on en déduit en particulier que $|a| \leqslant |b|$.
Ainsi, on a démontré l'équivalence $|a| \leqslant |b| \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.

$\square$

Correction de l'Exercice 5

1. Soit $x \in]0;1[$. On a évidemment $x > 0$, dont on peut déduire que toutes les puissances x^n de x vérifient $x^n > 0$.
On a aussi évidemment $x < 1$. À partir de cette inégalité stricte, en la multipliant par x^n nombre strictement positif, on obtient que $x^{n+1} < x^n$ pour tout entier naturel n.
En remarquant que l'inégalité $x^{n+1} < x^n$ est valable pour tout entier n, ceci démontre que $0 < \cdots < x^{n+1} < x^n < x^{n-1} < \cdots < x^3 < x^2 < x < 1$.

2. Soit $x \in]1;+\infty[$. On a évidemment $x > 1$, dont on peut déduire que toutes les puissances x^n de x vérifient $x^n > 1$.
En multipliant l'inégalité stricte $1 < x$ par x^n (ces nombres étant strictement positifs), on obtient que $x^n < x^{n+1}$.
L'inégalité $x^n < x^{n+1}$ étant valable pour tout entier n, ceci démontre que

$$1 < x < x^2 < x^3 < \cdots < x^{n-1} < x^n < x^{n+1} < \cdots$$

3. Lorsque x est négatif, en écrivant $y = -x$, on a $x^n = y^n$ si n est pair, et $x^n = -y^n$ si n est impair. Ainsi, on peut déduire des questions précédentes (appliquées à y) que :

- si $x \in]-1;0[$, alors $\begin{cases} -1 < x < x^3 < \cdots < x^{2n+1} < x^{2n+3} < \cdots < 0 \\ 0 < \cdots < x^{2n+2} < x^{2n} < \cdots < x^4 < x^2 < 1 \end{cases}$;
- si $x \in]-\infty;-1[$, alors $\begin{cases} \cdots < x^{2n+3} < x^{2n+1} < \cdots < x^3 < x < -1 \\ 1 < x^2 < x^4 < \cdots < x^{2n} < x^{2n+2} < \cdots \end{cases}$.

□

Correction de l'Exercice 6

1. $\sqrt{A} \leqslant B \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant A \\ 0 \leqslant B \\ \sqrt{A} \leqslant B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant A \\ 0 \leqslant B \\ A \leqslant B^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant A \leqslant B^2 \\ 0 \leqslant B \end{cases}$.

L'implication $\Rightarrow$ est obtenue en passant au carré, puisque $B \geqslant \sqrt{A} \geqslant 0$. Et pour l'implication $\Leftarrow$, la condition $A \geqslant 0$ est nécessaire afin de pouvoir prendre la racine et en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ on obtient $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B^2} = |B|$. la condition $B \geqslant 0$ donne alors $|B| = B$.

2. $\sqrt{A} \geqslant B \Leftrightarrow \big((B \geqslant 0 \text{ et } A \geqslant B^2) \text{ ou } (B \leqslant 0 \text{ et } A \geqslant 0)\big)$.
Ici, comme on ne connaît pas le signe de B, il faut distinguer deux cas selon que B est positif ou négatif. On a d'une part $\sqrt{A} \geqslant B \geqslant 0 \Leftrightarrow B \geqslant 0$ et $A \geqslant B^2$, et d'autre part $\sqrt{A} \geqslant B$ et $B \leqslant 0 \Leftrightarrow A \geqslant 0$ et $B \leqslant 0$ (en effet, l'inégalité $\sqrt{A} \geqslant B$ n'a de sens que pour $A \geqslant 0$ et est toujours vérifiée dès que B est négatif). La combinaison de ces deux cas aboutit à l'équivalence annoncée.

□

Correction de l'Exercice 7

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On rappelle l'identité remarquable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Un carré étant toujours positif, on en déduit que $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$. En isolant le produit xy dans un membre de l'inégalité, on obtient $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Deux méthodes sont possibles :
$\triangle$ On applique ce qui précède en remplaçant x par $|x|$ et y par $|y|$. Comme $x^2 = |x|^2$ et $|y|^2 = y^2$, on obtient bien le résultat souhaité.
$\triangle$ De la même façon qu'à la question précédente, mais en partant cette fois de l'identité remarquable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, on montre que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $-xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Ainsi, $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ est supérieur ou égal au produit xy et à son opposé, et donc à sa valeur absolue. On conclut que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
3.a. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$. En développant puis en factorisant certains termes, on obtient

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 2abc + a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2).$$

D'après la question précédente, on a $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $a^2+c^2 \geqslant 2ac$ et $b^2+c^2 \geqslant 2bc$. Comme a, b et c sont positifs, on a $(a^2+b^2)c \geqslant 2abc$, $(a^2+c^2)b \geqslant 2abc$ et $(b^2+c^2)a \geqslant 2abc$.
Avec la formule ci-dessus, on en conclut que $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.
3.b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 0$, l'inégalité proposée est équivalente à

$$(1+x)(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geqslant 8.$$

La forme de cette inégalité (un produit de trois termes à gauche, et un 8 à droite) suggère d'utiliser la question **3.a.** pour la démontrer.
On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}(1+x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 &= \sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)(\sqrt{x}+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

En posant $a = \sqrt{x}$, $b = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $c = 1$, on obtient donc par la question précédente que $(1+x)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 8$. Et en passant à la racine carrée (toutes les quantités sont positives), on en conclut que $\sqrt{1+x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant 2\sqrt{2}$.
3.c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction cos prend uniquement des valeurs entre -1 et 1, on peut écrire (en utilisant la question **2.**) que :

$$|2x\cos(x)| \leqslant |2x| \leqslant x^2+1 \leqslant |x^2+1|,$$

dont on déduit immédiatement que $\left|\frac{2x\cos(x)}{x^2+1}\right| \leqslant 1.$

$\square$

Correction de l'Exercice 8
Une première méthode pour démontrer la proposition est de faire une étude de fonction, pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ (dérivée, tableau de variation, limites, ...).
Une seconde méthode démontre les deux inégalités séparément. Pour chacune d'entre elles, on la transforme en une inégalité équivalente en multipliant par $x+2$ (dont le signe est constant –et ici positif– sur $\mathbb{R}_+$) et en isolant x d'un côté de l'inégalité, jusqu'à obtenir une inégalité dont on vérifie immédiatement qu'elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

La troisième méthode consiste à écrire $\frac{2x-1}{x+2}$ sous la forme $a+\frac{b}{x+c}$, pour des constantes a, b et c à déterminer, et à isoler x pour aboutir à une suite de deux inégalités dont on vérifie immédiatement qu'elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
On développe ici la troisième méthode.
On écrit d'abord $\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-5}{x+2}=2-\dfrac{5}{x+2}$. Ensuite, on a équivalence entre les assertions suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leqslant \frac{2x-1}{x+2} < 2 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant 2-\frac{5}{x+2} < 2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant -\frac{5}{x+2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{x+2} > 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leqslant x+2 \text{ et } \frac{1}{x+2} > 0 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a de manière évidente $x+2 \geqslant 2$ et $\frac{1}{x+2} > 0$, dont on déduit par ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{2x-1}{x+2} < 2$.

□

Correction de l'Exercice 9
Comme les fonctions sin et cos ne prennent que des valeurs entre -1 et 1, on peut écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sin(n)+(-1)^n\cos(n)}{2n+1}\right| &= \frac{|\sin(n)+(-1)^n\cos(n)|}{|2n+1|} \\ &\leqslant \frac{|\sin(n)|+|(-1)^n\cos(n)|}{2n+1} \\ &\leqslant \frac{|\sin(n)|+|\cos(n)|}{2n+1} \\ &\leqslant \frac{2}{2n+1} \\ &\leqslant \frac{2}{2n} \\ &\leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité proposée par l'exercice.

□

Correction de l'Exercice 10
1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on peut écrire que

$$\frac{4x-x^2}{(x-2)^2} = -\frac{x^2-4x+4-4}{(x-2)^2} = -\frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^2} = -1+\frac{4}{(x-2)^2}.$$

On en déduit immédiatement que pour tout x différent de 2, $\dfrac{4x-x^2}{(x-2)^2} \geqslant -1$.

2. Pour tout x, on a $|x^2+2x| \leqslant |x^2|+|2x| \leqslant |x|^2+2|x|$. En remarquant que si $|x|<1$, alors on a $|x|^2<|x|$, on en conclut facilement que pour tout $x \in]-1;1[$, $|x^2+2x|<3|x|$.

3. Soit $x \geqslant 6$.
$\triangle$ Une méthode classique consiste à étudier le signe de $f(x) = x^3 - x^2 + 5 - x = x^3 - 6x^2 + 5$ et $g(x) = x^3 - 5x^2 + 5 - 2x^3 = -x^3 - 5x^2 + 5$.
On remarque immédiatement que $f(x) = x^2(x-6) + 5 \geq 5$ pour $x \geq 6$. On obtient donc $f(x) > 0$ pour $x \geq 6$ ce qui donne la première inégalité.
La fonction g apparaît comme somme de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ (opposées des fonctions croissantes $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 5x^2 - 5$). Donc pour $x \geqslant 6$, $g(x) \leq g(6) = -6^3 - 5*36 + 5 < 0$ ce qui permet de trouver la seconde inégalité.
$\triangle$ Une seconde méthode consiste à encadrer les quantités intervenant dans l'expression du milieu $x^3 - x^2 + 5$.
Remarquons que $x^3 - 5x^2 + 5 = x^2(x-5) + 5$. Ainsi, comme $x - 5 \geqslant 1$, on en déduit que $x^3 - 5x^2 + 5 \geqslant x^2$.
D'autre part, $x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $-5(x^2-1) \leqslant 0$. On a aussi $0 \leqslant x^3$. Ainsi, on obtient que $-5x^2 + 5 \leqslant x^3$, et donc que $x^3 - 5x^2 + 5 \leqslant 2x^3$.
On conclut que pour tout $x \in [6; +\infty[$, $x^2 \leqslant x^3 - 5x^2 + 5 \leqslant 2x^3$.

4. Soit $x \geqslant 3$. Alors on a $\left|\dfrac{3-x}{2+x^2}\right| = \dfrac{|3-x|}{|x^2+2|} = \dfrac{x-3}{x^2+2}$. Puisque $x - 3 \leqslant x$ et $x^2 + 2 \geqslant x^2$, on en déduit que

$$\frac{x-3}{x^2+2} \leqslant \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

On en conclut que pour tout $x \in [3; +\infty[$, $\left|\dfrac{3-x}{2+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$.

5. La fonction sin prenant toutes ses valeurs entre -1 et 1, on peut écrire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $\frac{1}{3+x^2} \geqslant 0$, on a

$$\frac{2+\sin(x)}{3+x^2} \geqslant \frac{2-1}{3+x^2} \geqslant \frac{1}{3+x^2} \geqslant \frac{1}{2(3+x^2)}.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 11

1. Par définition de la valeur absolue, $1 + |x|$ est un réel strictement positif, donc $\sqrt{1+x}$ est défini et strictement positif.

2. Pour retirer une valeur absolue au dénominateur d'une expression de la forme $a + \sqrt{b}$ (respectivement $a - \sqrt{b}$), on multiplie numérateur et dénominateur par sa quantité conjuguée $a - \sqrt{b}$ (respectivement $a + \sqrt{b}$) et on utilise l'identité remarquable $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = a^2 - b$ au dénominateur.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{-|x|}{(1+\sqrt{1+|x|})\sqrt{1+|x|}} &= \frac{-|x|(1-\sqrt{1+|x|})}{(1-\sqrt{1+|x|})(1+\sqrt{1+|x|})\sqrt{1+|x|}} \\
&= \frac{-|x|(1-\sqrt{1+|x|})}{(1-(1+|x|))\sqrt{1+|x|}} \quad \text{par identité remarquable} \\
&= \frac{-|x|(1-\sqrt{1+|x|})}{-|x|\sqrt{1+|x|}} \\
&= \frac{1-\sqrt{1+|x|}}{\sqrt{1+|x|}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|x|}} - 1 = f(x).
\end{aligned}$$

3. Sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+|x|} \geqslant 1$ et $1+\sqrt{1+|x|} \geqslant 2$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x)| = \frac{|x|}{(1+\sqrt{1+|x|})\sqrt{1+|x|}} \leqslant \frac{|x|}{2}.$$

□

Correction de l'Exercice 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par identité remarquable,

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = n+1-n = 1$$

on a donc : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Sachant que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$, on en déduit que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, pour tout i entre 1 et n, on a $\frac{1}{\sqrt{i}} \geqslant 2(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})$. En sommant ces inégalités pour i allant de 1 à n, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\left((\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right).$$

Les termes dans le membre de droite se simplifient deux-à-deux (on parle de somme télescopique), et il reste $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$. Ainsi, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2(\sqrt{n+1}-1).$$

□

Correction de l'Exercice 13

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En développant, on obtient que

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = (x+x^2+x^3\cdots+x^n) - (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}).$$

Les termes se simplifient deux-à-deux, laissant seulement

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = x^n - 1.$$

2. Pour $n=0$, l'inégalité proposée est bien vérifiée. En effet, $2^0=1$ et $0+1=1$.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. En remplaçant x par 2 dans l'égalité obtenue à la question **1)**, on obtient

$$2^n - 1 = (2-1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}) = 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}.$$

En remarquant que pour tout i, $2^i \geqslant 1$, on en conclut que $2^n - 1 \geqslant n$, c'est-à-dire $2^n \geqslant n+1$.

□

Correction de l'Exercice 14
La résolution de cet exercice se base sur les équivalences suivantes :

$$|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$$

lorsque b est un réel positif.
1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| < 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow (2x+1)^2 < (x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow (2x+1)^2 - (x-1)^2 < 0 \qquad \Leftrightarrow (2x+1-x+1)(2x+1+x-1) < 0 \\
&\Leftrightarrow 3x(x+2) < 0
\end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	
$3x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$+$	

Ainsi $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| < 1 \Longleftrightarrow x \in]-2;0[$.
2. Soit $a \in]-1;1[$. Ceci implique en particulier que $1-a^2>0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors pour $ax \neq -1$

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{x+a}{1+ax} < 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{x+a}{1+ax}\right)^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow (x+a)^2 < (1+ax)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2 < 1+2ax+a^2x^2 \\
&\Leftrightarrow x^2(1-a^2)+a^2-1 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2-1)(1-a^2) < 0 \\
&\Leftrightarrow x^2-1 < 0 \text{ car} 1-a^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow x \in]-1;1[.
\end{aligned}$$

x est solution si et seulement si $x \in]-1;1[$ et $ax \neq -1$.
Si x et a sont tous deux compris strictement entre -1 et 1, alors le produit ax l'est aussi (et ne peut donc pas être égal à -1). Aussi

$$-1 < \frac{x+a}{1+ax} < 1 \Longleftrightarrow x \in]-1;1[.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 15
Commençons par démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$.
Pour cela, posons $P(x) = x^2 - x + 1$. C'est un polynôme du second degré, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. $P(x)$ est donc de signe constant lorsque x varie sur $\mathbb{R}$, et strictement positif ici. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x < x^2 + 1$.
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On déduit de ce qui précède que $a < a^2 + 1$ et $b < b^2 + 1$, et en sommant ces deux inégalités, on conclut que $a + b < a^2 + b^2 + 2$.

$\square$

