Révision des équivalents et des développements limités

G.Hargé-S.Sidaner

Niveau : Bac+1
Difficulté : ★ à ★★
Durée : 3 heures
Rubrique(s) : Analyse .

Cette fiche a pour but de revoir et retravailler les développements limités.
Les deux thèmes abordés sont les équivalents et les développements limités avec des exercices d'application. Ils sont précédés de rappels concernant les limites de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes, ainsi que les limites des suites à valeurs réelles ou complexes. La partie de rappel sur les limites ne comporte pas d'exercices.

I. Rappels sur les limites

1. Voisinages

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (ce qu'on notera $[-\infty, +\infty]$). Dans la suite, on dira qu'une propriété dépendant d'un réel x est vraie au voisinage de x_0, x_0 exclus (ou sur un voisinage de x_0, x_0 exclu) si et seulement si elle est vraie pour :

- $x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[\, \setminus \{x_0\}$ avec un certain $r > 0$, si $x_0 \in \mathbb{R}$ (on ne demande donc pas que la propriété soit vraie en x_0). Suivant le contexte, on se contentera des intervalles $]x_0 - r, x_0[$ (voisinage à gauche) ou $]x_0, x_0 + r[$ (voisinage à droite).
- $x \in \,]-\infty, A[$ avec un certain $A \in \mathbb{R}$, si $x_0 = -\infty$.
- $x \in \,]A, +\infty[$ avec un certain $A \in \mathbb{R}$, si $x_0 = +\infty$.

Remarque : l'hypothèse "la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour x dans un voisinage de x_0, x_0 exclu" ne signifie pas que $\mathcal{P}(x)$ est nécessairement fausse pour les autres valeurs de x. Cela signifie juste que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour x au moins dans un voisinage de x_0, x_0 exclu.

2. Limites

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $h :]x_0 - r, x_0[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Rappelons la définition de $\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x) = \ell$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ (ou $\ell \in \mathbb{C}$) :

$$[\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - r, x_0[\,, \quad x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |h(x) - \ell| < \varepsilon\,].$$

Dans cette phrase mathématique, il est important de noter qu'on ne demande pas que l'inégalité $|h(x) - l| < \varepsilon$ soit vérifiée pour $x = x_0$. Dans cette notion de limite, x tend donc vers x_0 par la gauche en étant **<u>différent</u>** de x_0. La même remarque est valable pour la définition de $\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x) = l$ ainsi que pour celle de $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} h(x) = \pm\infty$.
En s'appuyant sur cette remarque, on introduit la définition suivante.

<u>Définition</u> : Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et h une application à valeurs réelles ou complexes définie au voisinage de x_0, x_0 exclu. Avec une telle hypothèse, h peut être définie en x_0 ou ne pas être définie en x_0. Soit $\ell \in [-\infty, +\infty]$ ou $\ell \in \mathbb{C}$.

- Si le voisinage de x_0 sur lequel h est définie est du type $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$, on dira que h tend vers l lorsque x tend vers x_0, <u>x différent de x_0</u>, si et seulement si

  $$\lim_{x \to x_0^-} h(x) = l \quad \underline{\textbf{et}} \quad \lim_{x \to x_0^+} h(x) = l,$$

  Si $l \in \mathbb{R}$ ou si $l \in \mathbb{C}$, ceci équivaut à :

  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[\,,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon)$.

  On note ceci : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l.}$

- Si le voisinage de x_0 sur lequel h est définie est du type $]x_0 - r, x_0[$, l'expression $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$ signifiera $\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x) = l$.
- Si le voisinage de x_0 sur lequel h est définie est du type $]x_0, x_0 + r[$, l'expression $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$ signifiera $\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x) = l$.

Exemple : Soit h définie par $h(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$.
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} h(x) = 0$ mais h n'admet pas de limite en 0 (c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ n'existe pas) car $h(0) \neq 0$ (faire un dessin).
Remarque : Dans ce rappel, on écrira $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$ même si x_0 peut valoir $-\infty$ ou $+\infty$. Dans ce cas-là, il s'agira simplement de $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = l$ ou de $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$.

II. Équivalents

1. Définitions

- On dit que deux fonctions f et g (définies au voisinage de x_0, x_0 exclu) sont équivalentes en $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (notation : $f \underset{x_0}{\sim} g$) si et seulement si on peut trouver h définie sur un voisinage de x_0, x_0 exclu, telle que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = 1 \text{ et } [\, f(x) = g(x)\, h(x) \text{ sur un voisinage de } x_0,\, x_0 \text{ exclu}\,]\, (C)\,.$$

Dans le cas où f **<u>et</u>** g sont définies en x_0, on demande de plus que $f(x_0) = g(x_0)$ (si l'une des deux fonctions est définie en x_0 et que l'autre ne l'est pas, on se contente de la condition (C)).
Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, x_0 exclu, on a :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ (f(x_0) = g(x_0) \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont définies en } x_0) \end{cases}.$$

- On dit que deux suites réelles ou complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ (notation : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$) si et seulement si on peut trouver une suite (w_n) définie pour n assez grand telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = 1 \text{ et } [\, u_n = v_n w_n \text{ au voisinage de } +\infty\,]\,.$$

Dans le cas où v_n ne s'annule pas sur un voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

<u>**Dans toute la suite** $x_0 \in [-\infty, +\infty]$.</u>

La méthode la plus utilisée pour trouver un équivalent d'une fonction f est de chercher une fonction <u>g non nulle au voisinage de x_0</u>, x_0 exclu, telle que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ (de même pour les suites).

Une remarque à ne pas oublier :
De plus, lorsqu'on obtient dans un calcul : $f \underset{x_0}{\sim} 0$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$, il y a de fortes chances que le calcul soit faux.
En effet, $f \underset{x_0}{\sim} 0$ signifie $f(x) = 0 \times h(x)$ au voisinage de x_0 (x_0 exclu), c'est-à-dire : $f(x) = 0$ au voisinage de x_0 (x_0 exclu), ce qui ne se produira pas car on ne vous demandera jamais de trouver un équivalent de la fonction nulle.
Lorsque vous voulez montrer $f \underset{x_0}{\sim} g$ en travaillant sur $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, vous devez toujours vérifier au préalable que <u>g ne s'annule pas au voisinage de x_0</u>, x_0 exclu (même remarque pour $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$).

Remarque : Si une fonction f définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ avec a réel a une limite finie ℓ non nulle en $+\infty$, on a alors $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ a pour limite 1 en $+\infty$ donc $f \underset{+\infty}{\sim} 1$; par contre, la fonction g sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et n'est pas équivalente à la fonction nulle.

2. Liste des équivalents à connaître :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$;	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;	$\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$;
$\tan x \underset{0}{\sim} x$;	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$;	pour $\alpha \in \mathbb{R}$:
	$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Si $P(x) = a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$ avec $a_d \neq 0$ et $a_n \neq 0$ ($(d, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $d < n$) alors : $P(x) \underset{0}{\sim} a_d x^d$ et $P(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$. Une fonction polynomiale équivaut à son terme de plus bas degré en 0 et à son terme de plus haut degré en l'infini.

3. Propriétés

- Si f est dérivable en x_0 réel et si $f'(x_0) \neq 0$ alors
$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$
- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$ ($l \in [-\infty, +\infty]$ ou $l \in \mathbb{C}$) alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l$ (de même pour les suites).

- L'équivalence conserve les signes. On suppose $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors :

  Si f est positive au voisinage de x_0 alors g est positive au voisinage de x_0 (de même pour les suites).

  Si f est négative au voisinage de x_0 alors g est négative au voisinage de x_0 (de même pour les suites).
- Dans fg ou dans $\frac{f}{g}$, on peut remplacer f et g par un équivalent.
  On ne peut pas le faire dans $f+g$.
  En voici un contre-exemple : soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$ et $g(x) = -x + x^3$; on a alors $f \underset{0}{\sim} x$, $\underset{0}{\sim} -x$ et $\underset{0}{\sim} x^2$.
- Composition des équivalents par "l'intérieur", appelée substitution ou changement de variable : soit φ une fonction, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$ alors $f \circ \varphi \underset{t_0}{\sim} g \circ \varphi$ (il s'agit d'une conséquence directe du théorème de composition des limites).
- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f^n \underset{x_0}{\sim} g^n$ et $|f|^\alpha \underset{x_0}{\sim} |g|^\alpha$.

Exemple : si $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = 0$ alors $\ln(1 + \varphi(t)) \underset{t_0}{\sim} \varphi(t)$ (on a utilisé l'équivalence $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$).

Remarque sur la composition des équivalents par "l'extérieur" : la régle générale est de se méfier. La question est la suivante : si $f \underset{x_0}{\sim} g$, quand peut-on dire : $\varphi \circ f \underset{x_0}{\sim} \varphi \circ g$? Il existe des théorèmes dans des cas particuliers. Pour répondre à la question, utilisez la composition des limites pour déterminer la limite de $\varphi \circ f / \varphi \circ g$. **Les erreurs les plus fréquentes concernent les fonctions logarithme et exponentielle.** En général : $f \underset{x_0}{\sim} g \nRightarrow \ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$ et $f \underset{x_0}{\sim} g \nRightarrow e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$ (de même pour les suites).

Exemples :

Exemple 1 : Soient $f(x) = \frac{1}{x+x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ alors $f \underset{0}{\sim} g$ mais $x \to e^{f(x)}$ et $x \to e^{g(x)}$ ne sont pas équivalentes en 0. En effet :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+x^2} = \frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{\to} 1 \quad \text{donc} \quad f \underset{0}{\sim} g.$$

D'autre part, e^f et e^g ne sont pas équivalentes en 0 car :

$$\frac{\exp\left(f\left(x\right)\right)}{\exp\left(g\left(x\right)\right)} = e^{f(x)-g(x)} = e^{\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{x}}$$

Or $\dfrac{1}{x+x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x^2}{x\left(x+x^2\right)} = \dfrac{-1}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} -1$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\left(f\left(x\right)\right)}{\exp\left(g\left(x\right)\right)} = e^{-1} \neq 1 \quad$ (composition des limites).

Exemple 2 : Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$. En effet : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par conséquent, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont strictement positifs et $\ln v_n \neq 0$. On peut donc écrire, pour n assez grand :

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \ln\left(v_n\right)}{\ln\left(v_n\right)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln\left(v_n\right)} + 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(v_n\right) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln v_n} = 1$ et donc $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$.

4. Mise en pratique

Exercice 1 (Recherche d'équivalents et de limites en 0).
Pour chacune de ces fonctions f, donner un équivalent en 0 du numérateur N, du dénominateur D et en déduire la limite ℓ de f en 0.

1. $f(x) = \dfrac{\sin x - \tan x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)}$

4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(2x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}}{\tan x}$

5. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \ln(\mathrm{e} + x)}{x^3 + \sin(x)\cos(x)}$

6. $f(x) = \dfrac{(\ln(\cos x))^2}{x(\sin x - \tan x)}$

Exercice 2 (Recherche d'équivalents et de limites).
Pour chacune de ces fonctions f, donner un équivalent en a du numérateur N, du dénominateur D et en déduire la limite ℓ de f en a

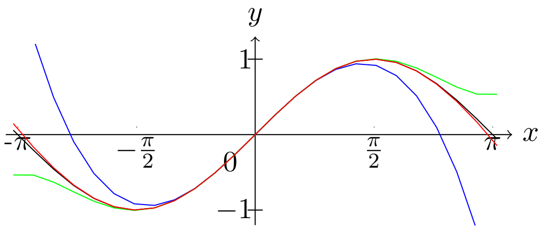
1. $a > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (remarque : on ne travaille qu'à droite de a)

2. $a = 1,\ f(x) = \dfrac{1-x}{1-\sqrt{1-\cos(\frac{\pi x}{2})}}$

3. $a = \dfrac{\pi}{3},\ f(x) = \dfrac{\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)}{2\cos(x) - 1}$

III. Développements limités

Les développements limités servent pour les approximations numériques, les recherches de limites et d'équivalents.
Soit la fonction sin définie sur $[-\pi, \pi]$. Voici un graphe la représentant en noir avec ses premiers développements limités ; en bleu $y = x - \dfrac{x^3}{6}$,en vert $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ et en rouge $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{5040}$.



1. Fonctions négligeables

<u>**Définitions**</u> :

- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, x_0 exclu. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ (notation : $f \underset{x_0}{=} o(g)$) si et seulement si on peut trouver une fonction ε définie au voisinage de x_0, x_0 exclu, telle que :

  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } [\, f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \text{ au voisinage de } x_0,\ x_0 \text{ exclu}\,].$$

  Dans le cas où f <u>**et**</u> g sont définies en x_0, on demande de plus que $f(x_0) = 0$.
  Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, x_0 exclu, on a $f \underset{x_0}{=} o(g)$ équivaut à :

  $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (et, dans le cas où } f \text{ et } g \text{ sont définies en } x_0,\ f(x_0) = 0)].$$

- On considère deux suites réelles ou complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que u_n est négligeable devant v_n au voisinage de $+\infty$ (notation : $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$) si et seulement si on peut trouver une suite (w_n) définie pour n assez grand telle que : :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \text{ et } \left[u_n = v_n w_n \text{ au voisinage de } +\infty \right].$$

Dans le cas où v_n ne s'annule pas sur un voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Dans toute la suite $x_0 \in [-\infty, +\infty]$.

Remarques importantes :

(i) On notera donc $o(g)$ une fonction qui vérifie, dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, x_0 exclu : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \dfrac{o(g)(x)}{g(x)} = 0.$

(ii) L'égalité $f(x) \underset{x_0}{=} o(x^n)$ signifie qu'on peut écrire au voisinage de x_0, x_0 exclu : $f(x) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \varepsilon(x) = 0$.

En particulier, $f(x) \underset{x_0}{=} o(1)$ signifie : $f(x) = 1\times\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} \varepsilon(x) = 0$.

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} o(1) = 0}$.

(iii) De même, dans le contexte d'un travail sur les suites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} o(1) = 0}$.

Méthode générale :

Pour montrer que $f \underset{x_0}{=} o(g)$, on vérifie que g est non nulle au voisinage de x_0, x_0 exclu, et on calcule $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}} f(x)/g(x)$ (de même pour les suites).

Propriétés :

- Si $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et si h est une fonction définie au voisinage de x_0 alors $hf \underset{x_0}{=} o(hg)$ (de même pour les suites).

- Si $f_1 \underset{x_0}{=} o(g)$ et si $f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$ alors $f_1 + f_2 \underset{x_0}{=} o(g)$ (de même pour les suites).
- $f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{x_0}{=} g + o(g) \Leftrightarrow g \underset{x_0}{=} f + o(f)$ (de même pour les suites).
- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $o(f) = o(g)$ au voisinage de x_0 (de même pour les suites).

Cas particuliers :

- Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x^{n+p} \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$ et $x^n o(x^p) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+p})$.
- Croissance comparée :
  - ⋆ dans l'étude de la limite en 0 ou en l'infini de $x^\alpha (\ln x)^\beta$, c'est x^α qui impose sa limite (si $\alpha \neq 0$) ;
  - ⋆ dans l'étude de la limite en l'infini de $x^\alpha e^x$, c'est e^x qui impose sa limite.

Ecriture avec des quantificateurs :

Comme toute limite, la notion d'équivalence ou de négligeabilité peut s'écrire avec des quantificateurs, ce qui peut être utile dans des exercices techniques. En voici quelques exemples :

- Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, b[$ avec $f \underset{b}{=} o(g)$. On a alors si b est réel :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, b - \alpha < x < b \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

- De même, compte-tenu de la troisième propriété, $f \underset{b}{\sim} g$ si b est réel :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, b - \alpha < x < b \Longrightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

- Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, b[$ avec $f \underset{b}{=} o(g)$. On a alors si $b = +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0, x > A \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

  On peut de même écrire l'équivalence de deux fonctions en $+\infty$.

Les autres cas à droite de a, en un point,en $-\infty$ ou l'équivalence de deux suites ou la négligeabilité d'une suite par rapport à une autre suite se traitent de manière analogue.

Dans toute la suite, x_0 désigne un réel.

2. Définitions d'un développement limité

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D (avec $D \subset \mathbb{R}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{U}$ un ensemble du type $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ ou $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ou $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ ou $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ ou $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ ou $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ (avec $\varepsilon > 0$). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (en abrégé : un $DL_n(x_0)$) si et seulement si on peut trouver un ensemble de type $\mathcal{U}$ contenu dans D et des réels (ou des complexes si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$) $a_0, ..., a_n$ tels que pour tout x dans $\mathcal{U}$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \qquad (*)$$

Si $x_0 \in \mathcal{U}$, ceci signifie en particulier que $(*)$ est vraie en x_0 et donc que $f(x_0) = a_0$.
Il est sous-entendu ici que $o((x - x_0)^n)$ est une fonction négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0. Si le contexte n'est pas clair, on pourra noter cette expression :

$$\underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n).$$

$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle la partie régulière du développement limité, $o((x - x_0)^n)$ s'appelle le reste.

Remarque : Suivant si $x_0 \in \mathcal{U}$ ou si $x_0 \notin \mathcal{U}$, le DL peut être valable en x_0 ou ne pas être valable en x_0. Dans la suite, on emploiera le vocabulaire suivant (vocabulaire non standard mais compréhensible par tout le monde) :

(i) Si $\mathcal{U} =]x_0, x_0 + \varepsilon[$ avec un certain $\varepsilon > 0$, on dit que f admet un développement limité à droite en x_0, x_0 exclu.

(ii) Si $\mathcal{U} = [x_0, x_0 + \varepsilon[$ avec un certain $\varepsilon > 0$, on dit que f admet un développement limité à droite en x_0, x_0 inclu.

(iii) De même pour des ensembles $\mathcal{U}$ du type $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ ou $]x_0 - \varepsilon, x_0]$.

(iv) Si $\mathcal{U} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ avec un certain $\varepsilon > 0$, on dit que f admet un développement limité en x_0, x_0 exclu.

(v) Si $\mathcal{U} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec un certain $\varepsilon > 0$, on dit que f admet un développement limité en x_0, x_0 inclu.

Exemples :

(i) Le $DL_3(0)$ de sin est : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ce DL est valable pour x dans tout intervalle du type $]-\varepsilon, \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ donc en particulier en $x = 0$. Il s'agit donc d'un DL en 0, 0 inclu.

(ii) On en déduit, pour $x \neq 0$: $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$. Il s'agit d'un $DL_2\left(0\right)$ de la fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Ce DL est valable pour x dans tout ensemble du type $\left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\setminus \{0\}$ $(\varepsilon > 0)$ et il n'est pas valable en $x = 0$ (car $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas défini en 0 !). Il s'agit d'un DL en 0, 0 exclu.

Définition. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, on peut toujours l'écrire sous la forme :

$$f\left(x_0 + h\right) \underset{h \to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_m h^m + o\left(h^m\right)\right) \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0 \ (n = m + p).$$

Cette écriture est appelée forme normalisée d'un développement limité. On a alors : $f\left(x_0 + h\right) \underset{h \to 0}{\sim} a_0 h^p$ (car $a_0 \neq 0$).

Exemple : la forme normalisée du $DL_3\left(0\right)$ de sin est

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)$$

3. Premières propriétés

(i) Si f admet un $DL_n\left(x_0\right)$ alors ce DL est unique.

(ii) Si f admet un $DL_n\left(0\right)$ du type $f\left(x\right) = P\left(x\right) + o\left(x^n\right)$ avec P fonction polynomiale de degré au plus n et si f est une fonction paire, alors P est aussi une fonction paire, on en déduit que P ne contient que des puissances paires. De même, si f est impaire, P ne contient que des puissances impaires.

(iii) Si f admet un $DL_n\left(x_0\right)$ de type $(*)$ avec $n \geq 1$, alors f admet un $DL_{n-1}\left(x_0\right)$ donné par

$$f\left(x\right) = a_0 + a_1\left(x - x_0\right) + \cdots + a_{n-1}\left(x - x_0\right)^{n-1} + o\left(\left(x - x_0\right)^{n-1}\right),$$

c'est-à-dire qu'il suffit d'enlever le dernier terme.

(iv) Dans le cas où $\underline{x_0 \in \mathcal{U}}$, on a les équivalences suivantes :
f admet un DL_0 en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est continue en x_0
f admet un DL_0 à droite en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est continue à droite en x_0
f admet un DL_0 à gauche en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est continue à gauche en x_0
Rappelons que pour un DL de ce type : $a_0 = f\left(x_0\right)$.

De même : f admet un DL_1 en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est dérivable en x_0
f admet un DL_1à droite en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est dérivable à droite en x_0
f admet un DL_1à gauche en x_0, x_0 inclu $\Longleftrightarrow$ f est dérivable à gauche en x_0
Dans ce cas, $f'(x_0) = a_1$.

(v) Dans le cas où $\underline{x_0 \notin \mathcal{U}}$ et si f n'est pas définie en x_0, on peut se servir de l'existence d'un $DL_0(x_0)$ ou d'un $DL_1(x_0)$ pour prolonger f en x_0.

- Supposons que f ne soit pas définie en x_0 et que f admette un $DL_0(x_0)$, $\underline{x_0 \text{ exclu}}$, donné par $f(x) = a + o(1)$. On peut choisir alors de prolonger f en x_0 en posant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\widetilde{f}(x_0) = a$. $\widetilde{f}$ prolonge f par continuité en x_0 car on a :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \widetilde{f}(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} [a + o(1)] = a = \widetilde{f}(x_0).$$

- Supposons de plus que f admette un $DL_1(x_0)$, $\underline{x_0 \text{ exclu}}$, donné par $f(x) = a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$. On prolonge comme précédemment f par continuité en x_0 en posant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\widetilde{f}(x_0) = a$. L'existence d'un $DL_1(x_0)$ permet de montrer que ce prolongement est en réalité dérivable en x_0. En effet :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - a}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} [b + o(1)] = b.$$

Donc $\widetilde{f}$ est dérivable en x_0 et $\left(\widetilde{f}\right)'(x_0) = b$.

(vi) Les propriétés 4 et 5 ne s'étendent pas aux DL d'ordres supérieurs ou égaux à deux sans hypothèse supplémentaire.

(vii) Le premier terme **non nul** d'un DL de f en x_0 donne un équivalent de f en x_0 (il s'agit du premier terme **non nul** car il faut pouvoir diviser par ce terme pour trouver un équivalent).

Exemple important concernant l'utilisation de la propriété 4 :

Considérons l'application f définie par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$.
On en déduit, pour $x \neq 0$: $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)$. On constate, grâce à la définition de f en 0, que ce DL_1 est aussi valable en $x = 0$. On en déduit, avec la propriété 4, que f est dérivable en 0.
Considérons maintenant l'application g définie par :

$$g(0) = 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

On obtient, pour $x \neq 0$: $g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)$. On constate que ce DL_1 n'est pas valable en $x = 0$. On ne peut donc pas utiliser la propriété 4. De plus, sur cet exemple, on observe que g n'est pas dérivable en 0 car elle n'est même pas continue en 0.
L'existence d'un DL_1 pour g en 0 ne permet donc pas d'en déduire que g est dérivable en 0.
Si on souhaite utiliser la propriété 4 pour montrer qu'une application est dérivable en x_0, il faut s'assurer que le $DL_1(x_0)$ obtenu est bien valable en $x = x_0$.

4. Théorème de Taylor-Young.

Le théorème de Taylor-Young ci-dessous concerne des fonctions qui sont définies en x_0. Ce théorème permet donc d'affirmer l'existence d'un DL en x_0, x_0 inclu.

Théorème de Taylor-Young : Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (I peut être ouvert, semi-ouvert ou fermé). Soient $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère une application f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors f admet un $DL_n(x_0)$, x_0 inclu, donné par :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).}$$

Ce théorème permet d'obtenir tous les développements limités usuels en 0 (c'est-à-dire en $x_0 = 0$).

Remarque : x_0 peut être à l'intérieur de I ou x_0 peut être une extrémité de I (tout en appartenant à I).

Une conséquence du théorème de Taylor-Young :
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle du type $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ ou $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ou $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) et si on connait par ailleurs un $DL_n(x_0)$ donné par

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$, alors, par unicité du DL : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Attention à ne pas oublier le reste lorsque vous écrivez des développements limités et à ne pas utiliser un signe $\sim$ à la place du signe $=$. L'assertion $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x + 10x^2$ est aussi vraie que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x - x^4$ ou $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x - \dfrac{x^3}{6}$

Liste des développements limités en 0 à connaître :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad (DL_n(0) \text{ de } \exp),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad (DL_{2n+1}(0) \text{ de } \cos),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad (DL_{2n+2}(0) \text{ de } \sin),$$

$$\mathrm{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad (DL_{2n+1}(0) \text{ de ch}),$$

$$\mathrm{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad (DL_{2n+2}(0) \text{ de sh}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad (DL_n(0) \text{ de : } x \mapsto \ln(1+x)),$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $DL_n(0)$ de : $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Cas particuliers :

- $\alpha = -1$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)}$$

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha = p$, a_n le coefficient de x^n est $a_n = \frac{\alpha(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$; il est donc nul pour $n > p$ et vaut $\binom{n}{p}$ pour $n \leq p$. On a pour $n \geq p$: $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$. Le reste est donc nul.
- On peut aussi en déduire les $DL_n(0)$ de $\sqrt{1+x}$ ($\alpha = \dfrac{1}{2}$) et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ($\alpha = -\dfrac{1}{2}$).

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \tfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-3)}{2\times4\times6\cdots\times(2k)} x^k + o(x^n)$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \tfrac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\cdots\times(2k)} x^k + o(x^n)$$

5. Opérations sur les développements limités

La connaissance des DL usuels et l'utilisation des règles de calculs sur les développements limités permettent de calculer la plupart des développements limités. En dernier recours, on peut utiliser la formule de Taylor--Young. **Tous les théorèmes cités dans cette partie concernent uniquement des développements limités en** 0.
La première règle à retenir est la suivante :

Si l'on souhaite calculer grâce aux théorèmes ci-dessous le DL ***en*** 0 ***à l'ordre n d'une fonction*** h ***construite à l'aide d'un certain nombre de fonctions*** f_1, f_2, ..., ***on doit écrire les*** DL ***des fonctions*** f_1, f_2, ... ***à l'ordre n en*** 0***. Cette règle peut-être contournée dans certains cas en écrivant les DL sous forme normalisée mais il est conseillé de ne le faire que lorsqu'on a acquis une certaine dextérité.***

Notation : si $P \in \mathbb{C}[X]$ et si $n \in \mathbb{N}$, on appelle Troncature de P au degré n, et on note $\text{Tronc}_n(P)$, la partie de P constituée des monômes de degrés inférieurs ou égaux à n.
Par exemple, si $P = 2X + 5X^2 + X^3$ alors $\text{Tronc}_2(P) = 2X + 5X^2$ et $\text{Tronc}_4(P) = P$.

- **Addition des DL (en** 0**).**

Si, sur un même voisinage de 0, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ alors

$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n).$$

- **Produit des DL (en** 0**).**

Si, sur un même voisinage de 0, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$ alors

$$f(x)\, g(x) = \mathrm{Tronc}_n\left[P(x)Q(x)\right] + o(x^n).$$

- **Composition des DL (en** 0**).**

On suppose que sur un voisinage de 0, noté V_1, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et que sur un voisinage de 0, noté V_2, $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ (avec $(P, Q) \in (\mathbb{C}_n[X])^2$). Si $\boxed{g(0) = 0}$ et si $g(V_2) \subset V_1$ alors $f \circ g$ est bien définie au voisinage de 0 et $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(g(x)) = \mathrm{Tronc}_n\left[P(Q(x))\right] + o(x^n).$$

Remarque :

$$g(0) = 0 \Longleftrightarrow Q(0) = 0 \Longleftrightarrow (\text{ le terme constant dans } Q \text{ est nul}).$$

Voici la méthode sur deux exemples :

(i) Calcul du $DL_3(0)$ de $\exp(\sin x)$.
Ici, $g(x) = \sin x$ et on a bien $\sin(0) = 0$.
Les $DL_3(0)$ de sin et de l'exponentielle sont :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad \exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right).$$

Notons $Q(x) = x - \frac{x^3}{6}$. Le $DL_3(0)$ de $\exp(\sin x)$ se calcule en remplaçant u par $Q(x)$ dans la partie régulière du $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ et en ne conservant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 3.
Le théorème affirme qu'on peut écrire :

$$\exp(\sin x) = \mathrm{Tronc}_3\left[1 + Q(x) + \frac{Q(x)^2}{2} + \frac{Q(x)^3}{6}\right] + o\left(x^3\right).$$

Plus précisement, le théorème affirme qu'on peut écrire $o\left(x^3\right)$ à la fin de la ligne précédente car on a écrit les DL de sin et exp à l'ordre 3.

On en déduit :

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

Remarque 1 : On peut faire le calcul sous forme de tableau :

	1	x	x^2	x^3
1	1			
$Q(x)$		1		$-1/6$
$Q^2(x)$			1	
$Q^3(x)$				1
$\exp(\sin(x))$	1	1	$1/2$	$-1/6 + 1/6 = 0$

Remarque 2 : ici, le coefficient du terme en x^3 est nul.

(ii) Calcul du $DL_3(0)$ de $\exp(\cos x)$.

Ici, $g(x) = \cos x$ et $\cos(0) \neq 0$. On ne peut donc pas appliquer le théorème de composition. Sur ce cas particulier, on peut néanmoins calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(\cos x)$ de la façon suivante. Le $DL_3(0)$ de $\cos x$ donne $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. On peut donc écrire :

$$e^{\cos x} = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) = e^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right).$$

On voit apparaître $\exp(g_1(x))$ avec $g_1(x) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. g_1 est une application possédant un $DL_3(0)$ et vérifiant de plus $g_1(0) = 0$. On peut donc appliquer à $\exp(g_1(x))$ la méthode utilisée dans l'exemple précédent. On pose donc $Q(x) = -\frac{x^2}{2}$ et on remplace u par $Q(x)$ dans la partie régulière du $DL_3(0)$ de $\exp u$. On peut affirmer qu'on obtient bien ainsi le $DL_3(0)$ de $\exp(g_1(x))$ car on utilise les $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ et de $g_1(x)$. D'où :

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) &= \mathrm{Tronc}_3\left[1 + Q(x) + \frac{Q(x)^2}{2} + \frac{Q(x)^3}{6}\right] + o\left(x^3\right)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$e^{\cos x} = e - e\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

- **Inversion d'un DL (en 0).**
Si, sur un voisinage de 0, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ (avec $P \in \mathbb{C}_n[X]$) et si $\boxed{f(0) \neq 0}$, alors $1/f$ admet un $DL_n(0)$ sur le même voisinage de 0.
Remarque : $f(0) \neq 0 \Leftrightarrow P(0) \neq 0 \Leftrightarrow$ (le terme constant de P est non nul).

On procède de la façon suivante. On part de :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad , \quad \text{avec } a_0 \neq 0.$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} x + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n + o(x^n)}.$$

On pose $Q(x) = \frac{a_1}{a_0} x + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n$ et on utilise le théorème de composition avec le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o(u^n).$$

Dans la partie régulière de ce DL, on remplace u par $Q(x)$. Cette démarche est légitime car $Q(0) = 0$. D'où :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0} \mathrm{Tronc}_n \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q(x)^k \right] + o(x^n).$$

Lorsque $f(0) = 0$, on peut adapter cette technique. Comme on va le voir sur l'exemple suivant, on n'obtient pas un développement limité mais ce qu'on appelle un développement asymptotique (ou généralisé).

Exemple $DL_3(0)$ de $x/\sin x$.
Cette fonction est l'inverse de $f_1 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0. En utilisant la forme normalisée du DL de sin, on obtient :

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$$

On a bien $f_1(0) \neq 0$. On peut donc appliquer la méthode d'inversion à $1/f_1(x)$.
sin étant développable à tout ordre, il en est de même de f_1. De plus f_1 étant paire, les parties régulières des développements limités d'ordre

2 et 3 sont les mêmes. On se limite donc à l'ordre 2. f_1 est connue par son $DL_2(0)$. En utilisant le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+u}$, on obtient le $DL_2(0)$ de $1/f_1(x)$ (on remplace u par $Q(x) = -x^2/6$ dans la partie régulière du $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+u}$) :

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right).$$

On a donc par parité de la fonction

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)$$

Exemple : Développement de $1/\sin x$ en 0.

On ne peut pas utiliser la méthode d'inversion d'un DL car $\sin(0) = 0$ mais $\dfrac{1}{\sin(x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{x}{\sin(x)}$, d 'où :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o\left(x^2\right).$$

On a obtenu ce qu'on appelle le développement asymptotique de $1/\sin x$ à l'ordre 2 en 0 (remarquer la différence entre l'ordre 3 pris pour sin et celui obtenu à la fin).

- **DL d'un quotient (en 0).**

  On calcule le DL de f/g en calculant le DL de $f \times 1/g$.

  Exemple : Développement de $\tan(x)$ à l'ordre 3 en 0.

  Comme $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$:

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

  Comme $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$$

  soit $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Si on avait voulu calculer le développement de $\cos x/\sin x$ en 0, on aurait obtenu un développement asymptotique. La fonction $\cos/\sin$ n'admet pas de développement limité en 0.

- **Intégration des développements limités**

On suppose que f est dérivable sur $]x_0-r,x_0+r[$ ou $[x_0,x_0+r[$ ou $]x_0-r,x_0]$ (avec un certain $r>0$). Si f' admet un $DL_n(x_0)$, x_0 inclu, du type :

$$f'(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),$$

alors f admet un $DL_{n+1}(x_0)$, x_0 inclu, donné par

$$f(x)=f(x_0)+a_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\cdots+a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

On peut retrouver ainsi le DL en 0 de la fonction : $x\mapsto\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)\\ \Rightarrow \ln(1+x) &= \ln(1)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+o\left(x^{n+1}\right).\end{aligned}$$

On peut aussi trouver le DL en 0 de arctan et de arcsin grâce à : $(\arctan)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $(\arcsin)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\arctan(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n})\\ &\arcsin(x)=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\cdots\times(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+1})\end{aligned}}$$

Remarque : On suppose connu le développement limité d'ordre n de f en x_0. Si on sait que que f est dérivable sur $]x_0-r,x_0+r[$ et que f' admet un $DL_{n-1}(x_0)$, alors on l'obtient en dérivant celui de f.

6. Méthodes de calculs "rapides" de développements limités

Les exemples donnés ici montrent comment accélérer le calcul d'un développement limité. Les deux premiers exemples sont fondamentaux. La technique utilisée dans le troisième exemple doit être manipulée avec précaution. En particulier, il est déconseillé de se servir de cette méthode si vous n'êtes pas sûr de vous.

(i) **Recherche du $DL_5(0)$ de $(\sin x)^3$.**

Si on applique la règle générale indiquée au début du paragraphe **5.**, on doit utiliser leDL à l'ordre 5 de sin en 0. Sur ce cas particulier, on va voir que le DL à l'ordre 3 suffit.

Grâce au DL de sin, on peut écrire : $\sin x = xh(x)$ (forme normalisée) où h admet un DL en 0 à tout ordre de premier terme non nul.

On a donc : $(\sin x)^3 = x^3 (h(x))^3$. Par conséquent, pour obtenir le $DL_5(0)$ de $(\sin x)^3$, il suffit d'avoir le $DL_2(0)$ de $(h(x))^3$. D'après la règle sur le produit, il suffit donc d'écrire le $DL_2(0)$ de $h(x)$. Cela signifie donc qu'on peut se contenter du $DL_3(0)$ de sin. D'où comme $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$(\sin x)^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^3,$$

(ici, $h(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$).

On applique deux fois la règle sur le produit des DL :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \text{Tronc}_2\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2\right) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2).\end{aligned}$$

On obtient bien un DL à l'ordre 2 car on a utilisé deux DL à l'ordre 2.

On continue :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^3 &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \text{Tronc}_2\left(\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\right) + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Bien entendu, on effectue toujours ce calcul de façon plus rapide en écrivant directement :

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^3 \overset{(\diamond)}{=} \text{Tronc}_2\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3\right) + o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Remarque : l'égalité ($\diamond$) ci-dessus est légitime car elle s'obtient en réalité en utilisant deux fois de suite la règle sur le produit des DL, comme on vient de le voir.
On en déduit :

$$(\sin x)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right).$$

(ii) **Exemple important :** recherche du $DL_m(0)$ de $(e^x - 1)^m$ où m est un **entier fixé** non nul.
On peut écrire, en utilisant le DL de e^x : $e^x - 1 = xh(x)$ où h admet un DL en 0 à tout ordre. On a donc : $(e^x - 1)^m = x^m (h(x))^m$. Par conséquent, pour obtenir le $DL_m(0)$ de $(e^x - 1)^m$, il suffit d'écrire le $DL_0(0)$ de $h(x)$, c'est–à-dire le $DL_1(0)$ de e^x. D'où :

$$(e^x - 1)^m = (x + o(x))^m = x^m (1 + o(1))^m.$$

On applique la règle sur le produit des DL. L'expression : "$1 + o(1)$" est un DL à l'ordre 0 donc $(1 + o(1))^m$ donne un DL à l'ordre 0 :

$$(1 + o(1))^m = \mathrm{Tronc}_0\left(1^m\right) + o(1) = 1 + o(1).$$

D'où :

$$(e^x - 1)^m = x^m (1 + o(1)) = x^m + o(x^m).$$

Si on avait utilisé directement la règle sur le produit des DL, on aurait écrit le $DL_m(0)$ de e^x, ce qui donne :

$$(e^x - 1)^m = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k!} + o(x^m)\right)^m = \mathrm{Tronc}_m\left(\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k!}\right)^m\right) + o(x^m) = \ldots$$

Remarque : si m est une fonction de x, on doit procéder autrement. On a utilisé ici la règle sur le produit de deux fonctions, qu'on a généralisée à un produit de m fonctions, car m est un **entier fixé**. Pour déterminer le DL de $(e^x - 1)^{g(x)}$, on est obligé d'écrire :

$$(e^x - 1)^{g(x)} = \exp\left(g(x) \ln\left(e^x - 1\right)\right)$$

et d'utiliser les DL de g, de ln et de exp.

(iii) **Recherche du $DL_5(0)$ de** $\cos(\sin x)$. Cet exemple est destiné à ceux qui maîtrisent bien les DL et qui souhaitent comprendre complètement les méthodes de simplifications.

On peut appliquer à $\cos(\sin x)$ la méthode de calcul du DL d'une composée de fonctions car $\sin(0) = 0$.

A priori, on doit écrire les DL de cos et sin à l'ordre 5.

On sait que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$. On voit donc apparaître $(\sin x)^2$ et $(\sin x)^4$. On va utiliser la technique présentée dans les deux exemples précédents :

$$\sin x = xh(x) \text{ donc } (\sin x)^2 = x^2 (h(x))^2 \text{ et } (\sin x)^4 = x^4 (h(x))^4.$$

Pour obtenir $(\sin x)^2$ à l'ordre 5, il suffit d'écrire $(h(x))^2$ à l'ordre 3 donc $h(x)$ à l'ordre 3. On a donc besoin de $\sin x$ à l'ordre 4, c'est-à-dire de :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right).$$

On a gagné un terme par rapport au $DL_5(0)$ de sin.

Le calcul donne alors :

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2 = x^2\left(\operatorname{Tronc}_3\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2\right) + o\left(x^3\right)\right)\\ &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir $(\sin x)^4$ à l'ordre 5, il suffit d'écrire $(h(x))^4$ à l'ordre 1 donc $h(x)$ à l'ordre 1. On a donc besoin de $\sin x$ à l'ordre 2, c'est-à-dire de :

$$\sin x = x + o\left(x^2\right) = x(1 + o(x)).$$

Le calcul donne :

$$(\sin x)^4 = x^4(1 + o(x))^4 = x^4\left(\operatorname{Tronc}_1\left(1^4\right) + o(x)\right) = x^4(1 + o(x)) = x^4 + o\left(x^5\right).$$

D'où finalement :

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^4\right).$$

On remarque que la partie régulière du développement limité est paire, ce qui est attendu puisque la fonction initiale l'est.

7. Développement limité en x_0 réel

Pour calculer le $DL_n(x_0)$ de f si x_0 est réel , on calcule le $DL_n(0)$ de g définie par $g(h) = f(x_0 + h)$. On obtient comme $f(x) = g(x - x_0)$:

$$\begin{aligned} g(h) &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n) \\ \Rightarrow f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$.

8. Développements asymptotiques (ou généralisés) en $+\infty$ ou en $-\infty$

On se ramène à une étude en 0 : pour calculer le développement généralisé de f si x_0 est infini, on calcule le $DL_n(0)$ de $g(h) = f\left(\dfrac{1}{h}\right)$. On obtient :

$$\begin{aligned} g(h) &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n) \\ \Rightarrow f(x) &= g\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \end{aligned}$$

- **Exemple en $+\infty$:**

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad (x > 0 \text{ quand } x \to +\infty)$$

On utilise :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u \to 0}{o}\left(u^2\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Ici : $o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ désigne une quantité négligeable devant $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a bien : $-\frac{1}{8x\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ et $\frac{1}{2\sqrt{x}} = o(\sqrt{x})$. Les termes sont bien rangés dans l'ordre du plus prépondérant au plus négligeable.

Remarque : on ne peut pas chercher de développement asymptotique de $\sqrt{1+x}$ en $-\infty$ car $\sqrt{1+x}$ n'est pas défini pour $x < -1$.

- **Exemple en $-\infty$:**

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= \sqrt{-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} \quad (x<0 \text{ quand } x\to-\infty)\\ &= \sqrt{-x}-\frac{1}{2\sqrt{-x}}-\frac{1}{8x\sqrt{-x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{-x}}\right).\end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\sqrt{1-u}=1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\underset{u\to0}{o}\left(u^2\right).$$

- **Développement asymptotique de $u_n=\frac{\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n(\ln n)^2}$ quand n tend vers $+\infty$:**

Comme $\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)=\ln\left(n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right)$,on a alors :

$$\begin{aligned}\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) &= \ln n+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \ln n+\ln\left(1+1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\ &= \ln n+\ln\left(2+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) &= \ln n+\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{16n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\\ &\underset{(\star)}{=} \ln n+\ln 2+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{16n^4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\ &= \ln n+\ln 2+\frac{1}{4n^2}-\frac{3}{32n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

D'où :

$$u_n=\frac{1}{n\ln n}+\frac{\ln 2}{n\left(\ln n\right)^2}+\frac{1}{4n^3\left(\ln n\right)^2}-\frac{3}{32n^5\left(\ln n\right)^2}+o\left(\frac{1}{n^5\left(\ln n\right)^2}\right)$$

Remarques :

(i) Dans ce développement asymptotique, les termes sont bien rangés du plus prépondérant au plus négligeable car :

$$\frac{3}{32n^5\left(\ln n\right)^2}=o\left(\frac{1}{4n^3\left(\ln n\right)^2}\right) \quad , \quad \frac{1}{4n^3\left(\ln n\right)^2}=o\left(\frac{\ln 2}{n\left(\ln n\right)^2}\right)$$

et $\dfrac{\ln 2}{n\left(\ln n\right)^2}=o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.

(ii) Pour $(\star)$, on a utilisé $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ avec

$$x = x_n = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{16n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
De plus : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ donc $o\left(x_n^2\right) = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$, ce qui justifie $(\star)$.

9. Mise en pratique :

Exercice 3 (Développements limités en 0**).**
Effectuer les développements limités des expressions suivantes en 0 à l'ordre n :

1. $n = 4$ $\quad \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$;

2. $n = 5$ $\quad \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;

3. $n = 4$ $\quad \ln\left(\dfrac{2-x^2}{3-x}\right)$.

4. $n = 4$ $\quad \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$;

5. $n = 4$ $\quad (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$;

6. $n = 4$ $\quad \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(\arcsin(x))^2}$;

Exercice 4 (Etude au voisinage de 0 **de** $f(x) = \arcsin(1-x^2)$**).**
Soit $f(x) = \arcsin(1-x^2)$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0^+ (à droite de 0) et le calculer.

2. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0^- (à gauche de 0) et le calculer.

3. f admet-elle un développement limité à l'ordre 3 en 0 ?

Exercice 5.
Déterminer les réels a et b pour que $f(x) = \arcsin(x) - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit en 0 un infiniment petit d'ordre maximal. Pour ces valeurs, donner l'équivalent de $f(x)$ en 0.

Exercice 6 (Développement limité d'ordre 7 de $\tan(x)$ **en** 0).

L'exercice suivant est un exercice de synthèse des différentes méthodes. Seul le développement d'ordre 3 est au programme de CPGE et est à connaître : $\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$.

Les questions en dehors de la première sont à traiter indépendamment les unes des autres.

1. Justifier que tan admet un développement limité à tout ordre, impair et de premier terme x. On pose

$$\tan(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7)$$

2. Donner le développement de $\dfrac{1}{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 6. En déduire celui de $\tan(x)$ à l'ordre 7.

3. Vérifier que $f : x \mapsto -\ln(\cos(x))$ est une primitive de tan au voisinage de 0. Par le développement limité de f en 0 à l'ordre adéquat,donner le développement limité de $\tan(x)$ à l'ordre 7 en 0.

4. Démontrer que la fonction dérivée de tan admet un développement limité à tout ordre. Quel est son développement limité d'ordre 7 en fonction des coefficients de celui de tan. En utilisant le fait que tan est solution de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$, trouver un système vérifié par (a, b, c) et le résoudre.

5. En utilisant le fait que $\tan(\arctan(x)) = x$, déterminer un un système vérifié par (a, b, c) et le résoudre.

Exercice 7.

Effectuer les développements limités des expressions suivantes en a à l'ordre n :

1. $a = \frac{\pi}{3}$ $\quad n = 3 \quad f_1(x) = \sqrt[3]{\cos(x)}$;

2. $a = \frac{\pi}{3}$ $\quad n = 3 \quad f_2(x) = \arctan(2\sin(x))$;

3. $a = \frac{\pi}{4}$ $\quad n = 3 \quad f_3(x) = \sqrt{\tan(x)}$;

Exercice 8.

Effectuer les développements asymptotiques des expressions suivantes en $+\infty$ à l'ordre n :

1. $n = 2 \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$

2. $n = 3 \qquad f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)$

Exercice 9.

Donner un développement asymptotique de u_n en $h = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ comportant 3 termes avec

$$u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{\mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}} - 1} - 1.$$

Exercice 10.

1. Montrer l'existence d'une unique racine de l'équation $\tan x = x$ dans l'intervalle $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On désigne par x_n cette racine.

2. Prouver que x_n admet un développement généralisé de la forme

$$an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(n^{-2})$$

et déterminer (a, b, c, d).

Indications

Indications sur l'Exercice 1

1. On pourra écrire $\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$.

4. $e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)} = (e^{\sin(2x)} - 1) - (e^{\sin(x)} - 1)$.

5. On remarque que $\ln(e + x) = \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)$.

6. $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$.

Indications sur l'Exercice 3

3. On se ramènera à des expressions $\ln(1 + u(x))$ où u est de limite nulle en 0.

4. Commencer par l'inverse de la fonction.

5. Ecrire l'expression en utilisant la fonction exponentielle.

6. Après avoir remarqué que l'expression demandée peut s'écrire $\frac{1}{x^2}\left(1 - \left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2\right)$, on commencera par calculer à un ordre bien choisi le développement limité de $\frac{\arcsin(x)}{x}$.

Indications sur l'Exercice 4

1. Commencer par s'intéresser à f'.

Indications sur l'Exercice 7

2. Il s'agit de composer le développement limité de $2\sin(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ avec celui de arctan au voisinage de $2\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Pour le développement de arctan, on commencera par celui de sa dérivée au point considéré.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. En écrivant $\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$, on obtient alors une factorisation du numérateur :

$$N(x) = \tan x\,(\cos x - 1)$$

et par équivalents usuels $N(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.
Comme $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, le dénominateur D de cette fraction vérifie $D(x) \underset{0}{\sim} x^2$. Ainsi :

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{6} \quad \text{et} \quad \ell = 0.$$

2. En écrivant $\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$, on obtient alors une factorisation du numérateur :

$$N(x) = (\cos x - 1)(\tan(x) + 1)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) + 1 = 1$, on a donc $\tan(x) + 1 \underset{0}{\sim} 1$ et $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on obtient : $N(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ d'où $\ell = -\dfrac{1}{2}$.

3. Les deux termes apparaissant au numérateur étant équivalents à 1, on peut écrire alors :

$$N(x) = \cos(x) - 1 - \left(\sqrt{\cos(2x)} - 1\right).$$

Or $\cos(2x) = 1 + u(x)$ où $u(x) = \cos(2x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{(2x)^2}{2} = -2x^2$, donc

$$(\sqrt{\cos(2x)} - 1 = (1 + u(x))^{1/2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{u(x)}{2} \sim -x^2$$

Ainsi comme $1 - cos(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{cos(2x)}}{x^2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

soit $N(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{3x^2}{2}$.
Comme $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, $D(x) \underset{0}{\sim} x^2$ et $\ell = -\dfrac{3}{2}$.

4. $N(x) = (\mathrm{e}^{\sin(2x)} - 1) - (\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1)$. Par équivalents usuels, comme $\sin(2x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, $\mathrm{e}^{\sin(2x)} - 1 \underset{0}{\sim} \sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$ soit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(2x)} - 1}{x} = 2$.
De même, $\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1 \underset{0}{\sim} \sin(x) \underset{0}{\sim} x$ soit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - 1}{x} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{N(x)}{x} = 2 - 1 = 1$ ce qui équivaut à $N(x) \underset{0}{\sim} x$. Comme $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, $\ell = 1$.

5. En écrivant $\ln(\mathrm{e} + x) = \ln(\mathrm{e}) + \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)$, on obtient :

$$N(x) = (\mathrm{e}^{2x} - 1) - \ln\left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}}\right)$$

Donc par les équivalents rappelés précédemment $e^{2x} - 1 \underset{0}{\sim} 2x$ et $\ln\left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}}\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\mathrm{e}}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x} - \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}}\right)}{x}\right) = (2 - \frac{1}{\mathrm{e}})$$

soit $N(x) \underset{0}{\sim} (2 - \frac{1}{\mathrm{e}})x$.
$D(x) \underset{0}{\sim} x$ car $\dfrac{D(x)}{x} = x^2 + \dfrac{\sin(x)}{x}\cos(x)$ a pour limite 1 en 0.
Ainsi $\ell = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

6. Comme $\cos(x) - 1$ est de limite nulle en 0, on obtient $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ et par produit d'équivalents, $N(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^4}{4}$.
En utilisant la même remarque qu'en première question :

$$D(x) = x\tan(x)\left(\cos(x) - 1\right) .$$

Par équivalents usuels, $D(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^4}{2}$ et $\ell = -\dfrac{1}{2}$.

□

Correction de l'Exercice 2

1. $D(x) = \sqrt{x-a}\sqrt{x+a} \underset{a}{\sim} \sqrt{2a}\sqrt{x-a}$ puisque $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est continue en a et non nulle, $\sqrt{x+a} \underset{a}{\sim} \sqrt{2a}$. Ce dénominateur ne s'annule pas en dehors de a.
Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en a de dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ en a, $\sqrt{x} - \sqrt{a} \underset{a}{\sim} \dfrac{x-a}{2\sqrt{a}}$ d'où

$$N(x) \underset{a}{\sim} \sqrt{x-a}.$$

Aussi $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

2. Comme $\cos(\frac{\pi x}{2})$ est de limite nulle en 1 :

$$\left(1 - \cos(\frac{\pi x}{2})\right)^{1/2} - 1 \underset{1}{\sim} \frac{-\cos(\frac{\pi x}{2})}{2}.$$

En posant $x = 1 + h$, $\cos(\dfrac{\pi x}{2}) = \cos(\dfrac{\pi(1+h)}{2}) = -\sin(\dfrac{\pi h}{2})$ $D(x) \underset{1}{\sim} -\dfrac{\pi}{4}(x-1)$ d'où $\ell = \dfrac{4}{\pi}$.

3. Posons $x = \dfrac{\pi}{3} + h$ Alors :

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(h) + \cos(\frac{\pi}{3})\sin(h) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos(h) + \sin(h)\right)$$
$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(h) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(h) = \frac{1}{2}\left(\cos(h) - \sqrt{3}\sin(h)\right)$$

D'où $N(x) = 2\sin(h)$ donc $N(x) \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} 2(x - \frac{\pi}{3})$.
On gagne du temps si on écrit $\sqrt{3} = 2\sin(\frac{\pi}{3})$ et $1 = 2\cos(\frac{\pi}{3})$. On a alors

$$N(x) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3})\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{3})\cos(x)\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

cos ayant une dérivée non nulle en $\dfrac{\pi}{3}$, $\cos(x) - \dfrac{1}{2} \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \dfrac{\pi}{3})$;
ainsi $D(x) \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} -\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3})$ et par quotient des équivalents précédents : $\ell = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

□

Correction de l'Exercice 3

1. Par les formules usuelles ($(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$) on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + o(x^4).$$

Ainsi, en multipliant ce développement limité par $(1-x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{3x}{2} + (\frac{3}{8}+\frac{1}{2})x^2 - (\frac{5}{16}+\frac{3}{8})x^3 + (\frac{35}{128}+\frac{5}{16})x^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{16}x^3 + \frac{75}{128}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

2. $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$ admettent un développement limité d'ordre 5 en 0 : il en est de même de leur produit. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}_{P(x)} + o(x^5)\\ \ln(1+x) &= \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5}_{Q(x)} + o(x^5)\end{aligned}$$

Le produit admet donc comme partie régulière de son développement limité d'ordre 5 la troncature à l'ordre 5 de $P(x)Q(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &= x - \frac{3x^2}{2} + (\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)x^3 - (\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)x^4 + (\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)x^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \frac{137}{60}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

3. Par propriété du logarithme, $\ln\left(\dfrac{2-x^2}{3-x}\right) = \ln(\dfrac{2}{3}) + \ln(1-\frac{x^2}{2}) - \ln(1-\dfrac{x}{3})$. D'où

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2-x^2}{3-x}\right) &= \ln(\frac{2}{3}) - (\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}) + \left(\frac{x}{3}+\frac{x^2}{18}+\frac{x^3}{27\times 3}+\frac{x^4}{81\times 4}\right) + o(x^4)\\ &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{x}{3} - \frac{4x^2}{9} + \frac{x^3}{81} - \frac{79x^4}{648} + o(x^4)\end{aligned}$$

4. Il s'agit de l'inverse de $\dfrac{e^x-1}{x} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}_{u(x)}$. C'est un développement en 0 exclu mais prolongeable par continuité en 0.

Il reste à rechercher les parties régulières des développements limités à l'ordre 4 des puissances de $u(x)$ avec

$$u(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{60}x^3 + o(x^3))$$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned}u(x)^2 &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + (\frac{1}{36}+\frac{1}{24})x^4 + o(x^4) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)\\ u(x)^3 &= \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\\ u(x)^4 &= \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=1-\frac{1}{2}x+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})x^2+(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8})x^3+(-\frac{1}{120}+\frac{5}{72}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16})x^4+o(x^4)$$

soit

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$$

5. L'expression $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ s'écrit sous forme exponentielle $\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))\right)$. Pour avoir un développement limité à l'ordre 4 de l'ensemble, il faut donc commencer par le développement limité de $\ln(1+\sin(x))$ à l'ordre 5. Comme $\sin(x)\underset{0}{\sim}x$, on a donc :

$$\ln(1+\sin(x))=\sin(x)-\frac{\sin^2(x)}{2}+\frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^4(x)}{4}+\frac{\sin^5(x)}{5}+o(x^5)$$

Donc en reprenant les calculs traités dans les exemples :

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(x))&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{3}(x^3-\frac{x^5}{2})+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{x}\ln(1+\sin(x))=1+u(x)$$

où $u(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ tend vers 0 en 0. On a alors :

$$\exp(1+u(x))=\mathrm{e}\exp(u(x))=\mathrm{e}\left(1+u(x)+\frac{u^2(x)}{2}+\frac{u^3(x)}{6}+\frac{u^4(x)}{24}+o(x^4)\right)$$

Après calculs :

$$\begin{aligned}u(x)&=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\u(x)^2&=\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{9}+o(x^4)\\u(x)^3&=-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\\u(x)^4&=+\frac{x^4}{16}+o(x^4)\end{aligned}$$

D'où après simplifications des fractions :

$$(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{7\mathrm{e}}{24}x^2-\frac{3\mathrm{e}}{16}x^3-\frac{139\mathrm{e}}{1152}x^4+o(x^4)$$

6. On remarque que l'expression peut se réécrire judicieusement sous la forme

$$\frac{1}{x^2}\left(1-\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2\right).$$

Il faut donc rechercher le développement limité d'ordre 6 de $\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2$. On va procéder par étapes, tout d'abord calculer le développement limité de $\frac{\arcsin x}{x}$, l'élever au carré puis l'inverser (les deux dernières étapes pouvant être échangées).

arcsin est une primitive de $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; son développement limité d'ordre 7 (on veut $\dfrac{\arcsin x}{x}$ à l'ordre 6) s'obtient en intégrant celui d'ordre 6 de sa dérivée.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+o(x^6)\\
\Rightarrow \arcsin(x) &= x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{7\times 16}+o(x^7)\\
\Rightarrow \left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^2 &= \left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^6)\right)^2\\
\Rightarrow \left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^2 &= 1+\frac{x^2}{3}+(\frac{1}{36}+\frac{3}{20})x^4+(\frac{5}{56}+\frac{1}{40})x^6+o(x^6)\\
\Rightarrow \left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^2 &= 1+u(x) \quad \text{avec} \quad u(x)=\frac{x^2}{3}\left(1+\frac{8x^2}{15}+\frac{12x^4}{35}\right)+o(x^6)
\end{aligned}$$

On a alors comme $u(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{3}$, $o(u(x)^3)=o(x^6)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{\arcsin(x)}\right)^2 &= 1-u(x)+u^2(x)-u^3(x)+o(x^6)\\
&= 1-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{8x^4}{45}+\frac{4x^6}{35}\right)+\frac{x^4}{9}\left(1+\frac{8x^2}{15}\right)^2-\frac{x^6}{27}+o(x^6)\\
&= 1-\frac{x^2}{3}+\left(-\frac{8}{45}+\frac{1}{9}\right)x^4+\left(-\frac{4}{35}+\frac{16}{9\times 15}-\frac{1}{27}\right)x^6+o(x^6)\\
&= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{15}x^4-\frac{31}{945}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{\arcsin x}\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}x^2+\frac{31}{945}x^4+o(x^4).$$

□

Correction de l'Exercice 4

1. f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}$.

Or $1-(1-x^2)^2=(2-x^2)x^2$. Ainsi sur $]0,1]$, $f'(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$ de limite $-\sqrt{2}$ en 0^+. Par théorème (théorème de la dérivée limite), f est donc dérivable sur $[0,1]$. f' admettant un développement limité d'ordre 2, f admet un développement limité d'ordre 3.

$$f'(x)=-\sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2} \Rightarrow f'(x)=-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}x^2}{4}+o(x^2)$$

Comme $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$, le développement limité de f à droite de 0 (en 0^+) est en intégrant le précédent

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{12}x^3+o(x^3).$$

2. f étant paire, en 0^-, $f(x) = f(-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}(-x) - \frac{\sqrt{2}}{12}(-x)^3 + o(x^3)$ soit

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 + o(x^3)\ .$$

3. Les deux développements limités précédents ne coïncidant pas,on ne peut pas trouver un polynôme P de degré au plus 3 tel que $f(x) = P(x) + o(x^3)$; il n'y a donc pas de développement limité d'ordre 3 en 0.

□

Correction de l'Exercice 5

$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$ est une expression impaire. f étant indéfiniment dérivable en 0, elle admet un développement limité à tout ordre et les coefficients pairs sont nuls. $\arcsin(x)$ et $\frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$ étant équivalents à x en 0, $f(x)$ est négligeable devant x en 0. Il faut au moins deux équations pour déterminer a et b (donc essayer d'annuler simultanément les termes d'ordre 3 et 5 dans le développement limité de $f(x)$) et pour avoir un équivalent aller chercher le premier terme non nul qui suit. Il faut donc à minima faire les développements limités à l'ordre 7.

Le développement limité d'ordre 7 de $\arcsin(x)$ a été calculé dans l'exercice 3 question 7 :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{7 \times 16} + o(x^7)$$

Pour la fraction rationnelle :

$$\begin{aligned}\frac{x + ax^3}{1 + bx^2} &= (x + ax^3)(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)) \\ &= x + (a - b)x^3 + (b^2 - ab)x^5 + (-b^3 + ab^2)x^7 + o(x^7)\end{aligned}$$

soit

$$f(x) = \left(\frac{1}{6} - a + b\right)x^3 + \left(\frac{3}{40} - b^2 + ab\right)x^5 + = \left(\frac{5}{112} - b^2(a - b)\right)x^7 + o(x^7)$$

Ainsi, par unicité du développement limité, $f(x) = o(x^3)$ si et seulement si $a - b = \frac{1}{6}$. Sous cette condition, $f = o(x^5)$ si et seulement si $-ab + b^2 = b(b - a) = \frac{3}{40}$. On a alors :

$$\begin{cases} a - b = \frac{1}{6} \\ b(b - a) = \frac{3}{40} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{17}{60} \\ b = -\frac{9}{20} \end{cases}$$

les valeurs recherchées sont donc $a = -\frac{17}{60}$ et $b = -\frac{9}{20}$. Pour ces valeurs :

$$f(x) = \left(\frac{5}{112} - b^2(a - b)\right)x^7 + o(x^7) = \left(\frac{5}{112} - \frac{81}{2400}\right)x^7 + o(x^7) = \frac{-6}{525}x^7 + o(x^7)$$

donc $f(x) \sim -\frac{6}{525}x^7$.

□

Correction de l'Exercice 6

1. tan est une fonction indéfiniment dérivable en 0 et impaire : elle admet donc un développement limité à tout ordre dont les termes pairs ont un coefficient nul. De plus comme $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, le premier terme des développements limités à tout ordre $n \geq 1$ est x.

2. $\cos(x) = 1 - u(x)$ avec $u(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x^4}{360} + o(x^5)\right)$. Comme $u(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, il suffit de développer $\dfrac{1}{1-u}$ à l'ordre 3 pour connaître $\dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 6 et par parité à l'ordre 7 en x. D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + u(x) + u^2(x) + u^3(x) + o(x^7)\\
&= 1 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360}\right) + \frac{x^4}{4}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)^2 + \frac{x^6}{8} + o(x^7)\\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \left(\frac{1}{720} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^7)\\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)
\end{aligned}$$

En multipliant ce développement limité par celui de $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{x^7}{7 \times 720} + o(x^7)$, on obtient :

$$\tan(x) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{20} + \frac{5}{24}\right)x^5 + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{240} - \frac{5}{24 \times 6} + \frac{61}{720}\right)x^7 + o(x^7)$$

Soit : $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

3. Par dérivation d'une composition, on obtient immédiatement que la dérivée de $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ est $x \mapsto \tan(x)$. Comme tan a un développement limité d'ordre à tout ordre, pour connaître son développement limité d'ordre 7, il suffit de dériver celui d'ordre 8 de l'une de ses primitives.

On a déjà $\cos(x) = 1 - u(x)$ avec $u(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x^4}{360} - \dfrac{x^6}{28 \times 720} + o(x^8)\right)$. Comme $u(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, $o(u(x)^p) = o(x^{2p})$. Il suffit donc de développer $\ln(1 - u(x))$ à l'ordre 4 donc

$$-\ln(\cos(x)) = u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{3} + \frac{u^4(x)}{4} + o(x^8)$$

Or :

$$\begin{aligned}
u(x)^2 &= \frac{x^4}{4}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360}\right)^2 + o(x^8) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \left(\frac{1}{144} + \frac{1}{180}\right)x^8 + o(x^8)\\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{320} + o(x^8)\\
u(x)^3 &= \frac{x^6}{8}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)^3 + o(x^8) = \frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{32} + o(x^8)\\
u(x)^4 &= \frac{x^8}{16} + o(x^8)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{48} + \frac{1}{24}\right)x^6 + \left(-\frac{1}{56 \times 720} + \frac{1}{640} - \frac{1}{96} + \frac{1}{64}\right)x^8 + o(x^8)$$

Ainsi :

$$\ln(\cos(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + o(x^8).$$

et en dérivant, on retrouve : $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

4. tan étant indéfiniment dérivable en 0, il en est de même de sa dérivée ; ainsi sa dérivée admet un développement limité à tout ordre. La partie régulière de son développement d'ordre 6 est la dérivée de la partie régulière du développement d'ordre 7 de tan. Ainsi :

$$(\tan)'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + o(x^6)$$

Or $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Comme :

$$\tan^2(x) = (x + ax^3 + bx^5 + o(x^6))^2 = x^2 + 2ax^4 + (a^2 + 2b)x^6 + o(x^6).$$

Par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} 3a & = 1 \\ 5b & = 2a \\ 7c & = a^2 + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{3} \\ b & = \frac{2}{15} \\ c & = \frac{1}{9} + \frac{4}{15} = \frac{17}{315} \end{cases}.$$

5. $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$ aussi :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan x) &= \arctan(x) + a\arctan^3(x) + b\arctan^5(x) + c\arctan^7(x) + o(\arctan^7(x)) \\ &= \arctan(x) + a\arctan^3(x) + b\arctan^5(x) + c\arctan^7(x) + o(x^7)\ . \end{aligned}$$

Or en utilisant la forme normalisée du DL de arctan, $\arctan(x) = xP(x)$ avec $P(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7}$, pour connaître les développements limités d'ordre 7 de $\arctan^n(x)$ avec $n \in \{3, 5, 7\}$, il suffit de développer $P(x)^n$ à la puissance $7-n$, ce qui permet de tronquer P des termes d'ordre supérieur.

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\ \arctan^3(x) &= x^3\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)^3 + o(x^7) \\ &= x^3\left(1 - \frac{3x^2}{3} + (\frac{3}{5} + \frac{3}{9})x^4\right) + o(x^7)(*) \\ &= x^3 - x^5 + \frac{14x^7}{15} + o(x^7) \\ \arctan^5(x) &= x^5\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)^5 + o(x^7) \\ &= x^5 - \frac{5x^7}{3} + o(x^7) \\ \arctan^7(x) &= x^7 + o(x^7) \end{aligned}$$

$(*)$ on a utilisé $(1-u)^3 = 1 - 3u + 3u^2 - u^3$ avec $u = -\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}$ et en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4.
Comme $\tan(\arctan x) = x$ pour tout x réel, on obtient :

$$x = x + (a - \frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5} - a + b)x^5 + (-\frac{1}{7} + \frac{14a}{15} - \frac{5b}{3} + c)x^7 + o(x^7).$$

Par unicité du développement limité en 0 on a donc :

$$a - \frac{1}{3} = 0 \qquad \frac{1}{5} - a + b = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{7} + \frac{14a}{15} - \frac{5b}{3} + c = 0$$

ce qui nous redonne $(a, b, c) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{17}{315})$.

$\square$

Correction de l'Exercice 7

1. En développant $\cos(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{1}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h)$, on obtient le développement limité suivant :

$$\cos(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{3}h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

Or par le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\sqrt[3]{1+u} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + o(u^3).$$

En composant ces développements limités avec

$$u = -\sqrt{3}h - \frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{3}h^3}{6} + o(h^3) = -\sqrt{3}h\left(1 + \frac{h}{2\sqrt{3}} - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)$$

$$f_1(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}h + \frac{h^2}{2} - \frac{\sqrt{3}h^3}{6}\right) - \frac{h^2}{3}(1 + \frac{h}{\sqrt{3}}) - \frac{5\sqrt{3}h^3}{27}\right)$$

soit

$$f_1(\frac{\pi}{3}+h) = 2^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{13\sqrt{3}}{54}h^3 + o(h^3)\right).$$

2. En $\frac{\pi}{3}$, $2\sin(x)$ prend la valeur $\sqrt{3}$. Il faut donc développer $2\sin(x)$ en $\frac{\pi}{3}$ et composer ce développement avec celui de arctan en $\sqrt{3}$. Par la formule de Taylor-Young, ou en développant $\sin(\frac{\pi}{3}+h)$, on obtient :

$$2\sin(\frac{\pi}{3}+h) = \sqrt{3} + h - \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \qquad (*)$$

Soit $g(u) = \arctan(\sqrt{3}+u)$. Alors $g'(u) = \frac{1}{1+(\sqrt{3}+u)^2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{u^2}{4}\right)^{-1}$. Pour connaître le développement de g à l'ordre 3, il suffit de connaître celui de g' à l'ordre 2.

$$g'(u) = \frac{1}{4}\left(1 - (\frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{u^2}{4}) + \frac{3u^2}{4}\right) + o(u^2) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}u}{8} + \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

D'où

$$g(u) = \arctan(\sqrt{3}) + \frac{u}{4} - \frac{\sqrt{3}u^2}{16} + \frac{u^3}{24} + o(u^3) = \frac{\pi}{3} + \frac{u}{4} - \frac{\sqrt{3}u^2}{16} + \frac{u^3}{24} + o(u^3)$$

En composant avec $(*)$ ce qui revient à poser $u = h - \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$, on obtient :

$$f_2(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 - \frac{h^3}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}h^2}{16}(1 - \sqrt{3}h) + \frac{h^3}{24} + o(h^3)$$

soit :

$$f_2(\frac{\pi}{3}+h) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}h - \frac{3\sqrt{3}}{16}h^2 + \frac{3}{16}h^3 + o(h^3)$$

3. On pose $x = \frac{\pi}{4} + h$. Par la formule classique $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, on a alors $f_3(x) = \sqrt{\tan(x)} = \left(\dfrac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right)^{\frac{1}{2}}$.
$\tan(h)$ est de limite nulle en 0 et de développement limité d'ordre 3 (cf exercice 6 par exemple)

$$\tan(h) = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$$

Aussi par développements usuels :

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)} &= (1+\tan(h))\left(1+\tan(h)+\tan^2(h)+\tan^3(h)+o(\tan^3(h))\right)\\ &= 1+2\tan(h)+2\tan^2(h)+3\tan^3(h)+o(\tan^3(h))\\ &= 1+2\left(h+\frac{h^3}{3}\right)+2h^2(1+o(h))^2+3h^3+o(h^3)\\ &= 1+\underbrace{2h+2h^2+\frac{8h^3}{3}+o(h^3))}_{u}\end{aligned}$$

Or $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dfrac{u^3}{16}+o(u^3)$ et $u \sim 2h$. Ainsi :

$$f_3(\frac{\pi}{4}+h) = 1+(h+h^2+\frac{4h^3}{3}) - \frac{4h^2}{8}(1+2h)+\frac{h^3}{2}+o(h^3)$$

soit $f_3(\frac{\pi}{4}+h) = 1+h+\frac{1}{2}h^2-\frac{5}{6}h^3+o(h^3)$ ou

$$f_3(x) = 1+(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{5}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3+o\left((x-\frac{\pi}{4})^3\right).$$

□

Correction de l'Exercice 8
On utilise la méthode précédemment décrite en posant $h = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

1. En mettant x en facteur au numérateur et au dénominateur de la fraction rationnelle $\dfrac{x-2}{x+1}$, on obtient :

$$\frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2h}{1+h} = (1-2h)(1-h+h^2+o(h^2)) = 1-3h+3h^2+o(h^2)$$

En composant avec le $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+u} = 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2)$, on a alors :

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 1+\frac{1}{2}(-3h+3h^2)-\frac{9h^2}{8}+o(h^2) = 1-\frac{3h}{2}+\frac{3h^2}{8}+o(h^2)$$

Passons au second terme du produit. Comme $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{1-h}$:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} = \mathrm{e}^{1+h+h^2+o(h^2)} = \mathrm{e}\left(1+h+h^2+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right).$$

En multipliant les deux développements obtenus :

$$f(x)=\mathrm{e}\left(1-\frac{3h}{2}+\frac{3h^2}{8}+o(h^2)\right)\left(1+h+\frac{3h^2}{2}+o(h^2)\right)$$

on obtient le résultat final : $f(x)=\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o(x^{-2})\right)$

2. En mettant x en facteur au numérateur et au dénominateur de la fraction rationnelle $\dfrac{x+1}{x+3}$, on obtient $f(x)=g(h)$ avec $h=\frac{1}{x}$ et $g(h)=\arctan\left(\sqrt{\frac{1+h}{1+3h}}\right)$. Commençons par le développement de $\dfrac{1+h}{1+3h}$ à l'ordre 3 :

$$\frac{1+h}{1+3h}=(1+h)(1-3h+9h^2-27h^3+o(h^3))=1-2h+6h^2-18h^3+o(h^3)$$

En composant avec le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o(u^3)$, ce qui revient à avoir $u=-2h+6h^2-18h^3+o(h^3)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}&=1+\frac{1}{2}\left(-2h+6h^2-18h^3\right)-\frac{h^2}{2}(1-6h)-\frac{h^3}{8}+o(h^3)\\&=1-h+\frac{5h^2}{2}-(9-3+\frac{1}{2})h^3+o(h^3)=1-h+\frac{5h^2}{2}-\frac{13h^3}{2}+o(h^3)\quad(E)\end{aligned}$$

Il faut maintenant développer arctan au voisinage de 1. On utilise la même méthode que dans la deuxième question de l'exercice 7.

$$\arctan'(1+v)=\frac{1}{1+(1+v)^2}=\frac{1}{2}\left(1+v+\frac{v^2}{2}\right)^{-1}$$

Le développement d'ordre 2 donne alors :

$$\begin{aligned}\arctan'(1+v)&=\frac{1}{2}\left(1-(v+\frac{v^2}{2})v^2+o(v^2)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-v+\frac{v^2}{2}+o(v^2)\right)\\\Rightarrow\arctan(1+v)&=\arctan(1)+\frac{v}{2}-\frac{v^2}{4}+\frac{v^3}{12}+o(v^3)\\\arctan(1+v)&=\frac{\pi}{4}+\frac{v}{2}-\frac{v^2}{4}+\frac{v^3}{12}+o(v^3)\end{aligned}$$

En composant avec le premier développement limité effectué (E), on a alors :

$$g(h)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(-h+\frac{5h^2}{2}-\frac{13h^3}{2})-\frac{h^2}{4}(1-5h)-\frac{h^3}{12}+o(v^3).$$

Ainsi

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{25}{12x^3}+o(x^{-3}).$$

□

Correction de l'Exercice 9

On remarque que $u_n=g\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ avec $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}-1$.

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)$$

En l'inversant avec la composition avec le $DL_3(0)$ de $(1+u)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
g(x)+1 &= 1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)+\frac{x^2}{4}\left(1+\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)x^2+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^3+o(x^3)\\
&= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3)
\end{aligned}$$

soit $g(x)=-\dfrac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3)$.
Or $x=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=h(1+\frac{1}{2}h^2)+o(h^3)$. Ainsi :

$$u_n=-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{12n}+\frac{(-1)^n}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

□

Correction de l'Exercice 10

1. Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \to \tan(x)-x$ est une fonction indéfiniment dérivable sur I_n de dérivée $f_n'(: x \to \tan^2(x) \geq 0$ ne s'annulant qu'en $n\pi$. Elle réalise une bijection de I_n sur son image. Or $\lim\limits_{x\to(n\pi-\frac{\pi}{2})^+} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-} = +\infty$. Ainsi f_n est une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$, tout réel a un unique antécédent et $x_n = f_n^{-1}(0)$.
2. Comme $n\pi-\frac{\pi}{2}<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}$, on a immédiatement $x_n \sim n\pi$ et $y_n=x_n-n\pi \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$. Par π-périodicité de la fonction tan, $\tan(x_n)=\tan(y_n)=n\pi+y_n$ soit $y_n=\arctan(n\pi+y_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\dfrac{\pi}{2}$ ce qui donne alors $y_n \sim \dfrac{\pi}{2}$.
$y_n=\dfrac{\pi}{2}-u_n$ avec u_n de limite nulle. On a alors :

$$\tan(u_n)=\frac{1}{\tan(y_n)}=\frac{1}{n\pi+y_n}$$

On a alors en prenant les équivalents des 2 termes $u_n \sim \dfrac{1}{n\pi}$. Un développement à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ (ou en u_n) donne alors :

$$u_n+o(u_n^2)=\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{y_n}{n\pi}+o(\frac{1}{n})\right)$$

d'où $u_n=\dfrac{1}{n\pi}-\dfrac{1}{2n^2\pi}+o(\dfrac{1}{n^2})$ soit $a=n$,$b=\dfrac{\pi}{2}$, $c=-\dfrac{1}{\pi}$, $d=\dfrac{1}{2\pi}$. On a donc

$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2n^2\pi}+o(\frac{1}{n^2})\ .$$

□

