

Analyse de Fourier

Sylvie Benzoni¹

1^{er} juillet 2011

¹Université de Lyon / Lyon 1 / ICJ, benzoni@math.univ-lyon1.fr

Table des matières

I	Séries de Fourier	5
1	Introduction	5
2	Théorie hilbertienne	7
3	Convergence ponctuelle	9
II	Transformation de Fourier	19
1	Transformation de Fourier des fonctions intégrables	19
2	Transformation de Fourier sur L^2	22
3	Transformation de Fourier sur \mathcal{S}'	26
4	Transformées de Fourier classiques	29
5	Applications de la transformation de Fourier	31
5.1	Espaces de Sobolev fractionnaires construits sur L^2	31
5.2	Résolution d'E.D.P. linéaires	31
6	Compléments	34
6.1	Noyau de Green des ondes en dimension 3s	34
6.2	Principe de Heisenberg	35
6.3	Théorie de Paley-Wiener	36
III	Transformation de Fourier discrète	39
1	Cas d'un réseau infini	39
2	Cas d'un réseau fini	40
3	Transformation de Fourier rapide.	41
	Bibliographie	43
	Index	45

Chapitre I

Séries de Fourier

1 Introduction

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur \mathbb{R} , 1-périodiques (au sens où $f(x+1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$) et de puissance p -ième intégrable sur $[0, 1]$, que l'on munit de la norme naturelle

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

(Par \mathbb{T} on désigne le « tore » \mathbb{R}/\mathbb{Z} .) L'espace $L^\infty(\mathbb{T})$ est celui des (classes de) fonctions essentiellement bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \sup \operatorname{ess}_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On remarque en particulier l'inclusion $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour tout $p \geq 1$ (conséquence de l'inégalité de Hölder, sur l'intervalle borné $[0, 1]$).

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit ses *coefficients de Fourier* par

$$(I.1) \quad c_n(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La « suite » (indexée par \mathbb{Z}) des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée :

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Autrement dit, les coefficients de Fourier définissent une application linéaire continue :

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{T}) &\rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

de norme au plus 1, et en fait égale à 1 (atteinte pour la fonction constante égale à 1). On montre même plus précisément que cette application est à valeurs dans le sous-espace des suites tendant vers zéro, ce qui est l'objet du lemme de base suivant.

Lemme I.1 (Riemann-Lebesgue)

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0.$$

Démonstration : On observe que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_n(f) = - \int_0^1 f(x + \frac{1}{2n}) e^{-2i\pi n x} dx.$$

Ceci vient du changement de variables $x \mapsto x + 1/(2n)$ et du fait que la fonction $x \mapsto f(x) e^{-2i\pi n x}$ est 1-périodique. On peut donc aussi écrire

$$c_n(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x) - f(x + \frac{1}{2n})) e^{-2i\pi n x} dx,$$

d'où la majoration

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \|f - T_{1/(2n)}f\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

où $T_{1/(2n)}$ désigne l'opérateur de translation par $1/(2n)$ en x . Si l'on note plus généralement $T_a f : x \mapsto f(x + a)$, on montre que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|f - T_a f\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0,$$

quel que soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ceci est immédiat pour une fonction f continue, par passage à la limite dans l'intégrale sur le compact $[0, 1]$. Dans le cas général $f \in L^1(\mathbb{T})$, cela résulte de la densité des fonctions continues dans $L^1(\mathbb{T})$ (conséquence du théorème de Lusin, voir par exemple Rudin [4, p. 66]) et de l'invariance de la norme $L^1(\mathbb{T})$ par T_a , quel que soit $a \in \mathbb{R}$. ■

Ainsi, en notant C_0 l'espace des suites indexées par \mathbb{Z} tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme du sup, l'application

$$\begin{aligned} f : L^1(\mathbb{T}) &\rightarrow C_0 \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est linéaire continue de norme 1 (encore atteinte pour $f \equiv 1$). Elle est de plus injective, c'est-à-dire que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ presque partout. Pour le démontrer, c'est à nouveau plus facile (bien qu'un peu technique) dans le cas d'une fonction f continue (voir par exemple [2, pp. 40–41]). Le cas $f \in L^2(\mathbb{T})$ se déduira de l'identité de Parseval (théorème I.3 ci-après). Le cas général $f \in L^1(\mathbb{T})$ se ramène au cas d'une fonction continue en faisant appel à des propriétés assez fines de l'intégrale de Lebesgue. L'idée, pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls, est de considérer une « primitive » bien choisie, et plus précisément :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + c,$$

la constante c étant choisie pour que $\int_0^1 F(x) dx = 0$ (ce qui donne $c = \int_0^1 (t - 1) f(t) dt$). Puisque $c_0(f) = \int_0^1 f(x) dx = 0$, la fonction F est 1-périodique, donc elle appartient bien à $L^1(\mathbb{T})$. Elle est de plus continue, et même dérivable presque partout [4, p. 158] et

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pour presque tout } x \in [0, 1].$$

Par suite, on peut intégrer par parties dans la définition de $c_n(f)$ et l'on trouve que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(F) = c_n(f)/(2i\pi n) = 0$. Comme de plus $c_0(F) = \int_0^1 F(x)dx = 0$, on en déduit que F est identiquement nulle, et donc que f est nulle presque partout.

On appelle *série de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ la série formelle

$$\sum_n c_n e^{2i\pi n x},$$

sans présager de sa convergence. On notera

$$S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n x}$$

les sommes partielles de cette série pour tout $N \in \mathbb{N}$: ce sont des fonctions bien définies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, appartenant à $L^p(\mathbb{T})$ quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, faisant partie de ce que l'on appelle les *polynômes trigonométriques*.

2 Théorie hilbertienne

On observe que $L^2(\mathbb{T})$ est un *espace de Hilbert* pour le produit hermitien

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

naturellement associé à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

D'autre part, si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors nécessairement $f \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Comme on l'a déjà fait remarquer, c'est une conséquence de l'inégalité de Hölder, et plus précisément ici de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Par conséquent la formule (I.1) permet de définir les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Une observation cruciale pour la suite est que la famille $(f_n : x \mapsto e^{2i\pi n x})_{n \in \mathbb{Z}}$ est ortho-normale dans $L^2(\mathbb{T})$. On vérifie en effet par le calcul que

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n, f_k \rangle = 0 \quad \text{quels que soient } n \text{ et } k \text{ avec } n \neq k.$$

Grâce à cette propriété on a le résultat suivant.

Théorème I.1 (Inégalité de Bessel)

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$(I.2) \quad \|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Démonstration : Par définition, on a

$$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} \langle f, f_n \rangle f_n,$$

d'où

$$\langle S_N(f), f - S_N(f) \rangle = 0$$

et par suite

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|f - S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad \blacksquare$$

Remarque I.1

Si g est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une somme finie d'éléments de la famille, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $S_N(g) = g$.

Théorème I.2

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Démonstration : Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions continues dans $L^2(\mathbb{T})$ (conséquence du théorème de Lusin, voir par exemple à nouveau Rudin [4, p. 66]), il existe f_0 continue et 1-périodique telle que

$$\|f - f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon/4.$$

Cette application continue 1-périodique f_0 induit une application continue F_0 sur le cercle unité C telle que

$$f_0(x) = F_0(e^{2i\pi x}).$$

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'application F_0 est limite uniforme de fonctions polynômiales sur le compact C . On en déduit que f_0 est limite uniforme de polynômes trigonométriques sur l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, il existe un polynôme trigonométrique g tel que

$$\sup_{[0,1]} \|f_0 - g\| \leq \varepsilon/4.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq \|S_N(f) - S_N(g)\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|S_N(g) - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|f - g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \\ &2 \|f - g\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|S_N(g) - g\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Bessel (I.2). Or, pour N assez grand, $S_N(g) - g = g$. On en déduit à nouveau grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2 \|f - f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} + 2 \|f_0 - g\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Théorème I.3 (Identité de Parseval)

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier c_n forment une famille de carré sommable et

$$(I.3) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2.$$

Démonstration : D'après le théorème I.2,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Or grâce à l'orthonormalité de la famille $(e^{2i\pi nx})_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$\|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2.$$

Par passage à la limite $N \rightarrow \infty$ on obtient donc immédiatement

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad \blacksquare$$

Remarque I.2

Inversement, toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est la suite des coefficients de Fourier d'une application $f \in L^2(\mathbb{T})$: les sommes partielles $\sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nx}$ forment en effet une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$ qui est complet, donc convergent vers une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, et

$$\langle f, e^{2i\pi mx} \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nx}, e^{2i\pi mx} \right\rangle = c_m$$

quel que soit $m \in \mathbb{Z}$.

3 Convergence ponctuelle

La théorie hilbertienne peut être complétée en montrant que, sous certaines conditions, la série de Fourier d'une fonction converge *point par point* vers cette fonction, et même uniformément.

Théorème I.4

Si les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ forment une famille sommable $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0.$$

En particulier, f admet un représentant continu.

Démonstration : Si $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la suite des sommes partielles $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f est de Cauchy donc convergente dans $L^\infty(\mathbb{T})$, et même $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par injection continue de $L^\infty(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$, sa limite dans $L^\infty(\mathbb{T})$ coïncide avec f , sa limite dans $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi f admet un représentant continu comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. ■

Corollaire I.1

Si f est une fonction 1-périodique continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (c'est-à-dire qu'il existe $0 \leq x_1 < \dots < x_k \leq 1$ tels que $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ soit de classe \mathcal{C}^1 pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$), alors elle est limite uniforme de sa série de Fourier.

Démonstration : Les hypothèses sur f permettent d'écrire après intégration par parties dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, en utilisant la continuité de f aux points x_i :

$$c_n(f) = \frac{1}{2i\pi n} c_n(f'), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}^*.$$

Par suite, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et l'identité de Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{4\pi n^2} \right)^{1/2} \|f'\|_{L^2(\mathbb{T})} < +\infty. \quad \blacksquare$$

Sous des hypothèses plus faibles, on peut montrer la *convergence simple* des séries de Fourier.

Théorème I.5 (Dirichlet)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux (mais pas nécessairement continue), alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$$

quel que soit x , où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ désignent respectivement la limite à droite et la limite à gauche de f en x .

Démonstration : On a par définition

$$S_N(f)(x) = \sum_{|n| \leq N} \int_0^1 f(y) e^{2i\pi n(x-y)} dy = \int_0^1 f(x-y) \sum_{|n| \leq N} e^{2i\pi n y} dy.$$

Notons

$$K_N(y) := \sum_{|n| \leq N} e^{2i\pi n y}.$$

Ceci définit une fonction paire, 1-périodique (appelée *noyau de Dirichlet*) telle que

$$\int_0^1 K_N(y) dy = 1,$$

d'où en particulier

$$\int_0^{1/2} K_N(y) dy = \int_{-1/2}^0 K_N(y) dy = \frac{1}{2}.$$

Par suite, en récrivant

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y) K_N(y) dy, \\ S_N(f)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ \int_0^{1/2} (f(x-y) - f(x-0)) K_N(y) dy &+ \int_{-1/2}^0 (f(x-y) - f(x+0)) K_N(y) dy = \\ &= \int_0^{1/2} \varphi_x(y) K_N(y) dy, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_x(y) := f(x-y) + f(x+y) - f(x-0) - f(x+0), \quad y > 0.$$

D'après les hypothèses sur f , la fonction φ_x est bornée sur $]0, 1/2]$, prolongeable par continuité en 0, et la fonction prolongée est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, u]$ pour $u > 0$ assez petit : cette dernière propriété va permettre de compenser le problème présenté par

$$K_N(y) = \frac{\sin((2N+1)\pi y)}{\sin(\pi y)},$$

à savoir que

$$\lim_{y \xrightarrow{>} 0} K_N(y) = 2N+1 \rightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

On montre d'abord que pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $u \in]0, 1/2]$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_u^{1/2} \varphi(y) K_N(y) dy = 0.$$

En effet, pour $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et $u \in]0, 1/2]$, la fonction $\psi : y \mapsto \mathbf{1}_{[u, 1/2]}(y) \varphi(y) / \sin(\pi y)$ est le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable, elle est donc intégrable sur $[0, 2]$ (on choisit 2 car c'est la période de $y \mapsto \sin((2N+1)\pi y)$). Il s'agit de montrer que $\int_0^2 \psi(y) \sin((2N+1)\pi y) dy$ tend vers zéro lorsque $N \rightarrow +\infty$. Ceci relève des mêmes arguments que la démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue : en prolongeant ψ en une fonction 2-périodique, on a

$$\int_0^2 \psi(y) \sin((2N+1)\pi y) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (\psi(y) - \psi(y + 1/(2N+1))) \sin((2N+1)\pi y) dy,$$

d'où

$$\left| \int_0^2 \psi(y) \sin((2N+1)\pi y) dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^2 |(\psi - T_{1/(2N+1)}\psi)(y)| dy,$$

ce qui tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$.

En particulier, en appliquant ce qui précède à $\varphi = \varphi_x$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_u^{1/2} \varphi_x(y) K_N(y) dy = 0.$$

Pour montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \varphi_x(y) K_N(y) dy = 0,$$

il reste donc « seulement » à montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^u \varphi_x(y) K_N(y) dy = 0.$$

Or on a (pour $u > 0$ assez petit)

$$\begin{aligned} \int_0^u \varphi_x(y) K_N(y) dy &= \int_0^u \left(\int_0^y \varphi'_x(t) dt \right) K_N(y) dy = \\ &= \int_0^u \left(\int_t^u K_N(y) dy \right) \varphi'_x(t) dt. \end{aligned}$$

En appliquant le résultat vu plus haut à la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{[t,u]}$, avec $t, u \in]0, 1/2]$, $t \leq u$, on sait déjà que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_t^u K_N(y) dy = 0.$$

Ceci ne suffit cependant pas pour appliquer le théorème de convergence dominée : nous avons besoin d'une borne pour $\int_t^u K_N(y) dy$ indépendante de N et de t . Par intégration par parties on a

$$\int_t^u K_N(y) dy = - \int_t^u \frac{\cos((2N+1)\pi y)}{2N+1} \frac{\cos(\pi y)}{(\sin(\pi y))^2} dy - \left[\frac{\cos((2N+1)\pi y)}{(2N+1)\pi \sin(\pi y)} \right]_t^u,$$

d'où, en utilisant l'inégalité $\sin(\pi y) \geq 2y$ pour $0 \leq y \leq 1/2$,

$$\left| \int_t^u K_N(y) dy \right| \leq \frac{1}{4(2N+1)t} + \frac{1}{(2N+1)2\pi t} + \frac{1}{(2N+1)2\pi u},$$

ce qui majoré par $1/4 + 1/\pi$ si $t \geq 1/(2N+1)$. Pour conclure, on observe que si $0 < t < 1/(2N+1)$,

$$0 < \int_t^{1/(2N+1)} K_N(y) dy < \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y) dy,$$

(car $K_N > 0$ sur $]0, 1/(2N+1)]$) et

$$\int_0^{1/(2N+1)} K_N(y) dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{(2N+1) \sin(\pi z/(2N+1))} dz.$$

Comme $(2N+1) \sin(\pi z/(2N+1))$ tend vers πz lorsque $N \rightarrow \infty$, et que $\sin(\pi z/(2N+1)) \geq 2z/(2N+1)$ pour $z \in [0, 1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$ (de sorte que $z/(2N+1) \in [0, 1/2]$), par le théorème de convergence dominée on obtient que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y) dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} dz.$$

On a donc bien une majoration de $|\int_t^u K_N(y) dy|$ indépendante de N et de t , ce qui permet de passer à la limite dans

$$\int_0^u \varphi_x(y) K_N(y) dy = \int_0^u \left(\int_t^u K_N(y) dy \right) \varphi'_x(t) dt.$$

Comme $\int_t^u K_N(y) dy$ tend vers zéro, on en déduit

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^u \varphi_x(y) K_N(y) dy = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque I.3

Le résultat de convergence simple donné par ce théorème est vrai plus généralement pour les fonctions à variation bornée [2, pp. 156–157], définies comme suit. Une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est à variation bornée si

$$\text{VT}(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^J |f(x_j) - f(x_{j-1})| ; J \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_0 < \dots < x_J \leq 1 \right\} < +\infty .$$

Attention cependant, aux points de discontinuité, l'approximation d'une fonction par les sommes partielles de sa série de Fourier n'est pas très bonne : c'est ce qu'on appelle le *phénomène de Gibbs*, précisé dans le résultat suivant et mis en évidence plus loin sur la figure 3 (p. 42).

Théorème I.6 (Phénomène de Gibbs)

Sous des hypothèses du théorème de Dirichlet,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(S_N(f) - f \right) \Big|_{x + \frac{1}{2N+1}} = \left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)) ,$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(S_N(f) - f \right) \Big|_{x - \frac{1}{2N+1}} = - \left(C - \frac{1}{2} \right) (f(x+0) - f(x-0)) ,$$

avec

$$C := \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx \approx 0.58948987 \dots$$

Avant de donner la démonstration, énonçons par commodité le lemme obtenu au cours de la démonstration du théorème de Dirichlet .

Lemme I.2

Soient K_N le noyau Dirichlet et $t, u \in]0, 1/2]$. Alors

1.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_t^u K_N(y) dy = 0 ,$$

2.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y) dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} dz ,$$

3. il existe $C > 0$ indépendant de N et t tel que

$$\left| \int_t^u K_N(y) dy \right| \leq C$$

4. Si $\varphi \in L^1([u, 1/2])$ alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_u^{1/2} \varphi(y) K_N(y) dy = 0 .$$

5. Si $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, u])$ alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(y) K_N(y) dy = 0.$$

Démonstration du théorème I.6 : Pour simplifier les notations, on suppose $x = 0$ (ce qui revient à considérer la fonction $y \mapsto f(y+x)$, dont la série de Fourier est aussi la translatée par x de celle de f). On a

$$(S_N(f) - f)(1/(2N+1)) = \int_0^{1/2} (\varphi_N^-(y) + \varphi_N^+(y)) K_N(y) dy$$

où K_N est le noyau de Dirichlet (introduit dans la démonstration du théorème de Dirichlet) et

$$\varphi_N^\pm(y) := f(1/(2N+1) \pm y) - f(1/(2N+1)), \quad y > 0.$$

On va montrer successivement que

$$(I.4) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/2} \varphi_N^+(y) K_N(y) dy = 0,$$

$$(I.5) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/(2N+1)} \varphi_N^-(y) K_N(y) dy = 0,$$

$$(I.6) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{1/(2N+1)}^{1/2} \varphi_N^-(y) K_N(y) dy = (C - \frac{1}{2})(f(0+) - f(0-)).$$

La première limite (I.4) s'obtient, comme pour le théorème de Dirichlet, en montrant que pour $u > 0$ assez petit,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_u^{1/2} \varphi_N^+(y) K_N(y) dy = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^u \varphi_N^+(y) K_N(y) dy = 0.$$

En effet, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $u \in]0, 1/2]$ tel que φ_N^+ soit de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, u]$ pour tout $N \geq N_0$, d'où

$$\int_0^u \varphi_N^+(y) K_N(y) dy = \int_0^u \left(\int_t^u K_N(y) dy \right) (\varphi_N^+)'(t) dt.$$

Comme $\int_t^u K_N(y) dy$ tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$, tout en étant uniformément borné par rapport à $t \in [0, u]$ et $N \geq N_0$, ce qui est le cas aussi pour $(\varphi_N^+)'(t)$, le théorème de convergence dominée s'applique et l'on obtient ainsi que $\int_0^u \varphi_N^+(y) K_N(y) dy$ tend vers zéro. Quant à l'autre intégrale

$$\begin{aligned} \int_u^{1/2} \varphi_N^+(y) K_N(y) dy &= \int_u^{1/2} (f(y) - f(0+)) K_N(y) dy \\ &\quad + \int_u^{1/2} (\varphi_N^+(y) - f(y) + f(0+)) K_N(y) dy, \end{aligned}$$

elle tend vers zéro car le premier morceau tend vers zéro d'après le lemme I.2, et le deuxième tend aussi vers zéro car

$$\left| \int_u^{1/2} (\varphi_N^+(y) - f(y) + f(0+)) K_N(y) dy \right| \leq \frac{1}{2u} \int_u^{1/2} |(T_{1/(2N+1)}f - f)(y)| dy \\ + \frac{1-2u}{4u} |f(1/(2N+1)) - f(0+)|.$$

La seconde limite (I.5) s'obtient par une majoration grossière : il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tel que pour $N \geq N_0$, $|f'(t)| \leq C$ pour tout $t \in [0, 1/(2N+1)]$ (en $t = 0$ on ne considère que la dérivée à gauche de la fonction f prolongée par continuité à gauche) et $0 < K_N(y) \leq 1/(2y)$ pour $y \in]0, 1/(2N+1)]$, donc

$$\left| \int_0^{1/(2N+1)} \varphi_N^-(y) K_N(y) dy \right| \leq C \int_0^{1/(2N+1)} y K_N(y) dy \leq C \frac{1}{2(2N+1)}.$$

Reste la troisième limite (I.6), qui contient l'information utile au phénomène de Gibbs :

$$\int_{1/(2N+1)}^{1/2} \varphi_N^-(y) K_N(y) dy = \int_{1/(2N+1)}^{1/2} (f(1/(2N+1)) - y - f(0-)) K_N(y) dy \\ + (f(0-) - f(1/(2N+1))) \int_{1/(2N+1)}^{1/2} K_N(y) dy.$$

On sait (voir le lemme I.2) que

$$\int_{1/(2N+1)}^{1/2} K_N(y) dy = \int_0^{1/2} K_N(y) dy - \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y) dy$$

tend vers $1/2 - C$. Donc la limite (I.6) sera démontrée si l'on montre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/(2N+1)}^{1/2} (f(1/(2N+1)) - y - f(0-)) K_N(y) dy = 0.$$

On coupe encore une fois en morceaux. Pour tout $u \in]0, 1/2]$, on a

$$\int_u^{1/2} (f(1/(2N+1)) - y - f(0-)) K_N(y) dy = \int_u^{1/2} (f(-y) - f(0-)) K_N(y) dy \\ + \int_u^{1/2} (f(1/(2N+1)) - y - f(-y)) K_N(y) dy,$$

et chaque morceau tend vers zéro par les mêmes arguments que précédemment (pour $\int_u^{1/2} \varphi_N^+ K_N$). Enfin, pour $u \in]0, 1/2]$ assez petit,

$$\int_{1/(2N+1)}^u (f(1/(2N+1)) - y - f(0-)) K_N(y) dy = \int_{1/(2N+1)}^u \left(\int_{1/(2N+1)-y}^0 f'(t) dt \right) K_N(y) dy \\ = \int_{1/(2N+1)-u}^0 \left(\int_{1/(2N+1)-t}^u K_N(y) dy \right) f'(t) dt,$$

ce qui tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée et les propriétés de K_N (voir le lemme I.2), car $|\int_{1/(2N+1)-t}^u K_N(y)dy|$ est borné indépendamment de N et de $t \in [1/(2N+1) - u, 0[$ et tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$, à $t \in]-u, 0[$ fixé : il suffit pour le vérifier d'observer que

$$\int_{1/(2N+1)-t}^u K_N(y)dy = \int_{1/(2N+1)-t}^{-t} K_N(y)dy + \int_{-t}^u K_N(y)dy,$$

où le second morceau relève directement du lemme I.2 et le premier tend vers zéro car K_N est bornée indépendamment de N au voisinage de t . ■

Théorème I.7 (Fejér)

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est continue à gauche et à droite en tout point, alors $S_N(f)(x)$ converge en moyenne de Césaro vers $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ quel que soit x .

Démonstration : Elle est beaucoup plus directe que celle du théorème de Dirichlet, car la moyenne de Césaro du noyau de Dirichlet

$$F_N(y) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K_N(y)$$

a le mérite d'être de signe constant et de tendre vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ pour tout $y \in]0, 1/2[$. En effet,

$$F_N(y) = \frac{1}{N \sin(\pi y)} \sum_{n=0}^{N-1} \sin((2N+1)\pi y) = \frac{1}{N \sin(\pi y)} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\pi(2N+1)y} \right).$$

Or

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\pi(2N+1)y} = e^{i\pi y} \frac{e^{2i\pi N y} - 1}{e^{2i\pi y} - 1} = e^{i\pi N y} \frac{\sin(\pi N y)}{\sin(\pi y)},$$

donc

$$F_N(y) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(\pi N y)}{\sin(\pi y)} \right)^2.$$

Si $\Sigma_N(f)$ désigne la moyenne de Césaro des sommes partielles $S_N(f)$, on a

$$\Sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(x-y) F_N(y) dy,$$

et en particulier pour $f \equiv 1$, ceci donne (sans calcul)

$$1 = \int_0^1 F_N(y) dy,$$

et comme F_N est paire, on a aussi

$$\int_0^{1/2} F_N(y) dy = \int_{1/2}^1 F_N(y) dy = 1/2.$$

Par suite, on a

$$\Sigma_N(f)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^{1/2} \varphi_x(y) F_N(y) dy,$$

où (comme dans la démonstration du théorème de Dirichlet)

$$\varphi_x(y) := f(x-y) + f(x+y) - f(x-0) - f(x+0), \quad y > 0.$$

Le fait que $\int_0^1 F_N = 1$ et que $F_N \geq 0$ permet d'affirmer directement que pour tout $u \in]0, 1]$,

$$\int_0^u |F_N(y)| dy = \int_0^u F_N(y) dy \leq 1.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in]0, 1/2]$ tel que pour tout $y \in]0, u]$, $|\varphi_x(y)| \leq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\left| \int_0^{1/2} \varphi_x(y) F_N(y) dy \right| \leq \varepsilon + \left| \int_u^{1/2} \varphi_x(y) F_N(y) dy \right|,$$

Or pour $0 < u \leq y \leq 1/2$,

$$F_N(y) \leq \frac{1}{4Nu^2},$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$\left| \int_0^{1/2} \varphi_x(y) F_N(y) dy \right| \leq 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Chapitre II

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est aux fonctions suffisamment « décroissantes » à l'infini ce que les séries de Fourier sont aux fonctions périodiques, ces deux approches ayant des liens que l'on va mettre en évidence.

Il existe différentes conventions pour sa définition. Pour le développement de la théorie, il sera plus commode de définir (formellement) la transformée d'une fonction u de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ par

$$\widehat{u}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \zeta \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^d.$$

Par abus de langage, la variable ζ sera appelée *fréquence*¹. Dans les applications, il est souvent plus agréable de travailler avec

$$\widetilde{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Le passage de l'une à l'autre est évident, c'est un simple changement d'échelles en « fréquences » :

$$\widehat{u}(\zeta) = \widetilde{u}(2\pi \xi).$$

On se place pour commencer en dimension $d = 1$.

1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ la transformée de Fourier de f par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(x) e^{-2i\pi \zeta x} dx.$$

Par le théorème de Lebesgue, on voit que \widehat{f} est continue, et bornée par $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

Voici tout d'abord une formule remarquable, qui fait le lien avec les séries de Fourier.

Théorème II.1 (Formule sommatoire de Poisson)

Si f est intégrable, continue et telle que la série $\sum_n f(x+n)$ converge normalement sur

¹ce qui correspond au vocabulaire physique lorsque \mathbf{x} est en fait homogène à un temps !

$L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis et si la série $\sum_n \widehat{f}(n)$ est absolument convergente, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}.$$

En particulier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

Démonstration : D'après les hypothèses, la fonction

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$$

est définie et continue en tout point x de \mathbb{R} , et elle est évidemment 1-périodique. Ses coefficients de Fourier sont

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi m x} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi m(x+n)} dx = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi m(x+n)} dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire par changement de variable,

$$C_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2i\pi m y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi m y} dy = \widehat{f}(m).$$

L'hypothèse sur la série $\sum_n \widehat{f}(n)$ assure que F est somme de sa série de Fourier (par le théorème I.4), d'où le résultat. ■

La formule de Poisson permet, entre autres, de donner une démonstration rapide du théorème fondamental suivant.

Théorème II.2

Si f est intégrable et continue, si les séries $\sum_n f(x+n)$ et $\sum_n \widehat{f}(\zeta+n)$ convergent normalement sur $L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis, alors

$$(II.1) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi \zeta x} d\zeta$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : On commence par remarquer la formule élémentaire :

$$\mathcal{F}(f e^{-2i\pi \tau \cdot}) = \widehat{f}(\cdot + \tau).$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson à la fonction $x \mapsto f(x) e^{-2i\pi \tau x}$, on en déduit donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi \tau(x+n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x},$$

ou encore

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi\tau n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x}.$$

Le membre de gauche est une série de Fourier par rapport à la variable τ , dont les coefficients $c_n = (f(x-n))_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une série absolument convergente (à x fixé). En particulier, le coefficient $c_0 = f(x)$ est donné par :

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi\tau n} d\tau = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x} d\tau = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi(\zeta)x} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta) e^{2i\pi\zeta x} d\zeta. \end{aligned}$$

Théorème II.3 (Plancherel)

Si f est intégrable et continue, si les séries $\sum_n f(x+n)$ et $\sum_n \widehat{f}(\zeta+n)$ convergent normalement sur $L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis, alors

$$(II.2) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Démonstration : On va à nouveau utiliser la formule de Poisson, et cette fois-ci l'identité de Parseval (I.3), d'après laquelle on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi(n+\tau)x} \right|^2 d\tau = \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 d\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)|^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 d\tau dx.$$

Grâce au théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre d'intégration, et comme

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau) e^{2i\pi n x} \right|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2$$

par la formule de Parseval, on obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Remarque II.1

- Les théorèmes II.1, II.2 et II.3 ne sont pas vides : il existe des fonctions f satisfaisant leurs hypothèses. En effet, si f est une fonction dérivable et intégrable, de dérivée f' aussi intégrable², alors on a

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx = \frac{1}{2i\pi\zeta} \int f'(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx = \frac{1}{2i\pi\zeta} \widehat{f}'(\zeta).$$

Par suite, si f est deux fois dérivable, avec f , f' et f'' intégrables, on a

$$\widehat{f}(\zeta) = -\frac{1}{4\pi^2\zeta^2} \widehat{f}''(\zeta),$$

d'où

$$|\widehat{f}(\zeta + n)| \leq \frac{1}{4\pi^2(\zeta + n)^2} \|\widehat{f}''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{4\pi^2(\zeta + n)^2} \|f''\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

La série $\sum_n \widehat{f}(\zeta + n)$ est donc normalement convergente sur $L^\infty([a, b])$ quels que soient a et b finis. Pour que la série $\sum_n f(x + n)$ le soit aussi, il suffit de prendre f à support compact³. Une fonction de classe \mathcal{C}^2 à support compact remplit donc les hypothèses des théorèmes II.1 et II.3.

- Attention, il n'y a pas d'ordre entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ (contrairement à ce qui se passe sur le tore \mathbb{T}). Cependant, on montre que les fonctions satisfaisant les hypothèses du théorème II.3 sont nécessairement de carré intégrable. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-N}^{N+1} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^N \int_0^1 |f(x+n)|^2 dx \leq \sum_{n=-N}^N \max_{[0,1]} |f(\cdot + n)|^2.$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ est finie dès que la suite $\max_{[0,1]} |f(\cdot + n)|$ appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Et il y a bel et bien ordre entre les espaces de suites $\ell^p(\mathbb{Z})$:

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \subset \dots \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Par suite, l'égalité de Plancherel dans le cadre du théorème II.3 a lieu entre quantités finies !

2 Transformation de Fourier sur L^2

On va « étendre \mathcal{F} par densité », en s'appuyant sur le

Théorème II.4

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Démonstration : Soit ρ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cette nouvelle fonction est bien sûr encore à valeurs positives ou nulles, elle est à support dans $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ et d'intégrale 1.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\left(\int_{|x|>1/\varepsilon_0} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et f_ε définie par

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} f(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy,$$

c'est-à-dire

$$f_\varepsilon = (\mathbf{1}_{[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]} f) * \rho_\varepsilon.$$

Rappelons que la *convolution* de deux fonctions g et h , intégrables sur \mathbb{R} est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$(g * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) h(x-y) dy.$$

Plus généralement, on peut étendre la définition à $g \in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$, les fonctions $y \mapsto g(y) h(x-y)$ étant intégrables pour presque tout x , et on a l'inégalité :

$$\|g * h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(La démonstration est une application astucieuse de l'inégalité de Hölder, cf Brézis [1, p. 67].)

Revenons donc à la fonction f_ε . Elle est clairement à support compact (inclus dans $[-1/\varepsilon - \varepsilon, 1/\varepsilon + \varepsilon]$), de classe \mathcal{C}^∞ comme ρ_ε . Et on a pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|(\mathbf{1}_{\{|x|>1/\varepsilon_0\}}) |f| * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

D'après le rappel sur la convolution, le premier morceau est inférieur ou égal à

$$\|(\mathbf{1}_{\{|x|>1/\varepsilon_0\}}) |f|\|_{L^p(\mathbb{R})} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left(\int_{|x|>1/\varepsilon_0} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\alpha}{2}$$

par hypothèse sur ε_0 . Quant au second morceau, il tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 : c'est une propriété fondamentale de la convolution par une suite de fonctions du type de ρ_ε , aussi appelée *noyau de régularisation*, que l'on montre à part dans le lemme II.1. Donc il est inférieur à $\alpha/2$ pour ε assez petit. ■

Lemme II.1

Soit ρ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Soit

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Démonstration : Pour presque tout x , on a, par définition de $f * \rho_\varepsilon$ et puisque ρ_ε est d'intégrale 1,

$$\begin{aligned} (f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho_\varepsilon(x - y) dy - f(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x)) \rho_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x - \varepsilon z) - f(x)) \rho(z) dz. \end{aligned}$$

Ici on est coincé en général. En revanche, si f est continue à support compact, on peut conclure de façon élémentaire : comme $f(x - \varepsilon z) - f(x)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et

$$|(f(x - \varepsilon z) - f(x)) \rho(z)| \leq 2|\rho(z)| \max_{[x-1, x+1]} |f|,$$

on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue ; on en déduit que $(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, uniformément sur tout compact. Comme en fait $(f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x)$ est à support dans un compact fixe $\text{supp } f + [-1, 1]$, cela suffit pour avoir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Pour une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ quelconque, on fait appel au résultat d'approximation suivant, que l'on admettra : *l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$* (conséquence du théorème de Lusin). Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. Il existe g continue à support compact telle que

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|(f - g) * \rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \\ &2 \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Le premier morceau est inférieur à $2\alpha/3$, et le second est rendu inférieur à $\alpha/3$ pour ε assez petit (d'après le résultat sur les fonctions continues à support compact). ■

Grâce aux théorèmes II.4 et II.3, la transformation de Fourier \mathcal{F} s'étend continûment en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. La démonstration relève de ce que les anglophones appellent le « B.L.T. theorem » (pour « Bounded Linear Transformation »), et repose sur le critère de Cauchy. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une « suite » f_ε de fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers 0. La « suite » $(\mathcal{F}(f_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(f_{\varepsilon'})\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc elle converge vers une fonction $F \in L^2(\mathbb{R})$. Cette limite ne dépend pas de la suite. Car si g_ε en est une autre, de limite G , on a

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(g_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

d'où en passant à la limite

$$\|F - G\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Cette limite est par définition la transformée de Fourier de f , notée \widehat{f} . De plus, en passant à la limite dans l'identité :

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

on obtient

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Quant à la formule d'inversion, d'après la remarque II.1, elle est satisfaite au moins sur le sous-ensemble dense constitué des fonctions de classe \mathcal{C}^2 à support compact. On peut écrire en abrégé la formule d'inversion :

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Id}.$$

Cette identité est vraie sur L^2 tout entier par passage à la limite. En revanche, la formule d'inversion (II.1) suppose \widehat{f} intégrable, ce qui n'est pas automatique.

Transformation de Fourier en dimension quelconque

En suivant une démarche analogue, on peut définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ quel que soit l'entier d . C'est une application que l'on note encore \mathcal{F} :

- linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$,
- qui préserve la norme,
- telle que

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Id},$$

- et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ est définie par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int f(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \zeta \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Notations. Pour tout d -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ on convient de noter $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ la « longueur » de α , et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_d^{\alpha_d}$$

pour tout $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{R}^d$.

Remarque II.2

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact, sa transformée de Fourier \widehat{f} se prolonge en une fonction analytique sur \mathbb{C}^d . En effet, si $K = \text{supp}(f)$,

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_K f(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \zeta \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

est défini quel que soit $\zeta \in \mathbb{C}^d$ et hérite de l'analyticité de la fonction exponentielle. De

$f(\mathbf{x})$	$\partial^\alpha f(\mathbf{x})$	$(f * g)(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$	$f(a \mathbf{x})$	$f(\mathbf{x}) \cos(2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\zeta}_0)$
$\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$(2i\pi)^{ \alpha } \boldsymbol{\zeta}^\alpha \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta}) \widehat{g}(\boldsymbol{\zeta})$	$e^{2i\pi \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{a}} \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})$	$\frac{1}{ a ^d} \widehat{f}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{a}\right)$	$\frac{1}{2}(\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_0) + \widehat{f}(\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta}_0))$

TAB. II.1 – Formulaire de base (on obtient des formules analogues en échangeant les rôles de f et \widehat{f})

plus, en notant $|\boldsymbol{\zeta}| = \sqrt{\sum_{j=1}^d |\zeta_j|^2}$, $\boldsymbol{\eta} = \text{Im} \boldsymbol{\zeta}$ et

$$I_K(\boldsymbol{\eta}) = \max_{\mathbf{x} \in K} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}),$$

on montre par intégrations par parties successives, l'inégalité

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})| \leq \frac{1}{(2\pi |\boldsymbol{\zeta}|)^{|\alpha|}} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(K)} e^{2\pi I_K(\boldsymbol{\eta})},$$

pour tout d -uplet α . Par suite, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\zeta})| \leq \frac{C_p}{(1 + |\boldsymbol{\zeta}|)^p} e^{2\pi I_K(\boldsymbol{\eta})}$$

quel que soit $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^d$. (Noter qu'en particulier si K est la boule de centre 0 et de rayon R , $I_K(\boldsymbol{\eta}) = R \|\boldsymbol{\eta}\|$.) Cette propriété caractérise en fait la transformée de Fourier des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support inclus dans K (théorème de Paley-Wiener).

3 Transformation de Fourier sur \mathcal{S}'

Le comportement de la transformation de Fourier vis à vis de la dérivation et inversement, vis à vis de la multiplication par un polynôme, implique une sorte de dualité entre la régularité et la décroissance à l'infini : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini ; plus une fonction décroît rapidement à l'infini, plus sa transformée de Fourier est régulière. Il existe une classe de fonctions qui allie les deux propriétés, c'est la *classe de Schwartz* des fonctions \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées (on dit souvent en abrégé *fonctions à décroissance rapide*), qui est par conséquent invariante par transformation de Fourier. La définition précise est

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d); \text{ pour tout multi-indice } \alpha, \text{ pour tout entier } \beta, \right. \\ \left. \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + \|\mathbf{x}\|)^\beta |\partial^\alpha f(\mathbf{x})| < +\infty \right\}.$$

L'exemple classique de fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est la gaussienne :

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donc un espace vectoriel non trivial, que l'on munit de la topologie associée aux semi-normes :

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} (1 + \|\mathbf{x}\|)^\beta |\partial^\alpha f(\mathbf{x})|.$$

Cela signifie en particulier qu'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers f si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{pour tout multi-indice } \alpha \text{ et pour tout entier } \beta.$$

On peut ensuite définir le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, espace des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, continues au sens séquentiel suivant :

$$\langle u, f_n \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \rightarrow \langle u, f \rangle \quad \text{pour toute suite } f_n \in \mathcal{S} \text{ convergeant vers } f.$$

Les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont appelés *distributions tempérées*. La topologie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{S}' \text{ (ce que l'on note aussi } u_n \rightharpoonup u)$$

si et seulement si

$$\langle u_n, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \rightarrow \langle u, f \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}.$$

En particulier, toute fonction mesurable g à croissance au plus polynomiale peut être vue comme une distribution tempérée : il suffit pour cela de l'identifier avec la forme linéaire continue

$$f \mapsto \langle g, f \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

L'exemple classique de distribution tempérée est la *masse de Dirac* $\delta_{\mathbf{x}}$, définie par :

$$\langle \delta_{\mathbf{x}}, f \rangle = f(\mathbf{x}).$$

Ce n'est pas une fonction, contrairement à un abus de langage courant. On peut la voir comme une mesure de Radon (puisque c'est aussi une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues bornées). Il est intéressant de remarquer que $\delta_{\mathbf{x}}$ s'obtient par passage à la limite sur les noyaux déjà rencontrés.

Proposition II.1

Soit ρ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support compact, à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1, 1]$ et d'intégrale 1. Soit

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{y}) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors ρ_ε converge vers $\delta_{\mathbf{x}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration : L'énoncé signifie que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \rho_\varepsilon, f \rangle = f(\mathbf{x}).$$

Le calcul à faire pour prouver cette assertion est le même que pour le lemme II.1 (sauf qu'ici on est en dimension d , ce qui donne un ε^d dans le jacobien du changement de variables). ■

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ étant invariant par transformation de Fourier, il est très facile d'étendre cette transformation à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, notons que pour deux fonctions g et f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle g, \widehat{f} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\zeta) \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) e^{-2i\pi \mathbf{y} \cdot \zeta} d\mathbf{y} d\zeta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) e^{-2i\pi \mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x} d\xi = \langle \widehat{g}, f \rangle \end{aligned}$$

(où l'on a simplement utilisé le théorème de Fubini). Il est donc naturel de définir

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \\ T &\mapsto \widehat{T}; \langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Exemple. La transformée de Fourier au sens des distributions de

$$\mathbf{x} \mapsto e^{i s \|\mathbf{x}\|^2}$$

pour $s > 0$ s'identifie avec la fonction

$$\zeta \mapsto \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{i d \pi/4} e^{-i \pi^2 \|\zeta\|^2/s}.$$

En effet, on sait que la Gaussienne $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = e^{-a \|\mathbf{x}\|^2}$, qui est une fonction de \mathcal{S} pour $a > 0$, admet pour transformée de Fourier

$$\zeta \mapsto \widehat{\varphi}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/a}.$$

Par suite, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-a \|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/a} f(\zeta) d\zeta.$$

Considérons alors les fonctions de la variable complexe z définies par

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z \|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad G(z) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi^2 \|\zeta\|^2/z} f(\zeta) d\zeta,$$

où $z^{1/2}$ désigne la racine carrée de z de partie réelle positive pour $\operatorname{Re} z > 0$. D'après la formule ci-dessus, ces deux fonctions coïncident pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus, elles sont analytiques dans le demi-plan ouvert $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$. Donc elles coïncident en fait sur tout le demi-plan. Enfin, elles admettent toutes deux un prolongement par continuité à $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour G , on remarque que pour $s > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + is)^{1/2} = \sqrt{s} e^{i\pi/4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - is)^{1/2} = \sqrt{s} e^{-i\pi/4}.$$

D'où à la limite,

$$F(-is) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i s \|\mathbf{x}\|^2} \widehat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = G(-is) = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{i d \pi/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i \pi^2 \|\zeta\|^2/s} f(\zeta) d\zeta$$

pour $s > 0$. Ceci étant vrai quelle que soit la fonction f , on en déduit le résultat annoncé.

La dérivation au sens des distributions se définit aussi par extension des formules vraies pour les fonctions :

$$\langle \partial^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha f \rangle \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

quel que soit le multi-indice α . Ceci permet de montrer facilement la formule :

$$\widehat{\partial^\alpha T} = (2i\pi)^{|\alpha|} \zeta^\alpha \widehat{T},$$

et ainsi de donner un sens à l'assertion faite plus haut concernant les espaces de Sobolev d'indice entier $p \in \mathbb{N}^*$. On a en effet

$$H^p(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^d); \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ pour tout multi-indice } \alpha \text{ de longueur } |\alpha| \leq p \},$$

où les dérivées sont prises au sens des distributions.

4 Transformées de Fourier classiques

- En dimension 1, on calcule facilement la transformée de Fourier de la fonction créneau :

$$f = \mathbf{1}_{|x| \leq R} \implies \widehat{f}(\zeta) = \frac{\sin(2\pi R \zeta)}{\pi \zeta}.$$

Ces deux fonctions étant de carré intégrable, on a inversement :

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x} \implies \widehat{f}(\zeta) = \mathbf{1}_{|\zeta| \leq R}.$$

- Pour $a > 0$, la fonction $f, : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|}$ a pour transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\zeta) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \zeta^2}.$$

- Pour une Gaussienne :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\sigma^2\pi)^d}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|^2}{2\sigma^2}},$$

la transformée de Fourier est de même nature :

$$\widehat{f}(\zeta) = e^{-2i\pi \zeta \cdot \mathbf{m}} e^{-2\pi^2 \sigma^2 \|\zeta\|^2}.$$

En particulier, on voit que la fonction

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\pi \|\mathbf{x}\|^2}$$

est invariante par transformation de Fourier. On remarque tout d'abord qu'il suffit de faire le calcul pour $d = 1$. En effet, il est évident que f est intégrable. Sa transformée de Fourier est donc définie par

$$\widehat{f}(\zeta) = \int e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi \zeta \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

et le théorème de Fubini montre que :

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta_1 x_1} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_d - m_d)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta_d x_d} dx_d.$$

Pour calculer

$$g_m(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = e^{-2i\pi\zeta m} g_0(\zeta),$$

il y a plusieurs méthodes. On peut faire appel à la théorie des fonctions de variable complexe (formule de Cauchy). Un calcul plus élémentaire consiste à remarquer :

$$\begin{aligned} g_0'(\zeta) &= -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = \\ &= -4\pi^2 \sigma^2 \zeta \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-2i\pi\zeta x} dx = -4\pi^2 \sigma^2 \zeta g_0(\zeta) \end{aligned}$$

par intégration par parties. D'où, en résolvant à vue l'équation différentielle satisfaite par g_0 :

$$g_0(\zeta) = g_0(0) e^{-2\pi^2 \sigma^2 \zeta^2}.$$

Il reste à calculer, et c'est vrai quelle que soit l'approche choisie, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = g_0(0).$$

Par un changement de variable évident on a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy.$$

Enfin, il y a une astuce bien connue pour calculer

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy.$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = I^2$$

(par le théorème de Fubini) et on calcule l'intégrale sur \mathbb{R}^2 en passant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi.$$

D'où finalement

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \sqrt{2\pi}.$$

• On peut utiliser le résultat précédent pour calculer la transformée de Fourier *au sens des distributions* (voir le paragraphe 3 ci-après) de la fonction continue bornée :

$$f(\mathbf{x}) = e^{is\|\mathbf{x}\|^2}$$

pour $s \neq 0$. On trouve

$$f(\zeta) = \left(\frac{\pi}{|s|}\right)^{d/2} e^{\pm id\pi/4} e^{i\pi^2 \|\zeta\|^2/s},$$

où le signe \pm est celui de s .

5 Applications de la transformation de Fourier

5.1 Espaces de Sobolev fractionnaires construits sur L^2

Pour tout $s > 0$, on définit

$$\lambda^s(\zeta) = (1 + \|\zeta\|^2)^{s/2},$$

et l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \lambda^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|\lambda^s \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

C'est un espace de Hilbert. D'après la formule déjà rencontrée

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\zeta) = (2i\pi)^{|\alpha|} \zeta^\alpha \widehat{f}(\zeta),$$

on voit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $H^p(\mathbb{R}^d)$ contient les fonctions p fois dérivables dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p sont de carré intégrable. En fait, $H^p(\mathbb{R}^d)$ est exactement l'ensemble des *distributions tempérées* (voir le paragraphe 3) dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p sont des fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Et la norme sur $H^p(\mathbb{R}^d)$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|u\|^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq p-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On définit également les espaces de Sobolev homogènes

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); \xi \mapsto \|\xi\|^s \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

munis de la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|\xi \mapsto \|\xi\|^s \widehat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On a clairement $H^s(\mathbb{R}^d) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

et

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\nabla f\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

De plus,

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \approx \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}, \quad s > 0.$$

5.2 Résolution d'E.D.P. linéaires

Équation de la chaleur

Considérons l'équation

$$\partial_t u = \kappa \Delta u$$

et cherchons des solutions dans \mathcal{S}' . En appliquant la transformation de Fourier en espace, l'opérateur Laplacien est transformé en l'opérateur de multiplication par $-4\pi^2 \|\zeta\|^2$, et on obtient pour chaque valeur de ζ une équation différentielle ordinaire en temps :

$$\frac{d}{dt} \widehat{u}(t, \zeta) = -4\kappa\pi^2 \|\zeta\|^2 \widehat{u}(t, \zeta),$$

dont la solution est évidemment :

$$\widehat{u}(t, \zeta) = \widehat{u}(0, \zeta) e^{-4\kappa\pi^2 t \|\zeta\|^2}.$$

On voit que pour $\kappa < 0$ le comportement de cette solution est « explosif » lorsque $t > 0$. Le problème de Cauchy est mal posé dans le sens usuel du temps ($t > 0$). Heureusement, pour la véritable équation de la chaleur (décrivant la diffusion de la chaleur dans un matériau homogène au repos) le coefficient κ est positif (strictement). Dans ce cas, on voit que $\widehat{u}(t, \zeta)$ converge exponentiellement vite vers 0 pour toute valeur non nulle de ζ : ceci traduit la convergence vers un état d'équilibre. En observant que

$$e^{-4\kappa\pi^2 t \|\zeta\|^2} = \mathcal{F}(G_t)(\zeta); \quad G_t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4\kappa\pi t}\right)^{d/2} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4\kappa t}},$$

on peut facilement revenir en variables spatiales. On obtient par transformation de Fourier inverse :

$$u(t, \cdot) = u(0, \cdot) * G_t \quad \forall t > 0.$$

Comme G_t est dans \mathcal{S} pour $t > 0$, on peut en effet la convoler avec n'importe quelle distribution tempérée T en posant

$$(T * G_t)(\mathbf{x}) = \langle T, G_t(\mathbf{x} - \cdot) \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat $T * G_t$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ (qui définit aussi une distribution tempérée). Si $u(0, \cdot)$ est une fonction bornée ou/et intégrable, on a de plus la formule intégrale :

$$u(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4\kappa\pi t}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} u(0, \mathbf{y}) e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4\kappa t}} d\mathbf{y}.$$

En particulier, on voit que $u(t, \cdot)$ est de classe \mathcal{C}^∞ dès que t est strictement positif : l'équation de la chaleur régularise instantanément toute donnée initiale « raisonnable » (dans un espace L^p ou plus généralement une distribution tempérée).

Équation de Schrödinger

Bien que d'apparence semblable à l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger

$$i \partial_t u = h \Delta u$$

a des propriétés tout à fait différentes (physiquement, u représente ce que l'on appelle une fonction d'onde en mécanique quantique, et h est liée à la masse de la particule considérée et à la constante de Planck). Appliquons en effet la transformation de Fourier. Il vient

$$\frac{d}{dt} \widehat{u}(t, \zeta) = 4i h \pi^2 \|\zeta\|^2 \widehat{u}(t, \zeta),$$

d'où

$$\widehat{u}(t, \zeta) = \widehat{u}(0, \zeta) e^{4i h \pi^2 t \|\zeta\|^2}.$$

On voit d'emblée sur cette formule, et d'après la formule de Plancherel, que la norme L^2 de la solution est constante au cours du temps (ce que l'on avait déjà observé au moyen d'une « estimation d'énergie »). Supposons pour fixer les idées $h > 0$. Alors, pour $t > 0$, la fonction

$$\zeta \mapsto e^{4i h \pi^2 t \|\zeta\|^2}$$

est la transformée de Fourier de

$$\mathbf{x} \mapsto G_t(\mathbf{x}) := \left(\frac{1}{4h\pi t} \right)^{d/2} e^{-id\pi/4} e^{-i \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4ht}}.$$

Mais attention, si cette fonction est bien de classe C^∞ , elle n'est pas dans \mathcal{S} . On ne peut pas la convoluer avec n'importe quelle distribution tempérée (c'est possible avec des distributions à support compact, ou avec des fonctions intégrables). Si par exemple $u(0, \cdot) \in L^1$, alors

$$u(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{4h\pi t} \right)^{d/2} e^{-id\pi/4} \int_{\mathbb{R}^d} u(0, \mathbf{y}) e^{i \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4ht}} d\mathbf{y}.$$

Du point de vue de la mécanique quantique, le coefficient de module 1 ($e^{-id\pi/4}$) n'a pas de signification, ni même d'ailleurs les valeurs ponctuelles de u ! (ce sont ce que l'on appelle les observables, de la forme $\int_{\mathbb{R}^d} u^* A \cdot u d\mathbf{x}$, A étant un opérateur différentiel Hermitien, qui comptent).

Équations hyperboliques

- L'équation hyperbolique la plus simple est indéniablement l'équation de transport :

$$\partial_t u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

On peut faire appel à la transformation de Fourier pour la résoudre, puisque l'équation transformée :

$$\partial_t \widehat{u} + 2i\pi (\mathbf{a} \cdot \zeta) \widehat{u} = 0$$

se résout à vue en

$$\widehat{u}(t, \zeta) = \widehat{u}(0, \zeta) e^{-2i\pi (\mathbf{a} \cdot \zeta) t} \quad \implies \quad u(t, \mathbf{x}) = u(0, \mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Cette façon de procéder est efficace et assez rapide, mais tout de même un peu luxueuse. En effet, cela ne demande pas beaucoup d'intuition pour voir que, si u est solution de l'équation de transport de vitesse \mathbf{a} ,

$$\frac{d}{dt} \left(u(t, \mathbf{y} + \mathbf{a}t) \right) = 0!$$

Les courbes d'équation paramétrique

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a}t$$

sont appelées *courbes caractéristiques*, et l'information se propage exactement selon ces courbes.

• Si on passe à une équation un peu plus compliquée, l'équation des ondes, la transformation de Fourier n'est pas la méthode la plus facile pour la résoudre (en particulier, il n'est pas évident d'obtenir des formules explicites si on les connaît pas à l'avance ; voir quand même le §6.1).

• Cependant, la transformation de Fourier est utile pour étudier les propriétés qualitatives des É.D.P., et en particulier des équations hyperboliques plus compliquées que l'équation des ondes (dans lesquelles se cachent des équations d'onde). Voyons par exemple l'équation de l'élasticité :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

L'inconnue $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ représente le déplacement d'un matériau donné par rapport à un état de référence, et les coefficients λ, μ sont des caractéristiques du matériau (coefficients de Lamé ou modules d'Young). Effectuons une transformation de Fourier en espace. On obtient l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\partial_{tt}^2 \hat{\mathbf{u}} + 4\pi^2 \mu \hat{\mathbf{u}} + 4\pi^2 (\lambda + \mu) (\boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\zeta} = 0.$$

Le but ici n'est pas de résoudre explicitement l'équation, mais de dégager quelques propriétés et/ou solutions particulières. Pour tout $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$, on considère $P(\boldsymbol{\zeta})$ la projection orthogonale sur $\boldsymbol{\zeta}^\perp$, et

$$\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\zeta}) = P(\boldsymbol{\zeta}) \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}), \quad \mathbf{W}(t, \boldsymbol{\zeta}) = \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{V}(t, \boldsymbol{\zeta}).$$

On a alors :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{V} + 4\pi^2 \mu \mathbf{V} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{tt}^2 \mathbf{W} + 4\pi^2 (\lambda + 2\mu) \mathbf{W} = 0.$$

Ceci signifie que

$$\mathbf{v}(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{V}(t, \cdot)) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{W}(t, \cdot))$$

sont toutes deux solutions d'une équation des ondes, à savoir :

$$\partial_{tt}^2 \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad \partial_{tt}^2 \mathbf{w} - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{w} = 0,$$

et bien sûr on retrouve $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ comme la superposition des deux. En termes d'ondes planes progressives monochromatiques, cette décomposition correspond à deux types d'ondes : celles de la forme $\underline{\mathbf{v}} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\mathbf{v} \perp \boldsymbol{\xi}$ (ondes dites de cisaillement, de vitesse $c = \sqrt{\mu}$) et celles de la forme $\underline{\mathbf{w}} e^{i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\mathbf{w} \parallel \boldsymbol{\xi}$ (ondes dites de compression, de vitesse $c = \sqrt{\lambda + 2\mu}$).

6 Compléments

6.1 Noyau de Green des ondes en dimension 3s

Ce court paragraphe se concentre sur la démonstration de la formule suivante

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{\cos(r \|\boldsymbol{\xi}\|)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \right) (\mathbf{x}) = \frac{H(\|\mathbf{x}\| - r)}{4\pi \|\mathbf{x}\|},$$

où H est la fonction de Heaviside et pour $r > 0$. Pour aller plus loin sur l'équation des ondes en particulier et l'analyse de Fourier en général on pourra se reporter à l'excellent livre de Strichartz [5] (pages 67–72 concernant l'équation des ondes).

Pour démontrer la formule ci-dessus on peut commencer par calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{x} \mapsto \frac{\chi_R(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|}$, où χ_R est la fonction caractéristique de $]r, R[$. Elle est nécessairement radiale, et en utilisant les coordonnées sphériques on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\mathbf{x} \mapsto \frac{\chi_R(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|}\right)(0, 0, \xi_3) &= \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\xi_3 \rho \cos \theta} \rho \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{4\pi}{\xi_3^2} (\cos(r\xi_3) - \cos(R\xi_3)), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{x} \mapsto \frac{\chi_R(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|}\right)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4\pi}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} (\cos(r\|\boldsymbol{\xi}\|) - \cos(R\|\boldsymbol{\xi}\|)).$$

Il reste ensuite à montrer que cette fonction tend *au sens des distributions* vers la fonction $\boldsymbol{\xi} \mapsto \frac{4\pi \cos(r\|\boldsymbol{\xi}\|)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(R\|\boldsymbol{\xi}\|)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \phi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} &= \\ \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\rho R) \phi(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

En intégrant par parties en ρ , on voit que

$$\left| \int \frac{\cos(R\|\boldsymbol{\xi}\|)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \phi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \right| \lesssim \frac{1}{R} \int \frac{\|\nabla \phi(\boldsymbol{\xi})\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \, d\boldsymbol{\xi} \rightarrow 0$$

lorsque $R \rightarrow +\infty$.

6.2 Principe de Heisenberg

Théorème II.5

Soit $f \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit de carré intégrable. On définit la dispersion de f comme le nombre

$$D_f := \inf_{x \in \mathbb{R}} \left(\int (y-x)^2 |f(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}.$$

Alors le produit $D_f D_{\widehat{f}}$ est minoré par une constante strictement positive (indépendante de f !).

Démonstration : Ce résultat est une conséquence la formule de Plancherel et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, si une fonction f vérifie les hypothèses du théorème, l'infimum dans la définition de D_f et dans celle de $D_{\widehat{f}}$ est atteint, car les fonctions $x \mapsto \int (y-x)^2 |f(y)|^2 \, dy$ et $\xi \mapsto \int (\zeta - \xi)^2 |\widehat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta$ sont convexes et minorées par zéro. Sans perte de généralité on peut supposer qu'ils sont atteints en zéro, quitte à changer f en $y \mapsto e^{-i\xi_0 y} f(y + x_0)$ (dont la dispersion est atteinte en $x = 0$ si celle de f l'est en x_0 , de même que la dispersion de sa transformée

de Fourier $\zeta \mapsto e^{i(\zeta+\xi_0)} \widehat{f}(\zeta + \xi_0)$ est atteinte en $\zeta = 0$ si celle de \widehat{f} est atteinte en ξ_0). Ainsi, on a

$$D_f^2 = \int y^2 |f(y)|^2 dy, \quad D_{\widehat{f}}^2 = \int \zeta^2 |\widehat{f}(\zeta)|^2 d\zeta = 2\pi \int |f'(y)|^2 dy$$

d'après la formule de Plancherel et l'identité $\mathcal{F}(f')(\zeta) = \zeta \widehat{f}(\zeta)$. Or, d'après la inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int y^2 |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int |f'(y)|^2 dy \right)^{1/2} \geq \left| \int y f(y) f'(y) dy \right| = \frac{1}{2} \int f(y)^2 dy$$

par intégration par parties. Ceci prouve l'inégalité

$$D_f D_{\widehat{f}} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(La valeur effective du minérant dépend de la convention choisie pour la définition de la transformation de Fourier.) ■

6.3 Théorie de Paley-Wiener

Remarque II.3

Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact), sa transformée de Fourier \widehat{f} se prolonge en une fonction analytique sur \mathbb{C}^d .

En effet, si $K = \text{supp}(f)$,

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_K f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

est défini quel que soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$ et hérite de l'analyticité de la fonction exponentielle. De plus, en notant $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^d |\xi_j|^2}$, $\boldsymbol{\eta} = \text{Im}\boldsymbol{\xi}$ et

$$I_K(\boldsymbol{\eta}) = \max_{\mathbf{x} \in K} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}),$$

on montre par intégrations par parties successives, l'inégalité

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{|\alpha|}} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(K)} e^{I_K(\boldsymbol{\eta})},$$

pour tout d -uplet α . Par suite, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_p > 0$ tel que

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leq \frac{C_p}{(1 + \|\boldsymbol{\xi}\|)^p} e^{I_K(\boldsymbol{\eta})}$$

quel que soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$. (Noter qu'en particulier si K est la boule de centre 0 et de rayon R , $I_K(\boldsymbol{\eta}) = R \|\boldsymbol{\eta}\|$.) Cette propriété caractérise en fait la transformée de Fourier des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support inclus dans K : ceci est l'objet du *théorème de Paley-Wiener* énoncé ci-dessous.

Théorème II.6 (Paley–Wiener)

Si F est une fonction analytique sur \mathbb{C}^d pour laquelle il existe un compact K de \mathbb{R}^d tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ avec

$$|V(\xi)| \leq \frac{C_p}{(1 + \|\xi\|)^p} \exp\left(\max_{x \in K} (x \cdot \text{Im}\xi)\right)$$

for all $\xi \in \mathbb{C}^d$, alors $F|_{\mathbb{R}^d}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans K .

Démonstration : La partie directe est facile à établir. Reprenons tout d'abord la définition de \widehat{f} . Par hypothèse f est évidemment intégrable et donc \widehat{f} est définie par la formule

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx = \int_{-R}^R f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx.$$

Soit alors

$$F(z) = \int_{-R}^R f(x) e^{-2i\pi z x} dx.$$

On a bien sûr $F(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$. De plus, la fonction $z \mapsto e^{-2i\pi z x}$ étant entière (c'est-à-dire holomorphe sur \mathbb{C} tout entier) et puisqu'on intègre sur un compact, le théorème de Lebesgue montre que F est entière. Enfin, en intégrant successivement par parties (les termes de bord sont nuls car f est à support compact strictement inclus dans $] - R, R[$ par hypothèse), on a

$$(2i\pi z)^m F(z) = \int_{-R}^R f^{(m)}(x) e^{-2i\pi z x} dx$$

pour tout $z \neq 0$. On en déduit l'inégalité

$$|2\pi z|^m |F(z)| \leq 2R \max_{|x| \leq R} |f^{(k)}(x)| e^{2\pi R |\text{Im}(z)|}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. En additionnant avec l'inégalité

$$|F(z)| \leq 2R \max_{|x| \leq R} |f(x)| e^{2\pi R |\text{Im}(z)|},$$

on obtient l'inégalité annoncée avec

$$C_m = 2R \left(\max_{|x| \leq R} |f(x)| + \max_{|x| \leq R} |f^{(k)}(x)| / (2\pi)^m \right).$$

C'est la partie réciproque qui nécessite vraiment de l'analyse complexe. Le fait d'avoir une estimation de la forme

$$|F(\zeta)| \leq \frac{C_m}{(1 + |\zeta|^m)}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R},$$

à tout ordre montre exprime que la restriction de F à \mathbb{R} est à *décroissance rapide*. Cette restriction est de plus de classe \mathcal{C}^∞ puisqu'analytique. On admettra que cela implique que $F|_{\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction f également de classe \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide, et cette fonction f est définie par

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\zeta) e^{2i\pi\zeta x} d\zeta.$$

Montrons alors que f est en fait à support compact inclus dans $[-R, R]$. Soient $x \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, $M > 0$, et C le contour rectangulaire de sommets $\pm M$ et $\pm M + i\eta$. D'après le théorème de Cauchy,

$$\oint_C F(z) e^{2i\pi z x} dz = 0.$$

Or d'après les inégalités de l'hypothèse, les termes correspondant aux intégrales sur les bords verticaux tendent vers 0 lorsque M tend vers $+\infty$. On en déduit à la limite

$$\int_{\mathbb{R}} F(\zeta) e^{2i\pi \zeta x} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} F(\zeta + i\eta) e^{2i\pi(\zeta + i\eta)x} d\zeta,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = e^{-2\pi\eta x} \int_{\mathbb{R}} F(\zeta + i\eta) e^{2i\pi \zeta x} d\zeta.$$

En utilisant une fois de plus les inégalités de l'hypothèse, on obtient

$$|f(x)| \leq C_2 e^{2\pi\eta(R-x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}.$$

Ceci est vrai quel que soit $\eta > 0$. Si $x > R$, en faisant tendre η vers $+\infty$, le membre de droite tend vers 0 : c'est donc que $f(x) = 0$! Le cas de $x < -R$ est analogue, en choisissant un contour avec $\eta < 0$. ■

Théorème II.7 (Paley–Wiener–Schwartz)

Pour $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (ensemble des distributions à support compact), la transformée de Fourier s'étend en une fonction analytique sur \mathbb{C}^d par la formule

$$U(\boldsymbol{\xi}) = \langle u, e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot} \rangle.$$

De plus si $K = \text{Supp } u$, il existe un entier p et $C > 0$ tels que

$$|U(\boldsymbol{\xi})| \leq C (1 + \|\boldsymbol{\xi}\|)^p \exp\left(\max_{\mathbf{x} \in K} (\mathbf{x} \cdot \text{Im}\boldsymbol{\xi})\right)$$

for all $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$. Réciproquement, si U est une fonction analytique sur \mathbb{C}^d pour laquelle il existe un compact K de \mathbb{R}^d , un entier p , et une constante C tels que l'estimation ci-dessus soit satisfaite, alors U est la transformée de Fourier d'une distribution à support dans K .

En résumé, la transformation de Fourier échange les propriétés de localisation et de régularité.

Chapitre III

Transformation de Fourier discrète

Pour simplifier, on se place ici à nouveau en dimension $d = 1$.

1 Cas d'un réseau infini

On a vu au chapitre sur les séries de Fourier comment associer des suites (de coefficients de Fourier) à des fonctions périodiques. On s'intéresse ici à l'opération inverse, partant de suites et obtenant des fonctions périodiques. Ce point de vue est motivé notamment par l'étude de schémas numériques.

La transformée de Fourier discrète d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se définit alors de façon assez naturelle comme l'unique fonction $\mathcal{F}_d(u) = \tilde{u} \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier sont les u_n . Plus exactement, comme il a été montré dans la remarque I.2 on définit \tilde{u} comme la limite dans $L^2(\mathbb{T})$ des sommes partielles de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-2i\pi n\omega}.$$

Bien sûr, d'après la formule de Parseval, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 = \int_0^1 |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega,$$

ce qui signifie que la transformation de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto \tilde{u} \end{aligned}$$

est une isométrie. Il se trouve que l'on peut aussi voir la restriction de \tilde{u} à l'intervalle (de longueur 1) $] - 1/2, 1/2[$ comme la transformée de Fourier (standard, « non discrète ») d'une certaine fonction u^* interpolant la suite (u_n) . Considérons en effet les fonctions ψ_n définies par

$$\psi_n(x) = \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}.$$

On sait que

$$\widehat{\psi}_n(\zeta) = \mathbf{1}_{|\zeta| \leq 1/2} e^{-2i\pi n\zeta}.$$

En particulier, d'après la formule de Plancherel,

$$\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \quad \text{et} \quad \langle \psi_n, \psi_k \rangle = 0 \quad \text{pour } n \neq k,$$

c'est-à-dire que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée. D'autre part, les fonctions ψ_n admettent des prolongements par continuité aux points $x = n$, avec

$$\psi_n(k) = \delta_n^k \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

Définissons alors

$$\mathcal{E}(u) = u^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \psi_n$$

(au sens hilbertien, c'est-à-dire comme limite des sommes partielles dans $L^2(\mathbb{R})$). On a

$$\forall n, u^*(n) = u_n, \quad \text{et} \quad \|u^*\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Finalement, on a le diagramme commutatif suivant, où $\mathcal{J} : f \mapsto f \mathbf{1}_{|\zeta| \leq 1/2}$.

$$\begin{array}{ccc} (u_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_d} & \tilde{u} \in L^2(\mathbb{T}) \\ \mathcal{E} \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\ u^* \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{u^*} \in L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

2 Cas d'un réseau fini

En pratique, les schémas numériques sont utilisés sur un réseau de mailles fini, de sorte que l'on a affaire à un nombre fini de valeurs (u_n) . Supposons ces valeurs indexées par $n \in \{0, \dots, N-1\}$. La transformée de Fourier discrète de (u_n) prolongée en une suite infinie prenant la valeur zéro pour les indices $n \notin \{0, \dots, N-1\}$, est le polynôme trigonométrique :

$$\tilde{u}(\omega) := \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi n\omega}.$$

Or, à partir de N données, il n'y a pas de raison d'obtenir plus de N informations. C'est pourquoi il est assez naturel de ne considérer que N valeurs prises par $\tilde{u}(\omega)$. Pour des raisons de symétrie, on choisit les valeurs $U_0 = \tilde{u}(0)$, $U_1 = \tilde{u}(1/N)$, ..., $U_{N-1} = \tilde{u}((N-1)/N)$. Ceci conduit à définir une transformation de Fourier discrète finie :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ u = (u_n)_{n \in \{0, \dots, N-1\}} & \mapsto & U = (U_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}} ; \quad U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi n k/N}. \end{array}$$

Comme la transformation de Fourier entre fonctions, c'est quasiment une involution. On vérifie en effet facilement que sa réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_N^{-1} : \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ U = (U_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}} & \mapsto & u = (u_n)_{n \in \{0, \dots, N-1\}} ; \quad u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{2i\pi k n/N}. \end{array}$$

3 Transformation de Fourier rapide.

Lorsque N est une puissance de 2, il existe un algorithme qui accélère considérablement (lorsque N est grand) le calcul de la transformée de Fourier discrète sur \mathbb{C}^N . C'est l'algorithme de Cooley et Tuckey (1965), qui permet de faire le calcul avec un nombre d'opérations de l'ordre de $N \log N$ au lieu de N^2 . C'est un joli exercice que de programmer cet algorithme (voir par exemple [3] (leçon n° 9) pour les détails), aussi appelé *FFT* pour *Fast Fourier Transform* en anglais. De nos jours, la FFT est préprogrammée dans les logiciels de calcul scientifique comme Matlab, Maple, etc. Attention cependant au décalage : les vecteurs sont en général numérotés de 1 à N . Ainsi, pour un tableau x de taille $(1, N)$, l'instruction $\text{FFT}(x, N)$ retourne un tableau X de taille $(1, N)$ dont les composantes sont

$$X(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-2i\pi(n-1)(k-1)/N}.$$

L'instruction inverse $\text{IFFT}(X, N)$ redonne x , en calculant

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) e^{2i\pi(k-1)(n-1)/N}.$$

Approximation de coefficients de Fourier au moyen de la FFT. Si f est une fonction 1-périodique, dont la série de Fourier $\sum_n c_n e^{2i\pi n x}$ est absolument normalement convergente, on peut estimer l'erreur commise lorsqu'on approche les coefficients c_n grâce à la transformée de Fourier discrète de la suite

$$u_k^N := f(k/N), \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

En effet, puisque f est somme de sa série de Fourier (qui converge absolument), on a :

$$u_k^N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n k/N} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{N-1} c_{mN+r} e^{2i\pi r k/N} = \sum_{r=0}^{N-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r} \right) e^{2i\pi r k/N},$$

ce qui montre que $U^N = \mathcal{F}_N(u^N)$ vérifie

$$U_r^N = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r}, \quad r \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Si on prolonge la suite $(U_r^N)_{r \in \{0, \dots, N-1\}}$ par périodicité à $r \in \mathbb{Z}$ tout entier, en posant

$$U_{r+pN}^N = U_r^N, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

on voit que la formule précédente reste vraie :

$$U_r^N = N \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{mN+r}, \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

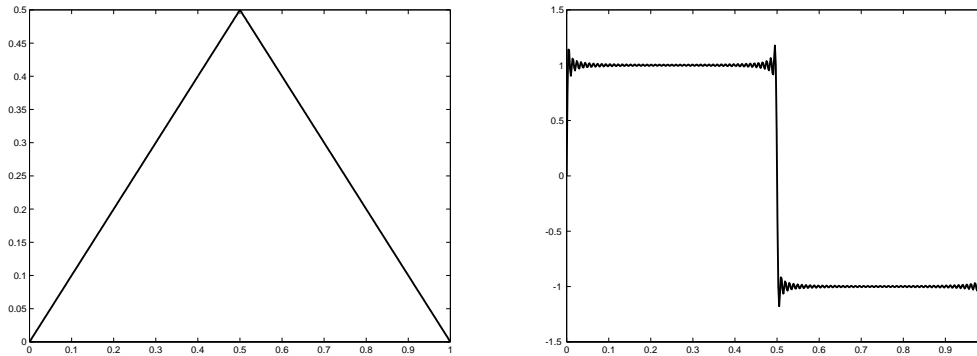


FIG. III.1 – Graphes des sommes partielles de séries de Fourier (tracés avec 500 points).

En particulier, on a pour $r \in \{-N/2, \dots, N/2 - 1\}$:

$$|c_r - \frac{1}{N} U_r^N| = \left| \sum_{m \neq 0} c_{mN+r} \right| \leq \sum_{|n| \geq N/2} |c_n|.$$

On pourrait bien sûr écrire une estimation moins grossière. En tous cas, la précision de l'approximation de c_r par $\frac{1}{N} U_r^N$ dépend du taux de décroissance de c_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, lequel dépend de la régularité de la fonction.

Illustration. Les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction convergent d'autant mieux que la fonction est régulière. Considérons par exemple la fonction continue

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0, 1/2[, \\ 1 - x & \text{pour } x \in [1/2, 1[. \end{cases}$$

et la fonction discontinue

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, 1/2[, \\ -1 & \text{pour } x \in [1/2, 1[. \end{cases}$$

La série de Fourier de la première s'écrit

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \geq 0} \frac{-\cos(2\pi(2n+1)x)}{\pi^2(2n+1)^2}.$$

Elle est absolument convergente. Quant à la seconde série de Fourier :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4 \sin(2\pi(2n+1)x)}{\pi(2n+1)},$$

elle est seulement semi-convergente.

La figure III.1 représente les sommes partielles $\sum_{n=0}^{101}$ de ces séries. On constate que les points de discontinuités sont le siège d'une « mauvaise convergence » : c'est le phénomène bien connu (voir le théorème I.6).

D'autre part, la convergence trop lente vers 0 des coefficients de Fourier des fonctions discontinues nuit au calcul approché de leurs coefficients de Fourier par FFT. La figure III.2

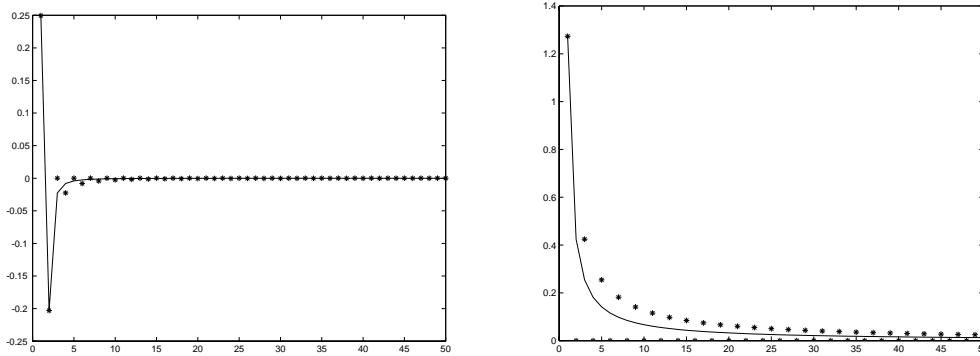


FIG. III.2 – Coefficients de Fourier approchés.

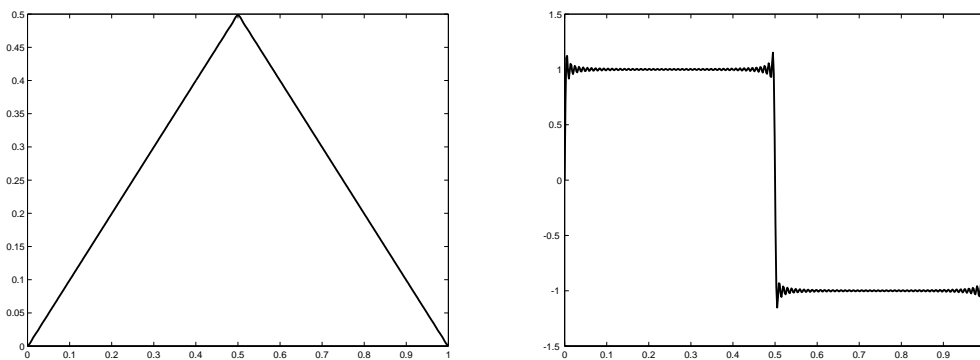


FIG. III.3 – Graphes des sommes partielles de séries de Fourier approchées (tracés avec 500 points).

représente la comparaison entre les coefficients exacts et les coefficients approchés, calculés pour les deux fonctions précédentes avec une discrétisation de 500 points (même si on a représenté seulement les 50 premiers : attention, il faut se rappeler que l'approximation se détériore lorsqu'on s'approche de l'indice maximal, ici 500). Cependant, les coefficients de Fourier approchés donnent une bonne approximation des sommes partielles, cf figure III.3. Pour la fonction continue on ne perçoit pas de différence avec la somme partielle exacte. Pour la fonction discontinue, l'amplitude des oscillations semble moindre avec les coefficients approchés !

Bibliographie

- [1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [2] R. E. Edwards. *Fourier series. A modern introduction. Vol. 1*, volume 64 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1979.
- [3] C. Gasquet et P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage. Calcul numérique. Ondelettes*. Masson, 1990.
- [4] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman, 3ème édition.
- [5] R. S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003.

Index

Bessel

inégalité de, 5

caractéristique

courbe, 31

convolution, 21

Dirac

masse de, 25

Dirichlet

noyau de, 8

Fourier

coefficients de, 3

série de, 4

Gibbs

phénomène de, 11

inégalité

de Bessel, 5

lemme

de Riemann-Lebesgue, 3

noyau de régularisation, 21

Paley-Wiener

théorème de, 24, 34

Parseval

identité de, 7

identité de, 7

Riemann-Lebesgue

lemme de, 3

Sobolev homogène

espace de, 29

support compact, 20

trigonométrie

polynôme, 6

Index

Bessel

inégalité de, 5

caractéristique

courbe, 31

convolution, 21

Dirac

masse de, 25

Dirichlet

noyau de, 8

Fourier

coefficients de, 3

série de, 4

Gibbs

phénomène de, 11

inégalité

de Bessel, 5

lemme

de Riemann-Lebesgue, 3

noyau de régularisation, 21

Paley-Wiener

théorème de, 24, 34

Parseval

identité de, 7

identité de, 7

Riemann-Lebesgue

lemme de, 3

Sobolev homogène

espace de, 29

support compact, 20

trigonométrie

polynôme, 6