Maurice, va allumer la salle des fêtes !

A. Moussa

Niveau : L3
Difficulté : ★★
Durée : 30mn
Rubrique(s) : Algèbre linéaire

La petite histoire...
Maurice et Jacqueline sont aubergistes. Ayant récemment enrichi leur hôtel d'une gigantesque salle des fêtes, Jacqueline a demandé à Aziz, l'électricien du village, de s'occuper de l'éclairage. Aziz, voulant bien faire, a choisi de relier par un câble certaines ampoules à d'autres et a installé à l'entrée de la salle des fêtes un immense panneau contenant autant d'interrupteurs que d'ampoules dans la salle afin, dit-il, “ Que ça soye plus pratique ”. Le système d'interrupteurs d'Aziz fonctionne ainsi : lorsque l'on appuie sur l'interrupteur d'une lampe, celui-ci change d'état la lampe en question (éteinte → allumée ou l'inverse) mais également toutes celles reliées à celle-ci par un câble. Lorsque Jacqueline expliqua à son compagnon cette situation compliquée en lui demandant d'aller essayer d'allumer la salle en entier, Maurice tira un peu la tête ... et après quelques essais il revint dépité “ Jacquette, quand j'en allume une, v'la qu'une autre s'éteint et quand j'y reviens c'est la première qui marche plus. Moi j'te dis c'est impossible de l'allumer en entier c'te salle ! ”. S'ensuivit des cordialités entre Maurice et Jacqueline, cette dernière affirmant que Maurice n'était pas de bonne volonté et qu'il y avait forcément un moyen d'allumer toutes les ampoules simultanément, à partir de l'état “tout éteint”. Alors, Maurice est-il de bonne volonté ? Ou bien y a-t-il nécessairement un moyen d'allumer toutes ces ampoules ?

Exercice 1.

On rappelle que le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$ est défini par les égalités

$$0+0=1+1=1\times 0=0 \text{ et } 1\times 1=1.$$

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$. On introduit

$$(\mathrm{Ker}\, A)^\circ := \left\{ X \in \mathbb{F}_2^n \,:\, \forall Y \in \mathrm{Ker}\, A,\ {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Vérifier que $(\operatorname{Ker} A)^\circ$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_2^n$.

2. Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une base de $\operatorname{Ker} A$. Pour tout i, on introduit la décomposition du vecteur E_i dans la base canonique de $\mathbb{F}_2^n$: $E_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in})$. Soit la matrice $M = (e_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$. Démontrer que $(\operatorname{Ker} A)^\circ = \operatorname{Ker} M$.

3. Quel est le rang de M ?
En déduire que $(\operatorname{Ker} A)^\circ$ est de dimension $n - \dim \operatorname{Ker} A$.

4. On suppose que A est une matrice symétrique ($A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{F}_2)$), jusqu'à la fin de l'exercice. Montrer que $\operatorname{Im} A \subset (\operatorname{Ker} A)^\circ$ puis finalement que $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^\circ$.

5. On suppose que la diagonale de A ne contient que des 1, et on note J le vecteur ne contenant que des 1. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{F}_2^n$, ${}^tXAX = {}^tJX$.

6. En déduire que si $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{F}_2)$ a tous ses coefficients diagonaux égaux à 1 alors $J \in \mathrm{Im} A$.

7. Montrer que Jacqueline a raison : il y a forcément un moyen d'allumer simultanément toutes les ampoules de cette salle !

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. $(\operatorname{Ker} A)^\circ$ est non vide (car il contient le vecteur nul) et on vérifie aisément qu'il est stable par addition, c'est donc un $\mathbb{F}_2$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_2^n$.

2. On procède par double inclusion : si $X \in (\operatorname{Ker} A)^\circ$, alors en particulier ${}^tXE_i = 0$ pour tout i, ce qui est exactement l'appartenance à $\operatorname{Ker} M$. Réciproquement, si $MX = 0$, c'est que pour tout i on a l'égalité ${}^tXE_i = 0$ et on récupère l'appartenance $X \in (\operatorname{Ker} A)^\circ$ par le fait que $(E_1, \dots, E_p)$ est justement une base de $\operatorname{Ker} A$.

3. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, comme $(E_1, \dots, E_p)$ est une base de $\operatorname{Ker} A$, le rang de M est donc $\dim \operatorname{Ker} A$. Finalement le théorème du rang donne le résultat voulu.

4. Soit $X \in \operatorname{Im} A$. Alors il existe $Z \in \mathbb{F}_2^n$ tel que $X = AZ$. Comme A est symétrique, on a pour tout $Y \in \operatorname{Ker} A$:

$$ {}^tXY = {}^t(AZ)Y = {}^tZ{}^tAY = {}^tZ(AY) = 0. $$

Donc $X \in (\operatorname{Ker} A)^\circ$, ce qui fournit la première inclusion annoncée. Mais le théorème du rang et la question précédente assurent l'égalité des dimensions, d'où l'égalité ensembliste.

5. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{F}_2^n$. On a

$$ {}^tXAX = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij}x_ix_j. $$

Puisqu'on suppose que la diagonale de A ne contient que des 1 et puisque sur $\mathbb{F}_2$ on a l'identité $x^2 = x$, le premier terme du membre tout à droite s'écrit

$$ \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i = {}^tJX. $$

Pour conclure, il s'agit donc de démontrer que

$$ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij}x_ix_j = 0. $$

On a tout d'abord, par un changement d'indices pour la deuxième égalité,

$$ \begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij}x_ix_j &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n a_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ji}x_jx_i. \end{aligned} $$

Ensuite, par symétrie de la matrice A, il vient pour tout i et tout j que $a_{ij} = a_{ji}$ ce qui conduit donc à

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_ix_j &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_jx_i\\ &= 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} a_{ij}x_ix_j.\end{aligned}$$

Puisque l'on travaille sur $\mathbb{F}_2$ qui est de caractéristique 2, l'expression précédente est bien nulle, ce qui termine la preuve.

6. Puisque A est symétrique, on sait par la question 4. que $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A)^\circ$. L'appartenance $J \in \operatorname{Im} A$ revient donc à montrer que $J \in (\operatorname{Ker} A)^\circ$, *i.e.* que pour tout $X \in \operatorname{Ker} A$, on a ${}^tJX = 0$. Mais d'après la question précédente, on a pour tout $X \in \mathbb{F}_2^n$ l'identité ${}^tXAX = {}^tJX$. Dans le cas particulier, où $X \in \operatorname{Ker} A$ on a donc bien immédiatement que

$${}^tJX = {}^tXAX = {}^tX(AX) = 0.$$

7. On introduit la matrice d'adjacence du réseau : chaque ligne représente un interrupteur (numérotés de 1 à n), les coefficients étant définis ainsi : si i est connecté à j, $a_{ij} = 1$, sinon $a_{ij} = 0$. La matrice construite est symétrique et possède une diagonale remplie de 1. On vérifie qu'une combinaison quelconque sur les interrupteurs revient à multiplier la matrice A par un vecteur de $\mathbb{F}_2^n$ (en mettant 1 sur les interrupteurs sur lesquels on agit). La question revient donc à savoir si le vecteur J est bien dans l'image de A, ce que l'on a démontré précédemment : Jacqueline a raison ! $\square$

