

# Géométrie algébrique, M2, Orsay

David Harari

2009/2010

## Table des matières

<b>1. Notions de base sur les schémas</b>	<b>4</b>
1.1. Spectre d'un anneau . . . . .	4
1.2. Notion de faisceau . . . . .	7
1.3. Le faisceau structural sur $\text{Spec } A$ . . . . .	11
1.4. Schémas-définition générale . . . . .	16
1.5. L'exemple des Proj . . . . .	17
<b>2. Morphismes de schémas</b>	<b>20</b>
2.1. Généralités . . . . .	20
2.2. Points d'un schéma . . . . .	21
2.3. Immersions ouvertes et fermées . . . . .	22
2.4. Morphismes finis et de type fini . . . . .	27
2.5. Recollements, produits fibrés . . . . .	33
<b>3. Quelques propriétés générales des schémas</b>	<b>39</b>
3.1. Espaces topologiques noethériens . . . . .	39
3.2. Schémas noethériens . . . . .	42
3.3. Schémas réduits, intègres . . . . .	44
<b>4. Dimension</b>	<b>49</b>
4.1. Dimension d'un anneau . . . . .	49
4.2. Dimension d'un schéma . . . . .	51
4.3. Dimension et schémas de type fini sur un corps . . . . .	54
4.4. Dimension et morphismes . . . . .	56

<b>5. Morphismes séparés, propres, projectifs</b>	<b>58</b>
5.1. Morphismes séparés . . . . .	58
5.2. Morphismes propres . . . . .	62
5.3. Morphismes projectifs . . . . .	64
5.4. Critères valuatifs . . . . .	65
<b>6. Quelques propriétés locales</b>	<b>67</b>
6.1. Schémas normaux . . . . .	68
6.2. Schémas réguliers . . . . .	72
6.3. Morphismes plats . . . . .	77
6.4. Morphismes étales, morphismes lisses . . . . .	84
<b>7. Premières propriétés des <math>\mathcal{O}_X</math>-modules</b>	<b>87</b>
7.1. Notion d' $\mathcal{O}_X$ -module et d' $\mathcal{O}_X$ -module cohérent . . . . .	87
7.2. Images directes et inverses . . . . .	92
7.3. Faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Proj } S$ . . . . .	94
7.4. Faisceaux amples et très amples . . . . .	99
<b>8. Cohomologie des faisceaux</b>	<b>104</b>
8.1. Rappels d'algèbre homologique . . . . .	104
8.2. Cohomologie d'un schéma affine noethérien . . . . .	110
8.3. Une réciproque . . . . .	115
<b>9. Cohomologie de Čech et applications</b>	<b>117</b>
9.1. Cohomologie de Čech . . . . .	117
9.2. Le théorème de comparaison . . . . .	118
9.3. La cohomologie de l'espace projectif . . . . .	121
9.4. Application aux morphismes projectifs . . . . .	124
<b>10. Diviseurs, faisceaux inversibles, courbes.</b>	<b>126</b>
10.1. Diviseurs de Weil sur un schéma . . . . .	127
10.2. Diviseurs de Cartier . . . . .	130
10.3. Diviseurs et faisceaux inversibles . . . . .	132
10.4. Courbes, théorème de Riemann-Roch . . . . .	135
10.5. Formule de Hurwitz . . . . .	138

*Les démonstrations en petits caractères sont celles qui n'ont pas été faites en détails en cours par manque de temps. Les références en gras du type [AC, n] réfèrent au n-ième résultat dans la liste des énoncés d'algèbre commutative.*

*Merci à MM. L. Cohen, B. Dylan, A. Vivaldi et S. Wonder, dont la musique a souvent agréablement accompagné la rédaction de ces notes.*

## Introduction : pourquoi les schémas ?

Classiquement, la géométrie algébrique est l'étude des sous-ensembles de l'espace affine ou de l'espace projectif définis par des équations polynomiales à coefficients dans un corps  $k$  (ex.  $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \dots$ ); ce sont les "variétés algébriques" affines ou projectives :

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad 1 \leq i \leq r$$

(où les  $P_i$  sont des polynômes : cas affine)

$$P_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad 1 \leq i \leq r$$

(où les  $P_i$  sont des polynômes homogènes : cas projectif).

On peut définir ensuite des variétés algébriques plus générales en recollant des variétés affines suivant des cartes, comme on le fait en géométrie différentielle ou analytique sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Toutefois, sur un corps quelconque, on doit se contenter d'une topologie assez grossière, la *topologie de Zariski*, dans laquelle les fermés sont grosso modo les sous-ensembles définis par des équations polynomiales supplémentaires. Or si on prend ce point de vue, on se heurte assez vite à des difficultés :

a) Quand le corps de base  $k$  n'est pas algébriquement clos, des équations très différentes peuvent définir le même ensemble (ex.  $x^2 + 1 = 0$  et  $x + 1 = x$  sur  $\mathbf{R}$  donnent  $\emptyset$ ); en termes plus mathématiques, il n'y a pas de théorème des zéros de Hilbert satisfaisant.

b) On aimerait avoir un moyen rigoureux de traiter les questions de "multiplicités", par exemple dire que sur un corps algébriquement clos, deux courbes planes de degrés  $m, n$  se coupent en  $mn$  points (dont certains peuvent éventuellement être confondus); en gros, l'équation  $x^2 = 0$  ne doit pas correspondre à la même chose que  $x = 0$ .

c) On a souvent envie de parler de point suffisamment général; typiquement si on regarde la famille de coniques affines (paramétrées par  $t$ )  $x^2 - y^2 - P(t) = 0$  (où  $P$  est un polynôme non nul), on voudrait dire que pour un  $t$  général, cette conique est non dégénérée. Formaliser cette notion n'est pas évident a priori, surtout si on travaille sur un corps fini, auquel cas il n'y a pas d'identification entre polynômes et fonctions polynômes.

d) Enfin, si on veut notamment faire de l'arithmétique, il n'y a pas de raison de se limiter aux ensembles définis sur un corps. Regarder des équations sur  $\mathbf{Z}$ , et pouvoir les réduire modulo  $p$  est très utile. Le problème est que si on se limite aux définitions classiques des variétés algébriques, on est embêté si on veut montrer qu'on peut faire ces opérations de façon intrinsèque (indépendante des équations choisies pour définir notre variété).

Le langage des schémas, introduit par Grothendieck à la fin des années 50, permet de mieux comprendre toutes ces questions (et bien d'autres!). Son principal avantage est qu'il fournit un cadre unifié complètement général pour traiter des questions purement géométriques (sur un corps algébriquement clos), arithmétiques (sur  $\mathbf{Z}$  ou  $\mathbf{Q}$ ), réelles, ou encore pour étudier les familles de variétés.

## 1. Notions de base sur les schémas

Par convention, tous les anneaux seront supposés commutatifs, et avec un élément unité. De même, "corps" signifie corps commutatif (non réduit à  $\{0\}$ ). On considère également que l'anneau nul n'est pas intègre (autrement dit  $A$  n'est pas un idéal premier de  $A$ ).<sup>1</sup>

### 1.1. Spectre d'un anneau

De même qu'un ouvert homéomorphe à  $\mathbf{R}^n$  est le constituant élémentaire d'une variété topologique, les spectres d'anneaux vont être les constituants élémentaires des schémas.

**Définition 1.1** Soit  $A$  un anneau. On appelle *spectre* de  $A$  et on note  $\text{Spec } A$  l'ensemble des idéaux premiers de  $A$ .

- Exemples :**
- a)  $\text{Spec } \{0\} = \emptyset$
  - b)  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  est l'ensemble des  $(p)$  avec  $p$  premier, union  $(0)$ .
  - c) Si  $k$  est un corps,  $\text{Spec } k = \{(0)\}$ .
  - d)  $\text{Spec } (k[t])$  est l'ensemble des  $(P)$  avec  $P$  irréductible, union  $(0)$ .
  - e)  $\text{Spec } (k[t]/t^2)$  est réduit à un point (l'idéal engendré par la classe de  $t$ ).

**Définition 1.2** Pour tout idéal  $I$  de  $A$ , on pose  $V(I) = \{\wp \in \text{Spec } A, \wp \supset I\}$ , et pour  $f \in A$ , on pose  $D(f) = \text{Spec } A \setminus V(fA) = \{\wp \in \text{Spec } A, f \notin \wp\}$ .

Noter que si  $I \subset J$ , alors  $V(J) \subset V(I)$ .

**Proposition 1.3** a) On munit  $\text{Spec } A$  d'une topologie (dite *topologie de Zariski*) en prenant pour fermés les ensembles de la forme  $V(I)$  avec  $I$  idéal de  $A$ .

b) Les  $D(f)$  pour  $f \in A$  forment une base de cette topologie.

---

<sup>1</sup>En anglais, "field" signifie corps commutatif, et un anneau intègre (commutatif) se dit "integral domain".

**Démonstration :** a) On note déjà que  $V(A) = \emptyset$  et  $V(\{0\}) = \text{Spec } A$ . D'autre part si  $(I_r)$  est une famille d'idéaux de  $A$ , on a  $\bigcap_r V(I_r) = V(\sum_r I_r)$ , car dire qu'un idéal premier  $\wp$  contient tous les  $I_r$  revient à dire qu'il contient l'idéal engendré  $\sum_r I_r$ . Enfin si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux de  $A$ , on a  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$  : en effet il est immédiat que  $V(I)$  et  $V(J)$  sont inclus dans  $V(I \cap J)$  et  $V(IJ)$  vu que  $I$  (ou  $J$ ) contient  $IJ$  et  $I \cap J$ ; réciproquement si un idéal premier  $\wp$  ne contient ni  $I$  ni  $J$ , on peut trouver  $a$  dans  $I$  et  $b$  dans  $J$  avec  $a \notin \wp$  et  $b \notin \wp$ , donc  $ab$  (qui est dans  $IJ$  et  $I \cap J$ ) n'est pas dans  $\wp$  vu que  $\wp$  est premier.

b) Par définition  $D(f)$  est ouvert. Si maintenant  $U$  est un ouvert et  $\wp \in U$ , alors  $U$  s'écrit  $U = \text{Spec } A \setminus V(I)$ , avec  $\wp \not\supset I$ ; on a donc  $f$  dans  $I$  avec  $f \notin \wp$ , d'où  $U \supset D(f) \supset \{\wp\}$ .

□

**Remarques :** a) On appelle parfois les  $D(f)$  les ouverts principaux et les  $V(fA)$  les fermés principaux. Intuitivement, les points de  $V(fA)$  correspondent à l'équation " $f = 0$ " et ceux de  $D(f)$  à  $f \neq 0$ . Noter que pour tout  $k > 0$ , on a  $D(f) = D(f^k)$ .

b) Dire que le singleton  $\{\wp\}$  est fermé est équivalent à dire que  $\wp$  est un idéal maximal de  $A$  : en effet si  $\wp$  est maximal, on a  $\{\wp\} = V(\wp)$ ; réciproquement si  $\{\wp\} = V(I)$  pour un certain  $I$ , alors  $\wp$  est le seul idéal premier qui contient  $I$ , donc il est maximal vu que tout idéal autre que  $A$  est contenu dans un idéal maximal (théorème de Krull, voir [AC, 1]). On voit qu'on a ici affaire à une topologie qui n'est pas du tout séparée au sens usuel.

**Exemples :** a) Soit  $\mathbf{A}_k^1 = \text{Spec}(k[t])$  la *droite affine* sur  $k$ . Il y a plusieurs types de points sur  $\mathbf{A}_k^1$ . Le point  $\eta = (0)$  n'est pas fermé, et son adhérence est même  $\text{Spec}(k[t])$  tout entier. On dit que c'est le *point générique* de  $\mathbf{A}_k^1$ . Comme  $k[t]$  est principal, les autres points sont fermés<sup>2</sup>. Certains sont de la forme  $(t - a)$  avec  $a \in k$ , donc correspondent à des points usuels de la droite affine sur  $k$ , mais si  $k$  n'est pas algébriquement clos, d'autres points fermés sont plus compliqués. Par exemple sur  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1$ , on a des points comme  $(t^2 + 1)$ , qui correspond à " $t^2 + 1 = 0$ ", mais notre définition prend maintenant en compte l'idéal premier correspondant, pas seulement les solutions dans le corps de base  $\mathbf{R}$ .

b) On a de même dans  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  le point générique  $\eta = \{0\}$  et les points

---

<sup>2</sup>Notons qu'il suffirait ici que les idéaux premiers non nuls soient maximaux; c'est ce que l'on appelle être *de dimension 1* pour un anneau intègre. Par exemple un anneau principal a cette propriété.

fermés ( $p$ ) pour  $p$  premier. Plus généralement pour tout anneau intègre  $A$ , l'espace topologique  $\text{Spec } A$  admet l'idéal nul comme point générique.

c) Soit  $n$  un entier  $> 0$ . On définit l'espace affine de dimension  $n$  sur  $k$  comme  $\mathbf{A}_k^n := \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_n])$ . Si  $k$  est algébriquement clos, le théorème des zéros de Hilbert dit que ses points fermés sont de la forme  $(t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$  avec  $(a_1, \dots, a_n)$  dans  $k^n$ , donc ils correspondent aux points "usuels" mais on a vu que sur un corps quelconque, ce n'était déjà plus le cas pour  $n = 1$ . Par ailleurs il y a des points non fermés, par exemple sur  $\mathbf{A}_k^2$  le point générique  $\eta = (0)$ , mais aussi des points de la forme  $(f)$  avec  $f$  irréductible dans  $k[t_1, t_2]$  ("point générique de la courbe  $f(t_1, t_2) = 0$ ").

d) On peut aussi considérer  $\text{Spec}(k[t_1, \dots, t_n]/I)$ , où  $I$  est un idéal engendré par des polynômes  $P_i$  : c'est la variété affine sur  $k$  définie par les équations " $P_i = 0$ ".

**Définition 1.4** Si  $I$  est un idéal de  $A$ , on note  $\sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbf{N}^*, x^n \in I\}$  le radical de  $I$ . Rappelons (cf. [AC, 2]) qu'on a

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\wp \in \text{Spec } A, \wp \supset I} \wp$$

En particulier  $V(I) = V(\sqrt{I})$  donc deux idéaux distincts peuvent définir le même fermé de  $\text{Spec } A$ . Plus généralement on a  $V(I) \subset V(J)$  si et seulement si  $J \subset \sqrt{I}$ .

La proposition suivante fait le lien entre homomorphisme d'anneaux et application continue entre leurs spectres.

**Proposition 1.5** Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. La formule  $g(\wp) = \varphi^{-1}(\wp)$  définit une application  $g : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ . De plus  $g$  est continue.

**Démonstration :** Déjà  $g$  est bien définie car l'image réciproque d'un idéal premier par un homomorphisme d'anneaux est un idéal premier.<sup>3</sup> On a  $g^{-1}(V(I)) = V(J)$ , où  $J$  est l'idéal engendré par  $\varphi(I)$  : en effet  $\wp \in g^{-1}(V(I)) \Leftrightarrow g(\wp) \in V(I) \Leftrightarrow (\forall x \in I, \varphi(x) \in \wp) \Leftrightarrow \varphi(I) \subset \wp$ . Donc l'image réciproque d'un fermé par  $g$  est un fermé et  $g$  est continue. □

---

<sup>3</sup>Noter que la même propriété n'est pas vraie en remplaçant "premier" par "maximal". C'est cette remarque qui, historiquement, a conduit les mathématiciens à considérer tous les idéaux premiers pour définir le spectre, et pas seulement les idéaux maximaux.

**Exemples :** a) Si  $I$  est un idéal de  $A$  et  $\varphi : A \rightarrow A/I$  la surjection canonique, alors  $g : \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec} A$  induit un homéomorphisme de  $\text{Spec}(A/I)$  sur le fermé  $V(I)$  de  $\text{Spec} A$ . Un cas particulier intéressant est celui où  $A = k[t_1, \dots, t_n]$  et  $I$  est un idéal engendré par des polynômes  $P_i$  : dans ce cas la variété affine  $\text{Spec}(A/I)$  s'identifie (comme espace topologique) au fermé  $V(I)$  de l'espace affine  $\text{Spec} A = \mathbf{A}_k^n$ .

b) Soit  $f \in A$ , on note  $A_f$  le localisé de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $(1, f, f^2, \dots)$ . Si  $\varphi : A \rightarrow A_f$  est le morphisme de localisation, alors  $g : \text{Spec}(A_f) \rightarrow \text{Spec} A$  induit un homéomorphisme de  $\text{Spec}(A_f)$  sur l'ouvert  $D(f)$  de  $\text{Spec} A$ .

Pour l'instant,  $\text{Spec} A$  est seulement un espace topologique : par exemple ceci ne permet pas de distinguer les  $\text{Spec} k$  pour des corps  $k$  différents, ou encore  $\text{Spec}(k[t]/t^2)$ . Pour aller plus loin, il faut mettre une structure supplémentaire sur  $\text{Spec} A$ , qui va être un *faisceau*.

## 1.2. Notion de faisceau

Dans ce paragraphe, on va rappeler les définitions et propriétés essentielles des faisceaux.

**Définition 1.6** Soit  $X$  un espace topologique. Un *préfaisceau*  $\mathcal{F}$  (de groupes abéliens) est la donnée pour tout ouvert  $U$  d'un groupe abélien  $\mathcal{F}(U)$ , et pour toute inclusion d'ouverts  $V \subset U$  d'un homomorphisme (dit homomorphisme de restriction)  $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ , vérifiant les conditions suivantes :

- i)  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$  et  $\rho_{UU} = \text{id}_U$ .
- ii) Pour tous ouverts  $U, V, W$  avec  $W \subset V \subset U$ , on a  $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ .

On définit de même préfaisceau d'anneaux, d'algèbres sur un corps ou un anneau fixé etc. Un élément  $s \in \mathcal{F}(U)$  s'appelle une *section* de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . On notera souvent  $s|_V$  pour  $\rho_{UV}(s)$ .

**Définition 1.7** On dit qu'un préfaisceau  $\mathcal{F}$  est un faisceau si les deux conditions suivantes (dites "de recollement") sont vérifiées :

- i) (Unicité) Si  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $(U_i)$  un recouvrement ouvert de  $U$ , alors toute section  $s \in \mathcal{F}(U)$  qui vérifie  $s|_{U_i} = 0$  pour tout  $i$  vérifie  $s = 0$ .
- ii) (Existence) Avec les notations ci-dessus, si des  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  sont données avec  $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$  pour tous  $i, j$ , alors il existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  (unique si i) est vérifiée) telle que  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i$ .

De façon plus compacte, la condition de faisceau signifie que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

(où la première flèche est  $s \mapsto (s|_{U_i})$  et la deuxième  $(s_i) \mapsto ((s_i)|_{U_i \cap U_j} - (s_j)|_{U_i \cap U_j})$ ) est une suite exacte. En gros, un faisceau est un préfaisceau qui est "entièrement déterminé par des conditions locales".

**Exemples :** a) Si  $X$  est un espace topologique, on obtient un faisceau en prenant pour  $\mathcal{F}(U)$  les applications continues de  $U$  dans  $\mathbf{R}$ , avec les restrictions évidentes.

b) Si  $X = \mathbf{R}^n$  (ou plus généralement une variété différentielle sur  $\mathbf{R}$ ), on définit un faisceau en prenant pour  $\mathcal{F}(U)$  les applications  $C^1$  (ou  $C^k$ ,  $C^\infty \dots$ ) sur l'ouvert  $U$ .

c) Si  $A$  est un groupe abélien fixé, on obtient un faisceau (dit *faisceau constant* associé à  $A$ ) sur  $X$  en prenant pour  $\mathcal{F}(U)$  l'ensemble des applications localement constantes de  $U$  dans  $A$ . Attention, si on posait  $\mathcal{F}(U) = A$ , on n'obtiendrait en général qu'un préfaisceau, pas un faisceau (considérer un  $U$  non connexe, réunion de deux ouverts non vides disjoints).

**Définition 1.8** Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau sur  $X$  et  $x \in X$ . On définit la *tige*<sup>4</sup>  $\mathcal{F}_x$  de  $\mathcal{F}$  en  $x$  comme la limite inductive des  $\mathcal{F}(U)$  pour  $U$  ouvert contenant  $x$ .

En d'autres termes, un élément de  $\mathcal{F}_x$  est une paire  $\langle U, s \rangle$  avec  $U$  voisinage ouvert de  $x$  et  $s \in \mathcal{F}(U)$ , étant entendu qu'on identifie  $\langle U, s \rangle$  et  $\langle V, t \rangle$  s'il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $x$  inclus dans  $U \cap V$  tel que  $s|_W = t|_W$ . Dans les exemples a) et b) ci-dessus, c'est la notion qui correspond à celle de germe de fonctions définies au voisinage de  $x$ .

**Remarques :** a) Si  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $X$  stable par intersection finie, on peut définir un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  en se contentant de définir  $\mathcal{F}(U)$  pour  $U$  dans  $\mathcal{B}$  et les morphismes de restriction  $\rho_{UV}$  pour  $U, V$  dans  $\mathcal{B}$ , à condition bien sûr de respecter les conditions de compatibilité des restrictions et les conditions de recollement. En effet pour définir  $\mathcal{F}(U)$  quand  $U$  est un ouvert quelconque, il suffit de recouvrir  $U$  par des  $U_i$  de  $\mathcal{B}$ , et de prendre pour  $\mathcal{F}(U)$  l'ensemble des familles  $(s_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$  telles que  $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$  pour tous  $i, j$  (avec les homomorphismes de restriction évidents).

---

<sup>4</sup>"stalk" en anglais; on peut aussi dire "fibre" au lieu de tige, malgré les risques de confusion avec une autre notion que nous rencontrerons plus loin.



On vérifie que ceci ne dépend pas du recouvrement choisi grâce aux conditions de recollement.

b) Si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau (resp. un faisceau) sur  $X$ , on peut le restreindre en un préfaisceau (resp. un faisceau) sur tout ouvert  $U$  (en gardant les mêmes applications de restriction associées aux ouverts inclus dans  $U$ ).

c) Si  $\mathcal{F}$  est un préfaisceau sur  $X$ , on peut restreindre  $s \in \mathcal{F}(U)$  en  $s_x \in \mathcal{F}_x$  ("restriction à la tige en  $x$ ") pour tout  $x$  de  $U$ . Si de plus  $\mathcal{F}$  est un faisceau, deux sections  $s$  et  $t$  sur  $U$  coïncident si et seulement si pour tout  $x$  de  $U$ , on a  $s_x = t_x$ .

**Définition 1.9** Soit  $X$  un espace topologique. Un *morphisme* de faisceaux sur  $X$  (ou de préfaisceaux sur  $X$ )  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est une famille de morphismes  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  (pour  $U$  ouvert de  $X$ ) satisfaisant la condition de compatibilité suivante : pour toute inclusion d'ouverts  $V \subset U$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

est commutatif, où les flèches verticales sont données par les restrictions.

**Remarques :** a) Tout morphisme de faisceaux (ou de préfaisceaux)  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induit un morphisme  $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  sur chaque tige.

b) Pour définir un morphisme de faisceaux  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , on peut se contenter de définir  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  pour  $U$  faisant partie d'une base d'ouverts (stable par intersection finie) donnée de l'espace topologique  $X$ , à condition bien sûr que les  $\varphi_U$  ainsi définis soient compatibles aux restrictions.

On a maintenant envie de définir les notions de noyau, image, conoyau... d'un morphisme  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  de faisceaux. Une difficulté est que la définition naturelle, consistant à définir ces notions directement à partir des  $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ , marche bien pour le noyau, mais ne donne en général qu'un préfaisceau (pas un faisceau) dans les autres cas.

**Définition 1.10** Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux sur un espace topologique  $X$ , alors on définit un faisceau (noté  $\ker \varphi$ ) en posant  $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi(U))$ , les restrictions étant induites par celles de  $\mathcal{F}$  (ainsi  $\ker \varphi$  est un *sous-faisceau* de  $\mathcal{F}$ ).

En particulier on dit que  $\varphi$  est *injectif* si  $\ker \varphi$  est le faisceau nul, et c'est équivalent au fait que pour tout  $x$  de  $X$ , le morphisme  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  induit

sur les tiges soit injectif. Pour l'image ou le conoyau, on a besoin de savoir définir à partir d'un préfaisceau un faisceau dont les tiges sont les mêmes. Pour cela, on dispose de la construction suivante :

**Proposition 1.11** *Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau sur un espace topologique  $X$ . Alors on définit un faisceau  $\mathcal{F}^+$  sur  $X$  en prenant pour  $\mathcal{F}^+(U)$  l'ensemble des applications  $s : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$  telles que pour tout  $x$  de  $U$ ,  $s(x) \in \mathcal{F}_x$ , et d'autre part  $s$  coïncide avec une section de  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $x$ . Le faisceau  $\mathcal{F}^+$  vérifie  $(\mathcal{F}^+)_x = \mathcal{F}_x$  pour tout  $x$  de  $X$  et il est équipé d'un morphisme de préfaisceau  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  vérifiant la propriété universelle suivante : tout morphisme de  $\mathcal{F}$  dans un faisceau  $\mathcal{G}$  s'étend de manière unique en un morphisme de faisceaux de  $\mathcal{F}^+$  dans  $\mathcal{G}$ .*

Par exemple le faisceau constant de groupe  $A$  est le faisceau associé au préfaisceau  $\mathcal{F}(U) = A$ .

On a alors :

**Définition 1.12** Si  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est un morphisme de faisceaux, on définit l'image et le conoyau de  $\varphi$  comme les faisceaux associés aux préfaisceaux  $U \mapsto \text{Im}(\varphi(U))$  et  $U \mapsto \text{coker}(\varphi(U))$ .

On a alors que  $\text{Im} \varphi$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{G}$  et  $\text{coker} \varphi$  est le *quotient* de  $\mathcal{G}$  par  $\text{Im} \varphi$ , i.e. le faisceau associé à  $U \mapsto \mathcal{G}(U)/(\text{Im} \varphi)(U)$ . D'autre part, on a bien alors :  $\text{coker} \varphi = 0$  si et seulement si  $\text{Im} \varphi = \mathcal{G}$ , et c'est équivalent à dire que tous les  $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  induits sur les tiges sont surjectifs (attention, ceci n'implique pas que  $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  soit surjectif<sup>5</sup> pour tout  $U$ ). Un *isomorphisme* de faisceaux est un morphisme qui est à la fois injectif et surjectif, ou encore qui induit un isomorphisme sur les tiges, ou encore qui admet un morphisme réciproque. De même une suite de faisceaux sera exacte si et seulement si la suite induite sur les tiges est exacte.

Pour finir ce paragraphe, on va définir deux opérations sur les faisceaux qui permettent de changer d'espace :

**Définition 1.13** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on définit l'*image directe*  $f_*\mathcal{F}$  par  $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  (pour tout ouvert  $V$  de  $Y$ ) ; c'est un faisceau sur  $Y$ .

---

<sup>5</sup>Prendre par exemple  $X = \mathbf{C}^*$ , pour  $\mathcal{F}$  le groupe additif des fonctions holomorphes et pour  $\mathcal{G}$  le groupe multiplicatif des fonctions holomorphes ne s'annulant pas ; puis considérer le morphisme de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{G}$  donné par l'exponentielle.

**Remarque :** La tige de  $f_*\mathcal{F}$  en  $f(x)$  n'est pas en général  $\mathcal{F}_x$  (prendre une application constante par exemple <sup>6</sup>). On a toutefois un homomorphisme canonique de  $(f_*\mathcal{F})_{f(x)}$  vers  $\mathcal{F}_x$  : en effet si  $s$  est une section de  $\mathcal{F}$  sur  $f^{-1}(V)$  avec  $f(x) \in V$ , alors il existe par continuité de  $f$  un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $x$  tel que  $f(U) \subset V$ , soit  $U \subset f^{-1}(V)$ , ce qui permet de restreindre  $s$  à  $U$ .

L'image inverse  $f^{-1}\mathcal{G}$  d'un faisceau  $\mathcal{G}$  sur  $Y$  est une notion plus compliquée (et moins utile) : on la définit en prenant le faisceau associé au préfaisceau qui à  $U$  associe la limite inductive des  $\mathcal{G}(V)$  pour  $V$  ouvert contenant  $f(U)$ . Le point à retenir est que la tige de  $f^{-1}\mathcal{G}$  en  $x \in U$  est alors  $\mathcal{G}_{f(x)}$ .

### 1.3. Le faisceau structural sur $\text{Spec } A$

Le but dans ce paragraphe est de construire un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_X$  sur l'espace topologique  $X = \text{Spec } A$ , tel que pour tout  $\wp \in \text{Spec } A$ , la tige  $(\mathcal{O}_X)_\wp$  soit le localisé  $A_\wp$  de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $A \setminus \wp$ , et pour tout  $f$  de  $A$ , la restriction du faisceau  $\mathcal{O}_X$  à l'ouvert  $D(f)$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_Y$  avec  $Y = \text{Spec } A_f$ . On rappelle qu'on note  $A_f$  le localisé de  $A$  par rapport à la partie multiplicative  $\{1, f, f^2, \dots\}$ . On aura en particulier  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X) = A$ .

On va d'abord définir l'anneau  $\mathcal{O}_X(D(f))$  et les applications de restriction  $\mathcal{O}_X(D(f)) \rightarrow \mathcal{O}_X(D(g))$  quand  $D(g) \subset D(f)$ . On pose  $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ . Si  $D(g) \subset D(f)$ , cela signifie que  $g \in \sqrt{(f)}$  donc on peut écrire  $g^m = fb$  avec  $m > 0$  et  $b \in A$ . Ainsi  $f$  est inversible dans  $A_g$  et on obtient un homomorphisme de restriction  $A_f \rightarrow A_g$  via l'application canonique (provenant de la définition de la localisation ; cela revient à envoyer  $af^{-n}$  sur  $ab^n g^{-mn}$ ), qui est un isomorphisme<sup>7</sup> si  $D(f) = D(g)$  (car dans ce cas  $g$  est inversible dans  $A_f$  et on a une flèche analogue dans l'autre sens). Ainsi  $\mathcal{O}_X(U)$  et les applications de restriction  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  sont bien définis quand  $U, V$  sont deux ouverts principaux de  $\text{Spec } A$  avec  $V \subset U$ .

Comme les ouverts principaux forment une base  $\mathcal{B}$  pour la topologie de  $\text{Spec } A$ , et que cette base est stable par intersection finie (vu l'égalité  $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ ), il suffit maintenant pour construire le faisceau  $\mathcal{O}_X$ , de montrer le

---

<sup>6</sup>Même  $f$  injective ne suffit pas : considérer l'identité entre  $X$  muni de la topologie discrète et  $X$  muni de la topologie grossière ; la formule est valable si on suppose de plus que  $f$  est *stricte*, i.e.  $f$  induit une application bicontinue de  $X$  sur  $f(X)$ .

<sup>7</sup>De plus cet isomorphisme est canonique, au sens où tous les isomorphismes ainsi obtenus sont compatibles entre eux, ce qui permet d'identifier vraiment  $A_f$  à  $A_g$  quand  $D(f) = D(g)$ .

**Lemme 1.14** Soit  $(U_i)$  un recouvrement de  $U \in \mathcal{B}$  par des ouverts principaux. Alors si on se donne des  $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$  avec  $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$  pour tous  $i, j$ , il existe une unique section  $s \in \mathcal{O}_X(U)$  telle que  $s|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i$ .

**Preuve du lemme :** On peut se limiter à  $U = \text{Spec } A$  (quitte à remplacer  $A$  par un localisé  $A_f$ ). Posons  $U_i = D(f_i)$ , alors  $U = \bigcup_i U_i$  se traduit par  $V(\sum_i (f_i)) = \bigcap_i V(f_i) = \emptyset$ , i.e. l'idéal engendré par les  $f_i$  est  $A$  tout entier. On écrit alors  $1 \in \sum_{i \in F} (f_i)$  avec  $F$  fini. Notons que pour tout entier  $k > 0$ , on a alors  $U = \bigcup_{i \in F} D(f_i) = \bigcup_{i \in F} D(f_i^k)$ , soit  $1 \in \sum_{i \in F} (f_i^k)$ .

On commence par l'assertion d'unicité. Soit  $s \in A$  avec  $s|_{U_i} = 0$  pour tout  $i$  de  $F$ . Cela signifie que l'image de  $s$  dans  $A_{f_i}$  est nulle, et on peut donc trouver un  $m > 0$  avec  $f_i^m s = 0$  pour tout  $i$  de  $F$  (vu que  $F$  est fini). De  $1 \in \sum_{i \in F} (f_i^m)$ , on tire  $s \in \sum_{i \in F} (s f_i^m) = \{0\}$ .

Soient maintenant des  $s_i$  dans  $\mathcal{O}_X(U_i) = A_{f_i}$  avec la condition de recollement du lemme. On peut trouver  $m > 0$  tel que  $s_i = b_i f_i^{-m}$  pour tout  $i$  de  $F$ , où les  $b_i$  sont dans  $A$ . La condition de recollement donne que les images de  $s_i$  et  $s_j$  dans  $A_{f_i f_j} =$  coïncident, donc il existe  $r > 0$  tel que

$$(b_i f_j^m - b_j f_i^m)(f_i f_j)^r = 0 \quad (1)$$

pour tous  $i, j$  de  $F$ . Comme on l'a vu plus haut, on peut aussi écrire  $1 = \sum_{j \in F} a_j f_j^{m+r}$  avec  $a_j \in A$ . On cherche d'abord  $s \in A$  telle que pour tout  $i$  de  $F$ , l'image de  $(s f_i^m - b_i)$  dans  $A_{f_i}$  soit nulle. Pour  $i \in F$ , on a :

$$(s f_i^m - b_i) = s f_i^m - \sum_{j \in F} a_j f_j^{m+r} b_i$$

Posons

$$s = \sum_{j \in F} a_j b_j f_j^r$$

alors

$$(s f_i^m - b_i) = \sum_{j \in F} a_j f_j^r (b_j f_i^m - b_i f_j^m)$$

et la relation (1) donne que pour tout  $i$  de  $F$ , on a  $(s f_i^m - b_i) f_i^r = 0$ . On obtient donc que l'image de  $(s f_i^m - b_i)$  dans  $A_{f_i}$  est nulle, ce qui montre que  $s|_{U_i} = s_i$  dès que  $i \in F$ .

Si maintenant  $j$  est quelconque, les restrictions de  $s|_{U_j}$  et  $s_j$  à  $U_i \cap U_j$  sont les mêmes pour tout  $i$  de  $F$  : en effet la première est aussi la restriction de  $s|_{U_i} = s_i$  à  $U_i \cap U_j$ . Ceci implique  $s_j = s|_{U_j}$  à cause de l'unicité vue plus haut car chaque  $U_j$  est recouvert par les  $U_i \cap U_j$  avec  $i \in F$ .

□

Au passage on a aussi montré :

**Proposition 1.15** *L'espace topologique  $\text{Spec } A$  est quasi-compact.*

En effet on a vu que de tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$ , on pouvait extraire un recouvrement fini  $(U_i)_{i \in F}$ .

□

Le faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X = \text{Spec } A$  s'appelle le *faisceau structural* de  $X$ . Notons que l'on peut maintenant par exemple distinguer entre  $\text{Spec } k$ ,  $\text{Spec } L$ ,  $\text{Spec } (k[t]/t^2)$  (où  $k$  et  $L$  sont des corps) : comme espaces topologiques ils sont tous réduits à un point mais si on regarde l'anneau  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  des *sections globales*, on obtient respectivement  $k$ ,  $L$ ,  $k[t]/t^2$ . Ainsi on a maintenant tenu compte aussi bien du corps de base que des éventuelles "multiplicités".

**Proposition 1.16** *Soit  $X = \text{Spec } A$  et  $\wp \in X$ . Alors la tige  $\mathcal{O}_{X, \wp}$  du faisceau  $\mathcal{O}_X$  en  $\wp$  est isomorphe à l'anneau local  $A_\wp$ .*

**Démonstration :** L'ouvert  $D(f)$  contient  $\wp$  ssi  $f \notin \wp$ . Il s'agit donc de vérifier que l'homomorphisme canonique

$$\varphi : \varinjlim_{f \notin \wp} A_f \rightarrow A_\wp$$

est un isomorphisme. La surjectivité est évidente avec la définition de  $A_\wp$  et  $A_f$ . Si maintenant  $af^{-n}$  a une image nulle dans  $A_\wp$ , alors il existe  $g \notin \wp$  avec  $ga = 0$  ce qui implique que l'image de  $af^{-n}$  dans  $A_{fg}$  est nulle, donc aussi son image dans la limite inductive des  $A_f$  pour  $f \notin \wp$ .

□

**Remarque :** On aurait pu définir directement  $\mathcal{O}_X(U)$  pour un ouvert quelconque  $U$  de  $X = \text{Spec } A$  comme l'anneau des fonctions  $s : U \rightarrow \prod_{\wp \in U} A_\wp$  qui vérifient  $s(\wp) \in A_\wp$  pour tout  $\wp \in U$  et s'écrivent localement sous la forme  $a/f$  avec  $a, f \in A$ , mais les propriétés sont alors plus difficiles à vérifier.

**Définition 1.17** Un *espace localement annelé* (ou en abrégé *espace annelé*) est un couple  $(X, \mathcal{O}_X)$  où  $X$  est un espace topologique et  $\mathcal{O}_X$  un faisceau d'anneaux (dit *faisceau structural* de  $X$ ) sur  $X$  tel que pour tout  $x$  de  $X$ ,  $\mathcal{O}_{X, x}$  soit un anneau local. Si  $\mathcal{M}_x$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X, x}$ , on appelle  $\mathcal{O}_{X, x}/\mathcal{M}_x$  le *corps résiduel* de  $x$ .

D'après ce qu'on vient de voir,  $\text{Spec } A$  muni de son faisceau structural est un espace annelé.

**Exemples :** a) Sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$ , le corps résiduel du point générique est  $\mathbf{Q}$ , celui de  $(p)$  est  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

b) Sur  $X = \mathbf{A}_1^k = \text{Spec}(k[t])$ , le corps résiduel du point générique est  $k(t)$ , celui de  $(P)$  (où  $P$  est un polynôme irréductible) est  $k[t]/(P)$ , qui est une extension finie de  $k$ .

c) Plus généralement si  $A$  est un anneau, le corps résiduel de  $\wp \in \text{Spec } A$  est  $\text{Frac}(A/\wp)$ . Si  $A$  est intègre, le corps résiduel du point générique (correspondant à l'idéal  $(0)$ ) est  $\text{Frac } A$ .

Grosso modo, un schéma va être un espace annelé qui est partout localement isomorphe à un spectre. Pour définir cela précisément, on a besoin de la notion de morphisme entre espaces annelés.

**Définition 1.18** Un *morphisme d'espaces annelés*  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  est une paire  $(f, f^\#)$  où  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue et  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  un morphisme de faisceaux sur  $Y$ , tels que pour tout  $x$  de  $X$ , l'homomorphisme induit

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

soit local, où  $y = f(x)$ .

Rappelons qu'un morphisme  $A \rightarrow B$  entre anneaux locaux est *local* si l'image de l'idéal maximal de  $A$  est incluse dans celui de  $B$ ; c'est équivalent à dire que l'image réciproque de l'idéal maximal de  $B$  est l'idéal maximal de  $A$ . D'autre part  $f_x^\#$  est bien défini via l'homomorphisme canonique  $(f_*\mathcal{O}_X)_y \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  (voir la remarque après la définition 1.13).

On définit de manière évidente la composée de deux morphismes d'espaces annelés, et d'isomorphisme d'espaces annelés.

**Définition 1.19** Un *schéma affine* est un espace annelé qui est isomorphe à  $\text{Spec } A$  (muni de son faisceau structural) pour un certain anneau  $A$ .

Par exemple, un ouvert  $D(f)$  de  $\text{Spec } A$ , muni de la restriction du faisceau structural de  $\text{Spec } A$ , est un schéma affine (isomorphe à  $\text{Spec}(A_f)$ ). Une *variété affine* sur un corps  $k$  est un schéma affine isomorphe à  $\text{Spec } A$ , où  $A$  est une  $k$ -algèbre de type fini (i.e. de la forme  $k[t_1, \dots, t_n]/(P_i)$ , où les  $P_i$  sont des polynômes).

Le très important résultat suivant montre qu'on a un foncteur  $A \rightarrow \text{Spec } A$ , qui définit une antiéquivalence de catégories entre les anneaux commutatifs et les schémas affines.

**Théorème 1.20** *A tout homomorphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow B$ , on peut associer un morphisme naturel<sup>8</sup> d'espaces annelés  $(f, f^\#)$ , de telle sorte que l'application correspondante*

$$\Phi : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(\text{Spec } B, \text{Spec } A)$$

*soit bijective.*

**Démonstration :** Soient  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . On a déjà défini  $f : X \rightarrow Y$  associée à  $\varphi$  via  $f(\wp) = \varphi^{-1}(\wp)$ . En particulier on a  $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$  pour tout  $g$  de  $A$  car la condition  $g \notin f(\wp)$  s'écrit  $\varphi(g) \notin \wp$ . Ainsi  $\varphi$  induit un homomorphisme  $\mathcal{O}_Y(D(g)) = A_g \rightarrow B_{\varphi(g)} = (f_*\mathcal{O}_X)(D(g))$ . Ces homomorphismes étant clairement compatibles aux restrictions, on obtient un morphisme de faisceaux  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  vu que les  $D(g)$  forment une base d'ouverts (stable par intersection finie) de  $Y$ . D'autre part si  $\wp \in \text{Spec } B$ , le morphisme induit  $A_{\varphi^{-1}(\wp)} \rightarrow B_\wp$  sur les tiges est bien local par construction. On a donc bien associé à  $\varphi$  un morphisme  $\Phi(\varphi)$  d'espaces annelés. L'application  $\Phi$  est injective car l'application  $\mathcal{O}_Y(Y) = A \rightarrow \mathcal{O}_X(X) = B$  induite par  $\Phi(\varphi)$  est  $\varphi$  (c'est le cas  $g = 1$  dans la construction ci-dessus).

Il reste à prouver la surjectivité de  $\Phi$ . Soit donc  $(f, f^\#)$  un morphisme d'espaces annelés entre  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . En prenant  $f^\#$  sur les sections globales, on obtient un homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  et tout revient à montrer que  $(f, f^\#)$  coïncide avec  $\Phi(\varphi)$ . Soit donc  $\wp \in \text{Spec } B$ , alors on a par hypothèse des homomorphismes locaux

$$f_\wp^\# : \mathcal{O}_{Y, f(\wp)} = A_{f(\wp)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, \wp} = B_\wp$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(\wp)} & \xrightarrow{f_\wp^\#} & B_\wp \end{array}$$

L'hypothèse que  $f_\wp^\#$  est local donne alors  $\varphi^{-1}(\wp) = f(\wp)$ , après quoi le résultat est évident.

□

---

<sup>8</sup>"Naturel" signifie fonctoriel, i.e. la composition de deux homomorphismes d'anneaux correspond à la composition dans l'autre sens des deux morphismes d'espaces annelés correspondant.

## 1.4. Schémas-définition générale

**Définition 1.21** Un *schéma* est un espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  admettant un recouvrement ouvert  $(U_i)$  tel que chaque  $(U_i)$  (avec la restriction de  $\mathcal{O}_X$ ) soit un schéma affine.

Par analogie avec le cas des variétés affines, on appelle souvent  $\mathcal{O}_X(U)$  l'*anneau des fonctions régulières* sur  $U$  et  $\mathcal{O}_X(U)^*$  le groupe multiplicatif des *fonctions inversibles* sur  $U$ . Un *morphisme de schémas* est un morphisme entre les espaces annelés correspondant.

**Remarques :** a) Si  $U$  est un ouvert d'un schéma  $X$ , alors  $U$  (muni de la restriction de  $\mathcal{O}_X$ ) est aussi un schéma. Supposons en particulier que  $X = \text{Spec } A$  et  $U = \text{Spec } B$  soient affines; alors, pour tout  $f$  de  $A$ ,  $D(f) \cap U$  n'est autre que l'ouvert principal  $D(g)$  de  $U$ , où  $g$  est l'image de  $f$  par l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  associé à l'inclusion  $U \subset X$  via le théorème 1.20.

b) Les *ouverts affines* (c'est-à-dire ceux qui sont isomorphes à un schéma affine) forment une base de la topologie d'un schéma. En effet ceci résulte de ce que les  $D(f)$  forment une base de la topologie de  $\text{Spec } A$ , et chaque  $D(f)$  est isomorphe à  $\text{Spec } A_f$ .

c) Si  $X$  est un schéma,  $U$  un ouvert de  $X$  et  $f \in \mathcal{O}_X(U)$ , on peut *évaluer*  $f$  en  $x$  en prenant l'image de la restriction  $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$  dans le corps résiduel  $k(x)$  de  $x$ . Par exemple l'évaluation en  $(T^2 + 1)$  de  $T \in \mathcal{O}_X(X)$  pour  $X = \text{Spec } (\mathbf{R}[T])$  est l'élément  $\sqrt{-1}$  de  $\mathbf{C} = \mathbf{R}[T]/(T^2 + 1)$  (noter qu'ici on ne peut pas distinguer entre  $i$  et  $-i$  car on n'a pas fixé l'isomorphisme de  $k(x)$  avec  $\mathbf{C}$ ).

d) Un ouvert d'un schéma affine n'est pas forcément affine. Par exemple si  $X = \mathbf{A}_k^2 = \text{Spec } (k[t_1, t_2])$  et  $U = X - \{(0, 0)\}$  (cela signifie qu'on enlève le point correspondant à l'idéal  $(t_1, t_2)$ ), alors  $U$  n'est pas affine.

$U$  est réunion des deux ouverts  $U_1 = D(t_1)$  et  $U_2 = D(t_2)$  de  $U$ . En particulier  $\mathcal{O}_X(U_1) = (k[t_1, t_2])_{t_1}$  et  $\mathcal{O}_X(U_2) = (k[t_1, t_2])_{t_2}$ . Alors  $U$  ne peut pas être affine car l'inclusion  $i : U \rightarrow X$  n'est pas un isomorphisme, tandis que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$  induit sur les sections globales en est un : en effet on a une suite exacte (qui vient de la propriété de faisceau de  $\mathcal{O}_X$ ) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) \times \mathcal{O}_X(U_2 \cap U_1)$$

où la première flèche est donnée par les restrictions et la deuxième par  $(f_1, f_2) \mapsto (f_1 - f_2)$ . On voit alors que les éléments de  $\mathcal{O}_X(U)$  doivent être des fractions rationnelles dont le dénominateur est à la fois une puissance de  $t_1$  et de  $t_2$ , donc ce sont des polynômes. Ainsi si  $U$  était affine, le théorème 1.20 serait contredit.



## 1.5. L'exemple des Proj

On vient de voir un premier exemple de schéma qui n'est pas affine. On va maintenant construire une classe importante de schémas qui en général ne seront pas affines : tout comme  $\text{Spec } A$ , pour un anneau  $A$  a été défini pour avoir l'analogie des variétés affines, on va définir un schéma  $\text{Proj } B$ , pour tout anneau gradué  $B$ , qui va fournir l'analogie des variétés projectives.

Soit  $B = \bigoplus_{d \geq 0} B_d$  un *anneau gradué*. Cela signifie que chaque  $B_d$  est un groupe abélien et qu'on a la condition  $B_d \cdot B_e \subset B_{d+e}$ . Les éléments de  $B_d$  sont dits *homogènes de degré  $d$* . L'exemple typique est  $B = A[x_0, \dots, x_n]$  (où  $A$  est un anneau), en prenant pour  $B_d$  les polynômes homogènes de degré  $d$ . Un idéal  $I$  de  $B$  est dit *homogène* s'il est engendré par des éléments homogènes. Cela revient à dire que  $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap B_d)$ , auquel cas  $(B/I)$  est gradué par  $(B/I)_d = B_d / (I \cap B_d)$ . On note  $B_+ = \bigoplus_{d > 0} B_d$ . On remarquera aussi que le radical d'un idéal homogène est encore homogène.

**Définition 1.22** On note  $\text{Proj } B$  l'ensemble des idéaux premiers homogènes de  $B$  qui ne contiennent pas  $B_+$ .

On va voir que  $\text{Proj } B$  peut être muni d'une structure de schéma ; l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  correspondra alors à  $\text{Proj}(k[x_0, x_1, \dots, x_n])$ . Intuitivement on doit travailler avec des idéaux homogènes parce que le point  $(x_0, \dots, x_n)$  de l'espace projectif est le même que  $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$  si  $\lambda \in k^*$ . La condition de ne pas contenir  $B_+$  correspond au fait que  $(0, \dots, 0)$  n'est pas un point de l'espace projectif.

La construction du schéma  $\text{Proj } B$  est très analogue à celle de  $\text{Spec } A$ . On définit la topologie en prenant pour fermés les ensembles  $V_+(I)$  pour  $I$  idéal homogène de  $B$ , où  $V_+(I)$  est l'ensemble des  $\wp$  de  $\text{Proj } B$  contenant  $I$ . On a les propriétés :

$$V_+(B_+) = \emptyset \quad V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(IJ) = V_+(I \cap J)$$

$$V_+(\{0\}) = \text{Proj } B \quad \bigcap_r V_+(I_r) = V_+(\sum I_r)$$

(on utilise notamment le fait qu'un idéal homogène  $I$  ne contenant pas  $B_+$  est premier ssi pour tous  $a, b$  homogènes, la condition  $ab \in I$  implique  $a \in I$  ou  $b \in I$ ). Les *ouverts principaux* de  $\text{Proj } B$  sont les  $D_+(f) = \{\wp \in \text{Proj } B, f \notin \wp\}$  pour  $f$  élément homogène de  $B$ . Les  $D_+(f)$  forment une base de la topologie.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>On peut se limiter aux  $f$  de degré  $> 0$  car si une famille  $(f_i)$  d'éléments homogènes engendrent  $B_+$ , alors  $D_+(f) = \bigcup_i D_+(f f_i)$ .

**Remarque :** Si on fait l'hypothèse supplémentaire que  $B$  est engendrée, en tant que  $B_0$ -algèbre, par les éléments homogènes de degré 1 (c'est le cas si  $B$  est l'anneau gradué  $A[x_0, \dots, x_n]$  des polynômes homogènes à coefficients dans un anneau  $A$ ), alors les  $D_+(f)$  avec  $f$  homogène de degré 1 recouvrent  $\text{Proj } B$ .<sup>10</sup> En effet l'idéal de  $S$  engendré par les  $f$  de degré 1 est  $S_+$  tout entier.

On construit le faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  de  $X = \text{Proj } B$  en imposant le même type de conditions que dans le cas affine. On veut obtenir les deux propriétés suivantes :

i) La tige  $\mathcal{O}_{X, \varphi}$  de  $\mathcal{O}_X$  en  $\varphi$  est isomorphe à  $B_{(\varphi)}$ , où  $B_{(\varphi)}$  est l'ensemble des éléments homogènes de degré zéro dans le localisé de  $B$  par rapport aux éléments homogènes non dans  $\varphi$ . Explicitement les éléments de  $B_{(\varphi)}$  s'écrivent  $a/b$  avec  $a, b$  homogènes de même degré et  $b \notin \varphi$ .

ii) L'anneau des sections  $\mathcal{O}_X(D_+(f))$  sur  $D_+(f)$  est isomorphe à  $B_{(f)}$ , sous-anneau de  $B_f$  constitué des éléments homogènes de degré zéro, où l'on a gradué  $B_f$  par la formule  $\deg(x/f^k) := \deg x - k \deg f$ . Ainsi  $B_{(f)}$  est l'ensemble des  $a/f^N$ , avec  $a$  homogène de degré  $N \deg f$ .

Pour pouvoir définir le faisceau structural de  $X = \text{Proj } B$ , on a besoin de propriétés de la localisation qui sont résumées dans le lemme suivant :

**Lemme 1.23** *Soient  $B$  un anneau gradué et  $f$  un élément homogène de degré  $> 0$  de  $B$ . Alors :*

a) *L'application*

$$u : \varphi \mapsto (\varphi B_f) \cap B_{(f)}$$

*est une bijection de  $D_+(f)$  sur  $\text{Spec}(B_{(f)})$ . Un idéal homogène  $I$  de  $B$  est inclus dans  $\varphi$  si et seulement si  $u(I)$  (défini par la formule ci-dessus en remplaçant  $\varphi$  par  $I$ ) est inclus dans  $u(\varphi)$ .*

b) *Si  $g$  est un élément homogène de degré  $> 0$  de  $B$  avec  $D_+(g) \subset D_+(f)$ , alors on a un homomorphisme canonique d'anneaux  $B_{(f)} \rightarrow B_{(g)}$ , qui est un isomorphisme si  $D_+(g) = D_+(f)$ .*

**Démonstration :** a) Notons déjà que  $u$  est bien définie car si  $\varphi \in D_+(f)$ , alors  $\varphi B_f$  est un idéal premier de  $B_f$ , donc son image réciproque  $\varphi B_f \cap B_{(f)}$  dans  $B_{(f)}$  aussi. On note  $\rho : B \rightarrow B_f$  l'homomorphisme de localisation, qui est compatible avec les graduations de  $B$  et  $B_f$ .

Montrons la surjectivité de  $u$ . Notons  $r$  le degré de  $f$ . Soit  $\mathcal{Q}$  dans  $\text{Spec } B_{(f)}$ . Alors  $\mathcal{Q} B_f$  est un idéal homogène de  $B_f$  (parce que les éléments de  $\mathcal{Q}$  sont homogènes de degré zéro). Son radical  $\sqrt{\mathcal{Q} B_f}$  l'est donc aussi, et  $\varphi := \rho^{-1}(\sqrt{\mathcal{Q} B_f})$

---

<sup>10</sup>Attention, cela ne signifie pas pour autant qu'ils forment une base de la topologie.

est un idéal homogène de  $B$  qui ne contient pas  $f$ . On remarque aussi que les éléments homogènes de degré zéro de  $\mathcal{Q}B_f$  sont les éléments de  $\mathcal{Q}$ . La difficulté consiste à montrer que  $\sqrt{\mathcal{Q}B_f}$  est premier. Pour cela, on note que si  $a, b$  sont homogènes dans  $B_f$  avec  $ab \in \mathcal{Q}B_f$ , alors  $(a^r f^{-\deg a})(b^r f^{-\deg b})$  est homogène de degré zéro et appartient à  $\mathcal{Q}B_f$ , donc il appartient à  $\mathcal{Q}$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est premier, on a par exemple  $a^r f^{-\deg a} \in \mathcal{Q}$  et  $a^r \in \mathcal{Q}B_f$  comme on voulait. Ainsi  $\wp$  est premier comme image réciproque par  $\rho$  de  $\sqrt{\mathcal{Q}B_f}$ ; d'autre part  $u(\wp) = \sqrt{\mathcal{Q}B_f} \cap B_{(f)}$ ; or tout élément  $x$  homogène de degré zéro dans  $\sqrt{\mathcal{Q}B_f}$  vérifie : pour un certain  $k > 0$ ,  $x^k \in \mathcal{Q}B_f$  et  $x^k$  est homogène de degré zéro, d'où  $x^k \in \mathcal{Q}$  soit  $x \in \mathcal{Q}$  car  $\mathcal{Q}$  est premier. Finalement  $u(\wp) = \mathcal{Q}$  et  $u$  est bien surjective.

Pour montrer la dernière assertion de a), on remarque que si  $\wp \in D_+(f)$  et  $I$  est un idéal homogène de  $B$  avec  $u(I) \subset u(\wp)$ , alors pour tout  $x$  homogène dans  $I$ , on a  $(x^r/f^{\deg x}) \in u(I)$  d'où  $(x^r/f^{\deg x}) \in u(\wp) \subset \wp B_f$ , ce qui implique  $x^r \in (\wp B_f \cap B) = \wp$ , puis  $x \in \wp$  vu que  $\wp$  est premier. Si maintenant  $u(\wp) = u(\wp')$  avec  $\wp, \wp'$  dans  $D_+(f)$ , on obtient  $\wp' \subset \wp$  en faisant  $I = \wp'$ , puis  $\wp' = \wp$  en échangeant les rôles. D'où l'injectivité de  $u$ .

b) Si  $D_+(g) \subset D_+(f)$ , on peut écrire  $g^n = fb$  avec  $b \in B$ , et on peut supposer  $b$  homogène quitte à le remplacer par l'une de ses composantes homogènes. On en déduit un homomorphisme canonique  $B_{(f)} \rightarrow B_{(g)}$  obtenu en envoyant  $a/f^N$  sur  $ab^N/g^{nN}$ . Si  $D_+(f) = D_+(g)$  c'est un isomorphisme (on le voit en échangeant les rôles de  $f$  et  $g$ ).

□

**Remarque :** Si  $\deg f = 1$ , la preuve du lemme ci-dessus est assez simple : en effet on construit directement une application réciproque à  $u$  en envoyant  $\mathcal{Q}$  sur l'idéal homogène  $\wp = \bigoplus_d \wp_d$ , où  $\wp_d$  est l'ensemble des éléments  $x$  homogènes de degré  $d$  de  $B$  tels que  $(x/f^d) \in \mathcal{Q}$ .

**Theorème 1.24** *Soit  $X = \text{Proj } B$ . Pour tout  $f$  homogène de degré  $> 0$ , on pose  $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = B_{(f)}$  et pour  $D_+(g) \subset D_+(f)$ , on définit des homomorphismes de restriction  $\mathcal{O}_X(D_+(f)) \rightarrow \mathcal{O}_X(D_+(g))$  via le lemme 1.23, b). Alors*

a) *La condition ci-dessus définit un faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$ , tel que pour tout  $f \in B_+$ , l'espace annelé  $D_+(f)$  (muni de la restriction de  $\mathcal{O}_X$ ) soit isomorphe à  $\text{Spec}(B_{(f)})$ . En particulier  $\text{Proj } B$  est un schéma.*

b) *La tige  $\mathcal{O}_{X, \wp}$  est isomorphe à  $B_{(\wp)}$  pour tout  $\wp$  de  $\text{Proj } B$ .*

**Démonstration :** a) Remarquons d'abord que la topologie sur  $\text{Proj } B$  est la topologie induite par celle de  $\text{Spec } B$ . En effet si  $g \in B$  s'écrit  $g = g_0 + \dots + g_d$  avec  $g_i \in B_i$ , alors  $V(g) \cap \text{Proj } B = \bigcap_{i=1}^d V_+(g_i)$  donc  $D(g) \cap \text{Proj } B = \bigcup_{i=1}^d D_+(g_i)$  d'où le résultat vu que les  $D(g)$  forment une base d'ouverts de  $\text{Spec } B$ .

Considérons alors, pour  $f$  homogène de degré  $> 0$ , l'application  $u : D_+(f) \rightarrow \text{Spec}(B_{(f)})$  définie au lemme 1.23. D'après ce qui précède, cette application est continue vu que c'est la restriction à  $D_+(f) \subset D(f) \simeq \text{Spec} B_f$  de l'application  $\text{Spec} B_f \rightarrow \text{Spec} B_{(f)}$  associée à l'inclusion  $B_{(f)} \rightarrow B_f$ . D'autre part  $u$  est bijective et fermée d'après le lemme 1.23 a), elle est donc bicontinue. Enfin, comme  $u$  est compatible aux restrictions, les conditions de recollement pour  $\mathcal{O}_X$  sont bien vérifiées sur l'ouvert  $D_+(f)$  car elles le sont sur  $\text{Spec}(B_{(f)})$  d'après le lemme 1.14. Comme les  $D_+(f)$  forment une base (stable par intersection finie) de la topologie de  $X$ , on a bien défini un faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  et par définition, la restriction de  $\mathcal{O}_X$  à  $D_+(f)$  fait de  $D_+(f)$  un espace annelé isomorphe à  $\text{Spec}(B_{(f)})$ .

b) La tige  $\mathcal{O}_{X,\varphi}$  est la limite pour  $f \notin \varphi$  des  $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = B_{(f)}$ . Ainsi cette tige est  $B_{(\varphi)}$  par le même argument que dans le lemme 1.16. □

**Remarques :** a) On n'a plus du tout  $\mathcal{O}_X(X) = B$  pour  $X = \text{Proj} B$ . Par exemple en recouvrant  $\mathbf{P}_k^n := \text{Proj} k[x_0, \dots, x_n]$  par les ouverts affines  $D_+(x_i)$ , on voit que  $\mathcal{O}_X(X) = k$  si  $X = \mathbf{P}_k^n$ . On verra plus tard comment on peut "récupérer"  $B$  à partir de  $\text{Proj} B$ .

b) Au passage, on voit que la tige  $B_{(\varphi)}$  est aussi le localisé  $(B_{(f)})_{u(\varphi)}$  dès que  $\varphi \in D_+(f)$  via le lemme 1.16 et le théorème 1.24.

c) On aurait pu aussi définir le faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X = \text{Proj} B$  en prenant pour  $\mathcal{O}_X(U)$  les fonctions  $s : U \rightarrow \prod_{\varphi \in U} B_{(\varphi)}$  vérifiant : pour tout  $\varphi$  de  $U$ ,  $s(\varphi) \in B_{(\varphi)}$ , et au voisinage de tout  $\varphi$  de  $U$ ,  $s$  provient d'un élément de  $B_{(f)}$  pour un certain  $f$ .

**Définition 1.25** Une *variété projective* sur un corps  $k$  est un schéma de la forme  $\text{Proj} B$ , avec  $B$  quotient de  $k[x_0, \dots, x_n]$  par un idéal homogène (ou encore par l'idéal engendré par une famille finie de polynômes homogènes).

## 2. Morphismes de schémas

### 2.1. Généralités

Un *morphisme*  $f : X \rightarrow Y$  entre deux schémas<sup>11</sup> est simplement un morphisme entre les espaces annelés sous-jacents. En particulier, si  $x \in X$  et  $y = f(x)$ , alors  $f$  induit un homomorphisme local entre les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{Y,y}$  et  $\mathcal{O}_{X,x}$ , et donc aussi un homomorphisme (nécessairement injectif) entre corps résiduels  $k(y) \hookrightarrow k(x)$ . Notons aussi que si  $U$  est un ouvert de  $X$ , tout

---

<sup>11</sup>Pour ne pas alourdir les notations, on notera toujours  $X$  pour  $(X, \mathcal{O}_X)$ ,  $f$  pour  $(f, f^\#)$  etc.

morphisme  $X \rightarrow Y$  induit par restriction un morphisme  $U \rightarrow Y$  (attention cela ne marche pas avec un fermé au lieu d'un ouvert) ; par exemple on a un morphisme d'inclusion canonique  $U \rightarrow X$  induit par restriction de l'identité.

**Remarques :** On vérifie immédiatement à partir de la définition d'un morphisme d'espaces annelés les deux propriétés suivantes, qui sont souvent utiles en pratique :

a) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas et  $U$  un ouvert de  $Y$ . Si  $f(X) \subset U$ , alors il existe un unique morphisme de schémas  $g : X \rightarrow U$  tel que  $f = i \circ g$ , où  $i : U \rightarrow Y$  est l'inclusion canonique (attention, il n'y a pas d'analogue en remplaçant l'ouvert  $U$  par un fermé).

b) Si  $X$  et  $Y$  sont deux schémas et  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , alors se donner un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est équivalent à se donner des morphismes  $f_i : U_i \rightarrow Y$  tels que pour tous  $i, j$ , les morphismes de schémas  $U_i \cap U_j \rightarrow Y$  induits par  $f_i$  et  $f_j$  coïncident.

c) Tout point  $x \in X$  induit un morphisme canonique  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  : en effet si  $X = \text{Spec } A$ , ce morphisme provient juste de la localisation  $A \rightarrow A_\varphi$  en l'idéal premier  $\varphi$  correspondant à  $x$  ; dans le cas général, il suffit de considérer un ouvert affine  $U = \text{Spec } A$  contenant  $x$  (le morphisme obtenu  $f_U$  ne dépend pas du choix de  $U$ , car si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts affines contenant  $x$ , alors il existe un ouvert affine  $W$  contenu dans  $U \cap V$  et contenant  $x$  ; alors  $f_U$  et  $f_V$  coïncident par construction avec  $f_W$ ). On a également un morphisme de schémas  $\text{Spec } (k(x)) \rightarrow X$  (via la surjection canonique  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k(x)$ ).

## 2.2. Points d'un schéma

**Définition 2.1** Soit  $S$  un schéma fixé. Un  $S$ -schéma (ou schéma sur  $S$ ) est un schéma  $X$ , équipé d'un morphisme  $X \rightarrow S$  (qu'on appelle morphisme *structural*,  $S$  étant sous-entendu). Un *morphisme de  $S$ -schémas* (ou  $S$ -morphisme) est un morphisme  $X \rightarrow Y$  qui est compatible avec les morphismes  $X \rightarrow S$  et  $Y \rightarrow S$ .

Quand  $X$  et  $Y$  sont des  $S$ -schémas, on notera  $\text{Mor}_S(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de  $S$ -schémas de  $X$  vers  $Y$ .

Le cas où  $S = \text{Spec } A$  est affine est particulièrement intéressant. On abrégera souvent dans ce cas "Spec  $A$ -schéma" en " $A$ -schéma".

**Définition 2.2** Soient  $A$  un anneau et  $X$  un  $A$ -schéma. Soit  $B$  une  $A$ -algèbre<sup>12</sup>. Un  $B$ -point de  $X$  est un élément de  $\text{Mor}_{\text{Spec } A}(\text{Spec } B, X)$ . On

---

<sup>12</sup>Rappelons qu'une  $A$ -algèbre est un anneau  $B$  équipé d'un homomorphisme (pas

notera souvent alors  $X(B)$  l'ensemble des  $B$ -points de  $X$  (l'anneau  $A$  étant sous-entendu).

**Exemples :** a) Soient  $k$  un corps et  $L$  une extension de corps de  $k$ . Alors se donner un  $L$ -point d'un  $k$ -schéma  $X$  revient à se donner un point  $x$  de  $X$  (l'image ensembliste du morphisme  $\text{Spec } L \rightarrow X$ ), plus un  $k$ -morphisme de corps du corps résiduel  $k(x)$  de  $x$  vers  $L$ . L'ensemble des  $k$ -points de  $X$  s'identifie donc à l'ensemble des points de  $X$  de corps résiduel  $k$ .

b) Considérons la situation précédente avec  $X = \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1 = \text{Spec}(\mathbf{R}[T])$ . Alors il y a deux  $\mathbf{C}$ -points de  $X$  dont l'image est  $x = (T^2 + 1)$  car le corps résiduel de  $x$  est  $\mathbf{R}[T]/(T^2 + 1) \simeq \mathbf{C}$ , et il y a deux plongements de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$ . En quelque sorte, ces deux  $\mathbf{C}$ -points correspondent à  $i$  et  $-i$ , tandis que considérer seulement les points sur l'espace topologique  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1$  ne permet pas de distinguer  $i$  de  $-i$ .

c) Soit  $k$  un corps, on pose  $k[\varepsilon] = k[T]/(T^2)$ . Se donner un  $k[\varepsilon]$ -point d'un  $k$ -schéma  $X$  revient à se donner  $x \in X$ , plus un  $k$ -homomorphisme local  $u : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow k[\varepsilon]$ . C'est équivalent à se donner un point  $x$  de  $X$  de corps résiduel  $k(x) = k$  et un  $k$ -homomorphisme  $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 \rightarrow k$ , où  $\mathcal{M}_x$  désigne l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . En effet la  $k$ -algèbre  $\mathcal{O}_{X,x}$  s'écrit  $k \times \mathcal{M}_x$  (parce que  $X$  est muni d'une structure de  $k$ -schéma et  $x$  a pour corps résiduel  $k$ ) et tout élément de  $\mathcal{M}_x^2$  s'envoie sur 0 par  $u$  (parce que  $u$  est un homomorphisme local). Le dual du  $k$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$  s'appelle l'*espace tangent* de  $X$  en  $x$ . Ainsi un  $k[\varepsilon]$ -point de  $X$  consiste en la donnée d'un  $x \in X$  de corps résiduel  $k$  et d'un vecteur tangent en  $x$ . Cela correspond bien à l'idée qu'on se fait d'un "développement limité au premier ordre" pour obtenir un vecteur tangent.

d) Soit  $k$  un corps. On pose  $\mathbf{G}_m = \text{Spec}(k[T, T^{-1}])$  ("groupe multiplicatif"). Alors on a un foncteur  $A \rightarrow \mathbf{G}_m(A)$  de la catégorie des  $k$ -algèbres dans la catégorie des groupes abéliens car  $\mathbf{G}_m(A) \simeq A^*$ . Comme  $k$ -schéma,  $\mathbf{G}_m$  est isomorphe à l'ouvert  $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\} = D(T)$  de la droite affine, mais il possède une structure supplémentaire, dite de *schéma en groupes*. De même les  $A$ -points de l'espace affine  $\mathbf{A}_k^n$  correspondent au groupe additif  $A^n$ .

### 2.3. Immersions ouvertes et fermées

Contrairement au cas des variétés différentielles réelles (ou analytiques complexes), il n'y a pas de notion naturelle de sous-schéma (ni d'ailleurs d'image schématique d'un morphisme de schémas). On peut seulement parler

---

forcément injectif)  $\varphi : A \rightarrow B$ . En particulier  $B$  est alors muni d'une structure de  $A$ -module via  $a.b := \varphi(a)b$ .

de sous-schémas ouverts ou fermés, la deuxième notion étant comme on va le voir plus difficile que la première.

**Définition 2.3** Soit  $X$  un schéma. Un *sous-schéma ouvert* de  $X$  est un ouvert  $U$  de  $X$ , équipé de la restriction du faisceau  $\mathcal{O}_X$  à  $U$ . Une *immersion ouverte* est un morphisme de schémas  $X \rightarrow Y$  qui induit un isomorphisme de  $X$  sur un sous-schéma ouvert de  $Y$ .

Par exemple si  $A$  est un anneau et  $f \in A$ , alors le morphisme de schémas  $\text{Spec } A_f \rightarrow \text{Spec } A$  induit par l'homomorphisme de localisation  $A \rightarrow A_f$  est une immersion ouverte. Si  $X = A_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$ , le *morphisme de Frobenius*  $F : X \rightarrow X, t \mapsto t^p$  (induit par l'homomorphisme d'anneaux  $\varphi : t \mapsto t^p$  de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$  dans lui-même) n'est pas une immersion ouverte, bien que l'application ensembliste  $F$  soit l'identité (l'image réciproque d'un idéal premier de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$  par  $\varphi$  est lui-même); en effet  $\varphi$  n'est pas surjectif.

La raison pour laquelle la notion de sous-schéma fermé est plus compliquée est qu'il faut définir la structure de faisceau sur le fermé en question, et il n'y en a pas de canonique (ceci est à rapprocher du fait que si  $I$  est un idéal d'un anneau  $A$ , alors les ensembles fermés  $V(I)$  et  $V(J)$  sont les mêmes dès que  $I$  et  $J$  ont même radical).

**Définition 2.4** Une *immersion fermée* est un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  tel que :

- i)  $f$  induit un homéomorphisme de  $X$  sur un fermé de  $Y$ .
- ii) Le morphisme de faisceaux  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  associé à  $f$  est surjectif.

Typiquement, cela signifie que  $f$  ressemble localement à un morphisme  $\text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec } A$  (voir l'exemple a) à la fin de la section 1.1.). Le morphisme de Frobenius  $F$  vu plus haut n'est pas une immersion fermée car  $\varphi$  n'induit pas une surjection au niveau des anneaux locaux  $k[t]_\wp \rightarrow k[t]_\wp$  si  $\wp$  est un idéal premier de  $k[t]$  (par exemple si  $\wp$  est le point générique,  $\varphi$  n'induit pas une surjection de  $k(t)$  sur  $k(t)$ ).

**Définition 2.5** Un *sous-schéma fermé* d'un schéma  $Y$  est un schéma  $X$ , équipé d'une immersion fermée  $i : X \rightarrow Y$ , où l'on identifie deux paires  $(X, i)$  et  $(X', i')$  s'il existe un isomorphisme de schémas  $g : X \rightarrow X'$  avec  $i' \circ g = i$ .

La notion la plus commode est donc celle de fermé  $X$  de  $Y$  muni d'une immersion fermée  $X \rightarrow Y$  qui fait de  $X$  un sous-schéma fermé de  $Y$ . En particulier  $\text{Spec}(A/I)$  est un sous-schéma fermé de  $\text{Spec } A$  d'espace topologique

sous-jacent  $V(I)$ , mais  $V(I)$  a en général plusieurs structures de sous-schéma fermé. Par exemple si  $x$  est un point fermé de  $\mathbf{A}_k^1$ , alors  $\text{Spec}(k[\varepsilon])$  et  $\text{Spec} k$  sont deux sous-schémas fermés de  $\mathbf{A}_k^1$  d'espace sous-jacent  $x$ ; ils correspondent respectivement au "point double"  $x$  et au "point simple"  $x$ . De même, considérons le fermé  $F = V(T_1)$  du plan affine  $\mathbf{A}_k^2$ . La structure de sous-schéma fermée donnée par l'idéal  $(T_1)$  correspond à une droite, celle donnée par  $(T_1^2)$  à une droite double, et celle donnée par  $(T_1^2, T_1 T_2)$  à une droite avec l'origine doublée. Ceci dit, il y a toujours une structure "minimale" de sous-schéma fermé sur  $V(I)$ , qui correspond à prendre celle donnée par  $\sqrt{I}$  (auquel cas l'anneau  $A/\sqrt{I}$  n'a pas de nilpotents non triviaux). On l'appelle *structure réduite* (on verra une généralisation de cette notion à la section 3.).

Il se trouve qu'en fait tout sous-schéma fermé de  $\text{Spec} A$  est affine :

**Theorème 2.6** *Soit  $X = \text{Spec} A$  un schéma affine et soit  $j : Z \rightarrow X$  une immersion fermée. Alors  $Z$  est affine. De plus  $Z$  est le sous-schéma fermé  $\text{Spec}(A/J)$  pour un certain idéal  $J$  de  $A$ .*

Notons que l'idéal  $J$  tel que  $Z = \text{Spec}(A/J)$  est unique (si on a un isomorphisme de  $A/J$  sur  $A/J'$  compatible avec les surjections canoniques, alors  $J = J'$ ).

Malgré la simplicité de l'énoncé, la preuve du théorème 2.6 est assez longue (parce qu'il ne suffit pas de montrer que  $Z = V(J)$  ensemblistement). Nous la décomposerons en plusieurs lemmes.

**Lemme 2.7** *Soient  $X$  un schéma et  $f \in \mathcal{O}_X(X)$ . On note  $X_f$  l'ensemble des points  $x$  de  $X$  telle que la restriction  $f_x$  de  $f$  à la tige  $\mathcal{O}_{X,x}$  soit dans  $\mathcal{O}_{X,x}^*$  (autrement dit l'évaluation  $f(x) \in k(x)$  est non nulle). Alors*

a) *L'ensemble  $X_f$  est un ouvert de  $X$ .*

b) *Supposons en outre que  $X$  vérifie la condition suivante :*

(\*)  *$X$  peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines  $U_i$ , tels que chaque  $U_i \cap U_j$  admette également un recouvrement affine fini.*

*Alors l'homomorphisme de restriction  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X(X)_f$  sur  $\mathcal{O}_X(X_f)$ .*

Noter que (\*) est automatiquement vérifiée si  $X$  est affine (auquel cas  $X_f = D(f)$  et la conclusion du lemme est évidente).



**Démonstration :** a) Si  $x \in X_f$ , alors par définition de  $\mathcal{O}_{X,x}$  il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  tels que  $(f|_U).g = 1$ , d'où  $U \subset X_f$ ; ainsi  $X_f$  est ouvert.

b) Notons que la restriction de  $f$  à  $\mathcal{O}_X(X_f)$  est inversible : en effet on définit son inverse en recollant les sections  $g$  définies comme en a) sur un recouvrement ouvert de  $X_f$ . Ainsi la restriction  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$  induit un homomorphisme  $\mathcal{O}_X(X)_f \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ . Recouvrons  $X$  par un nombre fini d'ouverts  $U_i$  satisfaisant (\*). Alors  $X_f$  est recouvert par les  $V_i := U_i \cap X_f$ , qui ne sont autre que les ouverts principaux  $D(f)$  de  $U_i$  (pour simplifier on notera désormais encore  $f$  la restriction de  $f$  à tout ouvert de  $X$ ). Ainsi  $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$ . En utilisant le fait que  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau, que la tensorisation  $\otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$  est exacte (la localisation est un homomorphisme plat : voir [[**AC**], **3**]) et commute avec les sommes directes (donc avec les produits *finis*), on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X)_f & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{O}_X(U_i)_f & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X_f) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{O}_X(V_i) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j) \end{array}$$

La flèche verticale du milieu est un isomorphisme, donc celle de gauche est injective. Or pour cette injectivité, on a seulement utilisé le fait que  $X$  était recouvert par un nombre fini d'ouverts affines. D'après (\*), chaque  $U_i \cap U_j$  possède également cette propriété, donc on en déduit que la flèche verticale de droite est également injective. Par chasse au diagramme, la flèche verticale de gauche est alors surjective, et le lemme est démontré.  $\square$

La proposition suivante, conséquence du lemme précédent, est un critère souvent utile pour montre qu'un schéma est affine.

**Proposition 2.8** *Soit  $X$  un schéma. On suppose qu'il existe une famille finie d'éléments  $f_1, \dots, f_r$  de  $\mathcal{O}_X(X)$  vérifiant : les ouverts  $X_{f_i}$  sont affines et l'idéal engendré par les  $f_i$  est  $\mathcal{O}_X(X)$ . Alors  $X$  est affine.*

**Démonstration :** Posons  $A = \mathcal{O}_X(X)$  et  $A_i = \mathcal{O}_X(X_{f_i})$ . Comme l'idéal engendré par les  $f_i$  contient 1, les  $X_{f_i}$  recouvrent  $X$  (pour tout  $x$  de  $X$ , l'une au moins des sections  $f_i$  ne s'annule pas en  $x$ ). D'après le lemme 2.7,  $A_i$  s'identifie à  $A_{f_i}$  (les hypothèses de ce lemme sont bien vérifiées vu que chaque  $X_{f_i}$  est affine et les  $X_{f_i} \cap X_{f_j}$  sont donc des ouverts principaux d'un ouvert affine). On définit alors un morphisme de schémas  $u : X \rightarrow \text{Spec } A$

en définissant pour chaque  $i$  la restriction de  $u$  à  $X_{f_i}$  comme le morphisme induit par l'homomorphisme de restriction  $A \rightarrow A_i$  (il est immédiat que les conditions de recollement sont bien vérifiées).

On remarque que si  $V = D(g)$  est un ouvert principal de  $\text{Spec } A$ , alors  $u^{-1}(V)$  est l'ouvert  $X_h$ , où  $h$  est l'image de  $g$  par l'homomorphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$  induit par  $u$  (en effet si  $z \in X$ , alors  $(\varphi(g))(z) \neq 0$  équivaut à  $g(u(z)) \neq 0$ ). Ainsi l'image réciproque par  $u$  de  $D(f_i)$  est  $X_{f_i}$  (et on sait que les ouverts  $D(f_i)$  recouvrent  $\text{Spec } A$  puisque l'idéal engendré par les  $f_i$  est  $A$ ). D'autre part le morphisme induit  $u : X_{f_i} \rightarrow D(f_i)$  est un isomorphisme puisque  $A_i = \mathcal{O}_X(X_{f_i})$  est précisément  $A_{f_i}$ . Finalement  $u$  est un isomorphisme de  $X$  sur  $\text{Spec } A$ .

□

**Preuve du théorème 2.6 :** On va montrer que  $Z$  satisfait au critère de la proposition précédente. Comme  $Z$  peut être recouvert par des ouverts affines et s'identifie (via  $j$ ) à un sous-espace topologique de  $X$ , on peut le recouvrir par des ouverts affines de la forme  $j^{-1}(U_p)$ , où les  $U_p$  sont des ouverts de  $X$ . Chaque  $U_p$  est réunion d'ouverts principaux  $(U_{p_k})$  de  $X$ . Alors comme on l'a vu plus haut chaque  $j^{-1}(U_{p_k})$  est du type  $Z_h$  (puisque  $U_{p_k}$  est un ouvert principal de  $\text{Spec } A$ ), et il est donc également affine car il est inclus dans l'ouvert affine  $U'_p := j^{-1}(U_p)$  (donc c'est l'ouvert principal  $D(h|_{U'_p})$  dans  $U'_p$ ).

En recouvrant ensuite l'ouvert  $X - j(Z)$  par des ouverts principaux de  $X$ , on obtient un recouvrement de  $X$  par des ouverts principaux  $V_l = D(g_l)$ , tels que chaque  $j^{-1}(V_l)$  soit affine et du type  $Z_{h_l}$  pour un certain  $h_l \in \mathcal{O}_Z(Z)$ . On peut de plus supposer qu'il y a un nombre fini de  $V_l$  par quasi-compacité du schéma affine  $X$ . Comme les  $V_l$  recouvrent  $X$ , l'idéal engendré par les  $g_l$  contient 1 donc l'idéal engendré par les  $h_l$  est  $\mathcal{O}_Z(Z)$  tout entier. Ainsi, d'après la proposition 2.8,  $Z$  est bien affine.

Posons  $Z = \text{Spec } B$ . Il reste à prouver que l'homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  associé à  $j$  est surjectif. Soit  $X' = \text{Spec } (A/\ker \varphi)$ . Alors comme  $\varphi$  induit un morphisme injectif  $\bar{\varphi}$  de  $A/\ker \varphi$  sur  $B$ , le morphisme  $j$  s'écrit  $j = i \circ \theta$ , où  $i : X' \rightarrow X$  est l'immersion fermée associée à la surjection canonique  $A \rightarrow A/\ker \varphi$  et  $\theta : Z \rightarrow X'$  est associé à  $\bar{\varphi}$ . On va montrer que  $\theta$  est un isomorphisme de schémas, ce qui montrera que  $\bar{\varphi}$  est un isomorphisme, donc que  $\varphi$  est surjectif.

Il est immédiat que l'application  $\theta$  est injective et fermée car  $j$  induit un homéomorphisme de  $Z$  sur un fermé de  $X$ . Pour montrer que  $\theta$  est bijective, il suffit de montrer que son image est dense. Or ceci résulte du lemme suivant :

**Lemme 2.9** Soit  $\psi : C \rightarrow D$  un homomorphisme d'anneaux. Si  $\psi$  est injectif, alors le morphisme associé  $g : \text{Spec } D \rightarrow \text{Spec } C$  vérifie :  $g(\text{Spec } D)$  est dense dans  $\text{Spec } C$ . La réciproque est vraie si le radical de  $C$  est nul.

Supposons pour l'instant le lemme démontré. Il suffit alors de voir que  $\theta^\#$  est un isomorphisme de faisceaux, ou encore que pour tout idéal premier  $\wp$  de  $B$ , l'homomorphisme  $(A/\ker \varphi)_{\varphi^{-1}(\wp)} \rightarrow B_\wp$  est un isomorphisme. Mais ce dernier point est clair vu que  $A/\ker \varphi$  s'injecte dans  $B$ , et  $A_{\varphi^{-1}(\wp)}$  se surjecte sur  $B_\wp$  parce que  $j$  est une immersion fermée.

□

**Preuve du lemme 2.9 :** Supposons  $\psi$  injectif. Soit  $D(f)$  un ouvert non vide de  $\text{Spec } C$ . Alors  $f$  n'est pas nilpotent, donc  $\psi(f)$  non plus car  $\psi$  est injectif. De ce fait, il existe un idéal premier  $\wp$  de  $C$  qui ne contient pas  $\psi(f)$ . Alors  $g(\wp) = \psi^{-1}(\wp)$  ne contient pas  $f$ , ce qui fait que  $g(\wp)$  est dans  $D(f) \cap g(\text{Spec } D)$ . Comme les  $D(f)$  forment une base d'ouverts de  $\text{Spec } C$ , on a bien montré la densité de  $g(\text{Spec } D)$ .

En sens inverse, si  $\psi$  n'est pas injectif, alors son noyau  $N$  est non nul. Tous les éléments de  $g(\text{Spec } D)$  sont alors des idéaux premiers de  $C$  qui contiennent  $N$ , i.e.  $g(\text{Spec } D) \subset V(N)$ . Supposons de plus que le radical de  $C$  est nul. Alors  $V(N)$  est un fermé strict de  $\text{Spec } C$  donc  $g(\text{Spec } D)$  n'est pas dense.

□

## 2.4. Morphismes finis et de type fini

On commence par une notion générale :

**Définition 2.10** On dira qu'une propriété  $(\mathcal{P})$  des morphismes est *locale sur la base* si la condition suivante est satisfaite :

soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme ; alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $f$  vérifie  $(\mathcal{P})$ .

b) Le schéma  $Y$  admet un recouvrement ouvert affine  $(V_i)$  vérifiant que tous les morphismes  $f_i : f^{-1}(V_i) \rightarrow V_i$  induits par  $f$  vérifient  $(\mathcal{P})$ .

**Remarque :** Pour les propriétés  $(\mathcal{P})$  que nous considèrerons, il sera en général facile de vérifier que si  $V$  est un ouvert affine quelconque de  $Y$ , alors le morphisme induit  $f^{-1}(V) \rightarrow V$  vérifie encore  $(\mathcal{P})$ . C'est donc l'implication  $b) \Rightarrow a)$  qu'il s'agira de vérifier pour avoir que  $(\mathcal{P})$  est locale sur la base.

Par exemple, on vérifie immédiatement que les notions d'immersions ouvertes et fermées sont locales sur la base. Nous allons voir dans ce paragraphe des exemples importants de propriété locale sur la base.

Rappelons qu'un espace topologique  $X$  est *quasi-compact* si de tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Par exemple on a vu (proposition 1.15) qu'un schéma affine  $\text{Spec } A$  était toujours quasi-compact. Du coup un schéma est quasi-compact si et seulement s'il est réunion *finie* d'ouverts affines. Cette notion admet une version relative :

**Définition 2.11** Un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  est *quasi-compact* si l'image réciproque de tout ouvert affine est quasi-compact.

L'énoncé suivant montre que la propriété "quasi-compact" est locale sur la base.

**Proposition 2.12** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On suppose que  $Y$  admet un recouvrement affine  $(V_i)$  tel que chaque  $f^{-1}(V_i)$  soit quasi-compact. Alors  $f$  est quasi-compact.

En particulier un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } A$  est quasi-compact si et seulement si le schéma  $X$  est quasi-compact.

**Démonstration :** Soit  $V$  un ouvert affine de  $Y$ , chaque  $V \cap V_i$  est recouvert par des ouverts affines  $V_{ik}$ , principaux dans  $V_i$ . On peut alors recouvrir  $V$  (qui est quasi-compact) par un nombre fini de  $V_{ik}$  et il suffit de montrer que chaque  $f^{-1}(V_{ik})$  est quasi-compact.

Recouvrons alors chaque  $f^{-1}(V_i)$  par un nombre fini d'ouverts affines  $U_{ij}$ , alors  $f^{-1}(V_{ik})$  est réunion d'un nombre fini de  $U_{ijk} := f^{-1}(V_{ik}) \cap U_{ij}$ , avec  $U_{ijk}$  ouvert principal de  $U_{ij}$  (car c'est l'image réciproque de  $V_{ik}$  par le morphisme  $U_{ij} \rightarrow V_i$  induit par  $f$ ; or  $U_{ij}$  et  $V_i$  sont affines avec  $V_{ik}$  principal dans  $V_i$ ). En particulier  $U_{ijk}$  est affine et  $f^{-1}(V_{ik})$  est bien quasi-compact. □

**Définition 2.13** Un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  est *localement de type fini* si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$ , et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , l'homomorphisme  $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$  induit par la restriction  $f : U \rightarrow V$  fait de  $\mathcal{O}_X(U)$  une  $\mathcal{O}_Y(V)$ -algèbre de type fini.

La proposition suivante montre que "localement de type fini" est aussi une propriété locale sur la base.

**Proposition 2.14** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas tel que  $Y$  soit recouvert par des ouverts affines  $V_i$ , avec chaque  $f^{-1}(V_i)$  réunion d'ouverts affines  $U_{ij}$  tels que  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  soit une algèbre de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_i)$ . Alors  $f$  est localement de type fini.

**Démonstration :** On aura besoin du

**Lemme 2.15** Soient  $A$  un anneau et  $B$  une  $A$ -algèbre.

a) On suppose que  $\text{Spec } B$  est réunion d'ouverts principaux  $D(b_i)$  avec  $b_i \in B$  et  $B_{b_i}$   $A$ -algèbre de type fini. Alors  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini.

b) Si  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est une immersion ouverte entre schémas affines, alors  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini

Supposons pour l'instant le lemme démontré. Soit  $V = \text{Spec } A$  un ouvert affine de  $Y$ . Comme dans la preuve de la proposition 2.12, on peut recouvrir chaque  $V \cap V_i$  par un nombre fini d'ouverts affines  $V_{ik}$  qui sont principaux dans  $V_i$ , et chaque  $f^{-1}(V_i)$  par des ouverts affines  $U_{ij}$ , avec maintenant l'hypothèse que  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_i)$ . Alors  $U_{ijk} := f^{-1}(V_{ik}) \cap U_{ij}$  est tel que  $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$  (car obtenu par restriction du morphisme  $U_{ij} \rightarrow V_i$  à un ouvert principal de  $V_i$ ; on utilise ici que si  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini et  $a \in A$ , alors  $B_b$  est de type fini sur  $A_a$ , où  $b$  est l'image de  $a$  dans  $B$ ). Ainsi on peut recouvrir  $f^{-1}(V)$  par des ouverts affines  $U_\alpha (= U_{ijk})$ , qui ont la propriété que  $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$ , donc aussi sur  $A = \mathcal{O}_Y(V)$  d'après le lemme 2.15 b). Soit alors  $U = \text{Spec } B$  un ouvert affine de  $f^{-1}(V)$ . Tout  $x$  de  $U$  admet un voisinage  $D(b_i)$  dans  $U$  avec  $D(b_i) \subset U_\alpha$  pour un certain  $\alpha$ . Alors  $B_{b_i}$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_X(U_\alpha)$  par le lemme 2.15 b), donc aussi sur  $A$  par transitivité. On conclut en appliquant le lemme 2.15 a).

**Preuve du lemme 2.15 :** a) On peut supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de  $b_i$  par quasi-compacité de  $\text{Spec } B$ . Chaque  $B_{b_i}$  est engendrée comme  $A$ -algèbre par un nombre fini d'éléments  $a_{ij}/b_i$ ,  $a_{ij} \in B$ . On a donc une sous  $A$ -algèbre de type fini  $C$  de  $B$  contenant les  $b_i$  et telle que  $C_{b_i} = B_{b_i}$  pour tout  $i$  (on prend l'algèbre engendrée par les  $b_i$  et les  $a_{ij}$ ). D'autre part les  $D(b_i)$  recouvrent  $\text{Spec } B$ , d'où une écriture

$$1 = \sum_{i=1}^m b_i b'_i$$

avec  $b'_i \in B$ . Soit alors  $D$  la  $A$ -algèbre engendrée par  $C$  et les  $b'_i$ , elle est de type fini sur  $A$ .

Montrons que  $B = D$ . Pour tout entier  $k$ , il existe des  $d_{i,k}$  dans  $D$  avec  $1 = \sum_{i=1}^m b_i^k d_{i,k}$  (en élevant l'égalité précédente à la puissance  $mk$ ). Maintenant tout élément  $b$  de  $B$  vérifie une identité du type  $b_i^k b = b_i^k c_i$  avec  $c_i \in C$  vu que  $B_{b_i} = C_{b_i}$ . finalement on obtient  $b = \sum_{i=1}^m (b_i^k c_i) d_{i,k}$  donc  $b \in D$ . Ainsi  $B = D$  ce qui termine la preuve de a).

b) On peut voir  $\text{Spec } B$  comme un ouvert de  $\text{Spec } A$ . On recouvre alors  $\text{Spec } B$  par des ouverts principaux  $D(a_i)$  de  $\text{Spec } A$ . Ces ouverts sont aussi les  $D(b_i)$  dans  $\text{Spec } B$ , où  $b_i$  est l'image de  $a_i$  dans  $B$ . Alors  $B_{b_i} = A_{a_i}$  est de type fini sur  $A$  et on applique a).

□

**Remarque :** On peut simplifier un peu (cf. [L], page 88) la preuve de la proposition 2.14 si on connaît le lemme suivant :

**Lemme 2.16** a) Soit  $X$  un schéma affine. Soit  $U$  un ouvert principal de  $X$  et  $V$  un ouvert principal de  $U$ . Alors  $V$  est un ouvert principal de  $X$ .

b) Soit  $X$  un schéma. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts affines de  $X$ . Alors tout point  $x$  de  $U \cap V$  admet un voisinage  $W$  qui est un ouvert principal à la fois de  $U$  et de  $V$ .

**Démonstration :** a) Soit  $X = \text{Spec } A$ . Si  $U = D(f) = \text{Spec } A_f$ , alors  $V$  s'écrit  $\text{Spec } B_g$  avec  $B = A_f$  et  $g \in B$ . En écrivant  $g = a/f^n$  avec  $a \in A$ , on obtient  $V = D(af)$ .

b) Soit  $W \subset (U \cap V)$  un ouvert principal de  $U$  contenant  $x$ . Soit  $W' \subset W$  un ouvert principal de  $V$  contenant  $x$ . Alors  $W'$  est aussi principal dans  $W$  (car  $W$  est un ouvert affine de  $V$ ), donc dans  $U$  d'après a).

□

**Définition 2.17** Un morphisme de schémas est dit *de type fini* s'il est localement de type fini et quasi-compact.

D'après ce qui précède, c'est une propriété locale sur la base.

**Exemples :** a) Soient  $X$  un schéma et  $x \in X$ . Alors le morphisme  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  induit n'est pas en général localement de type fini, car la localisation  $A \rightarrow A_\varphi$  d'un anneau  $A$  par rapport à un idéal premier  $\varphi$  ne fait pas de  $A_\varphi$  une  $A$ -algèbre de type fini.

b) D'après la proposition 2.14, un morphisme  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est de type fini ssi l'homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$  correspondant fait de  $B$  une  $A$ -algèbre de type fini.

c) Une variété algébrique affine ou projective sur un corps  $k$  est un schéma de type fini sur  $\text{Spec } k$  (toujours d'après la proposition 2.14).

d) Une immersion ouverte est localement de type fini car si  $f \in A$ , la  $A$ -algèbre  $A_f$  est de type fini (engendrée par  $1/f$ ). Sans hypothèse sur  $A$ , un ouvert  $U \subset \text{Spec } A$  peut ne pas être quasi-compact donc l'immersion ouverte correspondante peut ne pas être de type fini (on verra que ce problème disparaît si  $A$  est noethérien).

**Proposition 2.18** a) La composée de deux morphismes de type fini (resp. localement de type fini, quasi-compact) est de type fini (resp. localement de type fini, quasi-compact).

b) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes. Si  $g \circ f$  est localement de type fini, alors  $f$  est localement de type fini.

**Démonstration :** a) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des morphismes. Si  $f$  et  $g$  sont quasi-compacts, alors pour tout ouvert affine  $W$  de  $Z$ ,  $g^{-1}(W)$  est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines  $V_i$ , et chaque  $f^{-1}(V_i)$  est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines  $U_{ij}$ ; finalement  $(g \circ f)^{-1}(W)$  est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines (les  $U_{ij}$ ) donc  $g \circ f$  est quasi-compact.

Supposons maintenant que  $f$  et  $g$  sont localement de type fini. Reprenons les notations ci-dessus (avec la seule différence que les  $V_i$  et les  $U_{ij}$  ne sont plus forcément en nombre fini). L'hypothèse implique maintenant que  $\mathcal{O}_Y(V_i)$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Z(W)$ , et  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_i)$ , donc  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_Z(W)$ . On conclut alors avec la proposition 2.14 en recouvrant  $Z$  par des ouverts affines.

b) Via la proposition 2.14, on se ramène comme ci-dessus au cas où tous les schémas sont affines. L'énoncé vient alors du fait que si on a des homomorphismes d'anneaux  $A \rightarrow B \rightarrow C$ , alors  $C$  de type fini sur  $A$  implique a fortiori que  $C$  est de type fini sur  $B$ .

□

**Définition 2.19** Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est dit *affine* si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$ , l'ouvert  $f^{-1}(V)$  est affine. Il est dit *fini* s'il est affine et si de plus pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$ ,  $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$  est fini sur  $\mathcal{O}_Y(V)$  (i.e. est un  $\mathcal{O}_Y(V)$ -module de type fini).

On vérifie immédiatement que le composé de deux morphismes affines (resp. finis) est affine (resp. fini).

La proposition suivante dit que les propriétés "affine" et "fini" des morphismes sont locales sur la base.

**Proposition 2.20** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schéma. On suppose que  $Y$  peut être recouvert par des ouverts affines  $(V_i)$  tels que chaque  $U_i := f^{-1}(V_i)$  soit affine. Alors :

a) Le morphisme  $f$  est affine.

b) Si de plus chaque  $\mathcal{O}_X(U_i)$  est un  $\mathcal{O}_Y(V_i)$ -module de type fini, alors le morphisme  $f$  est fini.

**Démonstration :** a) Soit  $V = \text{Spec } A$  un ouvert affine de  $Y$ . Chaque  $V \cap V_i$  peut être recouvert par des ouverts  $(V_{ij})$  qui sont de la forme  $D(f_{ij})$  dans  $V$  avec  $f_{ij} \in A$ . On peut également supposer que  $V_{ij}$  est principal dans  $V_i$  d'après le lemme 2.16 <sup>13</sup>. Comme  $V$  est quasi-compact, un nombre fini de  $V_{ij}$  le recouvrent. Maintenant l'image réciproque  $U$  de  $V$  par  $f$  est recouverte par un nombre fini d'ouverts  $U_{ij} := f^{-1}(V_{ij})$ . Chaque  $U_{ij}$  est un ouvert affine principal de  $U_i := f^{-1}(V_i)$  (parce que  $V_{ij}$  est principal dans  $V_i$ ); d'autre part, avec les notations de la proposition 2.8,  $U_{ij}$  est aussi de la forme  $U_{b_{ij}}$  pour un certain  $b_{ij}$  de  $\mathcal{O}_U(U)$  (où  $b_{ij}$  est l'image de  $f_{ij} \in \mathcal{O}_V(V)$  par l'homomorphisme  $\varphi : \mathcal{O}_V(V) \rightarrow \mathcal{O}_U(U)$  induit par  $f$ ). Comme  $V$  est recouvert par les  $V_{ij}$ , les  $f_{ij}$  engendrent l'idéal  $\mathcal{O}_V(V)$  donc les  $b_{ij}$  engendrent l'idéal  $\mathcal{O}_U(U)$ . On conclut en appliquant le critère de la proposition 2.8.

b) Avec les notations ci-dessus, on a maintenant en plus que  $\mathcal{O}_X(U_i)$  est un module de type fini sur  $\mathcal{O}_Y(V_i)$ . Comme  $U_{ij}$  est l'image réciproque dans  $U_i$  de l'ouvert principal  $V_{ij} \subset V_i$ , on a aussi que  $\mathcal{O}_X(U_{ij})$  est de type fini comme  $\mathcal{O}_Y(V_{ij})$ -module. Posons  $U = \text{Spec } B$ . On est donc ramené à montrer que si  $\text{Spec } A$  est recouvert par un nombre fini de  $D(a_i)$  tels que chaque  $B_{b_i}$  soit un  $A_{a_i}$ -module de type fini (où  $b_i = \varphi(a_i)$ ), alors  $B$  est un  $A$ -module de type fini.

Soit  $(\beta_{ij})$  une famille finie de générateurs du  $A_{a_i}$ -module  $B_{b_i}$  et soit  $C$  le sous  $A$ -module de  $B$  engendré par les  $b_i$  et les  $\beta_{ij}$ . On a donc  $B_{b_i} = C_{b_i}$  pour tout  $i$ . Si maintenant  $b \in B$ , alors il existe  $k > 0$  tel que pour tout  $i$  on ait  $b_i^k b = b_i^k c_i$  avec  $c_i \in C$ . Comme les  $D(a_i)$  recouvrent  $\text{Spec } A$ , on peut écrire  $1 = \sum_i \alpha_i a_i^k$  avec  $\alpha_i \in A$ . Alors  $b = \sum_i \varphi(\alpha_i a_i^k) c_i$  est bien dans  $C$ .  $\square$

**Exemples :** a) Une immersion fermée est finie d'après le théorème 2.6 et la proposition précédente (noter que si  $j : Z \rightarrow X$  est une immersion fermée, alors pour tout ouvert  $V$  de  $X$  le morphisme induit  $j^{-1}(V) \rightarrow V$  est aussi une immersion fermée).

b) Une immersion ouverte n'est pas en général un morphisme fini, car  $A_f$  n'est pas un  $A$ -module de type fini. Il ne suffit donc pas que les fibres ensemblistes de  $X \rightarrow Y$  soient finies pour que le morphisme de schémas correspondant soit fini.

c) Les schémas équipés d'un morphisme fini vers  $\text{Spec } k$  sont les  $\text{Spec } A$ , où  $A$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie. Plus généralement un morphisme  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est fini si et seulement si l'homomorphisme associé  $A \rightarrow B$  fait de  $B$  un  $A$ -module de type fini.

---

<sup>13</sup>On peut éviter le recours à ce lemme en vérifiant d'abord qu'un morphisme de la forme  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est bien affine, ce qui se fait encore en utilisant la proposition 2.8.



## 2.5. Recollements, produits fibrés

Dans ce paragraphe, nous allons voir de nouvelles façons de fabriquer des schémas. On commence par un lemme de recollement général :

**Lemme 2.21** *Soit  $S$  un schéma. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de  $S$ -schémas. On se donne des sous-schémas ouverts  $(X_{ij})_{j \in I}$  de  $X_i$  et des  $S$ -isomorphismes  $f_{ij} : X_{ij} \rightarrow X_{ji}$  avec :  $f_{ii} = \text{Id}$ ,  $f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$ , et  $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$  sur  $X_{ij} \cap X_{ik}$  (pour tous indices  $i, j, k$ ). Alors il existe un  $S$ -schéma  $X$ , unique à isomorphisme près, équipé de  $S$ -immersions ouvertes  $g_i : X_i \rightarrow X$  telles que  $g_i = g_j \circ f_{ij}$  sur  $X_{ij}$  avec  $X = \bigcup_i g_i(X_i)$ . On dit que  $X$  est le recollement des  $X_i$  selon les  $X_{ij}$  (ou via les  $f_{ij}$ ).*

(Notons qu'en prenant  $S = \text{Spec } \mathbf{Z}$ , on a le même énoncé sans faire intervenir de schéma de base  $S$  car comme tout anneau est de manière unique équipé d'une structure de  $\mathbf{Z}$ -algèbre, tout schéma est canoniquement un  $\mathbf{Z}$ -schéma).

**Remarques :** Les observations suivantes découlent immédiatement du lemme 2.21 :

a) Le cas le plus courant consiste à recoller deux schémas  $X_1$  et  $X_2$  via un isomorphisme  $f : U_1 \rightarrow U_2$  entre des ouverts respectifs de  $X_1$  et  $X_2$  (on prend  $X_1 = X_{11}$ ,  $X_2 = X_{22}$ ,  $U_1 = X_{12}$ ,  $U_2 = X_{21}$ ,  $f_{12} = f = f_{21}^{-1}$  dans les notations du lemme). Un autre cas intéressant est celui où tous les  $X_{ij}$  sont vides : le schéma  $X$  obtenu est alors l'*union disjointe* des  $X_i$ . Par exemple l'union disjointe de  $\text{Spec } A$  et  $\text{Spec } B$  est isomorphe à  $\text{Spec } (A \times B)$  (attention l'union disjointe d'un nombre infini de schémas affines n'est plus affine, car elle n'est même plus quasi-compacte).<sup>14</sup>

b) On peut caractériser le recollement  $X$  par la propriété universelle suivante : pour tout  $S$ -schéma  $Z$  et toute famille de  $S$ -morphisms  $u_i : X_i \rightarrow Z$  vérifiant  $u_i = u_j \circ f_{ij}$  sur  $X_{ij}$ , il existe un unique  $S$ -morphisme  $u : X \rightarrow Z$  tel que  $u_i = u \circ g_i$ .

c) Si  $Z$  est un  $S$ -schéma, alors se donner un  $S$ -morphisme  $u : Z \rightarrow X$  est équivalent à se donner un recouvrement ouvert  $(Z_i)_{i \in I}$  de  $Z$  et des  $S$ -morphisms  $u_i : Z_i \rightarrow X_i$  tels que  $u_i(Z_i \cap Z_j) \subset X_{ij}$  et  $u_j = f_{ij} \circ u_i$  sur  $Z_i \cap Z_j$ . C'est cette dernière propriété qui permet souvent de définir des morphismes à valeurs dans un recollement (par exemple dans la construction du produit fibré ci-dessous).

---

<sup>14</sup>L'union disjointe d'une famille de schémas correspond toujours à leur coproduit dans la catégorie des schémas, mais le coproduit d'un nombre infini de schémas affines n'est pas le même dans la catégorie des schémas et dans celle des schémas affines !

**Preuve du lemme 2.21 :** On définit d'abord l'espace topologique  $X$  en prenant le quotient de l'union disjointe  $\coprod X_i$  par la relation d'équivalence  $x \sim y$  si  $x \in X_i, y \in X_j$  et  $y = f_{ij}(x)$ . On a alors des injections continues et ouvertes  $g_i : X_i \rightarrow X$  avec  $g_i = g_j \circ f_{ij}$  sur  $X_{ij}$ . Posons  $U_i = g_i(X_i)$  et  $\mathcal{O}_{U_i} = (g_i)_* \mathcal{O}_{X_i}$ , alors les restrictions de  $\mathcal{O}_{U_i}$  et  $\mathcal{O}_{U_j}$  à  $U_i \cap U_j$  coïncident. On peut donc définir un faisceau  $\mathcal{O}_X$  sur  $X$  par  $(\mathcal{O}_X)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$ , ce qui donne à  $X$  une structure de schéma et fait des  $g_i$  des isomorphismes de schémas de  $X_i$  sur  $U_i$ . Soit enfin  $h_i$  le composé de  $g_i^{-1}$  et de  $X_i \rightarrow S$ . Alors  $h_i$  et  $h_j$  ont même restriction à  $U_i \cap U_j$ , ce qui permet de définir un morphisme  $X \rightarrow S$ , compatible avec les structures de  $S$ -schémas sur les  $X_i$ . L'unicité de  $X$  est évidente. □

On va maintenant pouvoir définir le *produit fibré*  $X \times_S Y$  de deux  $S$ -schémas  $X$  et  $Y$ . Ensemblistement, ce ne sera pas tout à fait le produit fibré usuel car on veut par exemple que le produit fibré (au-dessus de  $\text{Spec } k$ ) de deux espaces affines  $\mathbf{A}_k^m \times \mathbf{A}_k^n$  soit  $\mathbf{A}_k^{m+n}$ . Or déjà pour  $m = n = 1$ , l'ensemble sous-jacent du produit n'est pas exactement le produit des ensembles sous-jacents : on ne récupère pas les points génériques des courbes de  $\mathbf{A}_k^2$  (correspondant aux idéaux premiers  $(P)$ , avec  $P$  irréductible) comme élément du produit ensembliste. Par contre, le produit fibré correspond bien au produit au niveau des  $Z$ -points (au sens du paragraphe 2.2.) : on aura  $(X \times_S Y)(Z) = X(Z) \times Y(Z)$  pour tout  $S$ -schéma  $Z$ , où  $X(Z) := \text{Mor}_S(Z, X)$  (avec des notations similaires pour  $Y$  et  $X \times_S Y$ ). Par exemple les  $k$ -points (i.e. les points "usuels") de  $\mathbf{A}_k^{m+n}$  seront bien obtenus comme les éléments de l'ensemble  $\mathbf{A}_k^m(k) \times \mathbf{A}_k^n(k)$ .

On arrive donc à la définition du produit fibré  $W = X \times_S Y$  par la propriété universelle suivante : c'est un  $S$ -schéma, muni de deux  $S$ -morphisms ("projections")  $p : W \rightarrow X$  et  $q : W \rightarrow Y$ , tel que pour toute paire  $f, g$  de  $S$ -morphisms  $f : Z \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow Y$ , il existe un unique  $S$ -morphisme  $Z \rightarrow W$  (noté  $(f, g)$ ) tel que  $f = p \circ (f, g)$  et  $g = q \circ (f, g)$ .<sup>15</sup>

**Theorème 2.22** *Le produit fibré  $X \times_S Y$  existe, et est unique à isomorphisme unique près. Si  $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B, S = \text{Spec } C$ , alors*

$$X \times_S Y = \text{Spec } (A \otimes_C B)$$

*les projections étant induites par les  $C$ -homomorphismes canoniques  $A \rightarrow A \otimes_C B$  et  $B \rightarrow A \otimes_C B$ .*

---

<sup>15</sup>Il s'agit donc du produit dans la catégorie des  $S$ -schémas.

**Preuve du théorème :** L'unicité est évidente via la propriété universelle. L'existence se fait par étapes en utilisant le lemme de recollement.

**Étape 1 :** cas où  $X, Y, S$  sont affines. Soit  $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B, S = \text{Spec } C$ , posons  $W = \text{Spec } (A \otimes_C B)$ . Pour vérifier la propriété universelle avec un schéma  $Z$ , il suffit de le faire quand  $Z$  est affine : en effet  $Z$  est recouvert par des ouverts affines  $Z_i$ , et ensuite les différents morphismes  $Z_i \rightarrow W$  se recollent grâce à l'unicité dans la propriété universelle (en recouvrant à nouveau chaque  $Z_i \cap Z_j$  par des ouverts affines). Or, quand  $Z$  est affine, le résultat est immédiat vu la propriété universelle qui définit le produit tensoriel et l'antiéquivalence de catégories  $A \rightarrow \text{Spec } A$  (théorème 1.20 de la section 1).

**Étape 2 :** Si  $(X \times_S Y, p, q)$  existe, alors aussi  $Y \times_S X$  (échanger les rôles de  $p$  et  $q$ ), et également  $U \times_S Y$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  (il suffit de prendre  $p^{-1}(U)$  avec les restrictions de  $p$  et  $q$  à cet ouvert de  $X \times_S Y$ ).

**Étape 3 :** Cas où  $S, Y$  sont affines et  $X$  quelconque. On recouvre  $X$  par des ouverts affines  $(X_i)$ . D'après l'étape 1, on dispose des produits fibrés  $(X_i \times_S Y, p_i, q_i)$ . On a alors des  $S$ -isomorphismes  $f_{ij} : p_i^{-1}(X_i \cap X_j) \rightarrow p_j^{-1}(X_i \cap X_j)$  car  $p_i^{-1}(X_i \cap X_j)$  et  $p_j^{-1}(X_i \cap X_j)$  vérifient tous deux la propriété universelle de  $(X_i \cap X_j) \times_S Y$ ; le morphisme  $f_{ij}$  est caractérisé par le fait que c'est l'unique  $S$ -morphisme de  $p_i^{-1}(X_i \cap X_j)$  vers  $p_j^{-1}(X_i \cap X_j)$  qui est un  $(X_i \cap X_j)$ -morphisme (pour les morphismes structuraux  $p_i$  et  $p_j$ ) et un  $Y$ -morphisme (pour les morphismes structuraux  $q_i$  et  $q_j$ ). On a alors  $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$  sur  $p_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$  par unicité du  $S$ -morphisme  $p_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \rightarrow p_k^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$  qui est un  $(X_i \cap X_j \cap X_k)$ -morphisme (relativement à  $p_i, p_k$ ) et un  $Y$ -morphisme (relativement à  $q_i, q_k$ )

Le lemme de recollement permet alors de définir  $W = X \times_S Y$  comme le recollement des  $X_i \times_S Y$  selon les  $f_{ij}$ . Les projections  $p_i$  et  $q_i$  induisent des projections  $p : W \rightarrow X$  et  $q : W \rightarrow Y$ , et on vérifie immédiatement que  $(W, p, q)$  convient.

**Étape 4 :** Cas où  $S$  est affine avec  $X$  et  $Y$  quelconque. La construction est exactement la même que dans l'étape 3 en recouvrant  $Y$  par des ouverts affines  $(Y_i)$ , vu que par symétrie et par l'étape 3 on sait que chaque  $X \times_S Y_i$  existe.

**Étape 5 :** Cas général. On recouvre  $S$  par des ouverts affines  $(S_i)$ . Soient  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  les morphismes structuraux. Posons  $X_i = f^{-1}(S_i)$  et  $Y_i = g^{-1}(S_i)$ . Alors  $X_i \times_{S_i} Y_i$  existe par l'étape 4. Comme  $S_i$  est un ouvert de  $S$ , on voit immédiatement (cf. remarque a) du paragraphe 2.1.) que  $X_i \times_{S_i} Y_i$  vérifie la propriété universelle pour être  $X_i \times_S Y_i$ . On obtient alors  $X \times_S Y$  en recollant les  $X_i \times_S Y_i$  le long des  $(X_i \cap X_j) \times_S (Y_i \cap Y_j)$ .

□

Quand  $S = \text{Spec } A$  est affine, on notera souvent  $X \times_A Y$  au lieu de  $X \times_{\text{Spec } A} Y$ . Si de plus  $B$  est une  $A$ -algèbre, on notera  $X \times_A B$  pour  $X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } B$ .

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la propriété universelle du produit fibré :

**Proposition 2.23** a) Soient  $X$  et  $Y$  des  $S$ -schémas. Alors  $X \times_S S \simeq X$  et  $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$ .

b) Soient  $X, Y, Z$  des  $S$ -schémas. Alors  $(X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z)$ .

c) Soient  $X$  et  $Y$  des  $S$ -schémas et soit  $Z$  un  $Y$ -schéma. Alors

$$(X \times_S Y) \times_Y Z \simeq X \times_S Z$$

d) Si  $U$  est un ouvert de  $X$ , alors  $U \times_S Y$  est l'image réciproque de  $U$  par la projection  $p : X \times_S Y \rightarrow X$ .

e) Si  $U$  est un ouvert de  $S$  tel que  $f(X) \subset U$  (où  $f : X \rightarrow S$  est le morphisme structural), alors  $X \times_S Y = X \times_U Y_U$ , où  $Y_U$  est l'image réciproque de  $U$  par le morphisme structural  $g : Y \rightarrow S$ .

**Exemples de produits fibrés :** a) Soit  $X = \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_n]/(P_1, \dots, P_r))$  une variété affine sur un corps  $k$ . Alors pour toute extension de corps  $L/k$ , le schéma  $X \times_k L$  est la variété affine définie par les mêmes équations polynomiales, cette fois-ci sur le corps  $L$ . Le même principe s'applique à une variété projective sur  $k$ . Notons que les  $L$ -points de  $X \times_k L$  sont en bijection avec ceux du  $L$ -schéma  $X$  à cause de la propriété d'adjonction du produit tensoriel :

$$\text{Hom}_k(A, L) = \text{Hom}_L(A \otimes_k L, L)$$

valable pour toute  $k$ -algèbre  $A$ . Ceci est vrai pour un  $k$ -schéma  $X$  quelconque via la propriété universelle du produit fibré.

b) Plus généralement si  $A$  est un anneau,  $B$  une  $A$ -algèbre et  $X$  est le schéma affine  $\text{Spec}(A[t_1, \dots, t_n]/(P_1, \dots, P_r))$ , alors  $X \times_A B$  est le schéma affine  $\text{Spec}(B[t_1, \dots, t_n]/(P_1, \dots, P_r))$ ; de même si on remplace  $\text{Spec}$  par  $\text{Proj}$  (en prenant des polynômes  $P_i$  homogènes).

c) Prenons pour  $X$  un  $\mathbf{Z}$ -schéma<sup>16</sup>. Alors on peut considérer les schémas  $X \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  pour les différents nombres premiers  $p$ . Si  $X$  est défini par des équations polynomiales à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ , cela revient à réduire ces équations modulo  $p$ , tandis que regarder  $X \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  revient à regarder ces équations dans  $\mathbf{Q}$ . On a ainsi mis une structure de schéma sur les fibres du morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$ . Comme on va le voir, cette construction est générale.

---

<sup>16</sup>Rappelons que tout schéma est canoniquement un  $\mathbf{Z}$ -schéma; le cas le plus intéressant pour cette construction est celui où le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$  est de type fini.

**Définition 2.24** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Soit  $y$  un point de  $Y$  de corps résiduel  $k(y)$ . La *fibre* de  $f$  en  $y$  est le  $k(y)$ -schéma  $X_y := X \times_Y \text{Spec}(k(y))$ .

Si par exemple  $Y$  est le spectre d'un anneau intègre  $A$ , la fibre au point générique s'appelle la *fibre générique* de  $f$ ; c'est un schéma sur le corps des fractions de  $A$ .

La proposition suivante identifie topologiquement la fibre  $X_y$  à la fibre ensembliste  $f^{-1}(y)$ .

**Proposition 2.25** *La projection  $p : X_y \rightarrow X$  induit un homéomorphisme de  $X_y$  sur  $f^{-1}(y)$ .*

**Démonstration :** On note d'abord que pour tout ouvert  $V$  de  $Y$  contenant  $y$ , on a  $X_y = (X \times_Y V) \times_V \text{Spec}(k(y)) = f^{-1}(V)_y$  ce qui permet de supposer  $Y = \text{Spec} A$  affine. Ensuite pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , on a  $p^{-1}(U) = U \times_Y \text{Spec}(k(y))$  ce qui permet de prendre également  $X = \text{Spec} B$  affine. Alors le morphisme  $f : X \rightarrow Y$  vient d'un homomorphisme  $u : A \rightarrow B$ . Soient  $\wp$  l'idéal premier de  $Y$  correspondant à  $y$  et  $k(\wp)$  son corps résiduel. La projection  $p$  est induite par l'homomorphisme  $\varphi : B \rightarrow B \otimes_A k(\wp)$ . Or  $\varphi$  est le composé de la localisation  $\varphi_1 : B \rightarrow B \otimes_A A_\wp$  et de la surjection canonique  $\varphi_2 : B \otimes_A A_\wp \rightarrow B \otimes_A k(\wp)$ . La proposition 1.5. de la section 1. dit alors que  $p$  est un homéomorphisme de  $X_y$  sur l'ensemble des idéaux premiers  $I$  de  $B$  qui contiennent  $u(\wp)B$  et ne rencontrent pas  $u(A - \wp)$ . Cela signifie précisément que  $u^{-1}(I) = \wp$ , ou encore  $f(I) = \wp$ . □

On va maintenant voir une notion importante liée au produit fibré :

**Définition 2.26** Soient  $S$  un schéma et  $X$  un  $S$ -schéma. Pour tout  $S$ -schéma  $S'$ , on dit que le  $S'$ -schéma  $X \times_S S'$  est obtenu à partir de  $X$  par *changement de base* via le morphisme  $S' \rightarrow S$ . On dit qu'une propriété  $(\mathcal{P})$  des morphismes de schémas est *stable par changement de base* (ou se conserve par changement de base) si pour tout morphisme  $X \rightarrow Y$  vérifiant  $(\mathcal{P})$  et tout  $Y$ -schéma  $Y'$ , le morphisme induit  $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  vérifie aussi  $(\mathcal{P})$ .

**Proposition 2.27** *Les propriétés suivantes des morphismes se conservent par changement de base :*

- a) *Morphismes de type fini (resp. quasi-compacts, localement de type fini, affines, finis).*
- b) *Immersiones ouvertes.*
- c) *Immersiones fermées.*

**Démonstration :** a) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y' \rightarrow Y$  des morphismes. Recouvrons  $Y$  par des ouverts affines  $Y_i = \text{Spec } C_i$ ; chaque  $g^{-1}(Y_i)$  est lui-même recouvert par des ouverts affines  $V_{ij} = \text{Spec } A_{ij}$ , ce qui entraîne que  $Y'$  est recouvert par les  $V_{ij}$ . L'image réciproque de  $V_{ij}$  par le morphisme  $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  (dédit de  $f$  et  $g$ ) est  $X \times_Y V_{ij} = X_i \times_{Y_i} V_{ij}$ , où  $X_i = f^{-1}(Y_i)$  (la dernière égalité résulte de la proposition 2.23, e).

Supposons  $f$  localement de type fini. Alors  $X_i$  peut être recouvert par des ouverts affines  $X_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$ , avec  $B_{ij}$  algèbre de type fini sur  $C_i$ . Ceci implique que  $(f')^{-1}(V_{ij})$  est recouvert par les  $X_{ij} \times_{Y_i} V_{ij} = \text{Spec } (B_{ij} \otimes_{C_i} A_{ij})$ , avec  $(B_{ij} \otimes_{C_i} A_{ij})$  algèbre de type fini sur  $A_{ij}$ . La proposition 2.14 implique alors que  $f'$  est localement de type fini. Si maintenant  $f$  était supposé quasi-compact, alors un nombre fini de  $X_{ij}$  recouvre  $X_i$ , donc un nombre fini de  $X_{ij} \times_{Y_i} V_{ij}$  recouvre  $(f')^{-1}(V_{ij})$  et  $f$  est quasi compact d'après la proposition 2.12. On en déduit alors le résultat pour  $f$  de type fini, vu que cela signifie quasi-compact et localement de type fini.

Enfin, si  $f$  est supposé affine, on sait alors que chaque  $X_i$  est affine donc aussi chaque  $X_i \times_{Y_i} V_{ij}$ , ce qui montre que  $f'$  est affine avec la proposition 2.20 a). Si de plus  $f$  est fini, alors  $X_i = \text{Spec } B_i$  avec  $B_i$  module de type fini sur  $C_i$ , ce qui implique que  $B_i \otimes_{C_i} A_i$  est un  $A_i$ -module de type fini; alors  $f'$  est fini avec la proposition 2.20 b).

b) Soient  $f : X \rightarrow Y$  une immersion ouverte et  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme. Alors  $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  induit un isomorphisme de  $X \times_Y Y'$  sur  $p^{-1}(f(X))$ , où  $p : Y \times_Y Y' \rightarrow Y$  est la première projection.

c) Soient  $f : X \rightarrow Y$  une immersion fermée et  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme. On veut montrer que  $f' : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  est une immersion fermée, propriété qui est locale sur la base. Il suffit donc de montrer que pour  $y' \in Y'$ , il existe un ouvert  $V'$  de  $Y'$  contenant  $y'$  tel que  $(f')^{-1}(V') \rightarrow V'$  soit une immersion fermée. On se ramène ainsi (en utilisant la proposition 2.23, e)) au cas où  $Y' = \text{Spec } A$  et  $Y = \text{Spec } C$  sont affines; alors, d'après le théorème 2.6,  $X$  s'écrit  $X = \text{Spec } (C/I)$  pour un certain idéal  $I$  de  $C$ , d'où  $X \times_Y Y' = \text{Spec } (A/IA)$  et  $f'$  est bien une immersion fermée.

□

**Corollaire 2.28** *Soient  $X$  et  $Y$  deux schémas de type fini sur un schéma  $S$  (resp. quasi-compacts sur  $S$ , localement de type fini sur  $S$ , affines sur  $S$ , finis sur  $S$ ). Alors  $X \times_S Y$  est de type fini sur  $S$  (resp. quasi-compact sur  $S$ , localement de type fini sur  $S$ , affine sur  $S$ , fini sur  $S$ ).*

En effet le a) de la proposition précédente dit que  $X \times_S Y$  est de type fini sur  $Y$ , et la composée de deux morphismes de type fini est de type fini d'après la proposition 2.18. La preuve pour les autres propriétés est analogue.

**Corollaire 2.29** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini. Alors pour tout  $y$  de  $Y$ , la fibre  $X_y$  est de type fini sur le corps  $k(y)$ .

Attention, même si  $X$  et  $Y$  sont des  $k$ -variétés affines ou projectives,  $k(y)$  n'est en général pas une  $k$ -algèbre de type fini <sup>17</sup> donc  $X_y$  n'est pas forcément de type fini sur  $k$ .

## 3. Quelques propriétés générales des schémas

### 3.1. Espaces topologiques noethériens

**Définition 3.1** On dit qu'un espace topologique  $X$  est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés est stationnaire (ou encore toute suite croissante d'ouverts est stationnaire). C'est équivalent à dire que toute famille non vide de fermés (resp. d'ouverts) de  $X$  a un élément minimal (resp. maximal)

Le lien avec les anneaux nothériens est le suivant :

**Proposition 3.2** Soit  $X = \text{Spec } A$  avec  $A$  noethérien. Alors  $X$  est un espace topologique noethérien.

Attention, la réciproque est fautive. Il existe des anneaux intègres qui n'ont qu'un seul idéal premier non nul et qui ne sont pas noethériens ("anneaux de valuation de hauteur  $> 1$ "), par exemple l'anneau des entiers d'une clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$ .

**Démonstration :** Une suite décroissante de fermés de  $X$  est de la forme

$$V(I_1) \supset V(I_2) \supset \dots \supset V(I_n) \supset \dots$$

Quitte à remplacer chaque  $I_n$  par son radical, on peut supposer que  $\sqrt{I_n} = I_n$  pour tout  $n$ . Alors la suite d'idéaux  $(I_n)$  est croissante, et comme  $A$  est noethérien elle est stationnaire, d'où le résultat. □

**Proposition 3.3** a) Un ouvert (resp. un fermé) d'un espace topologique noethérien  $X$  est lui-même noethérien.

b) Un espace topologique  $X$  est noethérien si et seulement si tout ouvert de  $X$  est quasi-compact.

c) Si  $X$  est un espace topologique recouvert par un nombre fini de sous-espaces topologiques  $X_i$  avec chaque  $X_i$  noethérien, alors  $X$  est noethérien.

---

<sup>17</sup>Attention à ne pas confondre avec la notion de *corps de type fini* : par exemple  $k(T)$  est un corps de type fini sur  $k$ , mais pas une  $k$ -algèbre de type fini.

On observera qu'un espace topologique quasi-compact n'est pas forcément noethérien : prendre  $X = \text{Spec}(k[T_i]_{i \in \mathbb{N}})$  et la suite de fermés  $(V(I_n))$ , où  $I_n$  est l'idéal engendré par  $T_1, \dots, T_n$ . Ici l'ouvert  $U = X - \{x\}$ , où  $x$  est le point correspondant à l'idéal premier engendré par les  $T_i$ , n'est pas quasi-compact. En particulier l'immersion ouverte  $U \rightarrow X$  n'est pas de type fini.

**Démonstration :** a) Soit  $U$  un ouvert ; il s'agit de montrer que toute suite croissante d'ouverts de  $U$  est stationnaire. Or les ouverts de  $U$  sont les ouverts de  $X$  inclus dans  $U$  ; on conclut avec l'hypothèse que  $X$  est noethérien. Le même argument vaut pour un fermé  $F$  en considérant des suites décroissantes de fermés de  $F$  (qui sont aussi des fermés de  $X$ ).

b) Supposons  $X$  noethérien. Soit  $(V_j)_{j \in J}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Alors la famille des  $\bigcup_{j \in F} V_j$  pour  $F$  sous-ensemble fini de  $J$  admet un élément maximal, qui fournit un recouvrement ouvert fini de  $X$ . Ainsi  $X$  est quasi-compact et d'après a), il en va de même de tout ouvert de  $X$ . En sens inverse, supposons que tout ouvert de  $X$  soit quasi-compact. Si  $(U_i)$  est alors une suite croissante d'ouverts de  $X$ , la réunion  $U$  des  $U_i$  est un ouvert de  $X$ , donc est quasi-compacte, donc  $U$  peut être recouvert par un nombre fini de  $U_i$ , ce qui signifie bien que la suite  $(U_i)$  est stationnaire.

c) Si  $(F_n)$  est une suite décroissante de fermés de  $X$ , alors chaque suite  $(F_n \cap X_i)$  est stationnaire (puisque c'est une suite décroissante de fermés de  $X_i$ ). Comme  $F_n = \bigcup_i (F_n \cap X_i)$ , on obtient que la suite  $(F_n)$  est stationnaire vu que les  $X_i$  sont en nombre fini.

□

**Définition 3.4** On dit qu'un espace topologique non vide  $X$  est *irréductible* si pour toute décomposition  $X = X_1 \cup X_2$  avec  $X_1$  et  $X_2$  fermés, on a  $X_1 = X$  ou  $X_2 = X$ . C'est équivalent à dire que deux ouverts non vides ont une intersection non vide.

On voit immédiatement par récurrence sur  $r$  que si  $X$  est irréductible et s'écrit comme réunion de fermés  $X_1, \dots, X_r$ , alors l'un des  $X_i$  est égal à  $X$ . On verra un peu plus loin la condition pour que  $\text{Spec } A$  soit irréductible (cela marche notamment si  $A$  est intègre).

**Proposition 3.5** *Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est encore irréductible. Si  $X$  est un espace topologique dont un ouvert dense est irréductible, alors  $X$  est irréductible. Soit  $Y$  un sous-espace topologique irréductible d'un espace topologique quelconque  $X$  ; alors l'adhérence  $\overline{Y}$  de  $Y$  est irréductible.*



**Démonstration :** Si  $U$  est un ouvert non vide de  $X$ , alors deux ouverts non vides  $U_1, U_2$  de  $U$  sont aussi des ouverts de  $X$ , donc leur intersection est non vide si  $X$  est irréductible. En sens inverse si  $U$  est supposé irréductible et dense et  $V_1, V_2$  sont des ouverts non vides de  $X$ , alors les ouverts  $V_1 \cap U$  et  $V_2 \cap U$  sont non vides (par densité de  $U$ ) dans  $U$ , donc leur intersection est non vide (par irréductibilité de  $U$ ). Enfin, si  $Y \subset X$  est irréductible et si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts non vides de  $\overline{Y}$ , alors  $U_1 \cap Y$  et  $U_2 \cap Y$  sont deux ouverts non vides (par définition de l'adhérence, un ouvert de  $X$  qui rencontre  $\overline{Y}$  rencontre  $Y$ ) de  $Y$ , donc leur intersection est non vide, ce qui montre que  $\overline{Y}$  est irréductible. □

La propriété "irréductible" est nettement plus forte que connexe, et n'a aucun intérêt si  $X$  est un espace séparé (=de Hausdorff) au sens usuel (seuls les singletons sont irréductibles et de Hausdorff). Elle est par contre essentielle quand on travaille avec des schémas. On a notamment l'énoncé suivant :

**Theorème 3.6** *Soit  $X$  un espace topologique noethérien. Alors tout fermé  $Y$  de  $X$  s'écrit comme une réunion finie  $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ , où chaque  $Y_i$  est un fermé irréductible de  $X$  et  $Y_i \not\supset Y_j$  si  $i \neq j$ . La décomposition est unique à permutation près.*

On dit que les  $Y_i$  sont les *composantes irréductibles* de  $Y$ .

**Démonstration :** a) Existence : s'il existait un fermé de  $X$  ne s'écrivant pas comme réunion finie de fermés irréductibles, on pourrait en choisir un (disons  $Y$ ) minimal. Mais alors  $Y$  n'est pas irréductible et s'écrit  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des fermés stricts de  $Y$ . Par minimalité de  $Y$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$  ont chacun une décomposition comme réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles, d'où une contradiction vu qu'alors  $Y$  est réunion de tous les fermés intervenant dans l'une de ces deux décompositions.

Quant à la condition  $Y_i \not\supset Y_j$  si  $i \neq j$ , elle s'obtient en enlevant certains des  $Y_i$  si nécessaire.

b) Unicité : si  $Y = \bigcup_{i=1}^r Y_i = \bigcup_{i=1}^s Y'_i$  sont deux telles décompositions, on a

$$Y_1 = \bigcup_{i=1}^s (Y'_i \cap Y_1)$$

Comme  $Y_1$  est irréductible, cela signifie en particulier que  $Y_1$  est l'un des  $(Y'_i \cap Y_1)$ , par exemple pour  $i = 1$ , ce qui signifie  $Y_1 \subset Y'_1$ . Par symétrie  $Y'_1$  est un sous-ensemble de l'un des  $Y_j$ , donc forcément  $j = 1$  vu la condition imposée et  $Y_1 = Y'_1$ . On a donc montré que pour tout indice  $i$ , il existe un

unique indice  $j$  tel que  $Y'_i = Y_j$ , et vice-versa par symétrie, d'où l'unicité voulue. □

**Remarque :** Sans l'hypothèse que  $X$  est noethérien, on peut encore (via le lemme de Zorn) écrire  $X$  comme union de ses sous-espaces irréductibles maximaux, qui sont fermés car l'adhérence d'un sous-espace irréductible reste irréductible (proposition 3.5). Ces sous-espaces irréductibles maximaux sont appelés les composantes irréductibles de  $X$ , mais on n'a pas leur finitude en général.

### 3.2. Schémas noethériens

**Définition 3.7** Un schéma  $X$  est *localement noethérien* s'il peut s'écrire comme réunion d'ouverts affines  $\text{Spec } A_i$ , où chaque anneau  $A_i$  est noethérien. On dit que  $X$  est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact.

Si un schéma  $X$  est noethérien, alors il est réunion d'un nombre fini de  $\text{Spec } A_i$  (avec  $A_i$  noethérien), qui sont des espaces topologiques noethériens via la proposition 3.2. On en déduit (via la proposition 3.3, c)) que l'espace topologique sous-jacent à  $X$  est noethérien mais la réciproque est fautive; en effet on a vu que  $\text{Spec } A$  pouvait être un *espace topologique* noethérien sans que l'anneau  $A$  soit noethérien, ce qui fournit un contre-exemple via le théorème 3.11 plus bas.

**Proposition 3.8** *Soit  $U$  un ouvert d'un schéma noethérien  $X$ . Alors  $U$  est un schéma noethérien.*

**Démonstration :** Le localisé d'un anneau noethérien est noethérien; on voit alors (en recouvrant  $X$  par des ouverts affines) que tout point de  $U$  a un voisinage ouvert du type  $\text{Spec } A$  avec  $A$  noethérien, donc  $U$  est localement noethérien. Il est quasi-compact comme ouvert de l'espace topologique noethérien  $X$  (proposition 3.3). □

Bien entendu, le début de la preuve de la proposition précédente montre aussi qu'un ouvert d'un schéma localement noethérien est localement noethérien.

**Proposition 3.9** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Alors une immersion ouverte de but  $X$  est de type fini.*

En effet on a déjà vu qu'une immersion ouverte était localement de type fini. Comme tout ouvert de  $X$  est quasi-compact, <sup>18</sup> une immersion ouverte de but  $X$  est un morphisme quasi-compact.

**Proposition 3.10** *Soient  $S$  un schéma et  $X, Y$  des  $S$ -schémas. On suppose que  $X$  est noethérien et de type fini sur  $S$ . Alors tout  $S$ -morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est de type fini.*

**Démonstration :** D'après la proposition 2.18 b), il suffit d'avoir  $f$  quasi-compact. Or, c'est automatique quand  $X$  est noethérien puisque tout ouvert de  $X$  est alors quasi-compact. □

Toute variété affine ou projective sur un corps  $k$  (ou plus généralement tout schéma de type fini sur un anneau noethérien) est un schéma noethérien via le théorème de transfert de Hilbert (qui dit que si  $A$  est un anneau noethérien, alors l'anneau de polynômes  $A[X]$  est noethérien, cf [AC, 4]). Ainsi la plupart des schémas que nous rencontrerons seront noethériens. Le corollaire 3.10 implique : *tout  $k$ -morphisme entre variétés affines ou projectives sur un corps  $k$  est de type fini.*

**Theorème 3.11** *Le schéma  $X = \text{Spec } A$  est noethérien si et seulement si l'anneau  $A$  est noethérien.*

En particulier si un schéma  $X$  est localement noethérien, alors tout ouvert affine  $\text{Spec } A$  de  $X$  vérifie :  $A$  est noethérien.

**Démonstration :** Il s'agit de montrer que si  $X = \text{Spec } A$  est recouvert par des ouverts affines  $\text{Spec } A_i$  avec chaque  $A_i$  noethérien, alors  $A$  est noethérien. Si  $x \in \text{Spec } A_i$ , alors  $x$  appartient à un ouvert principal de  $\text{Spec } A$  inclus dans  $\text{Spec } A_i$  (vu que les ouverts principaux de  $\text{Spec } A$  forment une base de la topologie), qui est donc de la forme  $\text{Spec } A_{f_i}$  avec  $f_i \in A$  et  $A_{f_i}$  noethérien puisqu'on sait que  $A_{f_i}$  est alors également le localisé  $(A_i)_{g_i}$ , où  $g_i$  est la restriction de  $f_i$  à  $A_i$ . Quitte à raffiner le recouvrement, on peut donc supposer que chaque  $A_i$  est de la forme  $A_{f_i}$  avec  $f_i \in A$  et  $A_{f_i}$  noethérien. Comme  $\text{Spec } A$  est quasi-compact, on peut aussi supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $i$ .

Soit  $\varphi_i : A \rightarrow A_{f_i}$  l'homomorphisme de localisation. Pour tout idéal  $I$  de  $A$ , on a

$$I = \bigcap_{i=1}^r \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I)A_{f_i}) \tag{2}$$

---

<sup>18</sup>Il suffirait ici que l'espace topologique  $X$  soit noethérien.

En effet l'inclusion  $\subset$  est claire. Réciproquement si  $b$  est un élément de l'intersection, on a un entier  $n > 0$  tel que l'image de  $b$  dans  $A_{f_i}$  soit de la forme  $a_i/f_i^n$  avec  $a_i \in I$  pour tout  $i$ . Alors, il existe un entier  $m > 0$  tel que

$$f_i^m(f_i^n b - a_i) = 0$$

pour tout  $i$ , ce qui signifie que  $f_i^{m+n}b \in I$ . On obtient alors  $b \in I$  vu que l'idéal engendré par les  $f_i^{m+n}$  est  $A$  tout entier (en effet  $\text{Spec } A$  est la réunion des  $D(f_i)$ , qui sont aussi les  $D(f_i^{m+n})$ ), ce qui permet d'écrire 1 comme combinaison linéaire à coefficients dans  $A$  des  $f_i^{m+n}$ .

Soit maintenant  $(I_j)$  une suite croissante d'idéaux de  $A$ . Pour tout  $i$ , la suite  $(\varphi_i(I_j)A_{f_i})$  d'idéaux de  $A_{f_i}$  est stationnaire car  $A_{f_i}$  est noethérien. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $i$ , la formule (2) nous dit que  $(I_j)$  est stationnaire.

□

### 3.3. Schémas réduits, intègres

La propriété suivante est purement locale.

**Définition 3.12** Soit  $X$  un schéma. On dit que  $X$  est *réduit* si tous les anneaux locaux  $\mathcal{O}_{X,x}$  pour  $x \in X$  sont réduits (i.e. n'ont pas d'élément nilpotent non nul).

**Proposition 3.13** *Un schéma  $X$  est réduit si et seulement si pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$  est réduit.*

**Démonstration :** Supposons tous les  $\mathcal{O}_X(U)$  réduits. Alors tout point  $x$  de  $X$  est inclus dans un ouvert affine  $\text{Spec } A$  avec  $A$  anneau réduit. Si  $\wp$  est l'idéal premier de  $A$  correspondant à  $x$ , il s'agit de voir que  $\mathcal{O}_{X,x} = A_\wp$  est réduit. Or, si  $f/g \in A_\wp$  est nilpotent, il existe  $h \notin \wp$  et  $m \geq 1$  tels que  $hf^m = 0$ , d'où  $(hf)^m = 0$  et  $hf = 0$  vu que  $A$  est réduit. Ainsi  $f/g$  est nul.

En sens inverse, si  $X$  est réduit, alors un élément nilpotent  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  possède une restriction  $f_x$  à  $\mathcal{O}_{X,x}$  nulle pour tout  $x$  de  $U$ . Comme  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau,  $f$  est nul.

□

**Exemples :** a) Le schéma  $\text{Spec}(k[t]/t^2)$  n'est pas réduit. D'après la proposition précédente, le schéma  $\text{Spec } A$  est réduit ssi  $A$  est un anneau réduit.

b) Si  $A$  est un anneau, on dispose du quotient  $A_{\text{red}}$  de  $A$  par son nilradical, qui est réduit ; on a une surjection canonique  $A \rightarrow A_{\text{red}}$  qui donne une

immersion fermée  $\text{Spec}(A_{\text{red}}) \rightarrow \text{Spec} A$ . Les schémas  $\text{Spec}(A_{\text{red}})$  et  $\text{Spec} A$  ont même espace topologique sous-jacent. Cette construction se généralise : pour tout schéma  $X$ , on a un schéma  $X_{\text{red}}$ , équipé d'une immersion fermée  $X_{\text{red}} \rightarrow X$ , qui possède le même espace topologique sous-jacent que  $X$  (prendre pour  $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$  le quotient du faisceau  $\mathcal{O}_X$  par le faisceau  $\mathcal{N}$  défini par :  $\mathcal{N}(U)$  est l'ensemble des sections  $s \in \mathcal{O}_X(U)$  dont la restriction  $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$  est nilpotente pour tout  $x$  de  $U$ ).

c) Si  $I$  est un idéal d'un anneau  $A$ , l'unique structure de sous-schéma fermé réduite sur le fermé  $V(I)$  de  $\text{Spec} A$  correspond à  $\text{Spec}(A/\sqrt{I})$ . Cette unicité permet par recollement de généraliser ceci à tout fermé  $F$  d'un schéma  $X$  : il existe toujours une et une seule structure réduite de sous-schéma fermé sur  $F$ .

**Définition 3.14** Un schéma  $X$  est dit *intègre* s'il est à la fois irréductible et réduit.

Il s'agit d'une propriété globale ; il ne suffit pas que les anneaux locaux de  $X$  soient intègres pour avoir  $X$  intègre (prendre la réunion de deux droites parallèles dans le plan affine, soit  $\text{Spec}(k[x, y]/x(x-1))$ ). Ceci dit ce problème n'arrive pas si l'espace topologique  $X$  est noethérien et connexe car il est facile de voir que l'anneau local en un point d'intersection de deux composantes irréductibles distinctes ne peut pas être intègre : on se ramène facilement au cas  $X = \text{Spec} A$ , auquel cas c'est la traduction algébrique du fait que si un idéal premier  $\wp$  de  $A$  contient deux idéaux premiers minimaux distincts  $\wp_1$  et  $\wp_2$ , alors  $A_{\wp}$  n'est pas intègre car il contient deux idéaux premiers minimaux distincts<sup>19</sup>, à savoir  $\wp_1 A_{\wp}$  et  $\wp_2 A_{\wp}$ .

**Exemples :** a) Si  $A$  est un anneau intègre, le schéma  $\text{Spec} A$  est intègre (voir proposition 3.15 ci-dessous). Ainsi si  $R$  est un anneau intègre, alors l'espace affine (sur  $R$ )  $\mathbf{A}_R^n = \text{Spec}(R[x_1, \dots, x_n])$  est intègre.

b) Les schémas  $\text{Spec}(k[x, y]/x^3)$  et  $\text{Spec}(k[x, y]/xy)$  ne sont pas intègres (le premier n'est pas réduit, le second n'est pas irréductible).

c) Soit  $k$  un corps (ou plus généralement un anneau intègre). L'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n = \text{Proj}(k[x_0, \dots, x_n])$  est intègre : il possède en effet un ouvert irréductible et dense (l'ouvert  $D_+(x_0)$  par exemple), qui est isomorphe à l'espace affine  $\mathbf{A}_k^n$ , donc il est irréductible. D'autre part il est réduit car il est recouvert par les ouverts affines réduits  $D_+(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

La proposition suivante permet de savoir quand un schéma affine est irréductible ou intègre :

---

<sup>19</sup>Rappelons que si  $S$  est une partie multiplicative de  $A$ , alors  $I \mapsto IA_S$  est une bijection croissante des idéaux premiers de  $A$  ne rencontrant pas  $S$  sur les idéaux premiers de  $A_S$ .

**Proposition 3.15** Soit  $X = \text{Spec } A$ .

a) Un fermé  $Y = V(I)$  de  $X$  est irréductible ssi le radical de  $I$  est premier. En particulier  $X$  est irréductible ssi  $A$  possède un unique idéal premier minimal (qui est alors le nilradical de  $A$ ).

b)  $X$  est intègre ssi  $A$  est intègre.

c) Si  $A$  est noethérien<sup>20</sup>, les composantes irréductibles de  $X$  sont les  $V(\wp_i)$  avec  $\wp_i$  idéal premier minimal de  $A$ .

**Démonstration :** a) Supposons  $\sqrt{I}$  premier. Alors une décomposition  $V(I) = V(J_1) \cup V(J_2)$  ( $= V(J_1 J_2)$ ) implique  $\sqrt{I} \supset J_1 J_2$ ; comme  $\sqrt{I}$  est premier, ceci implique que  $\sqrt{I}$  contient  $J_1$  ou  $J_2$ , donc  $V(I) = V(J_1)$  ou  $V(I) = V(J_2)$ . Ainsi  $V(I)$  (qui est non vide) est irréductible.

En sens inverse, si  $\sqrt{I}$  (qu'on peut supposer différent de  $A$ , sinon  $V(I) = \emptyset$ ) n'est pas premier, alors on peut trouver  $a, b$  non dans  $\sqrt{I}$  avec  $ab \in \sqrt{I}$ . Alors  $V(I)$  est réunion des deux fermés stricts  $V(aA) \cap V(I)$  et  $V(bA) \cap V(I)$ .

b) résulte immédiatement de a) et de la proposition 3.13. c) vient de a) et de ce que les composantes irréductibles d'un schéma sont ses fermés irréductibles maximaux. □

**Remarque :** Soient  $X$  un schéma noethérien et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ . On peut décomposer  $Y$  sous forme de la réunion de ses composantes irréductibles  $Y_i$ ; mais en général il n'y a pas de structure canonique de sous-schéma fermé sur chaque  $Y_i$ . Ceci correspond au fait algébrique suivant : dans un anneau noethérien  $A$ , tout idéal  $I$  s'écrit comme intersection d'un nombre fini d'idéaux *primaires*<sup>21</sup>  $Q_i$ ; les  $Q_i$  dont le radical  $\wp_i$  est un idéal premier minimal (dans l'ensemble  $\mathcal{A} = \{\wp_1, \dots, \wp_n\}$ ) sont bien déterminés, mais pas forcément les autres (voir [Mat], chapitre 3).

On peut quand même parler de la *multiplicité* d'une composante irréductible : une telle composante est de la forme  $V(Q_i) = V(\wp_i)$  avec  $\wp_i$  minimal dans  $\mathcal{A}$ , et on prend alors la longueur de l'anneau artinien<sup>22</sup> localisé de  $A/Q_i$  en l'idéal premier  $\wp_i/Q_i$ ; la multiplicité est 1 ssi ce localisé est un corps, i.e. ssi  $Q_i = \wp_i$ . On peut dire dans ce cas que la composante irréductible contient un

<sup>20</sup>Cette hypothèse est inutile si on a défini les composantes irréductibles en toute généralité.

<sup>21</sup>Un idéal  $Q$  d'un anneau  $A$  est *primaire* si tous les diviseurs de zéros de  $A/Q$  sont nilpotents; cela implique en particulier que  $\sqrt{Q}$  est premier.

<sup>22</sup>Un anneau commutatif  $A$  est *artinien* si toute suite décroissante d'idéaux de  $A$  est stationnaire. C'est équivalent à  $A$  noethérien et de dimension de Krull zéro.

ouvert non vide qui est intègre, malgré l'absence de structure de sous-schéma fermé canonique sur cette composante.

**Proposition 3.16** *Soit  $X$  un schéma non vide. Alors  $X$  est intègre ssi  $\mathcal{O}_X(U)$  est intègre pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ .*

**Démonstration :** Si  $\mathcal{O}_X(U)$  est intègre pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ , on a déjà vu que  $X$  était réduit. D'autre part, si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts disjoints, alors  $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$  par définition d'un faisceau ; cet anneau ne peut être intègre que si  $\mathcal{O}_X(U_1)$  ou  $\mathcal{O}_X(U_2)$  est nul, i.e. si  $U_1$  ou  $U_2$  est vide<sup>23</sup>.

En sens inverse, supposons  $X$  intègre. Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ , on a déjà  $\mathcal{O}_X(U)$  non nul. Supposons qu'il existe  $f, g$  dans  $\mathcal{O}_X(U)$  avec  $fg = 0$ . Alors le sous-ensemble  $Y$  de  $U$  constitué des  $x$  tels que l'évaluation  $f(x) \in k(x)$  de  $f$  en  $x$  soit nulle est un fermé de  $U$  d'après le lemme 2.7, a). La même chose vaut pour le sous-ensemble  $Z$  de  $U$  constitué des  $x$  tels que l'évaluation  $g(x) \in k(x)$  soit nulle. Comme le corps résiduel  $k(x)$  est intègre, le fait que  $fg = 0$  implique que  $U = Y \cup Z$ . Or  $U$  est irréductible, donc par exemple  $U = Y$ . Cela signifie que pour tout ouvert affine  $V = \text{Spec } A$  de  $U$ , la restriction de  $f$  à  $\mathcal{O}_X(V) = A$  est nilpotente (car elle est dans tous les idéaux premiers de  $A$ ). Comme  $X$  est réduit, ceci montre que  $f = 0$  car la restriction de  $f$  à tous les ouverts affines de  $U$  est nulle, et  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau.

□

**Proposition 3.17** *Soit  $X$  un schéma irréductible. Alors l'espace topologique  $X$  contient un unique point  $\eta$  dont l'adhérence est  $X$ . On l'appelle le point générique de  $X$ . Si de plus  $X$  est intègre, l'anneau  $\mathcal{O}_{X,\eta}$  est un corps, appelé corps des fonctions de  $X$ , qui est le corps des fractions de  $\mathcal{O}_X(U)$  pour tout ouvert affine non vide  $U$  de  $X$ .*

**Démonstration :** Si  $X = \text{Spec } A$  est affine, la proposition 3.15 montre que  $X$  possède un unique point  $\eta$  dont l'adhérence est  $X$  (correspondant à l'unique idéal premier minimal de  $A$  qui est le nilradical de  $A$ ). Si maintenant  $X$  est un schéma irréductible quelconque, un point générique doit en particulier être dans tout ouvert affine non vide  $U$  de  $X$ , donc doit être le point générique de  $U$  ce qui montre déjà l'unicité. Réciproquement, si  $U = \text{Spec } A$

---

<sup>23</sup>Si  $X$  est un schéma, on a  $\mathcal{O}_X(U) \neq 0$  pour tout ouvert non vide  $U$  : en effet  $U$  contient un ouvert affine non vide  $V = \text{Spec } A$ , avec  $A \neq 0$  ; alors la restriction  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  envoie l'unité  $1_U$  de  $\mathcal{O}_X(U)$  sur celle de  $A$ , qui est non nulle ; ainsi  $1_U$  n'est pas nul.

est un ouvert affine non vide (donc irréductible) de  $X$  dont on note  $\eta$  le point générique, alors tout ouvert non vide  $V$  de  $X$  vérifie  $U \cap V \neq \emptyset$  (parce que  $X$  est irréductible) donc  $U \cap V$  contient  $\eta$  vu que c'est un ouvert non vide de  $U$ .

Si maintenant  $X$  est intègre, on vient de voir que  $\eta$  est le point générique de  $U = \text{Spec } A$ , donc il correspond à l'idéal nul de  $A$  et  $\mathcal{O}_{X,\eta} = \mathcal{O}_{U,\eta} = \text{Frac } A$ .  $\square$

**Remarque :** Attention, pour un ouvert non vide  $U$  quelconque d'un schéma intègre  $X$ , l'anneau intègre  $\mathcal{O}_X(U)$  n'a pas forcément pour corps des fractions le corps des fonctions de  $X$  (prendre par exemple  $X = U = \mathbf{P}_k^n$  sur un corps  $k$ ).

Soit  $X$  un schéma sur un corps  $k$  (dont on note  $\bar{k}$  une clôture algébrique fixée). Quand  $X$  est intègre (resp. réduit), il est intéressant<sup>24</sup> de s'intéresser à la propriété correspondante pour  $X_{\bar{k}} := X \times_k \bar{k}$ .

**Définition 3.18** Soit  $k$  un corps. Soit  $X$  un schéma sur  $k$  (=un Spec  $k$ -schéma). On dit que  $X$  est *géométriquement intègre*<sup>25</sup> (resp. géométriquement irréductible, géométriquement réduit) si  $X \times_k \bar{k}$  est intègre (resp. irréductible, réduit).

Pour toute  $k$ -algèbre  $A$ , l'application canonique  $A \rightarrow A \otimes_k \bar{k}$  est injective (prendre une base du  $k$ -espace vectoriel  $A$ ). De ce fait, si  $U$  est un ouvert non vide de  $X$ , son image réciproque par la projection  $X_{\bar{k}} \rightarrow X$  est non vide (on peut supposer  $U = \text{Spec } A$ , auquel cas cette image réciproque est  $\text{Spec } (A \otimes_k \bar{k})$  qui est non vide puisque  $(A \otimes_k \bar{k})$  est un anneau non nul). Ceci implique que si  $X$  est géométriquement irréductible, il est en particulier irréductible (deux ouverts non vides ont une intersection non vide), et de même pour réduit via la proposition 3.13 (si  $A \otimes_k \bar{k}$  est réduit, alors  $A$  est réduit) ou intègre.

**Remarque :** Soit  $L/k$  une extension de corps et  $X$  un  $L$ -schéma. On peut aussi considérer  $X$  comme un  $k$ -schéma en composant le morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec } L$  avec  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$ . Il faut faire attention que la propriété "intègre" ne dépend que du schéma  $X$ , mais "géom. intègre" dépend du corps de base. Par exemple soit  $k = \mathbf{R}$  et  $L = \mathbf{C}$ . Alors le schéma  $\text{Spec } \mathbf{C}$  est géométriquement irréductible sur  $\mathbf{C}$  mais pas sur  $\mathbf{R}$ .

---

<sup>24</sup>Notamment pour des questions arithmétiques.

<sup>25</sup>On dit parfois *absolument intègre*.



**Proposition 3.19** Soit  $X$  un  $k$ -schéma intègre de corps des fonctions  $K$  avec  $k$  parfait.<sup>26</sup> Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $X$  est géométriquement intègre.
- ii) L'anneau  $K \otimes_k \bar{k}$  est intègre (i.e. reste un corps).
- iii) Le corps  $k$  est algébriquement fermé dans  $K$ .
- iv) Pour toute extension finie  $L$  de  $k$ ,  $X \times_k L$  est intègre.

**Démonstration :** L'équivalence de ii) et iii) est un fait algébrique bien connu (cf. [AC, 5]), et ces propriétés sont équivalentes au fait que pour toute extension finie  $L$  de  $k$ , l'anneau  $K \otimes_k L$  reste un corps. Il nous suffit donc de démontrer le

**Lemme 3.20** Soit  $L/k$  une extension algébrique de corps. Alors  $X \times_k L$  est intègre si et seulement si  $K \otimes_k L$  est un corps.

Posons  $X_L = X \times_k L$ . Soit  $U = \text{Spec } A$  un ouvert affine de  $X$  et  $U_L := U \times_k L$ . Alors  $\mathcal{O}_{X_L}(U_L) = A \otimes_k L$  s'injecte dans  $K \otimes_k L$ . Ainsi, si  $K \otimes_k L$  est intègre, alors  $\mathcal{O}_{X_L}(U_L)$  est intègre et  $U_L$  est donc intègre. Comme les ouverts affines de  $X_L$  du type  $U_L$  recouvrent  $X_L$ , on obtient déjà que  $X_L$  est réduit. D'autre part, si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $X_L$ , sa projection  $\pi(\Omega)$  sur  $X$  contient un ouvert non vide de  $X$  (il suffit de le vérifier quand  $X$  est affine); on en déduit que si  $U$  est un ouvert affine non vide (donc dense) de  $X$ , alors  $\pi^{-1}(U) = U_L$  est un ouvert dense de  $X_L$ . Ainsi  $X_L$  possède un ouvert dense et irréductible, il est donc irréductible.

En sens inverse, si  $X_L$  est intègre, alors si  $U = \text{Spec } A$  est un ouvert affine de  $X$ , on a  $K \otimes_k L = \text{Frac } A \otimes_k L$ , qui est intègre comme localisé de  $A \otimes_k L = \mathcal{O}_{X_L}(U_L)$ .  $\square$

**Remarques :** a) Si  $X \times_k L$  est intègre, son corps des fonctions est  $K \otimes_k L$  vu que  $A \otimes_k L$  s'injecte dans  $\text{Frac } A \otimes_k L$ .

b) On peut montrer que si  $X$  est un  $k$ -schéma réduit, alors  $X \times_k L$  reste réduit pour toute extension algébrique séparable  $L$  de  $k$ . Cela résulte de ce que si  $F$  est une extension de corps de  $k$ , alors  $F \otimes_k L$  reste un anneau réduit (il suffit de le vérifier pour  $L/k$  finie, auquel cas  $L = k[T]/P$  avec  $P$  polynôme séparable; alors  $F \otimes_k L = F[T]/P$  est encore réduit). Par contre si on prend  $k = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$ ,  $L = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T^{1/p})$ , le schéma  $\text{Spec}(k[X]/X^p - T)$  est réduit mais non géométriquement réduit.

## 4. Dimension

### 4.1. Dimension d'un anneau

Rappelons d'abord quelques définitions classiques :

---

<sup>26</sup>Si  $k$  n'est pas parfait, il peut arriver que iii) n'implique pas ii).

**Définition 4.1** Soit  $A$  un anneau. Soit  $\wp$  un idéal premier de  $A$ . La *hauteur*  $\text{ht } \wp$  de  $\wp$  est le plus grand entier  $n$  (dans  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ ) tel qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux premiers de  $A$  :

$$\wp_0 \subset \dots \subset \wp_n = \wp$$

**Définition 4.2** Soit  $A$  un anneau non nul. La *dimension de Krull* (ou dimension)  $\dim A$  de  $A$  est le sup (dans  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ ) des  $\text{ht } \wp$  pour  $\wp$  idéal premier de  $A$ .

En particulier si  $\wp$  est un idéal premier, alors  $\text{ht } \wp$  est la dimension  $\dim A_\wp$  du localisé de  $A$  en  $\wp$  car les idéaux premiers de  $A$  inclus dans  $\wp$  sont en bijection avec les idéaux premiers de  $A_\wp$  via l'application  $I \mapsto IA_\wp$ .

**Exemples :** a) La dimension d'un corps  $k$ , de l'anneau  $k[t]/t^2$ , d'un produit fini de corps (ou plus généralement d'un anneau artinien) est zéro.

b) La dimension de  $\mathbf{Z}$  (plus généralement d'un anneau principal, ou d'un anneau de Dedekind) est 1.

c) Si  $A$  est un anneau noethérien, alors la dimension de  $A[X_1, \dots, X_n]$  est  $\dim A + n$  ([Mat], th. 22 p. 83).

d) Il y a des anneaux de dimension 1 non noethériens (par exemple l'anneau des entiers de  $\overline{\mathbf{Q}_p}$ ), et aussi des anneaux noethériens qui ne sont pas de dimension finie ([Nag], Appendice, exemple 1).

e) Soit  $R$  un *anneau de valuation discrète* (i.e. un anneau principal qui n'admet qu'un idéal premier; en particulier c'est un anneau local); par exemple on peut prendre  $R = k[[t]]$  où  $k$  est un corps (on peut fabriquer des exemples similaires avec  $R = \mathbf{Z}_p$ ). Soit  $A = R[X]$ . Alors  $\dim R = 1$  et  $\dim A = 2$ . Soit  $\wp$  l'idéal premier  $(tX - 1)$  de  $A$ . Alors  $\text{ht } \wp = 1$  mais  $A/\wp \simeq R[1/t]$  est un corps, donc est de dimension nulle. Ainsi on *n'a pas*  $\dim(A/\wp) + \text{ht } \wp = \dim A$  en général. On va voir (th. 4.4) que la situation est meilleure pour les algèbres de type fini sur un corps.

On va maintenant rappeler sans démonstration quelques résultats fondamentaux d'algèbre commutative liés à la dimension. Le premier (malgré son nom usuel) est dû à Krull.

**Theorème 4.3 (Cohen/Seidenberg)** Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme injectif d'anneaux. On suppose que  $B$  est entier sur  $A$  (par exemple  $B$  est un  $A$ -module de type fini). Alors

- a) Le morphisme associé  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est surjectif.
- b) On a  $\dim A = \dim B$ .

Voir [AC], 6. Le b) est une conséquence du "going-up" : dans cette situation, si  $\wp_1, \wp_2$  sont deux idéaux de  $A$  avec  $\wp_1 \subset \wp_2$ , et  $\wp'_1$  est un idéal de  $B$  au-dessus de  $\wp_1$ , alors il existe un idéal  $\wp'_2$  de  $B$  au-dessus de  $\wp_2$  avec  $\wp'_1 \subset \wp'_2$  (il faut aussi montrer que si une inclusion entre idéaux de  $B$  est stricte, l'inclusion entre leurs intersections avec  $A$  l'est également).

Le résultat suivant est le lemme de normalisation d'E. Noether pour sa première partie; la deuxième est une conséquence d'un raffinement de ce lemme ([AC], 7).

**Theorème 4.4** *Soit  $A$  une algèbre de type fini sur un corps  $k$ . Alors :*

a) *Il existe des éléments  $y_1, \dots, y_r$  de  $A$ , algébriquement indépendants sur  $k$ , tels que  $A$  soit entier sur  $k[y_1, \dots, y_r]$ . En particulier  $\dim A = r$ .*

b) *Supposons en outre  $A$  intègre. Alors  $\dim A$  est le degré de transcendance  $\text{degtr}(K/k)$  du corps des fractions  $K$  de  $A$  sur  $k$ . De plus pour tout idéal premier  $\wp$  de  $A$ , on a*

$$\dim A = \text{ht } \wp + \dim(A/\wp)$$

## 4.2. Dimension d'un schéma

La dimension d'un schéma non vide<sup>27</sup>  $X$  est un invariant grossier, mais très important. Il n'est lié qu'à la structure topologique de  $X$ .

**Définition 4.5** Soit  $X$  un espace topologique non vide. La *dimension*  $\dim X$  de  $X$  est le sup (dans  $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ ) des entiers  $n$  tels qu'il existe une suite strictement croissante de fermés irréductibles de  $X$  :

$$Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n$$

**Proposition 4.6** *Soient  $A$  un anneau et  $X = \text{Spec } A$ . Alors  $\dim X = \dim A$ .*

**Démonstration :** D'après la proposition 3.15, un fermé irréductible de  $\text{Spec } A$  est de la forme  $V(\wp)$  avec  $\wp$  premier. Or pour des idéaux premiers  $\wp, \wp'$  de  $A$ , l'inclusion  $V(\wp) \subset V(\wp')$  est équivalente à  $\wp' \subset \wp$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 4.7** *Soit  $X$  un espace topologique. Alors :*

a) *Pour tout sous-ensemble  $Y$  de  $X$  (équipé de la topologie induite), on a  $\dim Y \leq \dim X$ .*

---

<sup>27</sup>Par convention, la dimension du vide est  $-\infty$ , comme celle de l'anneau nul.

b) Supposons  $X$  irréductible et de dimension finie. Soit  $Y$  un fermé de  $X$ . Si  $\dim X = \dim Y$ , alors  $X = Y$ .

c) Si  $X$  est noethérien, la dimension de  $X$  est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles.

d) Si  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , alors  $\dim X$  est le sup des  $\dim U_i$ .

**Démonstration :** a) Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux fermés irréductibles de  $Y$  et soient  $X_1, X_2$  leurs adhérences respectives dans  $X$  (en particulier  $X_i \cap Y = Y_i$ ). Alors  $X_1$  et  $X_2$  sont des fermés irréductibles (proposition 3.5) de  $X$ . Si  $Y_1$  est strictement inclus dans  $Y_2$ , alors  $X_1$  est strictement inclus dans  $X_2$  d'où le résultat.

b) Soit

$$Y_0 \subset \dots \subset Y_r$$

une suite strictement croissante de fermés irréductibles de  $Y$  avec  $r = \dim X$ . Comme  $X$  est lui-même irréductible et contient  $Y$  (donc  $Y_r$ ), on a  $X = Y_r$  d'où  $X = Y$ .

c) Soient  $Y_1, \dots, Y_r$  les composantes irréductibles de  $X$ . Soit  $Y$  un fermé irréductible de  $X$ . Alors

$$Y = \bigcup_{i=1}^r (Y \cap Y_i)$$

ce qui implique qu'il existe  $i$  tel que  $Y = Y \cap Y_i$ , i.e.  $Y \subset Y_i$ . De ce fait toute suite décroissante de fermés irréductibles de  $X$  est contenue dans l'un des  $Y_i$ , ce qui donne immédiatement le résultat avec a).

d) D'après a), la dimension de chaque  $U_i$  est au plus celle de  $X$ . Si maintenant

$$Y_0 \subset \dots \subset Y_r$$

est une suite strictement croissante de fermés irréductibles de  $X$ , alors on choisit  $x \in Y_0$ ; l'un des ouverts  $U_i$  (noté  $U$ ) contient  $x$ , et

$$Y_0 \cap U \subset \dots \subset Y_r \cap U$$

est une suite strictement croissante (en effet  $Y_i - Y_{i-1}$  est, pour tout  $i$ , un ouvert non vide du fermé irréductible  $Y_i$ , donc il rencontre l'ouvert non vide  $Y_i \cap U$  de  $Y_i$ ) de fermés irréductibles de  $U$ . Ainsi  $\dim U \geq r$  d'où le résultat avec a).

□

**Exemples :** a) Si  $X$  est un schéma irréductible de dimension zéro, alors il est réduit à un point : en effet si  $x \in X$ , l'adhérence de  $x$  dans  $X$  est

un fermé irréductible (comme adhérence d'un sous-espace irréductible), donc cette adhérence est  $X$  ; or on a déjà vu qu'un schéma irréductible ne possédait qu'un point générique.

b) Soit  $X$  un schéma noethérien de dimension zéro. Alors  $X$  est réunion finie de ses composantes irréductibles, qui sont chacune de dimension zéro donc réduites à un point. Ainsi l'ensemble sous-jacent à  $X$  est fini, et comme chaque point de  $X$  est ouvert et fermé, on voit que  $X$  est isomorphe à  $\text{Spec}(\prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x})$ . Ainsi  $X$  est union disjointe d'un nombre fini de spectres d'anneaux locaux artiniens. Si  $X$  est seulement supposé de dimension zéro, il n'est plus forcément vrai que l'ensemble sous-jacent à  $X$  est fini (prendre une union disjointe infinie de  $\text{Spec } k$ ). D'autre part  $X$  peut être un ensemble fini sans être de dimension zéro (prendre le spectre d'un anneau de valuation discrète).

c) La dimension de  $\mathbf{A}_k^n$  est  $n$ , de même que celle de  $\mathbf{P}_k^n$  (qui est recouvert par des ouverts affines isomorphes à  $\mathbf{A}_k^n$ ). Si  $R$  est un anneau noethérien, alors la dimension de  $\mathbf{A}_R^n$  et de  $\mathbf{P}_R^n$  est  $\dim R + n$ .

d) La dimension d'un schéma  $X$  est la même que celle du schéma réduit associé  $X_{\text{red}}$ .

e) Si  $Y = V(\wp)$  est un fermé irréductible de  $X = \text{Spec } A$  (avec  $\wp$  premier), alors  $\dim Y = \dim(A/\wp)$  car les idéaux premiers de  $A/\wp$  sont les idéaux premiers de  $A$  qui contiennent  $\wp$ , et un fermé irréductible  $V(\wp')$  de  $X$  (avec  $\wp'$  premier) est inclus dans  $V(\wp)$  si et seulement si  $\wp' \supset \wp$ .

f) La dimension d'un ouvert dense de  $X$  peut être strictement plus petite que celle de  $X$ , même si  $X$  est un schéma affine intègre. Par exemple si  $X = \text{Spec } A$  avec  $A$  anneau de valuation discrète (prendre  $A = k[[t]]$  ou  $A = \mathbf{Z}_p$ ), on obtient un ouvert dense  $U$  de  $X$  en enlevant le point fermé  $\wp$  de  $X$ . Alors  $U$  est isomorphe au spectre du corps des fractions de  $A$ , donc est de dimension zéro, tandis que  $X$  est de dimension 1. Là encore, on verra au paragraphe suivant que la situation est meilleure pour les schémas de type fini sur un corps.

**Définition 4.8** Soient  $X$  un espace topologique et  $Y$  un fermé irréductible de  $X$ . La *codimension*  $\text{codim}(Y, X)$  de  $Y$  dans  $X$  est le sup des entiers  $n$  tels qu'il existe une suite strictement croissante de fermés irréductibles :

$$Y_0 = Y \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n$$

Par exemple la codimension de  $V(\wp)$  dans  $\text{Spec } A$  est la hauteur  $\text{ht } \wp$  pour tout idéal premier  $\wp$  de  $A$ . Comme on l'a vu, on n'a alors pas forcément  $\dim X = \dim Y + \text{codim}(Y, X)$ , même si  $A$  est intègre. Par contre il résulte immédiatement de la définition que  $\dim X \geq \dim Y + \text{codim}(Y, X)$ .

### 4.3. Dimension et schémas de type fini sur un corps

Dans tout ce paragraphe,  $k$  désigne un corps. Le théorème suivant est le résultat principal de cette section. Il relie la dimension d'un schéma intègre  $X$  de type fini sur  $k$  au corps des fonctions de  $X$ .

**Théorème 4.9** *Soit  $X$  un schéma intègre de type fini sur  $k$  dont on note  $K$  le corps des fonctions. Alors :*

- a)  $X$  est de dimension finie, égale au degré de transcendance  $\text{degtr}(K/k)$  de  $K$  sur  $k$ .
- b) Pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ , on a  $\dim X = \dim U$ .
- c) Pour tout point fermé  $P$  de  $X$ , on a  $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,P}$ .

**Démonstration :** b) résulte de a) vu que  $U$  et  $X$  ont le même corps des fonctions. Pour démontrer c), on peut supposer  $X$  affine grâce à b). Dans ce cas, il suffit d'appliquer le théorème 4.4, b).

Il reste à montrer a). Pour cela on se ramène à  $X = \text{Spec } B$  affine via la proposition 4.7, d). On obtient alors le résultat via le théorème 4.4, b). □

Notons que si  $X$  est un schéma irréductible (mais pas forcément réduit) de type fini sur  $k$ , on peut calculer sa dimension en appliquant le théorème précédent à  $X_{\text{red}}$  puisque la dimension d'un schéma ne dépend que de son espace topologique sous-jacent. En particulier, le b) reste valable tel quel. Pour s'affranchir de l'hypothèse que  $X$  est irréductible, on dispose de la proposition 4.7, c). On obtient notamment que tout schéma de type fini sur  $k$  est de dimension finie. Notons en effet qu'une composante irréductible  $X_i$  de  $X$ , munie d'une structure de sous-schéma fermé, est un  $k$ -schéma de type fini via la proposition 2.18, vu qu'une immersion fermée est finie (donc de type fini).

**Définition 4.10** Un schéma noethérien  $X$  est *pur* (ou *équidimensionnel*) si toutes les composantes irréductibles de  $X$  ont la même dimension (finie).

Si  $X$  est pur, la dimension de chaque composante irréductible de  $X$  est donc  $\dim X$  via la proposition 4.7, c).

Voici une conséquence du théorème 4.9 qui ne suppose pas  $X$  intègre.

**Proposition 4.11** *Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $k$ . Alors :*

- a) Pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ , on a  $\dim U = \dim X$  si  $U$  est dense, ou encore si  $X$  est pur.
- b) Si  $X$  est pur, tout fermé irréductible  $Y$  de  $X$  vérifie

$$\dim Y + \text{codim}(Y, X) = \dim X$$

**Démonstration :** a) On écrit la décomposition  $X = \bigcup_{i=1}^r Y_i$  de  $X$  comme réunion de ses composantes irréductibles. Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ , alors il rencontre l'un des  $Y_i$ . Équippedes  $Y_i$  de sa structure réduite de sous-schéma fermé de  $X$ . On a alors  $\dim Y_i = \dim(U \cap Y_i)$  car  $U \cap Y_i$  est un ouvert non vide du schéma intègre (et de type fini sur  $k$ )  $Y_i$  et on applique le théorème 4.9. Si  $X$  est pur, on a  $\dim X = \dim Y_i$  donc  $\dim X = \dim(U \cap Y_i) \leq \dim U$ , soit  $\dim X = \dim U$  d'après la proposition 4.7, a).

Supposons maintenant  $U$  dense ( $X$  n'étant plus forcément pur). Alors  $U$  rencontre tous les  $Y_i$  car chaque  $Y_i$  contient l'ouvert (non vide) complémentaire de la réunion des autres  $Y_j$ . Alors  $\dim(U \cap Y_i) = \dim Y_i$  comme on l'a vu plus haut, et le résultat provient de la proposition 4.7, c).

b) Toute suite de fermés irréductibles de  $X$  contenant  $Y$  est incluse dans l'une des composantes irréductibles  $X_i$  de  $X$ , qui est par hypothèse de dimension  $\dim X$ . On peut donc supposer  $X$  irréductible. Soit  $U$  un ouvert affine de  $X$  qui rencontre  $Y$ , alors on a vu que  $\dim X = \dim U$  et  $\dim Y = \dim(Y \cap U)$ . D'autre part  $\text{codim}(Y, X) = \text{codim}(Y \cap U, U)$  car  $u : Z \mapsto Z \cap U$  est une bijection croissante des fermés irréductibles de  $X$  contenant  $Y$  sur les fermés irréductibles de  $U$  contenant  $Y \cap U$  : en effet si  $Z$  est un fermé irréductible contenant  $Y$ , alors  $Z$  est l'adhérence de  $Z \cap U$  (d'où l'injectivité de  $u$ ) ; d'autre part si  $F$  est un fermé irréductible de  $U$  contenant  $Y \cap U$ , son adhérence  $Z$  est un fermé irréductible de  $X$  contenant  $Y$  et tel que  $Z \cap U = F$ , d'où la surjectivité de  $u$ . On se ramène ainsi à  $X = \text{Spec } A$  avec  $A$  intègre (quitte à remplacer  $A$  par  $A_{\text{red}}$ ). Dans ce cas  $Y = V(\wp)$  avec  $\wp$  idéal premier de  $A$ , et la formule résulte du théorème 4.4 b), puisque  $\dim Y = \dim(A/\wp)$  et  $\text{codim } Y = \text{ht } \wp$ .

□

**Remarque :** L'hypothèse  $X$  pur est nécessaire pour le b) (prendre la réunion disjointe d'une droite et d'un point dans le plan affine).

Voici un dernier résultat spécifique aux schémas de type fini sur un corps :

**Théorème 4.12** *Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $k$ . Soit  $E$  l'ensemble des points fermés de  $X$ . Alors  $E$  est dense dans  $X$ .*

Ceci est faux en général (prendre le spectre d'un anneau de valuation discrète). Noter aussi que l'ensemble des points de corps résiduel  $k$  peut être vide si  $k$  n'est pas algébriquement clos (ex.  $X = \text{Spec}(\mathbf{R}[x, y]/x^2 + y^2 + 1)$  sur  $k = \mathbf{R}$ ).

**Démonstration :** Quitte à décomposer  $X$ , on peut supposer qu'il est irréductible, puis intègre (en le remplaçant par  $X_{\text{red}}$ ). Soit  $U = \text{Spec } A$  un ouvert affine non vide de  $X$ . Alors en choisissant un idéal maximal  $\wp$  de  $A$ , on obtient un point  $x$  de  $X$  qui est fermé dans  $U$ . Mais alors  $x$  est fermé dans tout ouvert affine  $V = \text{Spec } B$  de  $X$  contenant  $x$  : en effet  $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_{U,x}$  et le théorème 4.9 dit que cet anneau est de dimension  $\dim X = \dim A = \dim B$ . De ce fait l'idéal  $\wp$  correspondant à  $x$  dans  $\text{Spec } B$  vérifie  $\dim(B/\wp) = 0$  d'après le théorème 4.4 b), donc l'anneau intègre  $B/\wp$  est un corps et  $\wp$  est un idéal maximal de  $B$ . Comme les ouverts affines recouvrent  $X$ , le point  $x$  est bien fermé dans  $X$ .<sup>28</sup>

□

#### 4.4. Dimension et morphismes

Ici encore, les résultats "intuitifs" sont faux si on ne fait aucune hypothèse sur les schémas considérés. Par exemple on peut avoir un morphisme surjectif de  $X$  vers  $Y$  avec  $\dim X < \dim Y$  : prendre  $X = \text{Spec}(k((t)) \times k)$  et  $Y = \text{Spec}(k[[t]])$ , avec le morphisme  $g$  induit par l'homomorphisme  $k[[t]] \rightarrow k((t)) \times k$ ,  $f(t) \mapsto (f(t), f(0))$ . Alors  $X$  et  $Y$  sont tous deux des ensembles à deux éléments, et  $g$  envoie bijectivement l'ensemble  $X$  sur l'ensemble  $Y$  ; pourtant  $\dim X = 0$  ( $X$  est l'union disjointe de deux points fermés) tandis que  $\dim Y = 1$  ( $Y$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète).

Un cas très favorable est celui d'un morphisme fini et surjectif :

**Théorème 4.13** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini et surjectif entre schémas. Alors  $\dim X = \dim Y$ .*

Sans l'hypothèse de surjectivité, le résultat est clairement faux ; il suffit de prendre pour  $f$  une immersion fermée.

**Démonstration :** Comme un morphisme fini est affine, on se ramène immédiatement au cas où  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$  sont affines, en recouvrant  $Y$  par des ouverts affines et en utilisant la proposition 4.7, d). On peut alors supposer  $A$  et  $B$  réduits, quitte à les remplacer respectivement par  $A_{\text{red}}$  et  $B_{\text{red}}$ . Pour conclure avec le théorème 4.3, il suffit de montrer que l'homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  associé à  $f$  est injectif, ce qui résulte du lemme 2.9.

□

---

<sup>28</sup>On aurait pu aussi utiliser une forme du théorème des zéros de Hilbert qui dit que  $x$  est fermé dans  $\text{Spec } A$  si et seulement si le corps résiduel  $k(x)$  de  $x$  est une extension finie de  $k$  ; ceci dit ce théorème se déduit du lemme de normalisation...



**Définition 4.14** Soient  $X$  et  $Y$  deux schémas intègres. On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est *dominant* si l'image de  $f$  contient le point générique de  $Y$ .

De façon équivalente, cela signifie que le point générique de  $X$  est envoyé sur celui de  $Y$  par  $f$ .

**Théorème 4.15** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme dominant entre deux schémas intègres de type fini sur un corps  $k$ . Soit  $\eta$  le point générique de  $Y$ . Soient  $F$  le corps des fonctions de  $Y$  et  $K$  le corps des fonctions de  $X$ . Alors :

- a) La fibre générique  $X_\eta$  est intègre, de corps des fonctions  $K$ .
- b) On a

$$\dim X_\eta = \dim X - \dim Y$$

Il faut bien noter que bien que  $X$  et  $X_\eta$  aient même corps des fonctions, ils n'ont pas même dimension. Le point est qu'on peut les écrire comme schémas de type fini sur un corps, mais pas le même.

**Démonstration :** a) Soit  $U = \text{Spec } B$  un ouvert affine non vide (donc dense) de  $X$  dont l'image est incluse dans un ouvert affine  $V = \text{Spec } A$  de  $Y$ . Le morphisme dominant  $f$  induit un homomorphisme injectif (cf. lemme 2.9)  $A \rightarrow B$  et la fibre générique  $X_\eta$  contient l'ouvert dense  $U \times_V \text{Spec}(k(\eta)) = \text{Spec}(B \otimes_A F)$ . On observe alors que l'anneau  $B \otimes_A F$  est intègre car c'est la limite inductive (qui est ici une réunion de sous-anneaux de  $K$ ) des anneaux intègres  $B[1/f]$  pour  $f \in A \setminus \{0\}$ . Ainsi  $X_\eta$  est irréductible (car contenant un ouvert dense irréductible), et  $X_\eta$  est également un schéma réduit car tout point  $x$  de  $X$  admet un voisinage affine  $U = \text{Spec } B$  comme ci-dessus, ce qui fait que  $X_\eta$  est recouvert par des ouverts affines intègres (donc réduits). Ainsi  $X_\eta$  est intègre.

Alors le corps des fonctions de  $X_\eta$  est le corps des fractions de  $(B \otimes_A F)$ , qui est  $K = \text{Frac } B$  puisqu'on a vu que  $(B \otimes_A F)$  était inclus dans  $K$  et contenait  $B$ .

b) D'après la proposition 2.27,  $X_\eta$  est intègre et de type fini sur  $F$ , de corps des fonctions  $K$ . On a aussi  $X$  et  $Y$  intègres et de type fini sur  $k$ , de corps des fonctions respectifs  $K$  et  $F$ . Le théorème 4.9 et la formule

$$\text{trdeg}(K/k) = \text{trdeg}(K/F) + \text{trdeg}(F/k)$$

donnent alors  $\dim X_\eta = \dim X - \dim Y$ .

□

**Remarques :** i) Il n'y a pas d'analogie de a) avec "géométriquement intègre" : prendre par exemple  $Y = \mathbf{A}_k^1$  et  $X : x^2 - ty^2 = 0$  (vu comme sous schéma fermé de  $\mathbf{A}_k^3$ , le morphisme  $f$  étant donné par  $(x, y, t) \mapsto t$ ). Alors la fibre générique  $X_\eta$  n'est pas géométriquement intègre sur  $F = k(t)$  car si  $L$  est l'extension  $F(\sqrt{t})$ , alors  $X_\eta \times_F L$  n'est plus intègre.

ii) Il n'est en général pas évident de relier la dimension des fibres d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  aux dimensions de  $X$  et  $Y$ . Sans hypothèse sur les schémas  $X$  et  $Y$ , on ne peut obtenir qu'un énoncé local, et de plus on n'obtient qu'une inégalité si le morphisme n'est pas supposé *plat*. le lecteur impatient pourra consulter le théorème 19 p. 79 de [Mat] ou le chapitre sur les morphismes plats.

## 5. Morphismes séparés, propres, projectifs

Les notions usuelles d'espace topologique séparé (i.e. vérifiant l'axiome de Hausdorff) et d'espace topologique compact ne sont pas adaptées aux schémas. En effet, le spectre d'un anneau est toujours quasi-compact, mais pratiquement jamais séparé. On aimerait pourtant dire qu'en un certain sens, l'espace affine sur  $\mathbf{C}$  est séparé mais pas compact car c'est ce qui se passe si on regarde l'ensemble de ses points complexes avec la topologie usuelle ; de même on voudrait une notion qui rende compte du fait que les points complexes de l'espace projectif forment un espace compact pour la topologie usuelle. C'est ce qui motive l'introduction de la notion de variété algébrique séparée ou propre ; comme on veut une notion assez générale, on va définir cela dans un contexte relatif, c'est-à-dire pour les *morphismes*, pas pour les schémas.

### 5.1. Morphismes séparés

**Définition 5.1** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Le *morphisme diagonal* associé à  $f$  est le morphisme  $\Delta_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$  induit par  $(\text{Id}_X, \text{Id}_X)$ , le produit fibré étant relatif au morphisme  $f$ .

Noter que le morphisme diagonal est toujours (ensemblément) injectif par définition du produit fibré. On le notera parfois simplement  $\Delta$ .

**Définition 5.2** On dit que  $f$  est un morphisme *séparé* si  $\Delta$  est une immersion fermée. Si  $S$  est un schéma, un  $S$ -schéma  $X$  est dit *séparé* ( $S$  étant sous-entendu) si le morphisme structural  $X \rightarrow S$  est séparé.

Bien noter que c'est une notion relative (un schéma est toujours séparé au-dessus de lui-même!). On dira parfois qu'un schéma est séparé s'il est séparé au-dessus de  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  (dans l'ancienne terminologie, on appelait *préschémas* les schémas tels que nous les avons définis, le terme de schéma étant réservé aux schémas séparés).

**Proposition 5.3** *Tout morphisme entre schémas affines est séparé.*

**Démonstration :** Soit  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$ , tout morphisme  $X \rightarrow Y$  vient d'un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ ; par définition du produit fibré, le morphisme diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  est induit par l'homomorphisme d'anneaux  $\varphi : B \otimes_A B \rightarrow B$  qui envoie  $b \otimes b'$  sur  $bb'$ . Comme  $\varphi$  est clairement surjectif,  $\Delta$  est bien une immersion fermée.

□

**Remarque :** Attention si  $x \in X \times_Y X$ , la condition que les deux projections de  $x$  soient égales ne suffit en général pas à dire que  $x$  est dans l'image du morphisme diagonal; prendre par exemple  $X = \text{Spec } \mathbf{C}$ ,  $Y = \text{Spec } \mathbf{R}$ . Alors  $X \times_Y X = \text{Spec } (\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = \text{Spec } (\mathbf{C} \times \mathbf{C})$  est un ensemble à deux éléments, ce qui fait que le morphisme diagonal ne peut pas être surjectif. Pourtant les deux projections de tout point de  $X \times_Y X$  sont les mêmes vu que  $X$  est un ensemble à un élément.

**Définition 5.4** Soit  $k$  un corps. Une  $k$ -variété<sup>29</sup> (algébrique) est un schéma séparé et de type fini sur  $k$ .

D'après la proposition précédente, le spectre d'une  $k$ -algèbre de type fini (i.e. une  $k$ -variété affine) est une  $k$ -variété algébrique. On verra un peu plus loin qu'il en va de même dans le cas projectif.

**Remarque :** Si l'image du morphisme diagonal  $\Delta$  est fermée, alors le morphisme  $f$  est séparé. En effet dans ce cas  $\Delta$  induit une bijection bicontinue de  $X$  sur  $\Delta(X)$  via la formule  $p \circ \Delta = \text{id}_X$ , où  $p$  est la première projection (l'image d'un fermé  $F$  par  $\Delta$  est le fermé  $p^{-1}(F) \cap \Delta(X)$ ); la condition sur la surjectivité du morphisme de faisceaux associé à  $\Delta$  vient de la proposition 5.3.

**Proposition 5.5** *La propriété d'être un morphisme séparé est locale sur la base : plus précisément si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme et  $Y$  est recouvert par*

---

<sup>29</sup>Cette définition n'est pas universelle; certains auteurs requièrent par exemple qu'une  $k$ -variété soit intègre, voire géométriquement intègre.

des ouverts  $Y_i$  tels que les restrictions  $f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$  soient des morphismes séparés, alors  $f$  est un morphisme séparé. En particulier tout morphisme affine est séparé.

**Démonstration :** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. Si  $(Y_i)$  est un recouvrement ouvert de  $Y$  et  $X_i := f^{-1}(Y_i)$ , alors  $X \times_Y X$  est recouvert par les ouverts  $X_i \times_{Y_i} X_i$ . Si chaque morphisme  $X_i \rightarrow Y_i$  est séparé, alors l'image diagonale de  $X_i$  dans  $X_i \times_{Y_i} X_i$  est fermée, donc l'image diagonale de  $X$  dans  $X \times_Y X$  l'est également : en effet  $X_i$  est l'image réciproque de  $X_i \times_{Y_i} X_i$  par le morphisme diagonal  $\Delta_{X/Y}$  et  $\Delta_{X/Y}(X) \cap (X_i \times_{Y_i} X_i) = \Delta_{X_i/Y_i}(X_i)$  est alors fermé dans  $X_i \times_{Y_i} X_i$  pour tout  $i$ . On conclut avec la remarque précédente.  $\square$

Voici un critère de séparation au-dessus d'un schéma affine :

**Proposition 5.6** Soient  $S = \text{Spec } C$  un schéma affine et  $X$  un  $S$ -schéma. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i)  $X$  est séparé sur  $S$ .
- ii) Pour tous ouverts affines  $U, V$  de  $X$ , l'ouvert  $U \cap V$  est affine et l'homomorphisme canonique

$$\varphi_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \otimes_C \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V)$$

(qui envoie  $s \otimes t$  sur  $s|_{U \cap V} \times t|_{U \cap V}$ ) est surjectif.

- iii) Il existe un recouvrement  $(U_i)$  de  $X$  par des ouverts affines tel que pour tous  $i, j$ , l'ouvert  $U_i \cap U_j$  soit affine et l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_C \mathcal{O}_X(U_j) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

soit surjectif.

**Démonstration :** Soit  $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$  le morphisme diagonal. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts affines de  $X$ . Alors  $U \times_S V$  est affine par définition du produit fibré : c'est le spectre de  $\mathcal{O}_X(U) \otimes_C \mathcal{O}_X(V)$ . On a  $\Delta^{-1}(U \times_S V) = U \cap V$  et l'homomorphisme  $\varphi_{UV}$  est l'homomorphisme induit sur les sections globales par la restriction de  $\Delta : U \cap V \rightarrow U \times_S V$ . Si  $X$  est séparé sur  $S$ , alors  $\Delta$  est une immersion fermée (donc également sa restriction  $U \cap V \rightarrow U \times_S V$ ) et ii) résulte de ce que pour tout anneau  $A$ , les sous-schémas fermés de  $\text{Spec } A$  sont de la forme  $\text{Spec}(A/I)$  avec  $I$  idéal de  $A$ . Comme il est trivial que ii) implique iii), il reste à montrer que iii) implique i). Ceci résulte immédiatement du fait que la propriété d'immersion fermée est locale sur la base, vu que  $X \times_S X$  est recouvert par les  $U_i \times_S U_j$ .

□

**Exemples :** a) Un morphisme non séparé est quelque chose de pathologique ; en pratique tous les morphismes que nous rencontrerons seront séparés. Montrons néanmoins comment exhiber un morphisme qui n'est pas séparé. Soit  $k$  un corps, posons  $X_1 = X_2 = \mathbf{A}_k^1$ ,  $U_1 = U_2 = \mathbf{A}_k^1 - \{P\}$ , où  $P$  est le point fermé correspondant à l'origine. Soit  $X$  le schéma obtenu en recollant  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $U_1$  et  $U_2$  (l'isomorphisme  $U_1 \rightarrow U_2$  utilisé étant l'identité). On dit que  $X$  est la "droite affine avec deux origines".<sup>30</sup> Alors  $X$  n'est pas séparé sur  $\text{Spec } k$  : en effet prenons pour  $U$  l'image de  $X_1$  dans  $X$  et pour  $V$  l'image de  $X_2$  dans  $X$  ; alors  $U \cap V$  est isomorphe à  $U_1$ , donc  $\mathcal{O}_X(U \cap V) = k[t, 1/t]$ , tandis que  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(V) = k[t]$ , donc le ii) de la proposition 5.6 n'est pas vérifié.

b) Pour tout anneau  $A$ , l'espace projectif  $\mathbf{P}_A^n = \text{Proj}(A[T_0, T_1, \dots, T_n])$  est séparé : en effet, on le recouvre par les ouverts  $D_+(T_i)$ , qui vérifient la condition iii) de la proposition précédente vu que  $D_+(T_i) \cap D_+(T_j) = D_+(T_i T_j)$ . La proposition ci-dessous (a) et b)) montre que plus généralement, un  $A$ -schéma de la forme  $\text{Proj}(A[T_0, T_1, \dots, T_n]/I)$  (où  $I$  est un idéal homogène) est séparé (en tant que sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_A^n$ ). En particulier une  $k$ -variété projective est bien une  $k$ -variété (!).

**Proposition 5.7** a) *Les immersions ouvertes et fermées sont séparées.*

b) *La composée de deux morphismes séparés est séparée.*

c) *Les morphismes séparés sont stables par changement de base.*

d) *Si  $g \circ f$  est séparé, alors  $f$  est séparé. En particulier un  $k$ -morphisme entre deux variétés algébriques est séparé.*

**Démonstration :** a) résulte du fait que pour une immersion ouverte ou fermée, le morphisme diagonal est un isomorphisme.

b) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des morphismes. Soit  $h : X \times_Y X \rightarrow X \times_Z X$  le morphisme induit par les deux projections  $X \times_Y X \rightarrow X$  (qui sont des  $Y$ -morphisms, donc aussi des  $Z$ -morphisms). On observe que  $h \circ \Delta_{X/Y} = \Delta_{X/Z}$ . D'autre part  $h$  s'obtient par les deux changements de base successifs  $\times_Y X$  et  $X \times_Y$  à partir du morphisme diagonal  $\Delta_{Y/Z} : Y \rightarrow Y \times_Z Y$ . On en déduit le résultat vu que les immersions fermées sont stables par composition et par changement de base.

c) C'est immédiat en utilisant encore le fait que les immersions fermées sont stables par changement de base.

---

<sup>30</sup>On ne confondra pas ceci avec la "droite affine avec un point double", qui est le schéma affine  $\text{Spec}(k[x, y]/(x^2, xy))$ .

d) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  avec  $g \circ f$  séparé. Reprenant les notations de b), on a  $h \circ \Delta_{X/Y} = \Delta_{X/Z}$ . Montrons que

$$\Delta_{X/Y}(X) = h^{-1}(\Delta_{X/Z}(X))$$

ce qui prouvera que l'image de  $\Delta_{X/Y}$  est fermée, donc que  $f$  est séparé. L'inclusion  $\subset$  est claire. L'inclusion en sens inverse le serait aussi si on savait que  $h$  était injective, ce qui est le cas si  $g$  est séparé puisqu'alors  $h$  est une immersion fermée (voir b)). De ce fait  $h$  est une immersion fermée dans le cas où  $X, Y$  et  $Z$  sont tous affines (on peut d'ailleurs le vérifier directement). Soit alors  $s \in X \times_Y X$  tel que  $h(s) = \Delta_{X/Z}(x)$  pour un certain  $x \in X$ . Soit  $t = \Delta_{X/Y}(x)$ . Soient  $U, V, W$  des ouverts affines contenant respectivement  $x, f(x), g(f(x))$ , avec  $U \subset f^{-1}(V)$  et  $V \subset g^{-1}(W)$ . Alors  $h(s) = h(t)$ , mais comme la restriction  $h : U \times_V U \rightarrow U \times_W U$  est une immersion fermée, on obtient  $s = t$  comme on voulait vu que  $s$  et  $t$  sont dans  $U \times_V U$  (les deux projections de  $s$  et  $t$  sur  $X$  sont  $x$ , car  $h(s) = \Delta_{X/Z}(x)$  et  $t = \Delta_{X/Y}(x)$ ).  $\square$

La propriété d'être séparé correspond à une sorte d'"unicité de la limite". Voici un énoncé dans ce sens :

**Proposition 5.8** *Soient  $S$  un schéma,  $X$  un  $S$ -schéma réduit, et  $Y$  un  $S$ -schéma séparé. Soient  $f$  et  $g$  deux  $S$ -morphisms de  $X$  vers  $Y$  qui coïncident sur un ouvert dense  $U$  de  $X$ . Alors  $f = g$ .*

**Démonstration :** Soit  $\Delta : Y \rightarrow Y \times_S Y$  le morphisme diagonal. Soit  $h$  le morphisme  $(f, g)$  de  $X$  dans  $Y \times_S Y$ . Alors  $\Delta \circ f = (f, f)$  donc  $\Delta \circ f$  coïncide avec  $h$  sur  $U$ . Il en résulte que  $U \subset h^{-1}(\Delta(Y))$ , et comme  $h^{-1}(\Delta(Y))$  est fermé dans  $X$  vu que  $Y$  est séparé sur  $S$ , on obtient  $X \subset h^{-1}(\Delta(Y))$ , ce qui montre que les applications *ensemblistes*  $f$  et  $g$  sont égales. Pour montrer que les morphismes  $f$  et  $g$  sont égaux, on peut maintenant supposer que  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . Soient alors  $\varphi, \psi$  les homomorphismes de  $A$  vers  $B$  associés respectivement à  $f, g$ . Soit  $a \in A$ , posons  $b = \varphi(a) - \psi(a)$ . On sait que la restriction de  $b \in \mathcal{O}_X(X)$  à  $\mathcal{O}_X(U)$  est nulle. Ainsi  $U \subset V(bB)$ . Par conséquent  $V(bB) = \text{Spec } B$  puisque  $V(bB)$  est fermé et dense. Ainsi  $b$  est nilpotent, donc nul vu que  $X$  est réduit. On en tire  $\varphi = \psi$ .  $\square$

## 5.2. Morphismes propres

On va maintenant définir l'analogie de la notion de compacité.

**Définition 5.9** Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est dit *fermé* s'il envoie tout fermé sur un fermé. Il est dit *universellement fermé* si pour tout changement de base  $Y' \rightarrow Y$ , le morphisme correspondant  $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  reste fermé.

**Définition 5.10** Un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  est dit *propre* s'il est de type fini, séparé, et universellement fermé. Un  $S$ -schéma est dit propre si son morphisme structural est propre.

**Exemples :** a) Une immersion fermée est propre, mais pas une immersion ouverte en général.

b) La droite affine sur un corps  $k$  n'est pas propre. En effet la projection  $\mathbf{A}_k^2 = \mathbf{A}_k^1 \times_k \mathbf{A}_k^1 \rightarrow \mathbf{A}_k^1$  n'est pas fermée, l'image du fermé  $xy = 1$  étant  $\mathbf{A}_k^1 - \{0\}$ . On verra que toute  $k$ -variété *projective* est propre.

**Théorème 5.11** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini. Alors  $f$  est propre.

**Démonstration :** On a déjà vu que  $f$  était de type fini, et comme il est affine il est séparé. Montrons que  $f$  est fermé. Comme  $f$  est affine, il suffit de le faire quand  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . Soit  $\varphi$  l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  associé à  $f$ . On peut supposer  $\varphi$  injectif, quitte à remplacer  $A$  par  $A/\ker \varphi$ , vu que  $f$  se factorise par l'immersion fermée  $\text{Spec } (A/\ker \varphi) \rightarrow \text{Spec } A$ . On a alors, pour tout idéal  $I$  de  $B$  :

$$f(V(I)) = V(\varphi^{-1}(I))$$

En effet l'inclusion  $\subset$  est claire; pour l'inclusion en sens inverse il suffit de montrer que si  $\varphi$  est un idéal premier de  $A$  contenant  $J := I \cap A$ , alors il existe un idéal premier de  $B$  au-dessus de  $\varphi$  et contenant  $I$ ; mais ceci résulte de la surjectivité de l'application  $\text{Spec } (B/I) \rightarrow \text{Spec } (A/J)$  qui vient du théorème de Cohen/Seidenberg.

On conclut en utilisant le fait que les morphismes finis sont stables par changement de base (proposition 2.27).

□

**Remarque :** On a une sorte de réciproque : si  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est propre, alors  $B$  est un  $A$ -module de type fini. Ainsi un morphisme qui est à la fois affine et propre est fini. On peut aussi en déduire que si  $X$  est propre et réduit sur un corps  $k$ , alors  $\mathcal{O}_X(X)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie, voir [L], pp. 104-105.

**Proposition 5.12** a) La composée de deux morphismes propres est propre.

b) Les morphismes propres sont stables par changement de base.

c) Si  $g \circ f$  est propre et  $g$  est séparé, alors  $f$  est propre. En particulier un  $k$ -morphisme entre  $k$ -variétés propres est propre.

**Démonstration :** D'après la proposition 5.7 et les assertions correspondantes sur les morphismes de type fini, il reste juste, pour a) et b), à vérifier le caractère "universellement fermé". C'est clair pour b). On en déduit a) en remarquant que la composée de deux applications fermées est fermée, et en utilisant b).

Montrons c). Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des morphismes avec  $g \circ f$  propre et  $g$  séparé. Alors  $f$  est la composée du morphisme  $h : X \rightarrow X \times_Z Y$  défini par  $h = (\text{id}_X, f)$  (qui est une immersion fermée vu que  $g$  est séparé, car  $h$  s'obtient par changement de base à partir du morphisme diagonal  $Y \rightarrow Y \times_Z Y$ ) avec la seconde projection  $X \times_Z Y \rightarrow Y$ , qui est propre via b). D'après a),  $f$  est propre. □

Les principaux exemples de morphismes propres sont les morphismes *projectifs*, que nous allons discuter au paragraphe suivant.

### 5.3. Morphismes projectifs

Pour tout schéma  $Y$ , on pose

$$\mathbf{P}_Y^n = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \times_{\mathbf{Z}} Y$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n = \text{Proj}(\mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n])$ .

**Définition 5.13** On dit qu'un morphisme de schémas noethériens  $f : X \rightarrow Y$  est *projectif* s'il possède une factorisation  $f = p \circ i$ , où  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_Y^n$  est une immersion fermée, et  $p : \mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$  est la projection.

Par exemple si  $A$  est un anneau et  $S = A[X_0, \dots, X_n]/I$  le quotient de l'anneau gradué  $S' = A[X_0, \dots, X_n]$  par un idéal homogène  $I$ , alors le morphisme naturel  $\text{Proj } S \rightarrow \text{Spec } A$  est projectif; en effet le morphisme canonique  $\text{Proj } S \rightarrow \text{Proj } S' = \mathbf{P}_A^n$  est une immersion fermée.

**Theorème 5.14** *Un morphisme projectif de schémas noethériens est propre.*

**Démonstration (esquisse):** La propriété est stable par changement de base et par composition, et une immersion fermée est propre. Il suffit donc de montrer que la projection  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$  est propre. On a déjà vu que ce morphisme était séparé et de type fini; il s'agit donc de montrer que si  $Y$  est un schéma, alors la projection  $\pi : \mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$  est fermée. Quitte à recouvrir  $Y$  par des ouverts affines, on peut supposer  $Y = \text{Spec } A$  (si  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $Y$ , alors une partie de  $Y$  est fermée si et seulement si  $(Y \cap U_i)$  est fermé dans  $U_i$  pour tout  $i$ ).



Posons  $B = A[T_0, \dots, T_n]$  et soit  $V_+(I)$  un fermé de  $\mathbf{P}_A^n = \text{Proj } B$ . Il s'agit de montrer que  $Y \setminus \pi(V_+(I))$  est ouvert dans  $Y$ . Soit donc  $y \in Y$ . La fibre de  $\pi$  en  $y$  est  $\text{Proj}(B \otimes_A k(y))$  (l'anneau  $(B \otimes_A k(y)) = k(y)[T_0, \dots, T_n]$  étant muni de sa graduation naturelle; cf [L], proposition. 3.1.9) avec de plus  $V_+(I) \cap \pi^{-1}(y) = V_+(I \otimes_A k(y))$ . Dire que  $y$  n'est pas dans l'image de  $V_+(I)$  signifie donc que le fermé  $V_+(I \otimes_A k(y))$  est vide, ou encore que le radical de  $I \otimes_A k(y)$  contient  $B_+ \otimes_A k(y)$  (cf [L], lemme 2.3.35), soit  $B_m \otimes_A k(y) \subset I \otimes_A k(y)$  pour un certain  $m > 0$ . Cette dernière égalité s'écrit

$$(B/I)_m \otimes_A k(y) = 0$$

Supposons maintenant que  $y \notin \pi(V_+(I))$ , et choisissons un  $m > 0$  comme ci-dessus. Le lemme de Nakayama (cf. [AC, 8]) implique  $(B/I)_m \otimes_A \mathcal{O}_{Y,y} = 0$  (on a bien que  $(B/I)_m$  est un  $A$ -module de type fini). De ce fait il existe  $f \in A$  avec  $y \in D(f)$  et  $f \cdot (B/I)_m = 0$ , d'où  $(B/I)_m \otimes_A A_f = 0$ , ce qui prouve que  $D(f)$  ne rencontre pas  $\pi(V_+(I))$  alors qu'il contient  $y$ . Finalement  $Y \setminus \pi(V_+(I))$  est bien ouvert dans  $Y$ .  $\square$

**Remarque :** Décider si un morphisme propre est projectif est en général difficile. Il se trouve que :

Toute courbe (=schéma de dimension 1) propre sur un corps  $k$  est projective sur  $k$ .

Toute surface (=schéma de dimension 2) propre et non singulière sur un corps  $k$  est projective sur  $k$ , mais il y a des contre-exemples avec des surfaces singulières.

En dimension au moins 3, il y a des variétés propres et non projectives sur  $k$ , par exemple certaines *variétés toriques*.

## 5.4. Critères valuatifs

Il est parfois utile de disposer d'un critère pratique pour décider si un morphisme est propre. C'est l'objet de ce paragraphe. Rappelons d'abord la définition suivante :

**Définition 5.15** Soit  $R$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . On dit que  $R$  est un *anneau de valuation* si pour tout  $x$  de  $K - \{0\}$ , on a :  $x \in R$  ou  $x^{-1} \in R$ .

Soit  $R$  un anneau de valuation. Alors (cf. [Bki]) il existe un groupe abélien<sup>31</sup> totalement ordonné  $(\Gamma, +)$  et une application  $v : K - \{0\} \rightarrow \Gamma$  (la *valuation*), qu'on étend à  $K$  en posant  $v(0) = +\infty$ , vérifiant les propriétés suivantes :

---

<sup>31</sup>On peut prendre  $\Gamma = K^*/R^*$  avec la relation d'ordre  $x \geq y$  ssi  $x/y \in R$ .

- $v(x) \geq 0$  ssi  $x \in R$ .
- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$ .

En particulier les éléments inversibles de  $R$  sont ceux de valuation nulle, et  $R$  est un anneau local (l'idéal maximal est l'ensemble  $\wp$  des éléments de valuation  $> 0$ ). Noter que le spectre d'un anneau de valuation peut néanmoins être "gros" (cf. [L], exercice 3.26. p. 113).

D'autre part, un anneau de valuation est noethérien ssi c'est un anneau de valuation discrète<sup>32</sup> ; on a alors  $\Gamma = \mathbf{Z}$ . On a déjà vu que  $\mathbf{Z}_p$  et  $k[[t]]$  (avec  $k$  corps) étaient des anneaux de valuation discrète. L'anneau des entiers de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  est de valuation, mais n'est pas de valuation discrète (on peut dans ce cas prendre  $\Gamma = \mathbf{Q}$ ), bien qu'il soit de dimension 1.

Le théorème suivant permet souvent (malgré son apparente complexité) de vérifier qu'un morphisme est propre. Notons qu'il ne marche bien que dans un cadre noethérien. L'idée est qu'un morphisme de type fini  $f : X \rightarrow Y$  est propre ssi (pour tout anneau de valuation  $R$  de corps des fractions  $K$ ) tout  $K$ -point de  $X$  se relève de façon unique en un  $R$ -point (on peut "chasser les dénominateurs"), le tout étant considéré au-dessus de  $Y$ .

**Theorème 5.16 (Critère valuatif de propriété)** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini avec  $X$  noethérien. Alors  $f$  est propre si et seulement si la condition suivante est vérifiée : soit  $R$  un anneau de valuation de corps des fractions  $K$  ; pour tout diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \downarrow i \\ & & \text{Spec } R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

(où  $i$  est induit par l'inclusion  $R \rightarrow K$ ), il existe un unique prolongement  $\text{Spec } R \rightarrow X$  du morphisme  $g$  qui fait commuter le diagramme.

La preuve étant hautement technique, nous renvoyons à [H], pp 101-102. Il existe un critère similaire pour "séparé", la condition étant alors qu'il existe *au plus* un prolongement  $\text{Spec } R \rightarrow X$  du morphisme  $g$  qui fait commuter le diagramme. Notons qu'on peut aussi retrouver rapidement la proposition 5.7, le théorème 5.11 et la proposition 5.12 en utilisant les critères valuatifs. Indiquons maintenant comment on peut retrouver le théorème 5.14, l'idée étant

---

<sup>32</sup>Attention, si par exemple  $\Gamma = \mathbf{Z}^2$  avec l'ordre lexicographique, on n'a pas un anneau noethérien bien que le groupe ordonné  $\mathbf{Z}^2$  soit "discret" au sens usuel.

qu'on peut toujours "chasser les dénominateurs" quand on travaille avec des polynômes homogènes.

**Nouvelle preuve du théorème 5.14 :**

Comme on l'a déjà vu, il suffit donc de montrer que la projection  $\pi : X = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$  est propre. On écrit  $X$  comme réunion des ouverts affines  $V_i = D_+(X_i) \simeq \text{Spec } (\mathbf{Z}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i])$ . chacun est isomorphe à l'espace affine de dimension  $n$  sur  $\mathbf{Z}$ , donc  $\pi$  est de type fini.

On va appliquer le critère valuatif (seule l'existence est à montrer, car on sait déjà que  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n$  est séparé sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$ ). Soit donc  $R$  un anneau de valuation de corps des fractions  $K$  et soit  $v : K^* \rightarrow \Gamma$  la valuation correspondante. On considère un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z} \end{array}$$

et on cherche une flèche  $\text{Spec } R \rightarrow X$  compatible. Soit  $\xi \in X$  l'image de  $\text{Spec } K$ ; on peut supposer qu'il est dans tous les  $V_i$ , sinon on se ramène à  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{n-1}$  (en effet  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^n - V_i$  est isomorphe à  $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{n-1}$ ). Cela signifie que chaque  $X_i/X_j$  est inversible en  $\mathcal{O}_{X,\xi}$ , donc a une image non nulle (notée encore  $X_i/X_j$ ) dans le corps résiduel  $k(\xi)$ .

Le  $K$ -point donné par le diagramme correspond à une inclusion de corps  $\theta : k(\xi) \rightarrow K$ . Posons  $f_{ij} = \theta(X_i/X_j) \in K^*$ . Pour étendre le  $K$ -point en un  $R$ -point, on cherche à définir un homomorphisme

$$\mathbf{Z}[X_0/X_l, \dots, X_n/X_l] \rightarrow R$$

(pour un  $l$  bien choisi) en envoyant chaque  $X_i/X_l$  sur  $f_{il}$ . Ceci est possible dès que tous les  $f_{il}$  sont dans  $R$ , i.e. dès que  $v(f_{il}) \geq 0$  pour tout  $i$ . Comme  $f_{il} = (f_{i0}/f_{l0})$ , il suffit d'avoir  $v(f_{i0}) \geq v(f_{l0})$  pour tout  $i$ , i.e. de choisir un  $l$  avec  $v(f_{l0})$  minimal. □

## 6. Quelques propriétés locales

Dans cette section, on va s'intéresser aux propriétés locales des schémas et des morphismes. La notion de schéma *régulier* est la généralisation naturelle de celle de variété non singulière. Celle de schéma normal, moins forte, signifie qu'on n'est pas trop loin d'une telle variété. La notion de morphisme *plat*, sans être très intuitive, s'avère fort utile en pratique; celle de morphisme *lisse* est l'analogue de celle d'application submersive en géométrie différentielle; c'est en quelque sorte la version relative de la régularité.

## 6.1. Schémas normaux

**Définition 6.1** On dit qu'un anneau  $A$  est *normal* s'il est intègre<sup>33</sup> et s'il est de plus intégralement clos dans son corps des fractions  $K := \text{Frac } A$  (i.e. tout élément de  $K$  qui annule un polynôme unitaire à coefficients dans  $A$  est dans  $A$ ).

**Exemples :** a) Tout anneau factoriel est normal.

b) Les anneaux noethériens de dimension  $\leq 1$  et normaux sont les *anneaux de Dedekind*. Les anneaux de Dedekind factoriels sont les anneaux principaux<sup>34</sup>. Par exemple  $\mathbf{Z}[i]$  est principal, mais pas  $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ . Les anneaux de Dedekind locaux sont les anneaux de valuation discrète.

c) L'anneau  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$  n'est pas normal (en effet son corps des fractions est  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ , et  $1/2(-1 + \sqrt{-3})$  est entier sur  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$  sans être dans  $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ).

d) Rappelons que tout anneau intègre  $A$  est l'intersection des localisés  $A_\varphi$  pour  $\varphi$  idéal maximal de  $A$  (cela résulte immédiatement de ce que tout idéal de  $A$  autre que  $A$  est contenu dans un idéal maximal). On en déduit aisément qu'un anneau intègre  $A$  est normal si et seulement si tout ses localisés  $S^{-1}A$  sont normaux (ou encore si tous les  $A_\varphi$ , avec  $\varphi$  idéal maximal de  $A$ , sont normaux).

**Définition 6.2** Un schéma  $X$  est dit *normal en*  $x \in X$  si l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est normal. Il est dit *normal* s'il est intègre et normal en chacun de ses points.<sup>35</sup>

D'après ce qui précède, un schéma affine  $\text{Spec } A$  est normal si et seulement si l'anneau  $A$  est normal.

**Exemples :** a) L'espace affine et l'espace projectif sur un corps  $k$  sont des schémas normaux car  $k[X_1, \dots, X_n]$  est un anneau factoriel, donc normal. Plus généralement l'espace affine ou projectif sur un anneau normal est normal (si un anneau  $A$  est normal, alors  $A[X_1, \dots, X_n]$  est normal, cf. [AC, 9]).

b) Soit  $X$  la courbe affine donnée par l'équation  $y^2 - x^3 = 0$ . Alors  $X$  n'est pas un schéma normal. En effet, dans l'anneau  $A = k[x, y]/(y^2 - x^3)$ , la classe de  $y/x$  est un élément de  $K = \text{Frac } A$  qui est entier sur  $A$  (il annule

---

<sup>33</sup>Certains auteurs demandent seulement que les localisés  $A_\varphi$  de  $A$  pour  $\varphi$  premier soient des anneaux intègres et intégralement clos.

<sup>34</sup>Il est commode de considérer les corps, qui sont de dimension zéro, comme des anneaux de Dedekind (resp. de valuation discrète).

<sup>35</sup>Certains auteurs ne demandent pas que  $X$  soit irréductible pour être normal, mais en pratique cette définition est plus simple. Elle est automatique si  $X$  est de plus supposé connexe et noethérien.

le polynôme  $T^2 = x$ ) sans être dans  $A$ . De même la courbe  $y^2 = x^2(x + 1)$  n'est pas un schéma normal. Ces exemples sont liés à la présence d'un *point singulier* en  $(0, 0)$ , voir le paragraphe suivant.

Rappelons la proposition suivante (cf. [AC, 10]) :

**Proposition 6.3** *Soit  $A$  un anneau noethérien et normal. Alors*

$$A = \bigcap_{\varphi \in \text{Spec } A, \text{ht } \varphi \leq 1} A_\varphi$$

(tous les anneaux étant considérés ici comme sous-anneaux du corps des fractions de  $A$ ).

Cette proposition signifie en quelque sorte que dans  $\text{Spec } A$ , une fonction définie "en codimension 1" est définie partout si  $A$  est normal. Voici une version "globale" de ce résultat :

**Corollaire 6.4** *Soit  $X$  un schéma normal et noethérien. Alors si  $F$  est un fermé de  $X$  dont toutes les composantes irréductibles sont de codimension au moins 2, la restriction*

$$\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X - F)$$

*est un isomorphisme.*

**Démonstration :** Comme  $X$  est intègre, il suffit de montrer la surjectivité car  $\mathcal{O}_X(X)$  et  $\mathcal{O}_X(X - F)$  sont tous deux des sous-anneaux du corps des fonctions de  $X$ . On se ramène immédiatement au cas  $F$  irréductible (quitte à décomposer  $F$  et à appliquer plusieurs fois la proposition). Si alors  $U$  est un ouvert affine de  $X$  qui rencontre  $F$ , alors on a déjà vu (preuve de la proposition 4.11, b)) que  $\text{codim}(F \cap U, U)$  était égale à  $\text{codim}(F, X)$ . On se ramène alors à  $X$  affine via la condition de faisceau sur  $\mathcal{O}_X$ , en recouvrant  $X$  par des ouverts affines.

Si maintenant  $X = \text{Spec } A$ , avec  $A$  normal et noethérien, on a  $F = V(I)$  avec  $I$  premier. Alors tout idéal premier  $\varphi$  de  $A$  de hauteur 1 est dans  $X - F$  : sinon on aurait  $\varphi \supset I$ , et comme  $I$  est de hauteur  $\text{codim } F$  (cf. exemple après la définition 4.8),  $\varphi$  serait de hauteur au moins 2. Le résultat découle alors de la proposition précédente. □

On retrouve par exemple que si  $U$  est le plan affine  $\mathbf{A}_k^2$  privé du point  $(0, 0)$ , alors  $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(X)$ .

**Définition 6.5** Soit  $X$  un schéma et soit  $x \in X$ . La *dimension de  $X$  en  $x$*  (notée  $\dim_x X$ ) est la dimension de l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$ . On dit que  $x$  est de *codimension  $r$*  si l'adhérence de  $\{x\}$  (qui est un fermé irréductible) est de codimension  $r$  dans  $X$ . Si  $X$  est irréductible, c'est équivalent à dire que  $\dim_x X = r$  (en effet la codimension de  $\overline{\{x\}} \cap U$  dans  $U$  est  $\dim \mathcal{O}_{X,x}$  pour tout ouvert affine  $U$  contenant  $x$ , voir commentaire après la définition 4.2; ensuite l'argument est le même que dans la preuve de la proposition 4.11, b)).

**Theorème 6.6** Soit  $S$  un schéma noethérien. Soient  $X, Y$  des  $S$ -schémas de type fini, avec  $Y$  propre sur  $S$  et  $X$  normal de corps des fonctions  $K$ . Soient  $U$  un ouvert non vide de  $X$  et  $f : U \rightarrow Y$  (resp.  $f_K : \text{Spec } K \rightarrow Y$ ) un morphisme de  $S$ -schémas. Alors il existe un ouvert  $V \supset U$  (resp. un ouvert non vide  $V$ ) de  $X$ , contenant tous les points de codimension 1 de  $X$ , et tel que le morphisme  $f$  (resp.  $f_K$ ) se prolonge de manière unique à  $V$ . En particulier si  $\dim X = 1$ , alors  $f$  (resp.  $f_K$ ) s'étend de manière unique à  $X$  tout entier.

Notons que la conclusion signifie que toutes les composantes irréductibles du fermé  $X - V$  sont de codimension au moins 2 (puisque le point générique de chacune de ces composantes est de codimension au moins 2), autrement dit  $f$  se prolonge sur un ouvert dont le complémentaire est "petit".

**Démonstration :** On fait la preuve en supposant qu'on est parti d'un  $S$ -morphisme  $f : U \rightarrow Y$  (le lemme 6.7 ci-dessous permet de s'y ramener). L'unicité vient de ce que  $Y \rightarrow S$  est séparé et  $X$  réduit, ce qui permet d'appliquer la proposition 5.8. Soit  $\eta$  le point générique de  $X$ , alors  $\eta \in U$  d'où un morphisme  $f_\eta : \text{Spec } K \rightarrow Y$  induit par  $f$ . Soit  $x \in X$  un point de codimension 1 de  $X$ . Alors  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau normal noethérien de dimension 1, qui est donc de valuation discrète puisqu'il est local. D'après le critère valuatif de propreté (noter que  $X$  et  $Y$  sont noethériens car de type fini sur  $S$ ), le  $S$ -morphisme  $f_\eta$  s'étend en un  $S$ -morphisme  $f_x : \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow Y$ . On a alors

**Lemme 6.7** Soient  $S$  un schéma et  $X, Y$  des  $S$ -schémas avec  $Y$  de type fini sur  $S$ . On suppose  $X$  intègre ou  $S$  localement noethérien. Soit  $x \in X$ . Alors tout  $S$ -morphisme de  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$  dans  $Y$  s'étend en un  $S$ -morphisme d'un ouvert de  $X$  contenant  $x$  vers  $Y$ .

**Démonstration :** Il suffit de le voir quand  $X, Y$ , et  $S$  sont affines (en choisissant un ouvert affine de  $S$  contenant l'image de  $x$ , puis en considérant les images

réciroques de cet ouvert dans  $X$  et  $Y$ , qui contiennent respectivement un ouvert affine contenant  $x$  et un ouvert affine contenant l'image de  $x \in \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$  dans  $Y$ ). Supposons donc  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$ ,  $S = \text{Spec } C$ . On doit montrer que tout  $C$ -homomorphisme  $\varphi$  de  $A$  dans  $B_\varphi$  (avec  $\varphi \in \text{Spec } B$ ) se factorise par un  $C$ -homomorphisme de  $A$  dans  $B_b$  pour un certain  $b \in B$  (avec  $b \notin \varphi$ ). Si  $B$  est intègre, on choisit une famille finie  $c_1, \dots, c_r$  de générateurs de la  $C$ -algèbre  $A$ , puis  $b \in B - \varphi$  tel que tous les  $c_i$  vérifient  $\varphi(c_i) \in B_b$ , alors  $\varphi(A) \subset B_b$  et on a le résultat. Si  $C$  est noethérien, on écrit  $A = C[T_1, \dots, T_n]/I$ , avec  $I$  engendré par un nombre fini de polynômes  $P_1, \dots, P_r$ . Les images  $c_1, \dots, c_n$  de  $T_1, \dots, T_n$  par  $\varphi$  vérifient alors  $P_j(c_i) = 0$  dans  $B_\varphi$  pour tout indice  $j$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $i, j$ , on peut alors trouver  $b \in B - \varphi$  et  $n > 0$  tels que  $b^n P_j(c_i) = 0$  dans  $B$  pour tous indices  $i, j$ , ce qui permet d'étendre  $\varphi$  en un  $C$ -homomorphisme  $A \rightarrow B_b$ .  $\square$

Reprenons la preuve du théorème. On peut donc étendre  $f_x$  en un  $S$ -morphisme (noté  $g_x$ ) d'un ouvert  $U_x$  de  $X$  contenant  $x$  vers  $Y$ . Les restrictions de  $f$  et  $g_x$  à  $U' := U_x \cap U$  coïncident au point générique, donc sur tout ouvert affine  $\text{Spec } R$  de  $U'$  tel que l'image de  $U'$  par  $f$  et  $g_x$  soient inclus dans un même ouvert affine  $\text{Spec } A$  de  $Y$  (l'homomorphisme  $A \rightarrow R$  associé est le même car  $R$  est un sous-anneau de  $K$ ). Ainsi  $f$  et  $g_x$  coïncident sur un ouvert non vide de  $U \cap U_x$ , donc sur  $U \cap U_x$  (par la proposition 5.8) parce que  $Y$  est séparé sur  $S$  et  $X$  est réduit. Si maintenant  $x'$  est un autre point de codimension 1 de  $X$ , alors le même argument montre que  $g_{x'}$  coïncide avec  $f$  et  $g_x$  resp. sur  $U \cap U_{x'}$  et  $U_x \cap U_{x'}$ . Le résultat en découle.  $\square$

**Définition 6.8** Soit  $k$  un corps. On dit que deux  $k$ -variétés intègres  $X$  et  $Y$  sont  *$k$ -birationnelles* si leurs corps de fonctions sont  $k$ -isomorphes.

D'après le lemme 6.7, il revient au même de dire qu'il existe des ouverts non vides respectifs  $U$  et  $V$  de  $X$  et  $Y$  tels que  $U$  et  $V$  soient des  $k$ -schémas isomorphes. Le théorème 6.6 admet le

**Corollaire 6.9** Soit  $k$  un corps. Soient  $X$  et  $Y$  deux courbes (=variétés de dimension 1) normales et propres sur  $k$ . Si  $X$  et  $Y$  sont  $k$ -birationnelles, elles sont  $k$ -isomorphes.

Notons que ceci est faux en dimension au moins 2, par exemple  $\mathbf{P}_k^2$  et  $\mathbf{P}_k^1 \times_k \mathbf{P}_k^1$  ne sont pas isomorphes (cf [L], p. 113, exercice 3.21) alors que tous deux contiennent un ouvert  $k$ -isomorphe à  $\mathbf{A}_k^2 = \mathbf{A}_k^1 \times_k \mathbf{A}_k^1$ .

**Définition 6.10** Soit  $A$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . La *fermeture intégrale* de  $A$  dans  $K$  (ou *clôture intégrale* de  $A$ ) est l'ensemble des éléments de  $K$  qui sont entiers sur  $A$ . On définit de même la fermeture intégrale de  $A$  dans  $L$  quand  $L$  est une extension finie de corps de  $K$ .

Soit  $X$  un schéma intègre de corps des fractions  $K$ . Quand  $X = \text{Spec } A$ , le schéma  $X' = \text{Spec } B$ , où  $B$  est la clôture intégrale de  $A$ , est l'unique  $X$ -schéma normal (dont on note  $\pi : X' \rightarrow X$  le morphisme structural) vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme dominant  $f : Y \rightarrow X$  avec  $Y$  normal, il existe un unique morphisme  $f' : Y \rightarrow X'$  tel que  $f = \pi \circ f'$  (le point est que l'hypothèse que  $f$  est dominant signifie quand  $Y$  est affine que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$  est injectif). Ceci permet par recollement de définir la *normalisation* (ou le *normalisé*)  $X'$  de tout schéma intègre  $X$ , qui est l'unique  $X$ -schéma normal satisfaisant cette propriété universelle.

**Exemple :** Soit  $X = \text{Spec } (\mathbf{Z}[\sqrt{-3}])$ . Alors  $X$  n'est pas normal ; son normalisé est le schéma  $X' = \text{Spec } (\mathbf{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}])$ . En général calculer explicitement la normalisation d'un schéma n'est pas aisé.

On peut de même définir, pour toute extension finie  $L$  du corps des fonctions  $K$  de  $X$ , la *normalisation de  $X$  dans  $L$*  : c'est le schéma normal  $X_L$  de corps des fonctions  $L$ , équipé d'un morphisme  $\pi : X_L \rightarrow X$  qui étend le morphisme canonique  $\text{Spec } L \rightarrow X$ , et tel que le morphisme  $\pi$  soit *entier* ; ce dernier point signifie que  $\pi$  est affine et que  $\mathcal{O}_{X_L}(\pi^{-1}(V))$  est entier sur  $\mathcal{O}_X(V)$  pour tout ouvert affine  $V$  de  $X$ . Bien entendu quand  $X = \text{Spec } A$  est affine, alors  $X_L = \text{Spec } B_L$ , où  $B_L$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $L$ . Pour  $L = K$ , la normalisation de  $X$  dans  $L$  n'est autre que le normalisé  $X'$  défini ci-dessus.

**Remarque :** Il peut arriver que le morphisme de normalisation  $X' \rightarrow X$  (resp. le morphisme  $X_L \rightarrow X$  ci-dessus) ne soit pas fini. C'est ce qui motive l'introduction de la notion d'anneau *japonais* (resp. *universellement japonais* ou *de Nagata*), voir [Mat], chapitre 12. Ces problèmes ne se produisent pas quand on travaille avec des schémas de type fini sur un corps (grâce au lemme de normalisation de Noether), cf [L], p.121.

## 6.2. Schémas réguliers

Soit  $A$  un anneau local noethérien d'idéal maximal  $\mathcal{M}$ . Alors on peut regarder  $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$  comme un espace vectoriel sur le corps résiduel  $k = A/\mathcal{M}$ . On a toujours  $\dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \geq \dim A$  ([AC, 11], c)) ce qui implique en



particulier que  $\dim A$  est finie vu que  $\mathcal{M}$  est engendré par un nombre fini d'éléments.

**Définition 6.11** On dit qu'un anneau local  $A$  est *régulier* s'il est noethérien et si on a l'égalité

$$\dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 = \dim A$$

où  $\mathcal{M}$  est l'idéal maximal de  $A$  et  $k$  son corps résiduel. D'après le lemme de Nakayama ([AC, 8]), il est équivalent de dire que  $\mathcal{M}$  peut être engendré par  $\dim A$  éléments.

Un anneau local régulier est automatiquement intègre. Plus précisément, on a le résultat difficile suivant ([AC, 12]) :

**Théorème 6.12** a) Si  $A$  est un anneau local régulier et  $\wp \in \text{Spec } A$ , alors  $A_\wp$  est régulier.

b) Tout anneau local régulier est factoriel.

**Définition 6.13** Soit  $X$  un schéma et soit  $x \in X$ . On dit que  $X$  est *régulier en  $x$*  si l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier. On dira que  $X$  est *régulier* s'il est régulier en tout point. Les points  $x$  de  $X$  en lesquels  $X$  n'est pas régulier sont dits *singuliers*.

**Exemples :** a) Tout anneau de valuation discrète est régulier. Par conséquent, tout schéma normal localement noethérien de dimension 1 est régulier. Plus généralement, supposons que  $X$  soit un schéma normal et localement noethérien. Alors tout point de codimension 1 de  $X$  est régulier; ainsi, si l'ensemble des points singuliers de  $X$  est fermé<sup>36</sup>, chacune de ses composantes irréductible est de codimension au moins 2.

b) Tout schéma régulier et intègre est normal d'après le théorème 6.12 b). La réciproque est fautive en dimension  $\geq 2$  : considérer le schéma affine  $\text{Spec}(k[x, y, z]/x^2 - yz)$  (qui n'est pas régulier en  $(0, 0, 0)$  via le théorème 6.17 ci-dessous).

**Proposition 6.14** Soit  $X$  un schéma noethérien qui est régulier en ses points fermés.<sup>37</sup> Alors  $X$  est régulier.

<sup>36</sup>C'est le cas si  $X$  est un schéma de type fini sur un corps ou sur  $\mathbf{Z}$ , cf. remarque à la fin de ce paragraphe.

<sup>37</sup>On fera attention au fait qu'un schéma non quasi-compact peut ne pas contenir de point fermé, cf. [L], exercice 3.27 p. 114.

**Démonstration :** Pour tout point  $x$  de  $X$ , l'adhérence  $F$  de  $x$  (qui est un fermé irréductible) contient un point fermé  $y$  (on peut obtenir  $y$  comme fermé irréductible minimal non vide de  $F$  : si un tel fermé  $G$  contenait plus d'un point, l'un d'eux ne serait pas le point générique de  $G$  et son adhérence contredirait la minimalité de  $G$ ). Alors  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un localisé de  $\mathcal{O}_{X,y}$  : en effet si  $U = \text{Spec } A$  est un ouvert affine de  $X$  contenant  $y$ , on a  $x \in U$  car  $U \cap F$  contient le point générique de  $F$  comme ouvert non vide de  $F$ . Si  $\wp$  et  $\wp'$  sont les idéaux premiers de  $A$  correspondant respectivement à  $x, y$ , on a alors  $\wp \subset \wp'$  parce que  $y$  est dans l'adhérence de  $\{x\}$ , ce qui montre que  $A_\wp = \mathcal{O}_{X,x}$  est un localisé de  $A_{\wp'} = \mathcal{O}_{X,y}$ . Le théorème 6.12, a) dit alors que  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier. Ainsi  $X$  est régulier (le même argument marche avec "réduit" ou "normal" à la place de régulier).  $\square$

**Remarque :** On pourrait se contenter de supposer  $X$  quasi-compact (l'existence d'un point fermé dans ce cadre résulte par exemple du lemme de Zorn en considérant un fermé non vide minimal).

**Définition 6.15** Soit  $X$  un schéma. L'espace tangent de  $X$  en un point  $x \in X$  est le dual  $T_{X,x}$  du  $k(x)$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2 = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ . Un morphisme localement de type fini<sup>38</sup> de schémas  $f : X \rightarrow Y$  induit une application  $k(x)$ -linéaire  $T_{f,x}$  entre les espaces tangents  $T_{X,x}$  et  $T_{Y,y} \otimes_{k(y)} k(x)$ . On dit que  $T_{f,x}$  est l'*application tangente* de  $f$  en  $x$ .

D'après ce qui précède, on a toujours  $\dim_{k(x)} T_{X,x} \geq \dim \mathcal{O}_{X,x}$ , avec égalité si et seulement si le point  $x$  est régulier. Par exemple si  $x$  est un point fermé d'un schéma pur de type fini sur un corps, il est régulier si et seulement si son espace tangent est de dimension  $\dim X$ , ce qui correspond bien à l'idée qu'on se fait d'un point non singulier d'une variété. Montrons un lemme qui sera utile dans la suite pour se ramener à un calcul de dimension sans avoir à localiser :

**Lemme 6.16** Soient  $A$  un anneau et  $M$  un idéal maximal de  $A$ . Alors les  $A$ -modules  $M/M^2$  et  $MA_M/M^2A_M$  sont isomorphes.

**Démonstration :** On va commencer par montrer que les  $A$ -modules  $M/M^2$  et  $(A/M) \otimes_A M$  sont isomorphes. On définit un homomorphisme  $\varphi$  de  $A$ -modules de  $(A/M) \otimes_A M$  dans  $M/M^2$  par la formule  $\varphi(\bar{a} \otimes m) = \overline{am}$  pour  $a \in A$  et  $m \in M$ . En prenant  $a = 1$ , on voit que  $\varphi$  est surjectif. Si d'autre part un élément  $u = \sum_i (\bar{a}_i \otimes m_i)$  de  $(A/M) \otimes_A M$  est dans  $\ker \varphi$ , alors  $x := \sum_i a_i m_i \in M^2$  d'où

<sup>38</sup>Cette hypothèse sert à assurer que le dual de l'espace vectoriel  $(\mathcal{M}_y/\mathcal{M}_y^2) \otimes_{k(y)} k(x)$  est bien  $T_{Y,y} \otimes_{k(y)} k(x)$ ; on pourrait aussi supposer seulement que  $Y$  est localement noethérien.

$\bar{1} \otimes x = 0$  dans  $(A/M) \otimes_A M$  vu que pour  $m, m'$  dans  $M$ , on a  $\bar{1} \otimes mm' = \bar{m} \otimes m' = 0$ . On obtient donc  $u = 0$ .

Il suffit maintenant de montrer que l'application naturelle entre les  $A$ -modules  $A/M$  et  $A_M/MA_M$  est un isomorphisme (on tensorise ensuite par  $M$  au-dessus de  $A$ ), i.e. est surjective puisque  $A/M$  est un corps. Or, pour tout  $s \in A - M$ , on peut écrire  $1 = as + m$  avec  $a \in A$  et  $m \in M$ , d'où  $s^{-1} = a$  dans  $A_M/MA_M$  et on a bien la surjectivité voulue. □

On aimerait maintenant un critère concret pour tester la régularité d'un point sur une variété définie par des équations. C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 6.17 (Critère jacobien)** *Soient  $k$  un corps et  $X$  la  $k$ -variété affine  $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(F_1, \dots, F_r))$ , où les  $F_i$  sont des polynômes. Soit  $x$  un point fermé de  $X$  de corps résiduel  $k$ . Alors  $X$  est régulier en  $x$  si et seulement si la matrice jacobienne*

$$J_x = \left( \frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x) \right)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n}$$

est de rang  $n - \dim_x X$ .

On a noté abusivement  $\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)$  la valeur de  $\frac{\partial F_i}{\partial T_j}$  au point de  $k^n = \mathbf{A}_k^n(k)$  correspondant à l'image de  $x$  dans  $\mathbf{A}_k^n$ . Notons aussi que si  $X$  est pur, alors  $\dim_x X = \dim X$  (proposition 4.11 et théorème 4.9) puisque  $x$  est un point fermé de  $X$ .

**Remarque :** On verra dans le paragraphe sur les morphismes lisses que si  $x$  est un point fermé de corps résiduel  $k(x)$ , alors le fait que le rang de  $J_x$  (vue comme matrice à coefficients dans  $k(x)$ ) soit  $n - \dim_x X$  implique encore que  $x$  est régulier ; la réciproque est vraie si  $k(x)$  est une extension séparable de  $k$ , mais pas en général (prendre  $k = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(u)$  et  $X = \text{Spec}(k[T]/T^p - u)$  ; alors l'unique point de  $X$  est régulier vu que  $X$  est le spectre d'un corps, mais la matrice jacobienne est nulle).

**Exemples :** a) Si  $k$  est un corps, l'espace affine  $\mathbf{A}_k^n$  est régulier (prendre  $r = 1, F_1 = 0$ ). Du coup, l'espace projectif  $\mathbf{P}_k^n$  l'est aussi (il est recouvert par des ouverts isomorphes à  $\mathbf{A}_k^n$ ).

b) Soit  $P$  un polynôme irréductible de  $k[T_1, \dots, T_n]$ . Soit  $X$  la  $k$ -variété affine intègre  $\text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/P)$ . Alors  $X$  est de dimension  $n - 1$  via [AC, 7] vu que  $(P)$  est de hauteur 1. Ainsi  $X$  est régulier en  $x$  si et seulement si l'une des dérivées partielles de  $P$  en  $x$  ne s'annule pas.

**Preuve du théorème 6.17 :** Posons  $Y = \mathbf{A}_k^n$ , alors  $X$  est équipé d'une immersion fermée  $f : X \rightarrow Y$  donnée par les  $F_i$ . Soit  $x$  un point de  $X$  de corps résiduel  $k$ , posons  $y = f(x)$ . Soit  $J$  l'idéal maximal de  $k[T_1, \dots, T_n]$  correspondant à  $y$ . Montrons un lemme (qui ne concerne que  $Y$ ) :

**Lemme 6.18** Soient  $E$  le  $k$ -espace vectoriel  $k^n$  et  $E^*$  son dual. Soit  $D$  l'application de  $k[T_1, \dots, T_n]$  dans  $E^*$  définie par

$$D(P)(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial T_i}(y) t_i \quad , P \in k[T_1, \dots, T_n], \quad (t_1, \dots, t_n) \in k^n$$

- a) La restriction de  $D$  à  $J$  induit un isomorphisme de  $J/J^2$  sur  $E^*$ .  
b) L'espace tangent  $T_{Y,y}$  est isomorphe à  $E$  (donc  $Y$  est régulier en  $y$ ).

**Démonstration :** a) Comme  $y$  est un point fermé de  $Y$  de corps résiduel  $k$ , l'idéal  $J$  est de la forme  $(T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$  avec  $y = (a_1, \dots, a_n)$  (les  $a_i$  sont les images des  $T_i$  par la surjection canonique  $k[T_1, \dots, T_n] \rightarrow k[T_1, \dots, T_n]/\wp$ , où  $\wp$  est l'idéal maximal correspondant à  $y$ ). On obtient alors le résultat en écrivant le développement de Taylor au premier ordre en  $y = (a_1, \dots, a_n)$  d'un polynôme de  $A := k[T_1, \dots, T_n]$  : tout polynôme  $P$  de  $A$  s'écrit de manière unique

$$P = P(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial T_i}(a_1, \dots, a_n)(T_i - a_i) + Q$$

avec  $Q \in J^2$ .

b) Le résultat découle de a) et du lemme 6.16 appliqué à l'anneau  $A = k[T_1, \dots, T_n]$  et à son idéal maximal  $J$ . □

On peut maintenant finir la preuve du théorème 6.17. Soit  $I$  l'idéal de  $A = k[T_1, \dots, T_n]$  engendré par les  $F_i$  et  $M = J/I$  l'idéal maximal de  $A/I$  correspondant au point  $x$  de  $X = \text{Spec}(A/I)$ . On a une suite exacte de  $k$ -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow I/(I \cap J^2) \rightarrow J/J^2 \rightarrow M/M^2 \rightarrow 0$$

Seule l'exactitude au milieu n'est pas évidente. Si  $\pi$  est la projection  $A \rightarrow A/I$ , alors  $M = \pi(J)$  et  $M^2 = \pi(J^2)$ . Ainsi un élément  $j$  de  $J$  a une image nulle dans  $M/M^2$  si et seulement si  $\pi(j) = \pi(j_2)$  avec  $j_2 \in J^2$ , ce qui signifie  $j = j_2 + i$  avec  $i \in I$ . L'exactitude voulue en découle.

En utilisant l'isomorphisme du lemme précédent a), on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow D(I) \rightarrow E^* \rightarrow M/M^2 \rightarrow 0$$

On obtient que  $\dim_k M/M^2 = n - \dim_k D(I)$  ou encore, via le lemme 6.16, que  $\dim_k T_{X,x} = n - \dim_k D(I)$ . Or  $D(I)$  est engendré par les lignes de  $J_x$  donc  $\dim_k T_{X,x} = n - \text{rg } J_x$ , ce qui prouve que  $X$  est régulier en  $x$  si et seulement si  $n - \text{rg } J_x = \dim_x X$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque :** Si on ne fait aucune hypothèse, il n'est pas vrai que l'ensemble des points réguliers d'un schéma  $X$  soit ouvert. C'est ce qui motive l'introduction de la notion d'anneau "J - 1" ou "J - 2". En particulier les anneaux *excellents* ont cette propriété, ainsi que celle d'être de Nagata, voir [Mat], chapitre 13. Toute algèbre de type fini sur un corps (ou sur  $\mathbf{Z}$ ) a cette propriété, ce qui fait que l'ensemble des points réguliers d'un schéma de type fini sur un corps est toujours ouvert. Voir aussi [L], cor. 2.40 p. 343.

### 6.3. Morphismes plats

Soit  $A$  un anneau. Rappelons qu'un  $A$ -module  $M$  est *plat* si le foncteur  $\cdot \otimes_A M$  est exact à gauche; l'exactitude à droite étant automatique, c'est équivalent à dire que si  $M_1 \rightarrow M_2$  est un homomorphisme injectif de  $A$ -modules, alors l'homomorphisme correspondant  $M_1 \otimes_A M \rightarrow M_2 \otimes_A M$  reste injectif. Un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$  est dit plat s'il fait de  $B$  un  $A$ -module plat.

**Exemples :** a) Tout  $A$ -module libre est plat (c'est toujours le cas si  $A$  est un corps). Pour le voir il suffit d'observer que si  $M$  est isomorphe à  $A^{(I)}$  (familles presque nulles d'éléments de  $A$  indexées par un ensemble  $I$ ), alors pour tout  $A$ -module  $N$  on a  $N \otimes_A M$  isomorphe à  $N^{(I)}$ .

b)  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  n'est pas plat sur  $\mathbf{Z}$ . Plus généralement si  $A$  est un anneau intègre, alors un  $A$ -module plat  $M$  est sans torsion (si  $a \neq 0$ , la multiplication par  $a$  dans  $A$  est injective, donc aussi celle dans  $M = A \otimes_A M$ ). Sur un anneau principal, plat est équivalent à sans torsion (voir [AC, 13], a)).

c) La platitude est locale :  $M$  est plat sur  $A$  si et seulement si pour tout  $\wp$  de  $\text{Spec } A$ , le module localisé  $M_\wp = M \otimes_A A_\wp$  est plat sur  $A_\wp$ . D'autre part un homomorphisme d'anneaux  $\varphi : A \rightarrow B$  est plat si et seulement si pour tout  $\wp \in \text{Spec } B$ , l'homomorphisme  $A_{\varphi^{-1}(\wp)} \rightarrow B_\wp$  est plat ([AC, 13], b)).

d) Si  $M$  est de type fini sur  $A$  avec  $A$  noethérien, alors  $M$  est plat si et seulement si c'est un module *projectif* (=facteur direct d'un libre). Il revient au même de dire que pour tout  $\wp$  de  $\text{Spec } A$ , le module  $M_\wp$  est libre sur  $A_\wp$  (plus généralement, sur un anneau local, plat est équivalent à libre pour un module de type fini, voir [AC, 13], c)). Si de plus  $A$  est intègre, c'est encore

équivalent à : pour tout  $\wp$  de  $\text{Spec } A$ , la dimension de  $M \otimes_A k(\wp)$  sur le corps résiduel  $k(\wp)$  est la même. Voir [AC, 14].

e) Le composé de deux homomorphismes plats est plat ([AC, 15]).

f) Si  $M$  est plat sur  $A$  et si  $B$  est une  $A$ -algèbre, alors  $M \otimes_A B$  est plat sur  $B$  ([AC, 15]).

**Définition 6.19** Un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  est *plat en*  $x \in X$  si l'homomorphisme induit  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  (où  $y = f(x)$ ) est plat. Le morphisme  $f$  est dit *plat* s'il est plat en tout  $x$  de  $X$ . Il est dit *fidèlement plat* s'il est plat et surjectif.

La proposition suivante se déduit immédiatement des propriétés des homomorphismes plats entre anneaux :

**Proposition 6.20** a) *Les immersions ouvertes sont des morphismes plats (mais pas les immersions fermées en général).*

b) *Le composé de deux morphismes plats est plat.*

c) *La platitude est stable par changement de base.*

On a d'autre part le théorème suivant ([AC, 16]) :

**Théorème 6.21** *Si  $\varphi : A \rightarrow B$  est un homomorphisme plat entre anneaux, alors  $\varphi$  satisfait le "going-down" : si  $\wp_1$  et  $\wp'_1$  sont deux idéaux premiers de  $A$  avec  $\wp_1 \subset \wp'_1$ , alors pour tout idéal premier  $\wp'_2$  de  $B$  au-dessus de  $\wp'_1$ , il existe un idéal premier  $\wp_2$  de  $B$  au-dessus de  $\wp_1$  avec  $\wp_2 \subset \wp'_2$ .*

Il n'est en général pas évident de déterminer si un morphisme est plat. Le cas fini est toutefois plus facile, via le résultat cité plus haut ([AC, 14]) sur les modules de type fini. Un morphisme fini  $f : X \rightarrow Y$  (avec  $Y$  noethérien) est plat si et seulement si pour tout ouvert affine  $V = \text{Spec } A$  de  $Y$ , l'image réciproque  $f^{-1}(V) = \text{Spec } B$  est telle que  $B$  est un  $A$ -module localement libre (i.e. pour tout  $\wp$  de  $\text{Spec } A$ ,  $B \otimes_A A_\wp$  est libre sur  $A_\wp$ ), c'est-à-dire projectif. Si de plus  $Y$  est intègre, cela revient à dire que pour tout  $y$  de  $Y$ , la fibre  $X_y$  est le spectre d'un  $k(y)$ -espace vectoriel de dimension<sup>39</sup> constante  $d$  (qui est le rang du module projectif ci-dessus).

On a d'autre part le théorème plus difficile suivant ([AC, 17]) :

**Théorème 6.22** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini et surjectif entre schémas réguliers. Alors  $f$  est plat.*

---

<sup>39</sup>Attention, on ne confondra pas ici avec la dimension du schéma  $X_y$ , qui est nulle vu que  $X_y$  est fini sur le spectre d'un corps.

**Exemples :** a) L'hypothèse de surjectivité est nécessaire pour avoir le théorème précédent (considérer une immersion fermée).

b) L'hypothèse de régularité est également nécessaire<sup>40</sup> : si on prend pour  $X$  la réunion de deux plans se coupant en un point  $P$  de  $\mathbf{A}_k^4$  et  $Y = \mathbf{A}_k^2$ , on obtient un morphisme fini  $f : X \rightarrow Y$  en envoyant chaque plan de  $X$  isomorphiquement sur  $Y$  (voir [H], II.9., exercices, pour des équations explicites). Ce morphisme n'est pas plat car pour  $y \in Y$  autre que  $f(P)$ , la fibre en  $y$  est le spectre d'un  $k(y)$ -espace vectoriel de dimension 2, tandis qu'en  $y = f(P)$ , cette dimension est 1.

c) Soit  $A$  un anneau noethérien, intègre, non normal. Supposons le morphisme de normalisation  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  fini<sup>41</sup>. Alors d'après ce qui précède,  $f$  n'est pas plat (sinon ce serait un isomorphisme puisque la fibre générique est isomorphe au spectre du corps des fractions de  $A$  et  $B$ ).

Dans le cas d'un morphisme qui n'est pas fini, la situation est plus compliquée. Le théorème 6.21, joint au théorème de Chevalley (qui dit que l'image d'un *constructible* par un morphisme de type fini entre schémas noethériens est constructible ; voir [Mat], chapitre 2 ou encore le texte de problème

<http://www.math.u-psud.fr/~harari/enseignement/geoalg/dm.pdf> pour les détails) permet d'obtenir la condition nécessaire suivante :

**Théorème 6.23** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini et plat entre schémas noethériens. Alors  $f$  est une application ouverte (i.e. l'image de tout ouvert par  $f$  est un ouvert).*

On en déduit :

**Corollaire 6.24** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini et plat entre schémas noethériens. On suppose  $Y$  irréductible. Alors tout ouvert non vide  $U$  de  $X$  domine  $Y$  (i.e.  $f(U)$  contient le point générique de  $Y$ ). Toute composante irréductible de  $X$  domine  $Y$ .*

La première assertion résulte du théorème 6.23 et de ce que tout ouvert non vide de  $Y$  contient le point générique de  $Y$ . On en déduit la seconde assertion parce qu'une composante irréductible d'un schéma noethérien contient un ouvert non vide (le complémentaire de la réunion des autres composantes) de ce schéma.

□

---

<sup>40</sup>On peut affaiblir un peu les hypothèses en supposant seulement que  $X$  est *Cohen-Macaulay*.

<sup>41</sup>Cette dernière hypothèse est en fait inutile.

Obtenir une condition suffisante de platitude est plus difficile. Voici une réciproque du corollaire précédent dans un cas particulier :

**Theorème 6.25** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas avec  $X$  réduit et  $Y$  noethérien, normal et de dimension 1. On suppose que toute composante irréductible de  $X$  domine  $Y$ . Alors  $f$  est plat.*

Notons que le théorème s'applique en particulier quand  $X$  est intègre et  $f$  non constant, car alors l'adhérence  $F$  de  $f(X)$  est un fermé infini (sinon  $f(X)$  ne serait pas connexe) de  $X$ , donc  $F$  possède une composante irréductible de dimension  $> 0$ , ce qui impose  $F = Y$  (avec la proposition 4.7, b)) vu que  $Y$  est irréductible de dimension 1. Rappelons aussi que pour un schéma noethérien de dimension 1, normal est équivalent à intègre et régulier.

**Démonstration :** Soient  $x \in X$  et  $y = f(x)$ . On peut supposer que  $y$  est un point fermé de  $Y$  (sinon c'est le point générique et la platitude en  $x$  est claire). Soit  $\pi$  une uniformisante de l'anneau de valuation discrète  $\mathcal{O}_{Y,y}$ . Alors l'image  $t$  de  $\pi$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  n'est dans aucun idéal premier minimal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ , sinon  $y$  serait l'image du point générique d'une composante irréductible de  $X$ , donc serait le point générique de  $Y$ . Or on a le lemme :

**Lemme 6.26** *Soient  $A$  un anneau réduit et  $a$  un élément de  $A$  qui est un diviseur de zéro. Alors  $a$  appartient à un idéal premier minimal de  $A$ .*

Supposons le lemme démontré. Alors, comme  $X$  est supposé réduit, on en déduit que  $t$  n'est pas diviseur de zéro dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Ainsi  $\mathcal{O}_{X,x}$  est sans torsion sur  $\mathcal{O}_{Y,y}$ , c'est-à-dire plat puisque  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est un anneau principal.

Il reste à démontrer le lemme. Comme  $a$  est diviseur de zéro, l'application de localisation  $A \rightarrow A_a$  n'est pas injective. Soit  $I$  son noyau, on a alors  $V(I) \neq \text{Spec } A$  car  $A$  est réduit. Cela implique que l'ouvert  $D(a)$  de  $\text{Spec } A$  n'est pas dense car il est inclus dans le fermé strict  $V(I)$  (si  $\wp \in \text{Spec } A$  est tel que  $a \notin \wp$  et si  $x \in I$ , alors il existe  $m > 0$  avec  $a^m x = 0$  d'où  $x \in \wp$ ; ainsi  $\wp \supset I$ ). En particulier  $\text{Spec } A$  possède une composante irréductible<sup>42</sup> dont le point générique  $\eta$  n'est pas dans  $D(a)$ ; alors  $\eta$  correspond à un idéal premier minimal  $\wp$  de  $A$  avec  $a \in \wp$ .

□

**Contre-exemples :** Les hypothèses sur  $Y$  du théorème précédent sont assez restrictives, mais ne peuvent pas être relâchées. En effet :

---

<sup>42</sup>à condition d'utiliser le lemme de Zorn, on a bien que tout point est contenu dans une composante irréductible. Le lecteur pourra s'il préfère supposer  $X$  noethérien dans le théorème 6.25.



a) On ne peut se passer de l'hypothèse  $Y$  régulier (même si on suppose  $Y$  intègre, noethérien et de dimension 1) dans le théorème : un contre-exemple est fourni par le morphisme de normalisation pour le spectre d'un anneau intègre, noethérien, de dimension 1 et non normal.

b) Soit  $Y = \mathbf{A}_k^2$  et soit  $X$  le sous-schéma fermé de  $\mathbf{A}_k^2 \times_k \mathbf{P}_k^1 = \mathbf{P}_{k[x_1, x_2]}^1$  défini par l'équation

$$x_1 y_1 = x_2 y_0$$

où  $x_1, x_2$  sont les deux coordonnées dans  $\mathbf{A}_k^2$  et  $(y_0 : y_1)$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbf{P}_k^1$ . En d'autres termes,  $X$  est le fermé  $V_+(x_1 y_1 - x_2 y_0)$  de  $\mathbf{P}_{k[x_1, x_2]}^1$ . On dit que  $X$  est l'éclaté de  $\mathbf{A}_k^2$  en  $P = (0, 0)$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  le morphisme obtenu par restriction de la première projection. Alors  $f$  induit un isomorphisme de  $X - f^{-1}(\{P\})$  sur  $Y - \{P\}$  mais  $f^{-1}(\{P\})$  est isomorphe à la droite projective, qui est de dimension 1 et non zéro. Le morphisme  $f : X \rightarrow Y$  n'est pas plat parce que la dimension de l'une des fibres est trop grande (voir corollaire 6.31 ci-dessous). Ici le problème vient de ce que  $Y$  n'est pas de dimension 1.

La principale conséquence de la platitude est que la dimension des fibres d'un morphisme plat "est la bonne", à condition de travailler avec les dimensions locales et dans un cadre noethérien. Plus précisément :

**Théorème 6.27** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme plat de schémas localement noethériens. Soient  $x \in X$  et  $y := f(x)$ . On note  $X_y$  la fibre de  $f$  en  $y$ . Alors on a :*

$$\dim_x X_y = \dim_x X - \dim_y Y$$

**Remarque :** La démonstration va montrer que sans l'hypothèse de platitude on a quand même l'inégalité

$$\dim_x X_y \geq \dim_x X - \dim_y Y$$

On commence par rappeler quelques résultats d'algèbre commutative liée à la théorie de la dimension d'un anneau local noethérien. Le théorème ci-dessous est une version du célèbre "Hauptidealsatz" de Krull :

**Théorème 6.28 (Krull)** *Soit  $A$  un anneau noethérien. Soit  $a$  un élément non inversible de  $A$ . Alors les idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent  $a$  sont de hauteur  $\leq 1$ , et exactement 1 si  $a$  n'est pas diviseur de zéro.*

Voir [AC, 11], a).

Une conséquence de ce résultat est

**Théorème 6.29** Soit  $A$  un anneau local noethérien. Soient  $\mathcal{M}$  l'idéal maximal de  $A$  et  $f \in \mathcal{M}$ . Alors  $\dim(A/fA) \geq \dim A - 1$ , avec égalité si  $f$  n'appartient à aucun idéal premier minimal de  $A$ , et en particulier si  $f$  n'est pas un diviseur de zéro<sup>43</sup>.

Voir [AC, 11], b).

On aura aussi besoin du lemme suivant, qui a un intérêt propre

**Lemme 6.30** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Soit  $x \in X$  et soit  $y := f(x)$ . Alors l'anneau local en  $x$  de la fibre  $X_y$  est  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_y\mathcal{O}_{X,x}$ .

**Démonstration :** On se ramène tout de suite à  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$  affines, le morphisme  $f$  correspondant à un homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  et le point  $x$  à un idéal  $I$  de  $B$  dont l'image réciproque  $\wp$  par  $\varphi$  correspond à  $y$ . Soit  $k(y) = A_\wp/\wp A_\wp$  le corps résiduel de  $y$ . L'anneau local de la fibre  $X_y$  en  $x$  est alors le localisé de  $(B \otimes_A k(y))$  en  $I \otimes_A k(y)$ . Comme la localisation commute avec le produit tensoriel, c'est aussi  $B_I \otimes_A (A_\wp/\wp A_\wp)$ , ou encore  $B_I/\wp B_I = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_y\mathcal{O}_{X,x}$ . □

**Preuve du théorème 6.27 :** Pour montrer le théorème, on peut supposer  $Y = \text{Spec } A$  affine. Quitte à faire le changement de base par  $\text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow Y$ , on peut même supposer (via le lemme 6.30) que  $A$  est un anneau local noethérien et que  $y$  est le point fermé de  $Y$ . On raisonne alors par récurrence sur  $\dim Y$  (qui est finie via [AC, 11], c))

Pour  $\dim Y = 0$ , le schéma  $Y$  est réduit à un point vu que  $A$  est local ; ainsi  $X$  et  $X_y$  ont même espace topologique sous-jacent et la formule est claire dans ce cas.

Supposons le résultat vrai pour  $\dim Y = d$  et montrons-le pour  $\dim Y = d + 1$ . Quitte à remplacer  $Y$  par  $Y_{\text{red}}$  et  $X$  par  $X \times_Y Y_{\text{red}}$ , on peut supposer  $Y$  réduit. Soit alors  $t$  un élément de  $A$  qui n'est ni inversible, ni diviseur de zéro. L'existence d'un tel  $t$  est assurée par le fait que la réunion des idéaux premiers minimaux de  $A$  n'est pas tout l'idéal maximal  $\mathcal{M}$  de  $A$  (on montre facilement par récurrence sur  $r$  que la réunion de  $r$  idéaux premiers d'un anneau ne peut contenir un idéal  $I$  que si l'un de ces idéaux contient  $I$  ; d'autre part  $\mathcal{M}$  n'est pas un idéal premier minimal car  $\dim A > 0$ ) et par le

---

<sup>43</sup>Si  $f$  est dans un idéal premier minimal, alors  $D(f)$  n'est pas dense dans  $\text{Spec } A$  ce qui montre que l'homomorphisme  $A \rightarrow A_f$  n'est pas injectif ; autrement dit la réciproque du lemme 6.26 est vraie dans tout anneau noethérien

lemme 6.26. Notons encore  $t$  l'image de  $t$  dans  $B = \mathcal{O}_{X,x}$ . On a alors, via le théorème 6.29 :

$$\dim(A/tA) = \dim A - 1 \quad \dim(B/tB) = \dim B - 1$$

la dernière égalité résultant de ce que  $t$  ne devient pas un diviseur de zéro dans  $B$  vu que  $B$  est plat sur  $A$  (tensoriser par  $B$  l'homomorphisme injectif de multiplication par  $t$  dans  $A$ ).

Soit alors  $Y'$  le sous-schéma fermé  $\text{Spec}(A/tA)$  de  $Y$ , et  $X' := X \times_Y Y'$  (c'est un sous-schéma fermé de  $X$ ). Comme  $t \in \mathcal{M}$ , le point  $y$  est dans  $Y'$  et le point  $x$  est donc dans  $X'$  avec  $X'_y = X_y$ . De plus  $\dim_x X' = \dim(B/tB)$  et  $\dim_y Y' = \dim(A/tA)$ . Par hypothèse de récurrence appliqué au morphisme plat (par changement de base)  $X' \rightarrow Y'$ , on a donc

$$\dim_x X'_y = \dim_x X' - \dim_y Y'$$

d'où

$$\dim_x X_y = (\dim_x X - 1) - (\dim_y Y - 1) = \dim_x X - \dim_y Y$$

□

**Remarque :** Quand  $X$  et  $Y$  sont réguliers, on a une sorte de réciproque du théorème 6.27, cf. [H], exercice 10.9.

Le corollaire suivant est une version globale du théorème 6.27 dans le cadre des schémas de type fini sur un corps. En pratique c'est plutôt cet énoncé qui est utile.

**Corollaire 6.31** *Soient  $k$  un corps et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme plat entre schémas de type fini sur  $k$ . On suppose  $Y$  irréductible et  $X$  pur. Alors pour tout point  $y$  de  $Y$  (fermé ou non), la fibre  $X_y$  est soit vide, soit pure avec*

$$\dim X_y = \dim X - \dim Y$$

**Démonstration :** Soit  $y \in Y$  qui est dans l'image de  $f$  (i.e. la fibre  $X_y$  n'est pas vide). Soit  $Z$  une composante irréductible de la fibre  $X_y$ . Comme cette fibre est un schéma de type fini sur le corps résiduel  $k(y)$  de  $y$ , on peut choisir (théorème 4.12) un point fermé  $x$  de  $Z$  qui n'est dans aucune autre composante irréductible de  $X_y$  (et on peut également supposer que  $x$  n'est que dans une composante irréductible  $X_i$  de  $X$  car la réunion des autres composantes est un fermé strict de  $X$ ). On a alors

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{X_i,x} = \dim X_i - \dim \overline{\{x\}}$$

(où  $\overline{\{x\}}$  est l'adhérence de  $x$  dans  $X$ ) d'après la proposition 4.11 car  $\dim \mathcal{O}_{X_i, x}$  est la codimension de  $\overline{\{x\}}$  dans  $X_i$ . Comme  $X$  est pur, on obtient  $\dim \mathcal{O}_{X, x} = \dim X - \dim \overline{\{x\}}$ . On a de même  $\dim_x Z = \dim Z$  via le choix de  $x$  et  $\dim \overline{\{y\}} = \dim Y - \dim \mathcal{O}_{Y, y}$ . D'après le théorème 6.27, on a  $\dim_x Z = \dim \mathcal{O}_{X, x} - \dim \mathcal{O}_{Y, y}$  et on est donc ramené à prouver que  $\overline{\{x\}}$  et  $\overline{\{y\}}$  ont même dimension.

Or  $x$  est le point générique de  $\overline{\{x\}}$  (vu comme schéma intègre de type fini sur  $k$  quand on l'équipe de sa structure réduite; son corps des fonctions est  $k(x)$ ) d'où d'après le théorème 4.9 :

$$\dim \overline{\{x\}} = \text{trdeg}_k k(x) = \text{trdeg}_k k(y)$$

la dernière égalité résultant de ce que  $k(x)$  est algébrique sur  $k(y)$  parce que  $x$  est un point fermé de  $X_y$  de corps résiduel  $k(x)$  (le corps résiduel de  $x$  est le même sur  $X$  et sur  $X_y$  vu que l'anneau local de  $X_y$  en  $x$  est  $\mathcal{O}_{X, x} / \mathcal{M}_y \mathcal{O}_{X, x}$  par le lemme 6.30). Ainsi  $\dim \overline{\{x\}} = \dim \overline{\{y\}}$  comme on voulait.  $\square$

**Remarque :** Sans l'hypothèse de platitude, on obtient seulement que toute composante irréductible de  $X_y$  est de dimension au moins  $\dim X - \dim Y$ .

## 6.4. Morphismes étales, morphismes lisses

La notion de morphisme lisse est une version relative de celle de schéma régulier. Dans ce paragraphe, on va se contenter des premières propriétés liées à la lissité (une étude plus approfondie nécessite l'utilisation du faisceau des différentielles, cf. [H], II.8 et III.10). On commence par une notion plus forte :

**Définition 6.32** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini entre schémas localement noethériens. Soient  $x \in X$  et  $y := f(x)$ . On dit que  $f$  est *non ramifié*<sup>44</sup> en  $x$  si l'image de l'idéal maximal  $\mathcal{M}_y$  de  $\mathcal{O}_{Y, y}$  dans  $\mathcal{O}_{X, x}$  engendre l'idéal maximal  $\mathcal{M}_{X, x}$  de  $\mathcal{O}_{X, x}$ , avec de plus l'extension de corps  $k(x)/k(y)$  finie séparable. On dit que  $f$  est *étale* en  $x$  si  $f$  est plat et non ramifié en  $x$ . On dit que  $f$  est non ramifié (resp. étale) s'il est non ramifié (resp. étale) en chacun de ses points.

Le quotient  $\mathcal{O}_{X, x} / \mathcal{M}_y \mathcal{O}_{X, x}$  est aussi  $\mathcal{O}_{X_y, x}$  via le lemme 6.30; ainsi le fait que  $\mathcal{M}_y \mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{M}_{X, x}$  implique que pour tout point  $x$  de la fibre  $X_y$ , l'anneau

<sup>44</sup> *net* dans le langage des EGA.

local  $\mathcal{O}_{X_y, x}$  est un corps. Comme  $X_y$  est de type fini sur  $k(y)$ , cela signifie que la fibre  $X_y$  est finie et réduite (c'est le spectre d'un produit fini de corps); en particulier l'extension  $k(x)/k(y)$  est automatiquement finie. On obtient donc :

**Proposition 6.33** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini entre schémas localement noethériens. Alors  $f$  est non ramifié si et seulement si pour tout  $y$  de  $Y$ , la fibre  $X_y$  est finie sur  $k(y)$ , réduite, et l'extension finie  $k(x)/k(y)$  est séparable pour tout  $x$  de  $X_y$ .*

**Exemples :** a) Une extension de corps est non ramifiée (donc étale) si et seulement si elle est finie et séparable.

b) Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ . Alors la notion usuelle d'extension non ramifiée correspond au fait que le morphisme  $\text{Spec } \mathcal{O}_L \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}_p$  soit non ramifié au sens de la définition 6.32. La situation est similaire pour une extension finie de corps de nombres.

c) Une immersion fermée est non ramifiée. Une immersion ouverte est étale. Les morphismes étales et les morphismes non ramifiés sont stables par composition et changement de base.

d) Soit  $X$  le schéma affine  $\text{Spec}(k[x, y]/(y^2 - x))$  et  $Y = \mathbf{A}_k^1$  où  $k$  est un corps de caractéristique différente de 2. Le morphisme  $f : (x, y) \mapsto x$  de  $X$  vers  $Y$  est étale partout sauf en  $(0, 0)$  (la fibre en 0 est isomorphe à  $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ ). Noter que la fibre en  $a$  est le spectre d'un corps si  $a$  n'est pas un carré dans  $k$ , isomorphe à  $\text{Spec}(k(a) \times k(a))$  sinon.

Voici une propriété importante des morphismes étales :

**Proposition 6.34** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme étale entre schémas localement noethériens. Soit  $x \in X$  et  $y = f(x)$ . Alors :*

- a) On a  $\dim \mathcal{O}_{X, x} = \dim \mathcal{O}_{Y, y}$ .
- b) L'application tangente  $T_{X, x} \rightarrow T_{Y, y} \otimes_{k(y)} k(x)$  est un isomorphisme.

**Démonstration :** Le a) résulte de la proposition 6.33 et du théorème 6.27. Pour le b), on note qu'en posant  $A = \mathcal{O}_{Y, y}$  et  $B = \mathcal{O}_{X, x}$ , on a d'après le début de la preuve du lemme 6.16 :

$$(\mathcal{M}_y/\mathcal{M}_y^2) \otimes_{k(y)} k(x) = (\mathcal{M}_y \otimes_A k(y)) \otimes_{k(y)} k(x) = \mathcal{M}_y \otimes_A k(x)$$

et  $(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) = \mathcal{M}_x \otimes_B k(x)$ ; comme  $f$  est non ramifié, on a  $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y B$  et comme  $f$  est plat on a  $\mathcal{M}_y \otimes_A B \simeq \mathcal{M}_y B$  d'où  $\mathcal{M}_x \otimes_A k(x) = \mathcal{M}_y \otimes_A k(x)$ . Finalement  $(\mathcal{M}_y/\mathcal{M}_y^2) \otimes_{k(y)} k(x) \simeq \mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$ . C'est ce qu'on voulait.  $\square$

**Définition 6.35** Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps  $k$ . Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . On dit que  $X$  est *lisse* sur  $k$  si  $X_{\bar{k}} = X \times_k \bar{k}$  est régulier.

Par exemple, l'espace affine et l'espace projectif sur un corps  $k$  sont lisses sur  $k$ . La lissité peut se tester via le critère jacobien (théorème 6.17) appliqué à  $X_{\bar{k}}$ .

**Proposition 6.36** Soit  $X$  un schéma de type fini sur un corps parfait  $k$ . Alors  $X$  est lisse sur  $k$  si et seulement si  $X$  est un schéma régulier.

**Démonstration :** Soit  $x$  un point fermé de  $X$ , on peut choisir un point fermé  $x'$  de  $X_{\bar{k}}$  au-dessus de  $x$ . On va montrer que  $X$  est régulier en  $x$  si et seulement si  $X_{\bar{k}}$  est régulier en  $x'$ . Il suffit de le faire quand  $X = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r))$  est affine.

On commence par le cas où  $x$  a pour corps résiduel  $k$ . Les matrices jacobiniennes  $J_x$  et  $J_{x'}$  sont alors les mêmes. D'après le théorème 6.27 appliqué au morphisme plat  $X_{\bar{k}} \rightarrow X$  (dont la fibre en  $x$  est de dimension zéro), on a aussi  $\dim_x X = \dim_{x'} X_{\bar{k}}$ . Le critère jacobien (théorème 6.17) donne alors le résultat dans ce cas.

Passons au cas général. Soit  $k_1 = k(x)$  le corps résiduel de  $x$ , qui est une extension finie séparable de  $k$ . Soit  $x_1$  un point fermé de  $X_1 = X \times_k k_1$  au-dessus de  $x$ . D'après ce qui précède, il suffit de montrer que  $x_1$  est régulier si et seulement si  $x$  est régulier. Mais ceci résulte de la proposition 6.34 car comme  $k_1/k$  est finie séparable, la projection  $X_1 \rightarrow X$  est étale.

□

**Remarque :** Notons qu'on a montré un résultat un peu plus précis :  $X$  est régulier en  $x$  ssi  $X_{\bar{k}}$  est régulier en  $x'$ , où  $x'$  est un point fermé de  $X_{\bar{k}}$  au-dessus de  $x$ . D'autre part, si  $X$  est lisse,  $X$  est régulier sans hypothèse sur  $k$ . Cela résulte de ce que si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme fidèlement plat et de type fini entre schémas noethériens, la régularité de  $X$  implique celle de  $Y$ , voir [Mat], 21D, théorème 51 (on peut aussi faire une preuve directe en adaptant le critère jacobien au cas d'un point fermé quelconque).

**Définition 6.37** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini entre schémas localement noethériens. Soient  $x \in X$  et  $y = f(x)$ . On dit que  $f$  est *lisse* s'il est plat et si la fibre  $X_y$  est lisse sur  $k(y)$  pour tout  $y$  de  $Y$ . On dit que  $f$  est *lisse de dimension relative  $n$*  si de plus toutes les fibres non vides de  $f$  sont pures de dimension  $n$ .

Ainsi étale signifie exactement lisse de dimension relative zéro.

**Theorème 6.38** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme lisse entre schémas localement noethériens. Supposons  $Y$  régulier. Alors  $X$  est régulier.*

**Démonstration :** Soient  $x \in X$  et  $y = f(x)$ . Posons  $m = \dim \mathcal{O}_{X,x}$  et  $n = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$ . D'après le théorème 6.27, on a  $\dim_x X_y = m - n$ . Comme la fibre  $X_y$  est lisse sur  $k(y)$ , elle est en particulier régulière en  $x$  et on peut engendrer l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X_y,x}$  par  $m - n$  éléments  $b'_{n+1}, \dots, b'_m$ . Comme  $\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_y\mathcal{O}_{X,x}$ , on peut relever les  $b'_i$  en des  $b_i$  de  $\mathcal{M}_x$ . On complète avec des générateurs  $a_1, \dots, a_n$  de  $\mathcal{M}_y$  (en utilisant la régularité de  $\mathcal{O}_{Y,y}$ ) pour obtenir une famille de  $m$  générateurs de  $\mathcal{M}_x$  avec les  $b_i$  et les images des  $a_i$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ .

□

**Corollaire 6.39** *Les morphismes lisses sont stables par changement de base et composition.*

## 7. Premières propriétés des $\mathcal{O}_X$ -modules

Tout comme un schéma est obtenu en recollant des spectres d'anneaux, un  $\mathcal{O}_X$ -module ( $X$  étant un schéma) va être un faisceau obtenu en recollant des modules sur les  $\mathcal{O}_X(U)$  pour  $U$  ouvert affine de  $X$ . Cette généralisation s'avère très fructueuse, par exemple pour étudier les plongements projectifs des schémas ou pour caractériser les schémas affines au moyen de propriétés cohomologiques. Ces dernières seront abordées à partir du chapitre 8.

### 7.1. Notion d' $\mathcal{O}_X$ -module et d' $\mathcal{O}_X$ -module cohérent

**Définition 7.1** Soit  $X$  un schéma. Un  $\mathcal{O}_X$ -module (ou faisceau de modules sur  $X$ ) est un faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur  $X$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{F}(U)$  soit un module sur l'anneau  $\mathcal{O}_X(U)$ , avec de plus compatibilité entre les applications de restriction  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  et  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  si  $V \subset U$ .

Un morphisme d' $\mathcal{O}_X$ -modules est un morphisme  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  de faisceaux tel que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'homomorphisme de groupes  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  soit un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X(U)$ -modules. Le noyau, l'image, et le conoyau d'un tel morphisme sont alors des  $\mathcal{O}_X$ -modules. On définit de même la notion de sous  $\mathcal{O}_X$ -module et de quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -module par un sous  $\mathcal{O}_X$ -module,

ou encore la somme directe d'une famille d' $\mathcal{O}_X$ -modules. Un *faisceau d'idéaux* sur  $X$  est un sous  $\mathcal{O}_X$ -module du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ .

Le *produit tensoriel*  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$  (ou simplement  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  si  $\mathcal{O}_X$  est sous-entendu) est le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ . Sa fibre en un point  $P$  est  $\mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{G}_P$ . Un  $\mathcal{O}_X$ -module est *libre* (resp. *libre de rang  $r$* ) s'il est isomorphe à  $\mathcal{O}_X^{(I)}$  pour un certain ensemble  $I$ , (resp. à  $\mathcal{O}_X^r$ ), *localement libre* (resp. *localement libre de rang  $r$* ) si  $X$  peut être recouvert par des ouverts  $U_i$  tels que pour tout  $i$ , la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U_i$  soit libre (resp. libre de rang  $r$ ). Un *faisceau inversible* est un faisceau localement libre de rang 1; cette terminologie vient de ce que pour un tel  $\mathcal{F}$ , le faisceau  $\mathcal{G} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$  vérifie<sup>45</sup> que  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X$ .

**Définition 7.2** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. L'*image directe* d'un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est le faisceau  $f_*\mathcal{F}$ , la structure de  $\mathcal{O}_Y$ -module étant donnée via le morphisme de faisceaux d'anneaux  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ .

L'*image inverse* d'un  $\mathcal{O}_Y$ -module  $\mathcal{G}$  est définie par  $f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ . Ici  $f^{-1}\mathcal{G}$  est le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$  et le morphisme de faisceaux  $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$  vient de  $f^\#$ .

Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Posons  $X = \text{Spec } A$ .

**Définition 7.3** On définit un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\widetilde{M}$  sur  $X$  exactement par le même procédé que quand on définit le faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ . En particulier on a  $\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$  pour tout  $f$  de  $A$ , et  $\widetilde{M}_\wp = M_\wp = M \otimes_A A_\wp$  pour tout  $\wp$  de  $\text{Spec } A$ .

La proposition suivante résume les propriétés de base du foncteur  $M \mapsto \widetilde{M}$ .

**Proposition 7.4** Soit  $X = \text{Spec } A$  un schéma affine.

- a) Pour toute famille  $(M_i)$  de  $A$ -modules, on a  $(\bigoplus M_i)^\sim = \bigoplus \widetilde{M}_i$
- b) Pour tous  $A$ -modules  $M, N$ , on a  $(M \otimes_A N)^\sim = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$ .
- c) Si  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est un morphisme de schémas, alors  $f_*(\widetilde{N}) = (\widetilde{f_*N})$  et  $f^*(\widetilde{M}) = (M \otimes_A B)^\sim$  pour tout  $A$ -module  $M$  et tout  $B$ -module  $N$ , où  ${}_A N$  désigne  $N$  vu comme  $A$ -module.
- d) Une suite de  $A$ -modules  $L \rightarrow M \rightarrow N$  est exacte si et seulement si la suite correspondante de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\widetilde{L} \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$  est exacte.

<sup>45</sup>Il s'agit ici du Hom interne : si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux faisceaux, alors le faisceau  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$  est défini par  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F}')(U) = \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{F}'|_U)$ , ce dernier terme n'étant pas la même chose que  $\text{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{F}'(U))$  en général.



**Démonstration :** Comme les ouverts principaux forment une base de la topologie de  $X$ , on peut comparer deux faisceaux sur  $X$  en comparant leurs sections sur chaque  $D(a)$ ,  $a \in A$ . Alors a) découle immédiatement des définitions et b) de ce que le produit tensoriel commute avec la localisation. La première formule de c) s'obtient en remarquant que l'image réciproque par  $f$  de  $D(a)$  est l'ouvert principal  $D(b)$ , où  $b$  est l'image de  $A$  par l'homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  correspondant à  $f$ . Pour calculer  $f^*(\widetilde{M})$ , on observe qu'une section de  $(M \otimes_A B)^\sim$  sur  $D(b)$  ( $b \in B$ ) induit une section de  $f^*(\widetilde{M})$  sur  $D(b)$ , d'où un morphisme de faisceaux  $(M \otimes_A B)^\sim \rightarrow f^*(\widetilde{M})$ . On obtient que c'est un isomorphisme en comparant les tiges en chaque  $\wp \in \text{Spec } A$  et en utilisant encore que le produit tensoriel commute avec la localisation.

Enfin, d) résulte de ce qu'une suite de  $A$ -modules  $L \rightarrow M \rightarrow N$  est exacte ssi la suite localisée  $L_\wp \rightarrow M_\wp \rightarrow N_\wp$  est exacte pour tout idéal premier  $\wp$  de  $A$  ("seulement si" vient de la platitude de  $A_\wp$  sur  $A$ ; "si" vient de ce qu'un  $A$ -module  $P$  est nul si tous ses localisés aux idéaux premiers de  $A$  sont nuls car alors pour tout  $x$  de  $P$ , l'annulateur de  $x$  n'est contenu dans aucun idéal maximal de  $A$ ).

□

**Définition 7.5** Soit  $X$  un schéma. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est un faisceau *quasi-cohérent* si  $X$  peut être recouvert par des ouverts affines  $U_i \cong \text{Spec } A_i$  tels que pour tout  $i$ , la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U_i$  soit isomorphe à  $\widetilde{M}_i$  pour un certain  $A_i$ -module  $M_i$ . Quand  $X$  est noethérien<sup>46</sup>, on dit que  $\mathcal{F}$  est *cohérent* si on peut de plus prendre chaque  $M_i$  de type fini sur  $A_i$ .

Le théorème suivant (joint à la proposition 7.4) montre que sur un schéma affine  $X = \text{Spec } A$ , on a une équivalence de catégories entre faisceaux quasi-cohérents et  $A$ -modules (resp. faisceaux cohérents et  $A$ -modules de type fini si  $A$  est noethérien).

**Théorème 7.6** Soit  $X = \text{Spec } A$  un schéma affine et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Alors il existe un  $A$ -module  $M$  tel que  $\mathcal{F} \simeq \widetilde{M}$ . Supposons de plus  $A$  noethérien; alors  $M$  est de type fini si et seulement si  $\mathcal{F}$  est cohérent.

**Remarque :** A isomorphisme près, le  $A$ -module  $M$  est déterminé par  $\mathcal{F}$  : c'est  $\mathcal{F}(X)$ .

---

<sup>46</sup>On se limitera pour cette notion au cas noethérien, sinon il faudrait remplacer "de type fini" par "de présentation finie" dans la définition.

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{F}$  quasi-cohérent sur  $X$ . On recouvre  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines  $(U_i)$  tels que  $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}(U_i)^\sim$ . On va montrer que pour tout  $f \in A$ , l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{F}(X)_f = \mathcal{F}(X) \otimes_A A_f \rightarrow \mathcal{F}(D(f))$$

est un isomorphisme, ce qui montrera que  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{F}(X)^\sim$ . Ceci est tout à fait analogue à la preuve du lemme 2.7, b).

Posons  $V_i = U_i \cap D(f) = D(f|_{U_i})$ . On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes (la première en vertu de la platitude de  $A \rightarrow A_f$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X)_f & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{F}(U_i)_f & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)_f \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(D(f)) & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{F}(V_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{F}(V_i \cap V_j) \end{array}$$

Comme  $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{F}(U_i)^\sim$ , l'application  $\gamma$  est un isomorphisme. En particulier  $\alpha$  est injective. Mais en appliquant alors ce résultat à chaque  $U_i \cap U_j$  (qui est lui-même affine car  $X$  est affine, donc séparé sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  ce qui permet d'appliquer la proposition 5.6.), on obtient que  $\beta$  est injective. Par chasse au diagramme,  $\alpha$  est un isomorphisme.

Supposons maintenant  $A$  noethérien. Si  $M$  est un  $A$ -module de type fini, alors  $\widetilde{M}$  est cohérent par définition. Réciproquement, si  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  est cohérent, alors on recouvre  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines principaux  $D(f_i)$  tels que chaque  $\mathcal{F}(D(f_i)) = M_{f_i}$  soit un module de type fini sur  $A_{f_i}$ . Comme  $M_{f_i} = M \otimes_A A_{f_i}$ , on peut trouver un sous-module  $N$  de type fini de  $M$  tel que  $M_{f_i} = N \otimes_A A_{f_i}$  pour tout  $i$ . Alors le morphisme canonique  $\widetilde{N} \rightarrow \widetilde{M}$  est un isomorphisme car sa restriction à tout  $D(f_i)$  en est un. □

**Corollaire 7.7** *Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Alors  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent si et seulement si pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ , on a  $\mathcal{F}(U)^\sim = \mathcal{F}|_U$ . Si  $X$  est noethérien, alors  $\mathcal{F}$  est cohérent si on a de plus (pour tout ouvert affine  $U$ )  $\mathcal{F}(U)$  de type fini sur  $\mathcal{O}_X(U)$ .*

**Corollaire 7.8** *a) Le noyau, l'image, et le conoyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents sont encore quasi-cohérents.*

*b) Une somme directe de faisceaux quasi-cohérents est un faisceau quasi-cohérent.*

*c) Le produit tensoriel de deux faisceaux quasi-cohérents est un faisceau quasi-cohérent.*

*Quand  $X$  est noethérien, a) et c) valent en remplaçant quasi-cohérent par cohérent; de même pour b) si on se limite aux sommes directes finies.*

**Corollaire 7.9** *Soit  $X$  un schéma affine. Alors pour toute suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

*d' $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents, la suite des sections globales*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

**Démonstration :** Le seul point non trivial est la surjectivité de  $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ . Posons  $M = \mathcal{G}(X)$  et  $N = \mathcal{H}(X)$ , puis  $P = \text{coker}[M \rightarrow N]$ . Par exactitude du foncteur  $\widetilde{\phantom{x}}$ , on obtient que la suite  $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N} \rightarrow \widetilde{P} \rightarrow 0$  est exacte. D'après la théorème 7.6, on a  $\widetilde{M} = \mathcal{G}$  et  $\widetilde{N} = \mathcal{H}$  d'où  $\widetilde{P} = 0$ , d'où  $P = 0$ .  $\square$

On verra plus tard, en utilisant des méthodes cohomologiques, que la conclusion du corollaire 7.9 vaut encore si on suppose seulement que  $\mathcal{F}$  est cohérent (pour une preuve directe de ce résultat plus fort, voir [H], proposition II.5.6. page 113; c'est une variante du lemme 7.15 démontré plus bas).

**Proposition 7.10** *Soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Alors  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent si et seulement si tout point  $x$  de  $X$  admet un voisinage ouvert  $U$  tel qu'on ait une suite exacte de faisceaux sur  $U$  du type :*

$$\mathcal{O}_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

*Si  $X$  est noethérien, alors  $\mathcal{F}$  est cohérent ssi on peut de plus prendre l'ensemble d'indices  $I$  fini (ou encore les ensembles d'indices  $I$  et  $J$  tous deux finis<sup>47</sup>) dans la suite exacte ci-dessus.*

**Démonstration :** Si  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent, alors pour tout point  $x$  de  $X$  on peut trouver un ouvert affine  $U = \text{Spec } A$  de  $X$ , avec  $x \in U$ , et un  $A$ -module  $M$  tel que la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U$  soit isomorphe à  $\widetilde{M}$ . En écrivant  $M$  comme quotient d'un module libre par l'image d'un module libre, on obtient que  $\mathcal{F}|_U$  est quotient d'un  $\mathcal{O}_U$ -module libre via l'exactitude du foncteur  $\widetilde{\phantom{x}}$  (proposition 7.4 d)).

En sens inverse, si tout  $x$  de  $X$  admet un voisinage ouvert  $U$  tel qu'on ait une suite exacte

$$\mathcal{O}_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

---

<sup>47</sup>Notons que ces définitions "locales" sont les définitions originales, dues à Serre, des faisceaux cohérents et quasi-cohérents.

alors on peut supposer  $U$  affine. D'après le corollaire 7.9, la suite

$$\mathcal{O}_U(U)^{(J)} \rightarrow \mathcal{O}_U(U)^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow 0$$

est alors exacte, et en appliquant le foncteur exact  $\widetilde{\phantom{x}}$ , on voit alors que  $\mathcal{F}|_U$  s'identifie à  $\widetilde{\mathcal{F}(U)}$ . Il est donc quasi-cohérent. La preuve de l'énoncé avec  $\mathcal{F}$  cohérent est identique en remarquant que sur un anneau noethérien, un sous-module d'un module de type fini est encore de type fini.  $\square$

**Exemples :** a) Tout faisceau localement libre est quasi-cohérent. Tout faisceau localement libre de type fini sur un schéma noethérien est cohérent.

b) Si  $i : Y \rightarrow X$  est une immersion fermée (avec  $X$  et  $Y$  noethériens), alors  $i_*\mathcal{O}_Y$  est cohérent sur  $X$ . C'est un cas particulier du théorème sur l'image directe ci-dessous, car une immersion fermée est un morphisme fini ; on peut le voir directement en remarquant que si  $X = \text{Spec } A$ , alors  $Y = \text{Spec } (A/I)$  et  $A/I$  est un  $A$ -module de type fini.

c) Si  $X$  est un schéma intègre de corps des fonctions  $K$ , alors le faisceau constant  $K$  est quasi-cohérent, mais pas cohérent si  $X$  n'est pas réduit à un point.

d) Soient  $X = \text{Spec } A$  avec  $A$  intègre, et  $U$  un ouvert strict de  $X$ . Soit  $j$  l'immersion ouverte de  $U$  dans  $X$ . Alors l' $\mathcal{O}_X$ -module  $j_!\mathcal{O}_U$  (qu'on ne confondra pas avec  $j_*\mathcal{O}_U$ )<sup>48</sup> n'est pas un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . En effet  $(j_!\mathcal{O}_U)(X)$  est le sous-module de  $\mathcal{O}_X(X) = A$  constitué des  $s$  dont la restriction  $s_\varphi \in A_\varphi$  à tout  $\varphi \notin U$  est nulle. Comme  $A$  est intègre et  $X - U$  est non vide, on obtient que  $(j_!\mathcal{O}_U)(X) = 0$  alors que  $(j_!\mathcal{O}_U)$  n'est pas le faisceau nul. S'il était quasi-cohérent, le théorème 7.6 serait ainsi contredit.

## 7.2. Images directes et inverses

Il est naturel de se demander si l'image directe ou l'image inverse d'un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) est encore un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent). Pour l'image inverse, tout se passe bien :

**Proposition 7.11** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Si  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent (resp. cohérent avec  $X, Y$  noethériens), alors  $f^*\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent (resp. cohérent).*

---

<sup>48</sup>Rappelons que si  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $U$ , alors  $j_!\mathcal{F}$  est le faisceau associé au préfaisceau  $V \mapsto \mathcal{F}(V)$  si  $V \subset U$ ,  $V \mapsto \{0\}$  sinon ; en particulier on a  $(j_!\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$  si  $x \in U$  et  $(j_!\mathcal{F})_x = 0$  si  $x \notin U$ .

**Démonstration :** On se ramène immédiatement à  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$  car si  $U$  et  $V$  sont des ouverts respectifs de  $X$  et  $Y$  avec  $f(U) \subset V$ , alors  $f^*\mathcal{G}|_U$  n'est autre que  $g^*(\mathcal{G}|_V)$ , où  $g : U \rightarrow V$  est la restriction de  $f$ . D'après le théorème 7.6, on a  $\mathcal{G} = \widetilde{M}$  pour un certain  $A$ -module  $M$  (avec  $M$  de type fini si  $\mathcal{G}$  est supposé cohérent), d'où  $f^*\mathcal{G} = (M \otimes_A B)^\sim$ , ce qui donne le résultat. □

Pour l'image directe, les choses sont plus compliquées. Sans hypothèse forte, on ne peut espérer que l'image directe d'un faisceau cohérent soit cohérent car si l'on prend  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ , un  $A$ -module peut être de type fini sur  $B$  mais pas sur  $A$ . On verra plus tard que la situation est meilleure pour un morphisme *propre*. Pour l'instant, on va se contenter de montrer :

**Théorème 7.12** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On suppose  $X$  noethérien. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ , alors  $f_*\mathcal{F}$  est quasi-cohérent. Si  $\mathcal{F}$  est cohérent avec  $f$  fini et  $Y$  noethérien, alors  $f_*\mathcal{F}$  est cohérent.*

**Démonstration :** Le cas  $f$  fini est facile car comme  $f$  est affine, on peut supposer  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ , auquel cas la propriété résulte de ce que pour tout  $B$ -module  $M$ , on a  $f_*(\widetilde{M}) = (\widetilde{A}M)^\sim$ , avec  $M$  de type fini sur  $A$  dès qu'il l'est sur  $B$  puisque  $B$  est un  $A$ -module de type fini.

Dans le cas général, on peut seulement supposer que  $Y = \text{Spec } A$  est affine. Soit  $g \in A$ , on note  $h$  son image dans  $B := \mathcal{O}_X(X)$ . Alors  $f_*\mathcal{F}(D(g)) = \mathcal{F}(X_h)$ , où  $X_h$  est l'ouvert de  $X$  constitué des points  $x$  tels que  $h(x) \in k(x)$  soit non nul (cf. lemme 2.7, a)). Mais  $\mathcal{F}(X_h)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{F}(X)_h$  par le même argument<sup>49</sup> que dans la preuve du théorème 7.6. Finalement on obtient un isomorphisme de  $f_*\mathcal{F}(D(g))$  sur  $\mathcal{F}(X) \otimes_B B_h = \mathcal{F}(X) \otimes_A A_g$  (on a  $B_h = B \otimes_A A_g$ ), ce qui montre que  $f_*\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{F}(X)^\sim$ . Le résultat en découle. □

**Exemple :** Soient  $X$  un schéma et  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ , associé à une immersion fermée  $i : Y \rightarrow X$ . Le faisceau d'idéaux  $\mathcal{F}_Y$  associé à  $Y$  est le noyau du morphisme d' $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$  induit par  $i$ . D'après ce qui précède,  $\mathcal{F}_Y$  est quasi-cohérent, et si  $X$  est noethérien  $\mathcal{F}_Y$

---

<sup>49</sup>L'important est que chaque  $U_i \cap U_j$  soit quasi-compact avec  $(U_i)$  recouvrement de  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines. Cela marcherait aussi avec  $f$  séparé et quasi-compact ou encore  $f$  affine (sans l'hypothèse  $X$  noethérien) car alors  $U_i \cap U_j$  resterait affine.

est cohérent. Réciproquement tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur  $X$  est de la forme  $\mathcal{F}_Y$  pour un certain sous-schéma fermé  $Y$  : en effet on prend pour  $Y$  le support<sup>50</sup> du faisceau quotient  $\mathcal{O}_X/\mathcal{F}$  ; il suffit alors de vérifier que  $(Y, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{F}))$  (où  $i$  est l'inclusion  $Y \rightarrow X$ ) est un sous-schéma fermé, et pour cela on peut supposer que  $X = \text{Spec } A$ , auquel cas cela résulte du théorème 7.6 qui dit que  $\mathcal{F} = \widetilde{I}$  pour un certain idéal  $I$  de  $A$  (noter que  $(A/I)_\wp$  est non nul si et seulement si  $\wp \supset I$ ), ce qui identifie  $Y$  à  $\text{Spec } (A/I)$ . On retrouve en particulier que les sous-schémas fermés de  $\text{Spec } A$  correspondent bijectivement aux idéaux  $I$  de  $A$  via  $I \mapsto \text{Spec } (A/I)$ .

### 7.3. Faisceaux quasi-cohérents sur $\text{Proj } S$

De manière analogue au cas d'un schéma affine  $\text{Spec } A$ , on a une correspondance entre les faisceaux quasi-cohérents sur  $\text{Proj } S$  et les  $S$ -modules gradués, mais celle-ci est plus compliquée. L'un des buts de ce paragraphe est d'arriver à la description des sous-schémas fermés de  $\text{Proj } S$  quand  $S$  est un anneau de polynômes.

Dans tout ce paragraphe,  $S$  désigne un anneau gradué vérifiant :  $S$  est engendrée comme  $S_0$ -algèbre par une famille finie d'éléments de  $S_1$ . Typiquement,  $S$  peut être un quotient de l'anneau gradué  $A[X_0, \dots, X_n]$  avec  $S_0 = A$ .

Soit  $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$  un  $S$ -module gradué (i.e.  $S_n \cdot M_m \subset M_{n+m}$ ). On définit un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\widetilde{M}$  sur  $\text{Proj } S$  de la même façon<sup>51</sup> qu'on a défini  $\mathcal{O}_X$  (en remplaçant partout  $S$  par  $M$ ). En particulier  $\widetilde{M}_\wp = M_{(\wp)}$  pour tout  $\wp \in \text{Proj } S$ , et  $\widetilde{M}|_{D_+(f)} = \widetilde{M}_{(f)}$  pour tout élément homogène  $f$  de  $S$  ; ici  $M_{(\wp)}$  désigne le sous  $S_{(\wp)}$ -module des éléments homogènes de degré zéro du localisé de  $M$  par rapport aux éléments homogènes non dans  $\wp$ , et  $M_{(f)}$  est le sous  $S_{(f)}$ -module des éléments de degré zéro du localisé  $M_f$ . Ainsi  $\widetilde{M}$  est un faisceau quasi-cohérent sur  $X$  (puisque les  $D_+(f)$  forment une base de la topologie), et il est cohérent si on suppose de plus  $X$  noethérien et  $M$  de type fini sur  $S$ . Il faut noter que contrairement au cas affine, le faisceau  $\widetilde{M}$  ne détermine pas le module  $M$  : par exemple si  $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$  et  $N = \bigoplus_{n \geq n_0} M_n$  pour un certain  $n_0 > 0$ , alors  $\widetilde{M} = \widetilde{N}$  car  $M_{(f)} = N_{(f)}$  pour tout élément homogène  $f$  de  $S_+$ . Pour pallier cette difficulté, on est amené à introduire des faisceaux *tordus*.

**Définition 7.13** Soit  $X = \text{Proj } S$ . Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on pose  $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)}$ , où  $S(n)$  désigne le module gradué  $S$  avec la graduation "décalée" suivant la

<sup>50</sup>Le *support* d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est l'ensemble des points  $x$  de  $X$  tel que  $\mathcal{F}_x \neq \{0\}$ .

<sup>51</sup>On fera attention que la notation est la même que pour le faisceau associé à un  $A$ -module sur  $\text{Spec } A$  ; le contexte permet en général de ne pas confondre.

formule  $S(n)_d = S_{n+d}$ . Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$ , on pose de même  $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ .

**Proposition 7.14** *Le faisceau  $\mathcal{O}_X(n)$  est inversible. Pour tout  $S$ -module gradué  $M$ , on a  $\widetilde{M}(n) = \widetilde{M}(n)$ ; par exemple  $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(m+n)$ .*

**Démonstration :** Comme  $S$  est engendré par  $S_1$  comme  $S_0$ -algèbre, les  $D_+(f)$  avec  $f$  de degré 1 recouvrent  $\text{Proj } S$ . Pour vérifier que  $\mathcal{O}_X(n)$  est inversible, il suffit donc de voir que pour tout  $f \in S_1$ , le  $S_{(f)}$ -module  $S(n)_{(f)}$  est libre de rang 1. Or on obtient un isomorphisme de  $S(n)_{(f)}$  sur  $S_{(f)}$  en envoyant  $s$  sur  $f^{-n}s$ . De même, le second énoncé vient de ce que  $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$  pour tout  $f$  de  $S_1$ . □

On aimerait maintenant décrire les faisceaux quasi-cohérents et cohérents sur  $\text{Proj } S$ . On ne peut pas comme dans le cas affine utiliser seulement les sections globales du faisceau  $\mathcal{O}_X$  puisque par exemple pour  $X = \mathbf{P}_k^n$ , on n'obtient que les constantes. Par contre on va voir que l'utilisation des faisceaux tordus va donner ce qu'on veut.

Le lemme suivant est crucial. Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible, on notera  $\mathcal{L}^n$  pour  $\mathcal{L}^{\otimes n}$ , et de même  $s^n$  pour  $s^{\otimes n}$ , si  $s$  est une section de  $\mathcal{L}$  sur  $X$ . On note également  $X_s$  l'ouvert de  $X$  constitué des  $x$  tel que  $s_x \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{L}_x$ . Notons que dans le cas  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ , cette notation est cohérente avec celle du lemme 2.7.

**Lemme 7.15** *Soit  $X$  un schéma noethérien.<sup>52</sup> Soient  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On fixe des sections  $f \in \mathcal{F}(X)$  et  $s \in \mathcal{L}(X)$ .*

a) *Si la restriction de  $f$  à  $X_s$  est nulle, alors il existe  $n > 0$  tel que  $f \otimes s^n = 0$  dans  $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)(X)$ .*

b) *Soit  $g \in \mathcal{F}(X_s)$ . Alors il existe  $n_0 > 0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $g \otimes (s^n|_{X_s})$  se relève en une section de  $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)(X)$ .*

**Démonstration :** On commence par recouvrir  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines  $X_1, \dots, X_r$  tels que la restriction de  $\mathcal{L}$  à chaque  $X_i$  soit le faisceau libre engendré par un élément  $e_i$  de  $\mathcal{L}(X_i)$ ; on peut alors trouver  $h_i \in \mathcal{O}_X(X_i)$  tel que  $s_i = h_i e_i$ , où  $s_i$  est la restriction de  $s$  à  $X_i$ . Ainsi  $X_s \cap X_i$  est simplement l'ouvert principal  $D(h_i)$  de  $X_i$ .

Prouvons a). L'hypothèse implique que la restriction de  $f$  à  $D(h_i) \subset X_i$  est nulle. Ainsi il existe  $n > 0$  tel que la restriction  $f_i$  de  $f$  à  $X_i$  vérifie

<sup>52</sup>Cela marcherait aussi avec  $X$  séparé et quasi-compact.

$h_i^n f_i = 0$  : en effet ceci résulte immédiatement de  $\mathcal{F}|_{X_i} = \mathcal{F}(X_i)^\sim$  (c'est ici que l'on utilise le fait que  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent). Alors la restriction à  $X_i$  de  $f \otimes s^n$  est

$$f_i \otimes s_i^n = h_i^n f_i \otimes e_i^n = 0$$

Ainsi  $f \otimes s^n$  est nulle puisque sa restriction à tous les  $X_i$  est nulle.

Prouvons b). On peut trouver  $m > 0$  tel que pour tout  $i$ , la restriction  $g_i$  de  $g$  à  $D(h_i) = X_s \cap X_i \subset X_i$  vérifie  $h_i^m g_i = f_i$  avec  $f_i \in \mathcal{F}(X_i)$  (toujours parce que  $\mathcal{F}|_{X_i} = \mathcal{F}(X_i)^\sim$ ). Posons  $t_i = f_i \otimes e_i^m \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m)(X_i)$ . Alors  $t_i$  et  $t_j$  coïncident sur  $X_s \cap X_i \cap X_j$  car la restriction de  $t_i$  à  $D(h_i) = X_i \cap X_s$  est  $h_i^m g_i \otimes e_i^m = g_i \otimes s_i^m = (g \otimes s^m)|_{D(h_i)}$ . D'après a) appliqué à chaque  $X_i \cap X_j$  (qui est noethérien<sup>53</sup>), il existe  $q > 0$  tel que la restriction de  $(t_i - t_j) \otimes s^q$  à  $X_i \cap X_j$  soit nulle. En posant  $n_0 = m + q$ , on voit alors que pour  $n \geq n_0$ , les sections  $t_i \otimes s^{q+n-n_0}$  de  $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)(X_i)$  se recollent en une section  $t$  de  $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)(X)$  dont la restriction à  $X_s$  coïncide avec celle de  $g \otimes s^n$ , vu que sa restriction à chaque  $X_s \cap X_i$  est  $(g_i \otimes s_i^m) \otimes s_i^{n-m} = g_i \otimes s_i^n$ .

□

**Définition 7.16** Soit  $X$  un schéma. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est *engendré par ses sections globales* s'il existe une famille  $(s_i)$  dans  $\mathcal{F}(X)$  telles que pour tout  $x$  de  $X$ , la famille  $(s_i)_x$  engendre  $\mathcal{F}_x$ . Il est équivalent de dire que  $\mathcal{F}$  est un quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -module libre.

Par exemple  $\mathcal{O}_X(-1)$  n'est pas engendré par ses sections globales si  $X$  est l'espace projectif sur un corps  $k$  car la seule section globale est nulle. Un faisceau quasi-cohérent sur un schéma *affine* est engendré par ses sections globales d'après le théorème 7.6

**Définition 7.17** Soient  $X$  un schéma projectif sur un anneau  $A$  et  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  l'immersion fermée correspondante. On pose alors  $\mathcal{O}_X(n) = i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^d}(n)$  (l'immersion  $i$  étant sous-entendue). Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module, on pose aussi  $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ .

**Lemme 7.18** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme affine. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$  et  $\mathcal{G}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $Y$ . Alors

$$f_*(\mathcal{F} \otimes f^* \mathcal{G}) = f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$$

<sup>53</sup>Notons que si  $X$  était supposé séparé, on saurait même que  $X_i \cap X_j$  est affine.



**Démonstration :** Comme  $f$  est affine, on peut supposer  $X = \text{Spec } B$ ,  $Y = \text{Spec } A$ . D'après le théorème 7.6, on peut écrire  $\mathcal{F} = \widetilde{N}$  et  $\mathcal{G} = \widetilde{M}$ , où  $M$  (resp.  $N$ ) est un  $A$ -module (resp. un  $B$ -module). D'après la proposition 7.4 (b) et d)), on obtient que  $f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G})$  est alors  $\widetilde{P}$ , où  $P$  est le  $A$ -module  $N \otimes_B (M \otimes_A B) = N \otimes_A M$ , tandis que  $f_*\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G} = \widetilde{Q}$ , avec  $Q = N \otimes_A M$ .  $\square$

Le résultat suivant (dû à Serre) est un des résultats les plus importants de la théorie des faisceaux cohérents :

**Théorème 7.19** *Soient  $X$  un schéma projectif sur un anneau noethérien  $A$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors il existe un entier positif  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , le faisceau  $\mathcal{F}(n)$  est engendré par un nombre fini de ses sections globales.*

**Démonstration :** Pour une immersion fermée  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$ , on sait que  $f_*\mathcal{F}$  est cohérent par le théorème 7.12. D'autre part  $f_*(\mathcal{F}(n)) = (f_*\mathcal{F})(n)$  via le lemme 7.18. Comme les sections globales de  $f_*(\mathcal{F}(n))$  sur  $\mathbf{P}_A^d$  sont celles de  $\mathcal{F}(n)$  sur  $X$ , il suffit de montrer le théorème pour  $X = \mathbf{P}_A^d$ .

On recouvre alors  $X$  par les ouverts affines  $U_i = D_+(T_i)$ . Alors chaque  $\mathcal{F}(U_i)$  est engendré par un nombre fini de sections  $g_{ij}$ . D'après le lemme 7.15 (appliqué à  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ ,  $s = T_i$ ,  $g = g_{ij}$ , ce qui donne  $\mathcal{L}_s = U_i$ ), on peut trouver  $n_0 > 0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , chaque  $g_{ij} \otimes T_i^n$  soit la restriction à  $U_i$  d'une section globale de  $\mathcal{F}(n)$ . Comme  $\mathcal{F}(n)(U_i)$  est engendré par les  $g_{ij} \otimes T_i^n$ , le théorème est prouvé.  $\square$

On en déduit le

**Corollaire 7.20** *Soit  $X$  un schéma projectif sur un anneau  $A$  noethérien et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors il existe  $m \in \mathbf{Z}$  et  $r \geq 1$  tels que  $\mathcal{F}$  soit un quotient de  $\mathcal{O}_X(m)^r$ .*

**Démonstration :** On choisit  $n$  entier tel que  $\mathcal{G} := \mathcal{F}(n)$  soit engendré par un nombre fini de sections globales. On obtient ainsi  $\mathcal{F}(n)$  comme quotient de  $\mathcal{O}_X^N$ , d'où le résultat en tensorisant par  $\mathcal{O}_X(-n)$ .  $\square$

Nous retrouverons les faisceaux inversibles et leur lien avec les plongements projectifs au paragraphe suivant.

Pour avoir l'analogie projectif du théorème 7.6, on introduit maintenant un module gradué associé à un  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $\text{Proj } S$ .

**Définition 7.21** Soit  $X = \text{Proj } S$ . Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$ , on définit le  $S$ -module gradué :

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

Noter que si  $s \in S_d$  et  $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ , alors on peut voir  $s$  comme une section globale de  $\mathcal{O}_X(d)$ , donc  $s.t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n+d))$  a un sens vu que  $\mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{F}(n) = \mathcal{F}(n+d)$ .

Dans le cas d'un anneau de polynômes, on sait décrire  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  :

**Proposition 7.22** Soient  $A$  un anneau et  $S = A[T_0, \dots, T_d]$  l'anneau gradué associé (avec  $d > 0$ ). Soit  $X = \text{Proj } S$ . Alors  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S$ .

**Démonstration :** Il s'agit de montrer que  $\mathcal{O}_X(n)(X) = S_n$  si  $n \geq 0$  et  $\mathcal{O}_X(n)(X) = 0$  si  $n < 0$ . Soit  $B := A[T_0, \dots, T_d, T_0^{-1}, \dots, T_d^{-1}]$ . Alors une section globale de  $\mathcal{O}_X(n)(X)$  est en particulier un élément  $f$  de  $B$  qui est dans  $T_1^n \mathcal{O}_X(D_+(T_1))$ , donc  $f$  est de la forme  $P/T_1^m$ , où  $P$  est un polynôme; comme  $f$  est aussi dans  $T_0^n \mathcal{O}_X(D_+(T_0))$ , on voit que  $f$  doit être un polynôme homogène de degré  $n$  si  $n \geq 0$ , et  $f = 0$  si  $n < 0$ . Réciproquement un tel  $f$  est bien dans  $\mathcal{O}_X(n)(X)$ . □

Montrons maintenant un lemme (qui a un intérêt propre) :

**Lemme 7.23** Soit  $X = \text{Spec } A$  un schéma affine. Soit  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$  et soit  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Alors pour tout morphisme de  $A$ -modules  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{G}(X)$ , il existe un unique morphisme d' $\mathcal{O}_X$ -modules  $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  qui induit  $u$  sur les sections globales. De plus  $u$  est un isomorphisme si et seulement si  $\varphi$  est un isomorphisme.

**Démonstration :** Si  $u$  existe, alors il est nécessairement défini sur chaque  $\mathcal{F}(D(f)) = M_f$  par  $m/f^k \mapsto \varphi(m)/f^k$ , où  $\varphi(m)/f^k$  est vu dans  $\mathcal{G}(D(f))$ . En sens inverse ces morphismes se recollent clairement pour donner un morphisme d' $\mathcal{O}_X$ -modules  $u$  satisfaisant aux propriétés voulues, vu que les  $D(f)$  forment une base d'ouverts de  $X$ . □

**Theorème 7.24** Soit  $X = \text{Proj } S$ , où  $S$  est un anneau gradué engendré par un nombre fini d'éléments de  $S_1$  comme  $S_0$ -algèbre. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim$ .

**Démonstration :** Soit  $s \in S_1$ . Posons  $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$  et  $U = D_+(s)$ . On va définir un isomorphisme canonique  $\varphi_s$  de  $M_{(s)}$  sur  $\mathcal{F}(U)$ . Soit  $s^{-n}t \in M_{(s)}$  avec  $t \in \mathcal{F}(n)(X)$ . La restriction de  $t$  à  $U$  s'écrit de manière unique  $s^n \otimes g$  avec  $g \in \mathcal{F}(U)$  car  $(s^n)$  est une base de  $\mathcal{O}_X(n)(U)$  sur  $\mathcal{O}_X(U)$  et  $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ . On pose  $\varphi_s(s^{-n}t) = g$ . On applique alors le lemme 7.15<sup>54</sup> au faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , au faisceau inversible  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$  et à sa section globale  $s$  (en particulier  $\mathcal{L}_s = U$ ). D'après le b), l'application  $\varphi_s$  est surjective : en effet si  $g \in \mathcal{F}(U)$ , il existe  $m > 0$  tel que  $g \otimes s^m$  se relève en une section  $t_0$  de  $\mathcal{F}(m)(X)$  et on a alors  $\varphi_s(s^{-m}t_0) = g$ . De même, le a) du lemme 7.15 donne que  $\varphi$  est injective.

Le lemme 7.23 donne alors que ces applications  $\varphi_s$  induisent des isomorphismes  $\widetilde{M}|_{D_+(f)} \rightarrow \mathcal{F}|_{D_+(f)}$  pour chaque  $D_+(f)$  avec  $\deg f = 1$ , et il est immédiat que ces isomorphismes de faisceaux<sup>55</sup> se recollent sur  $X$  tout entier. Finalement  $\widetilde{M}$  est bien isomorphe à  $\mathcal{F}$ . □

En combinant ceci avec la proposition 7.22, on obtient enfin la description des sous-schémas fermés de  $\text{Proj } S$  quand  $S$  est un anneau de polynômes homogènes :

**Théorème 7.25** *Soient  $A$  un anneau,  $S = A[T_0, \dots, T_n]$  et  $X = \text{Proj } S$ . Alors tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$  est de la forme  $\text{Proj}(S/I)$ , où  $I$  est un idéal homogène de  $S$ . En particulier, tout schéma projectif sur  $A$  est de la forme  $\text{Proj } T$ , où  $T$  est une algèbre homogène de type fini sur  $A$ .*

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux correspondant à  $Z$ . Alors  $\mathcal{I}$  est quasi-cohérent. Posons  $I = \Gamma_*(\mathcal{I})$ ; le théorème 7.24 dit que  $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ . Or  $I$  est un sous-module homogène de  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  parce que le foncteur "sections globales" est exact à gauche et le foncteur de décalage est exact. Ainsi  $I$  est un idéal homogène de  $S$  d'après la proposition 7.22, d'où le résultat. □

## 7.4. Faisceaux amples et très amples

La notion de faisceau inversible ample sur un schéma est étroitement liée aux morphismes de ce schéma vers les schémas projectifs. On a tout d'abord

---

<sup>54</sup>Les hypothèses sont bien satisfaites car  $X$  est séparé, et quasi-compact vu que  $S$  est engendré par un nombre fini d'éléments de  $S_1$  donc un nombre fini de  $D_+(s)$  avec  $\deg s = 1$  recouvrent  $X$ .

<sup>55</sup>Attention, sans le lemme 7.23 on aurait juste des morphismes au niveau des sections sur  $D_+(f)$  pour  $\deg f = 1$ , ce qui ne suffit pas car les  $D_+(f)$  avec  $\deg f = 1$  ne forment pas une base d'ouverts de  $X$  en général.

la proposition simple suivante qui relie morphismes vers  $\mathbf{P}_A^d$  et faisceaux engendrés par leurs sections globales. Cette proposition signifie en gros qu'un morphisme  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  est déterminé par les intersections de  $f(X)$  avec les hyperplans.

**Proposition 7.26** *Soient  $A$  un anneau et  $Y := \mathbf{P}_A^d = \text{Proj}(A[T_0, \dots, T_d])$ . Soit  $X$  un  $A$ -schéma.*

a) *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $A$ -schémas. Alors  $f^*\mathcal{O}_Y(1)$  est un faisceau inversible sur  $X$ , engendré par  $d + 1$  sections globales.*

b) *Réciproquement, si  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $X$  engendré par  $s_0, \dots, s_d$ , alors il existe un unique  $A$ -morphisme  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}_Y(1)$  et  $f^*T_i$  s'identifie à  $s_i$  via cet isomorphisme.*

**Démonstration :** a) Le faisceau  $\mathcal{O}_Y(1)$  est engendré par les sections globales  $T_0, \dots, T_{d+1}$ , qui induisent par définition des sections globales  $s_0, \dots, s_{d+1}$  de  $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ . Comme pour tout  $x$  de  $X$  d'image  $y$  par  $f$ , la fibre  $(f^*\mathcal{O}_Y(1))_x$  est  $\mathcal{O}_Y(1)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}$ , il est immédiat que les fibres de  $s_0, \dots, s_{d+1}$  en  $x$  engendrent  $(f^*\mathcal{O}_Y(1))_x$ .

b) Avec les notations du lemme 7.15, le schéma  $X$  est recouvert par les ouverts  $X_{s_i}$  (sinon il existerait  $x$  tel que toutes les restrictions  $s_{i,x}$  soient dans  $\mathcal{M}_x \mathcal{L}_x$ , et ces  $s_{i,x}$  ne pourraient pas engendrer  $\mathcal{L}_x$ ). Pour tout  $i$ , on définit alors  $f_i : X_{s_i} \rightarrow D_+(T_i)$  via l'homomorphisme d'anneaux

$$A[T_0/T_i, \dots, T_d/T_i] \rightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$$

qui envoie  $T_j/T_i$  sur  $s_j/s_i$  (ici  $s_j/s_i$  désigne l'unique élément  $a$  de  $\mathcal{O}_X(X_{s_i})$  tel que  $as_i = s_j$ ). Intuitivement cela signifie juste que si  $B$  est une  $A$ -algèbre, on envoie tout  $B$ -point  $x$  de  $X$  sur le point de coordonnées homogènes  $(s_0(x), \dots, s_d(x))$  en utilisant que partout localement  $\mathcal{L}$  est libre de base l'un des  $s_i$ . Les morphismes  $f_i$  et  $f_j$  se recollent alors en  $f : X \rightarrow Y$  qui vérifie clairement les conditions demandées. L'unicité est évidente.  $\square$

**Remarque :** Le morphisme  $f$  est une immersion fermée si et seulement si tous les  $X_{s_i}$  sont affines et pour tout  $i$ , la  $A$ -algèbre  $\mathcal{O}_X(X_{s_i})$  est engendrée par les  $s_j/s_i$ . En effet la notion d'immersion fermée est locale sur la base, et on applique le théorème 2.6 (en remarquant que par construction  $X_{s_i} = f^{-1}(D_+(T_i))$ ).

**Définition 7.27** Soit  $A$  un anneau noethérien. Une *immersion* ( $A$  étant sous-entendu)  $X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  est la composée  $u \circ j$  d'une  $A$ -immersion ouverte

$j : X \rightarrow X'$  et d'une  $A$ -immersion fermée  $u : X' \rightarrow \mathbf{P}_A^d$ . On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow \text{Spec } A$  est *quasi-projectif* s'il existe une immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  tel que  $f = p \circ i$ , où  $p : \mathbf{P}_A^d \rightarrow \text{Spec } A$  est la projection.

Notons que les immersions propres sont les immersions fermées. La notion d'immersion peut aussi se voir de façon un peu différente via le lemme suivant :

**Lemme 7.28** *Soient  $A$  un anneau noethérien et  $Y := \mathbf{P}_A^d$ . Soit  $u : X \rightarrow U$  une immersion fermée et  $j : U \rightarrow Y$  une immersion ouverte. Alors le morphisme  $f := j \circ u$  est une immersion de  $X$  dans  $Y$ .*

**Démonstration :** L' $\mathcal{O}_Y$ -module  $i_*\mathcal{O}_X$  est un faisceau quasi-cohérent sur  $Y$  d'après le théorème 7.12. De ce fait le noyau de  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur  $Y$ , correspondant à un sous-schéma fermé<sup>56</sup>  $Z$  de  $Y$ . Soit  $g : Z \rightarrow Y$  l'immersion fermée correspondante. Le fermé  $Z$  est le support de  $\mathcal{O}_Y/\ker f^\#$  (cf. exemple après le théorème 7.12); autrement dit un point  $y$  de  $Y$  est dans  $Z$  si et seulement si l'homomorphisme d'anneaux  $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_y$  induit par  $f^\#$  n'est pas nul. On en déduit immédiatement que l'image ensembliste de  $f$  est incluse dans  $Z$  (si  $x \in X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  est non nul) et que  $f(X)$  est dense dans  $Z$  (si  $y \in Z$  et  $V$  est un ouvert de  $Y$  contenant  $y$ , la non-nullité de l'homomorphisme ci-dessus implique que  $f^{-1}(V)$  est non vide, donc  $V$  rencontre  $f(X)$ ).

D'autre part on a vu que  $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\ker f^\#$ , ce qui fait (en factorisant  $f^\#$  par son noyau) qu'il existe un morphisme  $v : X \rightarrow Z$  tel que  $f = g \circ v$  (Toutes ces propriétés sont d'ailleurs des propriétés générales de l'adhérence schématique, cf. [L], exercice 2.3.17.).

Maintenant comme  $u$  est une immersion fermée et  $j$  une immersion ouverte, le morphisme de faisceaux  $f^\#$  est surjectif, ce qui fait que  $v^\#$  est un isomorphisme. Ensemblistement  $v(X) = f(X)$  est dense dans  $Z$ ; en particulier  $f(X)$  est ici dense dans  $Z \cap U$  mais il est aussi fermé dans  $Z \cap U$  car  $f(X)$  est fermé dans  $U$ . Finalement  $v(X) = Z \cap U$  est bien un ouvert de  $Z$  et  $v$  est une immersion ouverte. □

**Définition 7.29** Soit  $f : X \rightarrow \text{Spec } A$  un morphisme. On dit qu'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  est *très ample* (relativement à  $f$ ) s'il existe une immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  telle que  $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(1) := i^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}_A^d}(1)$ .

De façon équivalente,  $\mathcal{L}$  est très ample s'il est engendré par un nombre fini de sections globales telles que le morphisme  $f : X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$  associé comme

---

<sup>56</sup>On dit que  $Z$  est l'*adhérence schématique* de  $i(X)$  dans  $Y$ .

dans la proposition 7.26 soit une immersion (en particulier cela implique que  $f$  est quasi-projectif). Dans le cas où  $X$  est propre sur  $A$ , c'est équivalent à dire que  $f$  est une immersion fermée. Ainsi, un  $A$ -schéma est projectif si et seulement s'il est propre sur  $\text{Spec } A$  et admet un faisceau très ample pour le morphisme structural (mais il peut y avoir plusieurs faisceaux très amples non isomorphes).

L'inconvénient de la définition d'un faisceau très ample est qu'elle dépend du morphisme  $f$ . On a souvent intérêt à travailler avec la notion un peu plus faible (mais "absolue") suivante :

**Définition 7.30** Soient  $X$  un schéma noethérien et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On dit que  $\mathcal{L}$  est *ample* si pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , il existe un entier  $n_0 \geq 1$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , le faisceau  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales.

**Exemples :** a) D'après le théorème 7.19, un faisceau très ample associé à un morphisme propre  $X \rightarrow \text{Spec } A$  est ample. Cette propriété reste en fait vraie si le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } A$  est seulement supposé de type fini sur un anneau noethérien  $A$ ; ceci se démontre en se ramenant au cas propre, via le fait (non trivial) que si  $X$  est un schéma noethérien,  $U$  un ouvert de  $X$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $U$ , alors il existe un faisceau cohérent sur  $X$  dont la restriction à  $U$  est  $\mathcal{F}$  (cf. [H], p.154 et exercice II.5.15, ou encore l'examen du 01/02/2008 sur mon site web).

b) Tout faisceau inversible sur un schéma affine est ample car tout faisceau cohérent est engendré par ses sections globales.

c) Si  $\mathcal{L}$  est ample, alors  $\mathcal{L}^n$  est ample pour tout  $n > 0$  par définition. Réciproquement s'il existe  $n > 0$  tel que  $\mathcal{L}^n$  soit ample, alors  $\mathcal{L}$  est ample car si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur  $X$ , alors il existe pour chaque  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^i$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) un entier  $n_i$  tel que  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{L}^{rn}$  soit engendré par ses sections globales si  $n \geq n_i$ . Alors  $N = \max n_i$  vérifie que  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^s$  est engendré par ses sections globales si  $s \geq N$ .

d) Si  $X = \mathbf{P}_A^d$ , alors le faisceau  $\mathcal{O}_X(n)$  est très ample (resp. ample) si et seulement si  $n > 0$  : en effet pour  $n \leq 0$ ,  $\mathcal{O}_X(-1) \otimes \mathcal{O}_X(mn) = \mathcal{O}_X(mn - 1)$  n'est pas engendré par ses sections globales si  $m > 0$  (la seule section globale est la section nulle) donc  $\mathcal{O}_X(n)$  n'est pas ample si  $n \leq 0$ ; mais si  $n > 0$ , on obtient une immersion fermée  $i : X \rightarrow \mathbf{P}_A^{N-1}$  telle que  $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$  en considérant le morphisme associé (comme dans la proposition 7.26) aux sections globales constituées des monômes unitaires de degré  $n$  de  $A[T_0, \dots, T_d]$ , où  $N := C_{n+d}^d$ . Si  $s_0, \dots, s_{N-1}$  sont ces différents monômes, le morphisme est défini en coordonnées homogènes par

$$(t_0, \dots, t_d) \mapsto (s_0(t_0, \dots, t_d), \dots, s_{N-1}(t_0, \dots, t_d))$$

(c'est bien une immersion fermée, voir la remarque après la proposition 7.26).

L'avantage de la notion "ample" est que c'est en quelque sorte une version stable de très ample via le théorème suivant :

**Théorème 7.31** *Soit  $X$  un schéma de type fini sur un anneau noethérien  $A$ . Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau ample sur  $X$ . Alors il existe  $m > 0$  tel que  $\mathcal{L}^m$  soit très ample (relativement au morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec } A$ ).*

On commence par prouver un lemme (valable sur tout schéma noethérien  $X$ ) :

**Lemme 7.32** *Soit  $x \in X$ . Il existe  $n > 0$  (dépendant de  $x$ ) et une section  $s \in \mathcal{L}^n(X)$  tel que  $X_s$  (défini comme dans le lemme 7.15) soit un voisinage ouvert affine de  $x$ .*

**Démonstration :** Soit  $U$  un ouvert affine de  $X$  contenant  $x$  tel que la restriction de  $\mathcal{L}$  à  $U$  soit libre. On écrit le fermé  $X - U$  comme associé à un faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , le faisceau  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^n$  s'identifie (par platitude locale de  $\mathcal{L}^n$  sur  $\mathcal{O}_X$ ) au sous faisceau  $\mathcal{I}\mathcal{L}^n$  de  $\mathcal{L}^n$ . Par amplitude de  $\mathcal{L}$ , on en déduit que  $\mathcal{I}\mathcal{L}^n$  est engendré pour  $n$  assez grand par ses sections globales. En particulier il existe une section globale <sup>57</sup>  $s$  de  $\mathcal{I}\mathcal{L}^n(X) \subset \mathcal{L}^n(X)$  telle que  $s_x$  engendre  $(\mathcal{I}\mathcal{L}^n)_x = \mathcal{L}_x^n$  (rappelons que  $x \notin X - U$ ). Ainsi  $x \in X_s$ . D'autre part  $X_s \subset U$  car si  $y \in X_s$ , alors  $(\mathcal{I}\mathcal{L}^n)_y$  contient  $s_y$  (qui engendre  $\mathcal{L}_y^n$ ) donc  $y$  ne peut pas être dans  $X - U$ . En écrivant  $\mathcal{L}|_U = e\mathcal{O}_U$  et  $s|_U = eh$  avec  $h \in \mathcal{O}_X(U)$ , on obtient que  $X_s$  est l'ouvert affine principal  $D(h)$  de  $U$ , donc  $X_s$  est affine. □

**Preuve du théorème 7.31 :** Comme  $X$  est noethérien, on peut le recouvrir par un nombre fini de  $X_{s_i}$  comme dans le lemme précédent. On peut également supposer que  $s_i \in \mathcal{L}^n(X)$  pour un  $n$  indépendant de  $i$  (quitte à remplacer les  $s_i$  par des puissances), et même que  $n = 1$  (car si on prouve la propriété voulue pour  $\mathcal{L}^n$ , on l'aura pour  $\mathcal{L}$ ). On sait que  $\mathcal{O}_X(X_{s_i})$  est engendré comme  $A$ -algèbre par une famille finie  $(f_{ij})$  parce que  $X$  est de type fini sur  $A$  et  $X_{s_i}$  est affine. D'après le lemme 7.15 b) appliqué à  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ , il existe  $r \geq 1$  tel que chaque  $f_{ij} \otimes s_i^r$  soit la restriction à  $X_{s_i}$  d'une section  $s_{ij}$  de  $\mathcal{L}^r$  sur  $X$ .

Maintenant les  $s_i^r$  engendrent  $\mathcal{L}^r$  (car les  $X_{s_i}$  recouvrent  $X$ ) donc a fortiori aussi les  $s_i^r$  et les  $s_{ij}$ . Ceci permet de définir un morphisme  $\pi : X \rightarrow$

---

<sup>57</sup>Bien que  $\mathcal{I}\mathcal{L}^n$  ne soit a priori pas un faisceau inversible, il est localement libre de rang 1 en  $x$  ce qui suffit à l'engendrer en  $x$  par une seule section globale.

$\text{Proj}(A[S_i, S_{ij}])$  comme dans la proposition 7.26. L'homomorphisme correspondant  $\mathcal{O}(D_+(S_i)) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$  est surjectif car il envoie  $S_{ij}/S_i$  sur  $f_{ij}$ . Ainsi  $\pi$  est une immersion fermée de  $X$  dans l'ouvert  $U \subset \text{Proj}(A[S_i, S_{ij}])$  réunion des  $D_+(S_i)$ , ce qui montre via le lemme 7.28 que  $\pi$  est une immersion et  $\mathcal{L}^r$  est très ample. □

**Corollaire 7.33** *Soit  $f : X \rightarrow \text{Spec } A$  un morphisme de type fini avec  $A$  noethérien. Alors  $f$  est quasi-projectif si et seulement s'il existe un faisceau ample sur  $X$ .*

Notons la force de la notion de faisceau ample qui, bien qu'absolue, permet de déduire des renseignements sur le morphisme  $f$ . Si on suppose de plus  $f$  propre, le corollaire dit que  $f$  est projectif si et seulement si  $X$  admet un faisceau ample. Noter aussi que le fait que  $f$  soit séparé fait partie du résultat (et non des hypothèses).

**Démonstration :** Supposons qu'on ait un faisceau ample  $\mathcal{L}$  sur  $X$ . Alors d'après le théorème 7.31, il existe  $n > 0$  tel que  $\mathcal{L}^n$  soit très ample, ce qui implique par définition que  $f$  est quasi-projectif. Réciproquement, si  $X$  est quasi-projectif, le faisceau  $\mathcal{O}_X(1)$  (associé à une immersion  $X \rightarrow \mathbf{P}_A^d$ ) est très ample, donc ample. □

## 8. Cohomologie des faisceaux

Il y a plusieurs façons de définir la cohomologie des faisceaux sur un schéma  $X$ . Nous prendrons ici la définition via les foncteurs dérivés, qui a l'avantage d'être très générale et bien adaptée pour les questions théoriques. Son inconvénient <sup>58</sup> est qu'elle n'est pas adaptée pour faire des calculs; on aura donc besoin également de la définition par la cohomologie de Čech.

### 8.1. Rappels d'algèbre homologique

Dans ce paragraphe, on va se borner à rappeler sans démonstration quelques résultats d'algèbre homologique. Une bonne référence est [W]. On travaille dans une *catégorie abélienne*  $\mathcal{A}$ . Le lecteur non familier avec cette notion

---

<sup>58</sup>Outre le fait que faute de temps, on devra admettre les résultats généraux d'algèbre homologique...



pourra supposer qu'il s'agit d'une des catégories suivantes (qui seront les seules qui nous intéresseront) :

- La catégorie  $\mathcal{A}b$  des groupes abéliens.
- La catégorie  $\mathcal{M}od(A)$  des modules sur un anneau  $A$ .
- La catégorie  $\mathcal{A}b(X)$  des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ .
- La catégorie  $\mathcal{M}od(X)$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules sur un espace annelé (par ex. un schéma)  $X$ .
- La catégorie  $\mathcal{Q}co(X)$  des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma  $X$ .
- La catégorie  $\mathcal{C}oh(X)$  des faisceaux cohérents sur un schéma  $X$ .

**Définition 8.1** Un *complexe*  $A^\bullet$  dans une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est une famille d'objets  $A^i$ ,  $i \in \mathbf{Z}$  et de morphismes (appelés *cobords*)  $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$  tels que  $d^{i+1} \circ d^i = 0$  pour tout  $i$  (si les objets ne sont précisés que sur un certain intervalle, ex.  $i \geq 0$ , on pose  $A^i = 0$  pour les autres  $i$ ). Un *morphisme de complexes*  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  est une famille de morphismes  $f^i : A^i \rightarrow B^i$  qui commutent avec les cobords  $d^i$ .

**Définition 8.2** Le  $i$ -ième *objet de cohomologie* d'un complexe  $A^\bullet$  est défini par  $h^i(A^\bullet) = \ker d^i / \text{Im } d^{i-1}$ . Si  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  est un morphisme de complexes, il induit une flèche naturelle  $h^i(f) : h^i(A^\bullet) \rightarrow h^i(B^\bullet)$ . Si

$$0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes, on a des flèches naturelles  $\delta^i : h^i(C^\bullet) \rightarrow h^{i+1}(A^\bullet)$  qui donnent naissance à une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow h^i(A^\bullet) \rightarrow h^i(B^\bullet) \rightarrow h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

**Définition 8.3** On dit que deux morphismes de complexes  $f, g$  sont *homotopes* (et on écrira  $f \sim g$ ) s'il existe une famille de morphismes  $k^i : A^i \rightarrow B^{i-1}$  (ne commutant pas forcément avec les  $d^i$ ) tels que  $f - g = dk + kd$ . Si  $f \sim g$ , les morphismes  $h^i(f)$  et  $h^i(g)$  induits sur la cohomologie sont les mêmes. Deux complexes  $A^\bullet$  et  $B^\bullet$  sont *homotopes* s'il existe des morphismes  $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  et  $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$  tels que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité (dans ce cas la cohomologie des deux complexes est la même).

**Définition 8.4** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux catégories abéliennes. Un foncteur covariant  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  est dit *additif* si pour tous objets  $A, A'$  de  $\mathcal{A}$ , l'application induite  $\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(A'))$  est un homomorphisme de

groupes abéliens. Un tel  $F$  est dit *exact à gauche* (respectivement à droite) si pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

dans  $\mathcal{A}$ , la suite  $0 \rightarrow F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'')$  (respectivement la suite  $F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'') \rightarrow 0$ ) est exacte. On a des définitions analogues pour les foncteurs contravariants ("exact à gauche" signifiant alors que  $0 \rightarrow F(A'') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A')$  reste exacte).

**Exemples :** a) Dans une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ , le foncteur  $\text{Hom}(A, \cdot)$  (où  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$ ) est covariant et exact à gauche de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}b$ . Le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, A)$  est contravariant et exact à gauche.

b) Si  $A$  est un anneau et  $M$  un  $A$ -module, le foncteur  $N \rightarrow N \otimes_A M$  est covariant et exact à droite de  $\text{Mod}(A)$  dans  $\text{Mod}(A)$ . Dire que  $M$  est plat signifie que ce foncteur est exact.

**Définition 8.5** Un objet  $I$  d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  est *injectif* si le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, I)$  est exact. On dit que  $\mathcal{A}$  a *assez d'injectifs* si tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif. Si c'est le cas, tout objet  $A$  admet une *résolution injective*, i.e. il existe un complexe

$$I^\bullet = 0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

(défini en degrés  $i \geq 0$ ) et un morphisme  $A \rightarrow I^0$  tels que tous les objets de  $I^\bullet$  soient injectifs et qu'on ait une suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

(deux résolutions injectives sont homotopes).

**Définition 8.6** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur covariant exact à gauche. Les *foncteurs dérivés* (à droite)  $R^i F, i \geq 0$  sont définis de la manière suivante : pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ , on fixe une résolution injective  $I^\bullet$  de  $A$  et on pose

$$R^i F(A) = h^i(F(I^\bullet))$$

(c'est indépendant de la résolution choisie à isomorphisme de foncteurs additifs près).

Noter que le foncteur  $F$  est isomorphe à  $R^0F$  car

$$(R^0F)(A) = \ker[F(I^0) \rightarrow F(I^1)] = F(A)$$

vu que  $F$  est exact à gauche. On a d'autre part  $R^iF(I) = 0$  si  $I$  est injectif.

Les foncteurs dérivés ont les propriétés suivantes :

a) Pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0 \quad (3)$$

on a des morphismes naturels  $\delta^i : R^iF(A'') \rightarrow R^{i+1}F(A')$  qui induisent une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow R^iF(A') \rightarrow R^iF(A) \rightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \rightarrow \dots$$

b) Si on se donne un morphisme de la suite exacte courte (3) dans une autre suite exacte courte  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ , alors les  $\delta^i$  induisent un diagramme commutatif<sup>59</sup>

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

c) Si  $(J^j)_{j \geq 0}$  est une famille d'objets *acycliques* pour le foncteur  $F$  (i.e. tels que  $R^iF(J^j) = 0$  pour tout  $i > 0$ ) induisant une résolution

$$0 \rightarrow A \rightarrow J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow \dots$$

d'un objet  $A$ , alors pour tout  $i \geq 0$ , on a  $R^iF(A) \simeq h^i(F(J^\bullet))$  (ainsi on peut calculer les foncteurs dérivés en utilisant des résolutions acycliques, pas forcément injectives).

Un résultat général d'algèbre <sup>60</sup> ([W], 2.3.) dit que si  $A$  est un anneau, alors tout  $A$ -module est isomorphe à un sous-module d'un  $A$ -module injectif.

On en déduit :

**Proposition 8.7** *la catégorie  $\mathcal{M}od(X)$  possède assez d'injectifs sur tout espace annelé  $X$ .*

<sup>59</sup>Les propriétés a) et b) font de la famille  $(R^iF)_{i \geq 0}$  un  $\delta$ -foncteur tel que  $R^0F \simeq F$ , qui est même universel.

<sup>60</sup>Le point est que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, I)$  est un  $A$ -module injectif dès que  $I$  est injectif (c'est le cas par exemple d'un groupe divisible) dans  $\mathcal{A}b$ , ex.  $I = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ; or tout  $A$ -module  $M$  se plonge dans un produit de modules de la forme  $\text{Hom}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  vu que tout module est quotient d'une somme directe de modules isomorphes à  $A$  et que l'application canonique  $A \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  est injective.

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. Pour tout  $x \in X$ , on peut plonger la tige  $\mathcal{F}_x$  dans un  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module injectif  $I_x$ . Posons alors  $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} j_* (I_x)$ , où  $j : \{x\} \rightarrow X$  est l'inclusion et  $I_x$  est vu comme faisceau constant sur  $\{x\}$ .

Soit maintenant  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module, alors (dans  $\text{Mod}(X)$ ) on a  $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) = \prod \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$ . On en déduit un morphisme de faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$  qui est injectif (il l'est sur les tiges). D'autre part le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{I})$  est exact dans  $\text{Mod}(X)$  car c'est le produit (pour  $x \in X$ ) du composé de  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}_x$  (qui est exact) et de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\cdot, I_x)$  qui est également exact par injectivité de  $I_x$ . Finalement on a bien plongé  $\mathcal{F}$  dans l' $\mathcal{O}_X$ -module injectif  $\mathcal{I}$ .  $\square$

En particulier la catégorie  $\mathcal{A}b(X)$  des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique  $X$  possède assez d'injectifs (considérer  $X$  comme un espace annelé avec le faisceau constant  $\mathbf{Z}$ ). Cela justifie la définition suivante :

**Définition 8.8** Soient  $X$  un espace topologique et  $\Gamma(X, \cdot)$  le foncteur de section globale de  $\mathcal{A}b(X)$  dans  $\mathcal{A}b$ . Les *foncteurs de cohomologie* sont les foncteurs dérivés à droite  $H^i(X, \cdot) := R^i\Gamma(X, \cdot)$ . Pour tout faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{F}$ , on dispose donc des *groupes de cohomologie*  $H^i(X, \mathcal{F})$ .

On a donc pour toute suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  de faisceaux sur  $X$  une longue suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

Noter que même si  $X$  et  $\mathcal{F}$  ont des structures supplémentaires (par exemple  $X$  est un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent), les groupes de cohomologie sont à prendre en considérant les catégories  $\mathcal{A}b(X)$  et  $\mathcal{A}b$ . On va cependant voir qu'on obtient la même chose en remplaçant  $\mathcal{A}b(X)$  par  $\text{Mod}(X)$  si  $X$  est un espace annelé.

**Définition 8.9** Un faisceau  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique est *flasque* si pour toute inclusion d'ouverts  $V \subset U$ , l'homomorphisme de restriction  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  est surjectif.

Noter que par compatibilité des restrictions, il suffit de vérifier la condition quand  $U = X$ . La proposition suivante rappelle les propriétés classiques des faisceaux flasques (vérification facile).

**Proposition 8.10** a) *Un produit de faisceaux flasques est flasque.*

b) *L'image directe d'un faisceau flasque par une application continue reste flasque.*

c) *Une suite exacte courte de faisceaux dont le noyau est flasque induit une suite exacte au niveau des sections globales sur tout ouvert  $U$  de  $X$ .*

d) *Le quotient d'un faisceau flasque par un faisceau flasque est encore flasque.*

**Proposition 8.11** a) Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace annelé. Alors tout  $\mathcal{O}_X$ -module injectif est flasque.

b) Soit  $X$  un espace topologique. Alors tout faisceau flasque (de groupes abéliens)  $\mathcal{F}$  est acyclique pour le foncteur  $\Gamma(X, \cdot)$ .

On peut en particulier appliquer le a) à tout espace topologique  $X$  en le considérant comme un espace annelé pour le faisceau constant  $\mathbf{Z}$ ; on obtient que dans  $\mathcal{A}b(X)$ , tout objet injectif est flasque.

**Démonstration :** a) Si  $j : U \rightarrow X$  est l'inclusion d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $X$ , on notera  $\mathcal{G}_U = j_!(\mathcal{O}_{X|U})$  l'extension par zéro de la restriction de  $\mathcal{O}_X$  à  $U$ . Soient  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module injectif et  $U, V$  deux ouverts de  $X$  avec  $V \subset U$ . On a un morphisme injectif de faisceaux d' $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{G}_V \rightarrow \mathcal{G}_U$ , d'où par injectivité de  $\mathcal{F}$  une surjection  $\text{Hom}(\mathcal{G}_U, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_V, \mathcal{F})$  (où les Hom sont pris dans  $\text{Mod}(X)$ ). Comme  $\text{Hom}(\mathcal{G}_U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$  (cela résulte immédiatement de ce que pour tout anneau  $A$  et tout  $A$ -module  $M$ , on a  $\text{Hom}_A(A, M) = M$ ) et  $\text{Hom}(\mathcal{G}_V, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(V)$ ,  $\mathcal{F}$  est flasque.

b) On écrit une suite exacte dans  $\mathcal{A}b(X)$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

avec  $\mathcal{I}$  injectif. D'après a),  $\mathcal{I}$  est flasque donc comme  $\mathcal{F}$  est supposé flasque le quotient  $\mathcal{G}$  l'est également. Comme  $\mathcal{I}$  est injectif on a  $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$  pour  $i > 0$ ; comme  $\mathcal{F}$  est flasque, la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow 0$$

est exacte. La longue suite exacte donne alors  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$  et  $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{G})$  pour  $i > 1$ , d'où le résultat par récurrence sur  $i$  vu que  $\mathcal{G}$  est également flasque. □

**Corollaire 8.12** Soit  $X$  un espace annelé. Alors les foncteurs dérivés du foncteur  $\Gamma(X, \cdot)$  de  $\text{Mod}(X)$  dans  $\mathcal{A}b$  coïncident avec les foncteurs de cohomologie  $H^i(X, \cdot)$

En effet si on travaille dans  $\text{Mod}(X)$ , les résolutions injectives sont des résolutions flasques, donc des résolutions acycliques pour le foncteur  $\Gamma(X, \cdot)$  de  $\mathcal{A}b(X)$  dans  $\mathcal{A}b$ . On obtient donc les mêmes foncteurs dérivés. □

Noter que si  $X$  est un espace annelé et  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , les groupes  $H^i(X, \mathcal{F})$  ont une structure naturelle de  $A$ -module pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$

(en effet on peut calculer la cohomologie en prenant des résolutions dans  $\mathcal{M}od(X)$ ). Par exemple si  $X$  est un schéma sur un anneau  $B$ , tous les  $H^i(X, \mathcal{F})$  ont une structure naturelle de  $B$ -module.

A titre culturel, citons le résultat classique suivant :

**Theorème 8.13 (Grothendieck)** *Soit  $X$  un espace topologique noethérien de dimension finie  $n$ . Alors si  $i > n$ , on a  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{F}$ .*

Pour une preuve, voir [H], th. III.2.7. On utilise notamment le fait que sur un espace topologique noethérien, la cohomologie commute avec les limites inductives ([H], III.2.9), par exemple avec les sommes directes. On a aussi besoin du fait suivant (qui nous sera également utile plus tard) :

**Proposition 8.14** *Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $Y$  un fermé de  $X$ , on note  $j : Y \rightarrow X$  l'inclusion. Alors pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $Y$ , on a  $H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$ .*

**Démonstration :** Dans ce cas particulier, le foncteur  $j_*$  est exact de  $\mathcal{A}b(Y)$  vers  $\mathcal{A}b(X)$ . D'après la proposition 8.10, l'image directe d'une résolution injective est une résolution flasque, donc acyclique (proposition 8.11) et on utilise alors le fait qu'on peut calculer la cohomologie avec n'importe quelle résolution acyclique.  $\square$

## 8.2. Cohomologie d'un schéma affine noethérien

Le but de ce paragraphe est de démontrer :

**Theorème 8.15 (Serre)** *Soient  $A$  un anneau noethérien et  $X = \text{Spec } A$ . Alors pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on a  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $i > 0$ .*

On en déduit immédiatement la généralisation suivante du corollaire 7.9 :

**Corollaire 8.16** *Soit  $X$  un schéma affine noethérien et*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

*une suite exacte d' $\mathcal{O}_X$ -modules avec  $\mathcal{F}$  quasi-cohérent. Alors la suite*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

*est exacte.*

En effet le seul point à montrer est la surjectivité de  $\mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ . Or son conoyau est  $H^1(X, \mathcal{F})$ , qui est nul d'après le théorème 8.15.

**Corollaire 8.17** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Alors si un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{G}$  est extension d'un faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{H}$  par un faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , le faisceau  $\mathcal{G}$  est quasi-cohérent. Le même résultat vaut en remplaçant partout "quasi-cohérent" par "cohérent".*

**Démonstration :** Le corollaire 7.7 permet de se ramener au cas où  $X = \text{Spec } A$  est affine. D'après le corollaire 8.16 et la proposition 7.4 d), on a un diagramme commutatif de faisceaux dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X)^\sim & \longrightarrow & \mathcal{G}(X)^\sim & \longrightarrow & \mathcal{H}(X)^\sim & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales viennent de l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{F}(X)_f = \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f \rightarrow \mathcal{F}(D(f))$$

pour tout ouvert principal  $D(f)$  de  $X$ . Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$  sont quasi-cohérents, alors la première et la troisième flèche verticale sont des isomorphismes, donc aussi la deuxième, ce qui montre que  $\mathcal{G}$  est quasi-cohérent. Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$  sont cohérents, alors  $\mathcal{G}$  l'est aussi car une extension d'un module de type fini par un module de type fini est encore de type fini. □

Notons aussi que le théorème 8.15 s'étend au cas non noethérien (voir [EGA 3], 1.3.1. ou la deuxième preuve plus bas). L'étape principale de la première preuve que nous allons en donner consiste à montrer que si  $I$  est un  $A$ -module injectif, alors le faisceau  $\tilde{I}$  est flasque<sup>61</sup> sur  $X = \text{Spec } A$ . On commence par quelques préliminaires algébriques.

**Théorème 8.18 (Krull)** <sup>62</sup> *Soient  $A$  un anneau noethérien,  $M \subset N$  des  $A$ -modules de type fini et  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $A$ . Alors pour tout  $n > 0$ , il existe  $n' \geq n$  tel que  $\mathfrak{a}^n M \supset M \cap \mathfrak{a}^{n'} N$ .*

Voir [AC, 18].

---

<sup>61</sup>Attention, on ne peut pas simplement appliquer la proposition 8.11, car il n'y a pas de raison a priori que  $\tilde{I}$  soit injectif dans  $\text{Mod}(X)$ ; on ne connaît cette propriété que dans  $\mathcal{Q}co(X)$ .

<sup>62</sup>Ce théorème est parfois appelé théorème d'Artin-Rees.

**Lemme 8.19** Soient  $A$  un anneau noethérien,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $A$ , et  $I$  un  $A$ -module injectif. Soit  $J$  le sous-module de  $I$  constitué des éléments  $x$  tels que  $\mathfrak{a}^n \cdot x = 0$  pour un certain  $n > 0$ . Alors  $J$  est injectif.

**Démonstration :** Il suffit de montrer ([W], 2.3.1. p. 39, "critère de Baer") que pour tout idéal  $\mathfrak{b}$  de  $A$  et pour tout homomorphisme  $\varphi : \mathfrak{b} \rightarrow J$ , il existe un homomorphisme  $\psi : A \rightarrow J$  qui étend  $\varphi$ . Comme  $A$  est noethérien,  $\mathfrak{b}$  est de type fini, ce qui implique qu'il existe  $n > 0$  tel que tout élément de  $J$  soit annulé par  $\mathfrak{a}^n$ ; en particulier  $\varphi(\mathfrak{a}^n \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^n \varphi(\mathfrak{b}) = 0$ . D'après le théorème 8.18 appliqué à  $\mathfrak{b} \subset A$ , il existe  $n' \geq n$  tel que  $\mathfrak{a}^n \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}$ . Alors  $\varphi(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}) = 0$  et  $\varphi$  se factorise par  $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'})$ . Comme  $I$  est injectif, l'application induite  $\varphi_I : \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^{n'}) \rightarrow I$  s'étend en un homomorphisme  $\psi' : A/\mathfrak{a}^{n'} \rightarrow I$ . Mais l'image de  $\psi'$  est incluse dans  $J$  (elle est annulée par  $\mathfrak{a}^{n'}$ ) donc elle induit une flèche  $\psi : A \rightarrow J$  qui étend  $\varphi$ . □

**Lemme 8.20** Soit  $I$  un module injectif sur un anneau noethérien  $A$ . Alors pour tout  $f$  de  $A$ , l'homomorphisme de localisation  $\theta : I \rightarrow I_f = I \otimes_A A_f$  est surjectif.

**Démonstration :** Pour tout  $i > 0$ , on note  $\mathfrak{b}_i$  l'annulateur de  $f^i$  dans  $A$ . Comme la suite des  $\mathfrak{b}_i$  est croissante, elle est stationnaire, disons à partir d'un entier  $r > 0$ . Soit alors  $x \in I_f$ , on peut écrire  $x = \theta(y)/f^n$  avec  $y \in I$  et  $n \geq 0$ . On a un homomorphisme de  $A$ -modules  $\varphi$  de  $(f^{n+r})$  dans  $I$  qui envoie  $f^{n+r}$  sur  $f^r y$  (ceci a un sens car l'annulateur de  $f^{n+r}$  est  $\mathfrak{b}_r$ ). Comme  $I$  est injectif,  $\varphi$  s'étend en un  $\psi : A \rightarrow I$ . Posons  $z = \psi(1)$ , alors  $f^{n+r} z = f^r y$  donc  $\theta(z) = x$ . □

**Proposition 8.21** Soit  $I$  un module injectif sur un anneau noethérien  $A$ . Alors  $\tilde{I}$  est flasque sur  $X = \text{Spec } A$ .

**Démonstration :** Soit  $Y$  l'adhérence du support de  $\tilde{I}$ . S'il est vide, il est immédiat que  $\tilde{I}$  est flasque. On va raisonner par "récurrence noethérienne" sur  $Y$ , c'est-à-dire qu'on va montrer le résultat sous l'hypothèse : pour tout  $A$ -module injectif  $J$  tel que l'adhérence du support de  $\tilde{J}$  soit strictement incluse dans  $Y$ , le faisceau  $\tilde{J}$  est flasque. Cela suffit à conclure (sinon on obtiendrait une contradiction en prenant  $J$  ne vérifiant pas la propriété, et tel que l'adhérence du support de  $\tilde{J}$  soit minimal). Faisons donc cette hypothèse, et montrons que pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , la restriction  $\tilde{I}(X) \rightarrow \tilde{I}(U)$  est surjective.



Si  $Y$  ne rencontre pas  $U$ , il n'y a rien à démontrer car  $\tilde{I}(U) = 0$ . Sinon, on choisit un ouvert principal  $D(f)$  de  $X$  inclus dans  $U$  et rencontrant  $Y$ . Posons  $Z = X - D(f)$ . Soit  $s \in \tilde{I}(U)$ , sa restriction  $s'$  à  $\tilde{I}(D(f)) = I_f$  se relève en un  $t \in I = \tilde{I}(X)$  d'après le lemme 8.20. Soit  $t'$  la restriction de  $t$  à  $\tilde{I}(U)$ , alors  $s - t'$  a une restriction nulle à  $\tilde{I}(D(f))$ , donc est dans le sous-groupe  $\Gamma_Z(U, \tilde{I})$  des sections à support dans  $Z$  (i.e. nulles en dehors de  $Z$ ). Il nous suffit donc de montrer que la restriction  $\Gamma_Z(X, \tilde{I}) \rightarrow \Gamma_Z(U, \tilde{I})$  est surjective. Mais  $J = \Gamma_Z(X, \tilde{I})$  n'est autre que le sous-module de  $I = \Gamma(X, \tilde{I})$  correspondant à  $\mathbf{a} = (f)$  comme dans le lemme 8.19 : en effet (par définition de  $\tilde{I}$ ), dire que la restriction d'une section à  $D(f)$  est nulle signifie qu'elle est annulée par une puissance de  $f$ . Ainsi  $J$  est un  $A$ -module injectif, et l'adhérence du support de  $\tilde{J}$  est strictement inclus dans  $Y$  vu que  $Z \cap Y$  est un fermé strict de  $Y$ . Par hypothèse de récurrence,  $\tilde{J}$  est flasque et comme  $\tilde{J}(U) = \Gamma_Z(U, \tilde{I})$ , on a le résultat.  $\square$

**Preuve du théorème 8.15 :** Soit  $M = \mathcal{F}(X)$ , on a donc  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  par le théorème 7.6 . Soit  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$  une résolution injective (dans la catégorie des  $A$ -modules) de  $M$ . D'après la prop. 7.4, la suite de faisceaux  $0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{I}^\bullet$  est exacte. D'après la proposition 8.21, ceci est une résolution flasque de  $\mathcal{F}$ , donc acyclique d'après la proposition 8.11. On peut donc utiliser cette résolution pour calculer les  $H^i(X, \mathcal{F})$ . Or, quand on applique le foncteur  $\Gamma(X, \cdot)$ , on retrouve la suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow I^\bullet$ , d'où le résultat.  $\square$

**Une autre preuve.** Nous allons exposer une autre méthode de preuve du théorème 8.15. Elle a l'avantage de fonctionner dans le cas non noethérien (tout en étant plus simple que celle des EGA) et de ne pas demander de résultats sophistiqués d'algèbre. Par contre, c'est une méthode récurrente qui a une certaine complexité interne.

On commence par un lemme de nature topologique.

**Lemme 8.22** *Soit  $X$  un espace topologique quasi-compact muni d'une base d'ouverts  $\mathcal{B}$  stable par intersection. Soit  $i \geq 0$ . Disons qu'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  possède la propriété  $(P_i)$  si pour tout  $\alpha$  de  $H^i(X, \mathcal{F})$ , il existe un recouvrement affine fini  $(U_j)_{1 \leq j \leq r}$  de  $X$  par des ouverts de  $\mathcal{B}$  tel que l'image de  $\alpha$  dans  $H^1(X, \mathcal{F}_j)$  soit nulle, où  $\mathcal{F}_j := (u_j)_*(\mathcal{F}|_{U_j})$  pour l'application continue et ouverte  $u_j : U_j \rightarrow X$ . Alors :*

- a) *La propriété  $(P_1)$  vaut pour tout faisceau  $\mathcal{F}$ .*
- b) *Soit  $i > 1$ ; si pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{B}$  on a  $H^p(U, \mathcal{F}) = 0$  pour  $0 < p < i$ , alors  $(P_i)$  vaut pour  $\mathcal{F}$ .*

Remarquons au passage que  $\mathcal{F}_j(V) = \mathcal{F}(V \cap U_j)$  pour tout ouvert  $V$  de  $X$ .

**Démonstration :** a) On plonge  $\mathcal{F}$  dans un objet injectif  $I$  de  $\mathcal{A}b(X)$ , d'où une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

. Soit  $\alpha \in H^1(X, \mathcal{F})$ , qu'on relève en  $s \in \mathcal{C}(X)$ . Par surjectivité du morphisme de faisceaux  $I \rightarrow \mathcal{C}$ , on peut trouver un recouvrement (qu'on peut supposer fini vu que  $X$  est quasi-compact)  $(U_j)_{1 \leq j \leq r}$  de  $X$  par des ouverts de  $\mathcal{B}$  tel que chaque  $s|_{U_j}$  se relève en  $\sigma_j \in I(U_j)$ .

Posons  $I_j = (u_j)_*(I|_{U_j})$  et notons  $\bar{\mathcal{C}}_j$  le conoyau du morphisme induit  $\mathcal{F}_j \rightarrow \bar{\mathcal{C}}_j$  (en particulier  $\bar{\mathcal{C}}_j$  s'identifie à un sous-faisceau de  $\mathcal{C}_j := (u_j)_*(\mathcal{C}|_{U_j})$ ). On a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_j & \longrightarrow & I_j & \longrightarrow & \bar{\mathcal{C}}_j & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4)$$

et on sait que l'image  $s_j$  de  $s \in \mathcal{C}(X)$  dans  $\bar{\mathcal{C}}_j(X) \subset \mathcal{C}_j(X) = \mathcal{C}(U_j)$  vient de  $\sigma_j \in I_j(X) = I(U_j)$ . Ainsi l'image de  $s_j$  dans  $H^1(X, \mathcal{F}_j)$  est nulle et par functorialité de la longue suite exacte de cohomologie, on obtient que l'image  $\alpha$  de  $s$  dans  $H^1(X, \mathcal{F})$  est d'image nulle dans  $H^1(X, \mathcal{F}_j)$  comme on voulait.

b) On montre le résultat par récurrence sur  $i \geq 2$ . Soit pour l'instant  $(U_j)_{1 \leq j \leq r}$  un recouvrement fini arbitraire de  $X$  par des ouverts de  $\mathcal{B}$ . Si  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{B}$ , alors  $U \cap U_j$  est encore dans  $\mathcal{B}$  et comme par hypothèse  $H^1((U \cap U_j), \mathcal{F}) = 0$ , on a (en gardant les notations du a)) que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_j(U) \rightarrow I_j(U) \rightarrow \mathcal{C}_j(U) \rightarrow 0$$

est exacte vu que  $\mathcal{F}_j(U) = \mathcal{F}(U \cap U_j)$  (et idem pour  $I$  et  $\mathcal{C}$ ). De même la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_j(U) \rightarrow I_j(U) \rightarrow \bar{\mathcal{C}}_j(U) \rightarrow 0$$

est exacte. Comme ceci est valable pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{B}$ , on obtient  $\bar{\mathcal{C}}_j = \mathcal{C}_j$ . En utilisant alors le diagramme (4), on obtient un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes ( $I$  est injectif, donc flasque d'après la proposition 8.11, a); ainsi chaque  $I_j$  est flasque, donc acyclique d'après la proposition 8.11, b)) :

$$\begin{array}{ccc} H^{i-1}(X, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{i-1}(X, \mathcal{C}_j) & \longrightarrow & H^i(X, \mathcal{F}_j) \end{array}$$

Pour  $i = 2$ , comme le faisceau  $\mathcal{C}$  vérifie  $(P_1)$  d'après a), ce diagramme montre que  $\mathcal{F}$  vérifie  $(P_2)$ , d'où le cas  $i = 2$ . Supposons maintenant le résultat vrai pour les entiers  $p < i$  et montrons-le pour  $i$ . D'après le diagramme, il suffit de montrer que

$\mathcal{C}$  vérifie  $(P_{i-1})$ , et par hypothèse de récurrence il suffit donc d'avoir  $H^p(U, \mathcal{C}) = 0$  pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{B}$  et tout  $0 < p < i - 1$ . Mais ceci résulte de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

et des propriétés  $H^p(U, I) = 0$  et  $H^{p+1}(U, \mathcal{F}) = 0$ .

□

Soit maintenant  $X = \text{Spec } A$  et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . On démontre le théorème par récurrence sur  $i$ , en prenant pour base d'ouverts  $\mathcal{B}$  de  $X$  les ouverts affines. On a bien  $\mathcal{B}$  stable par intersection car  $X$  est séparé.

**Cas  $i = 1$ .** Soit  $\alpha \in H^1(X, \mathcal{F})$ . D'après le lemme 8.22 a), on peut trouver un recouvrement affine  $(U_j)_{1 \leq j \leq r}$  de  $X$  tel que l'image de  $\alpha$  dans tous les  $H^1(X, \mathcal{F}_j)$  soit nulle. Ici  $\mathcal{F}_j$  est quasi-cohérent <sup>63</sup> via le théorème 7.12. Soit alors  $\mathcal{G}$  le conoyau du morphisme  $\mathcal{F} \rightarrow \prod_{j=1}^r \mathcal{F}_j$  (induit par les restrictions  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap U_j)$ ). Les faisceaux  $\prod_{j=1}^r \mathcal{F}_j$  et  $\mathcal{G}$  sont quasi-cohérents par le corollaire 7.8. Le corollaire 7.9 donne que l'homomorphisme  $\prod_{j=1}^r \mathcal{F}_j(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  est surjectif, et la longue suite exacte de cohomologie dit alors que la flèche  $H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{j=1}^r H^1(X, \mathcal{F}_j)$  est injective. Comme  $\alpha$  est d'image nulle dans chaque  $H^1(X, \mathcal{F}_j)$ , ceci conclut le cas  $i = 1$ .

**Cas  $i$  quelconque.** On procède par récurrence sur  $i$ . Soit  $i > 1$ . L'hypothèse de récurrence dit que pour tout ouvert affine  $U$  et tout  $0 < p < i$ , on a  $H^p(U, \mathcal{F}) = 0$  pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ . D'après le lemme 8.22 b), cela implique que  $\mathcal{F}$  vérifie  $(P_i)$ . Soit  $\alpha \in H^i(X, \mathcal{F})$ , on peut donc trouver un recouvrement affine  $(U_j)_{1 \leq j \leq r}$  tel que l'image de  $\alpha$  dans tous les  $H^i(X, \mathcal{F}_j)$  soit nulle. On a alors (comme dans le cas  $i = 1$ ) une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \prod_{j=1}^r \mathcal{F}_j \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

et comme par hypothèse de récurrence  $H^{i-1}(X, \mathcal{G}) = 0$ , on obtient que la flèche  $H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{j=1}^r H^i(X, \mathcal{F}_j)$  est injective, d'où le résultat avec  $(P_i)$ .

□

### 8.3. Une réciproque

Le but de ce paragraphe est de démontrer :

**Théorème 8.23 (Serre)** *Soit  $X$  un schéma noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i)  $X$  est affine.*

---

<sup>63</sup>Noter que même si  $X$  n'est pas noethérien, le morphisme  $u_j$  est ici affine donc le théorème 7.12 s'applique bien.

- ii)  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $i > 0$  et tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ .  
 iii)  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout faisceau cohérent d'idéaux  $\mathcal{F}$ .

**Démonstration :** i) implique ii) d'après le théorème précédent et ii) implique trivialement iii). Supposons donc iii) et montrons i). On montre d'abord :

**Lemme 8.24** *Soit  $X$  un schéma noethérien vérifiant iii). On peut recouvrir  $X$  par des ouverts affines  $X_f$  avec  $f \in A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ .*

Rappelons (cf. lemme 2.7) que  $X_f$  désigne l'ensemble des points  $x$  de  $X$  tels que l'évaluation  $f(x) \in k(x)$  soit non nulle.

**Démonstration :** Il suffit de montrer que tout point fermé  $P$  a un voisinage ouvert du type  $X_f$  comme dans l'énoncé. En effet si  $x \in X$ , alors l'adhérence  $\overline{\{x\}}$  contient un point fermé de  $X$  (cf. preuve de la proposition 6.14). Pour un tel  $P$ , on choisit un ouvert affine  $U$  contenant  $P$  et on pose  $Y = X - U$ . On a alors une suite exacte d'  $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{Y \cup \{P\}} \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow i_* \mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

où pour tout fermé  $F$ , on note  $\mathcal{I}_F$  le faisceau d'idéaux associé à  $F$  (muni de sa structure réduite) et  $i$  est l'immersion fermée  $\{P\} \rightarrow X$  (ici  $\{P\}$  est également muni de sa structure réduite, correspondant au faisceau constant  $k(P)$ ). Ainsi  $i_* \mathcal{O}_P$  est le faisceau dont toutes les fibres sont nulles sauf celle en  $P$  qui est le corps résiduel  $k(P)$ . En appliquant l'hypothèse iii), la suite exacte de cohomologie donne que la flèche  $\Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \rightarrow \Gamma(X, i_* \mathcal{O}_P)$  est surjective. On peut donc relever  $1 \in \Gamma(X, i_* \mathcal{O}_P)$  en un élément  $f$  de  $\Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \subset A$ . Ainsi l'image de  $f$  dans  $k(P)$  est 1, et  $P$  est donc dans  $X_f$ . D'autre part  $X_f$  est affine car c'est l'ouvert principal  $D(\bar{f})$  de  $U$ , où  $\bar{f}$  est l'image de  $f$  dans  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  : en effet aucun point de  $X - U = Y$  n'est dans  $X_f$  puisque  $f \in \Gamma(X, \mathcal{I}_Y)$ .

□

**Preuve du théorème 8.23 :** Comme  $X$  est quasi-compact, on peut recouvrir  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines  $X_{f_1}, \dots, X_{f_r}$  comme dans le lemme. Pour montrer que  $X$  est affine, il suffit (proposition 2.8) de montrer que l'idéal engendré par les  $f_i$  est  $A$ . On définit un morphisme de faisceaux  $\alpha : \mathcal{O}_X^r \rightarrow \mathcal{O}_X$  en envoyant (pour tout ouvert  $U$  de  $X$ )  $(a_1, \dots, a_r) \in \mathcal{O}_X^r(U)$  sur  $\sum_{i=1}^r f_i a_i$ . Alors  $\alpha$  est surjectif car les  $X_{f_i}$  recouvrent  $X$  (donc en chaque

point  $x$  de  $X$ , la restriction de l'un au moins des  $f_i$  à  $\mathcal{O}_{X,x}$  est inversible). Soit  $\mathcal{F}$  le noyau de  $\alpha$ , on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X^r \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

On peut alors écrire une filtration de  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^{r-1} \supset \dots \supset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X$$

où les quotients successifs sont des faisceaux cohérents d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ . En écrivant la suite exacte de cohomologie avec l'hypothèse iii), on obtient par récurrence sur  $i$  que  $H^1(X, \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq r$ . En particulier  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ , et  $\alpha$  induit une surjection de  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^r)$  sur  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , i.e. l'idéal engendré par les  $f_i$  est  $A$ . □

## 9. Cohomologie de Čech et applications

Dans cette section, on va utiliser la cohomologie de Čech pour calculer la cohomologie de l'espace projectif. La principale application est la finitude sur  $A$  des groupes de cohomologie d'un faisceau cohérent pour un schéma projectif sur un anneau noethérien  $A$ .

### 9.1. Cohomologie de Čech

On va rappeler ici la construction classique de la cohomologie de Čech. Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  (on suppose l'ensemble  $I$  bien ordonné; on se limitera de toute façon au cas fini pour les applications). Pour toute famille finie  $i_0, \dots, i_p$  de  $I$ , on notera  $U_{i_0, \dots, i_p}$  l'intersection  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ .

Soit maintenant  $\mathcal{F}$  un faisceau de groupes abéliens sur  $X$ . On définit un complexe  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  de groupes abéliens comme suit. Pour tout  $p \geq 0$ , on pose

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$$

Un élément  $\alpha$  de  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est donné par une famille  $\alpha_{i_0, \dots, i_p}$  de  $\mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$  pour tout  $(p+1)$ -uple  $i_0 < \dots < i_p$ . On définit le cobord  $d^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$  par la formule usuelle

$$(d^p \alpha)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k (\alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}})|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

(Par convention  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$  si le cardinal de  $I$  est  $\leq p$ ).

**Remarque :** Il est parfois commode de définir  $\alpha_{i_0, \dots, i_p}$  pour tout  $p + 1$ -uplet  $i_0, \dots, i_p$  de  $I$ . On pose  $\alpha_{i_0, \dots, i_p} = 0$  si l'un des indices se répète, et  $\alpha_{i_0, \dots, i_p} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{\sigma(i_0), \dots, \sigma(i_p)}$  sinon, où  $\sigma$  est la permutation qui réordonne les indices. La formule pour  $d^p \alpha$  est alors correcte dans tous les cas.

**Définition 9.1** Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour tout faisceau de groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on définit le  $p$ -ième groupe de cohomologie de Čech de  $\mathcal{F}$ , relativement au recouvrement  $\mathcal{U}$ , par la formule

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

Attention on n'a pas en général de suite exacte longue de cohomologie de Čech<sup>64</sup> associée à une suite exacte courte de faisceaux (considérer le recouvrement constitué d'un seul ouvert, quand le foncteur de sections globales n'est pas exact), car la suite de complexes de Čech associée ne reste pas forcément exacte. Notons que par définition d'un faisceau, on a  $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$  pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  et tout recouvrement  $\mathcal{U}$ .

**Lemme 9.2** On suppose que  $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_r)$  est un recouvrement de  $X$  avec  $U_i = X$  pour un certain  $i$ . Alors le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varepsilon} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

est exact, où  $\varepsilon$  est donné par les restrictions  $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U_i)$ .

**Démonstration :** On peut supposer  $i = 1$ . L'exactitude en  $C^0$  vient de la définition d'un faisceau. On va montrer que sur le complexe de Čech, l'identité est homotope à zéro. Pour  $p \geq 1$ , on définit  $k^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  tels que

$$d^{p-1} \circ k^p + k^{p+1} \circ d^p = \text{id}_{C^p}$$

ce qui implique  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$  pour  $p \geq 1$ . Il suffit de poser, pour  $\alpha \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$ ,  $k^p(\alpha) = 0$  si  $i_0 \neq 1$  et  $k^p(\alpha) = \alpha \in \mathcal{F}(U_{i_1, \dots, i_p})$  si  $i_0 = 1$ . □

## 9.2. Le théorème de comparaison

Le principal résultat qui va nous être utile sur la cohomologie de Čech est qu'elle coïncide avec la cohomologie définie par les foncteurs dérivés si l'on travaille avec un recouvrement affine sur un schéma noethérien et séparé

---

<sup>64</sup>Le point est que la cohomologie de Čech correspond à des foncteurs dérivés dans la catégorie des préfaisceaux et non des faisceaux.

et avec un faisceau quasi-cohérent.<sup>65</sup> Pour cela, on va définir une version "faisceautisée" de la cohomologie de Čech. On pose

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0, \dots, i_p}})$$

où  $f$  désigne l'inclusion  $U_{i_0, \dots, i_p} \rightarrow X$ . Les cobords  $d^p : \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{C}^{p+1}$  sont définis comme ci-dessus, ce qui donne un complexe  $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  de faisceaux sur  $X$  tel que  $\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

**Proposition 9.3** *La suite de faisceaux*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \quad (5)$$

*est exacte*

**Démonstration :** Soit  $x \in X$ . Il suffit de montrer qu'il existe un ouvert  $V$  de  $X$  contenant  $x$  tel que la suite des sections globales sur  $V$  associée à (5) soit exacte. Mais ceci résulte du lemme 9.2 en prenant  $V \subset U_i$  pour un certain  $i$ . □

**Proposition 9.4** *Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Alors pour tout faisceau flasque de groupes abéliens sur  $X$ , on a  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$  si  $p > 0$ .*

**Démonstration :** On utilise la résolution  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  (c'est bien une suite exacte d'après la proposition précédente). Tous les faisceaux  $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  sont flasques (car cette notion est stable par produit, restriction à un ouvert, et image directe). D'après la proposition 8.11, on peut utiliser cette résolution pour calculer les groupes de cohomologie  $H^p(X, \mathcal{F})$ . On obtient

$$H^p(X, \mathcal{F}) = h^p(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))) = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Mais comme  $\mathcal{F}$  est flasque, les groupes  $H^p(X, \mathcal{F})$  sont nuls pour  $p > 0$ , d'où le résultat. □

**Lemme 9.5** *Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert. Alors pour tout  $p \geq 0$  on a une application naturelle (fonctorielle en  $\mathcal{F}$ )*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

---

<sup>65</sup>Plus généralement cela marche dès que le faisceau n'a pas de cohomologie en degré  $> 0$  sur les ouverts  $U_{i_0, \dots, i_p}$  associés au recouvrement, voir la remarque après la preuve du théorème 9.6.

**Démonstration :** Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  une résolution injective de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{A}b(X)$ . D'après le théorème de comparaison ([W], th. 2.2.6 et 2.3.7), on a un morphisme de complexes (unique à homotopie près)  $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$  qui induit l'identité sur  $\mathcal{F}$ . On obtient alors l'application voulue en appliquant les foncteurs  $\Gamma(X, \cdot)$  et  $h^p$ . □

Notons aussi que par construction les flèches  $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$  ainsi obtenues sont également compatibles avec les cobords dans les suites exactes longues de cohomologie.

**Theorème 9.6** *Soit  $X$  un schéma noethérien et séparé. Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert affine de  $X$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors pour tout  $p \geq 0$ , on a des isomorphismes*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

**Démonstration :** L'énoncé est clair pour  $p = 0$ . Pour le cas général, on commence par un lemme (qui a un intérêt propre).

**Lemme 9.7** *Soient  $X$  un schéma noethérien et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors  $\mathcal{F}$  se plonge dans un faisceau flasque et quasi-cohérent.*

**Démonstration :** On recouvre  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines  $U_i = \text{Spec } A_i$  et on pose  $\mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M}_i$ . Chaque  $M_i$  se plonge dans un  $A_i$ -module injectif  $I_i$ . Soit  $f_i : U_i \rightarrow X$  l'inclusion, posons  $\mathcal{G} := \bigoplus_i (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$ . On a un morphisme injectif de faisceaux  $\mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \widetilde{I}_i$ , d'où un morphisme de faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow (f_i)_*(\widetilde{I}_i)$  pour tout  $i$ . On en déduit un morphisme de faisceaux  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , qui est injectif (parce que les  $U_i$  recouvrent  $X$ ). D'autre part, les  $\widetilde{I}_i$  sont flasques d'après la proposition 8.21 donc  $\mathcal{G}$  est flasque comme produit de faisceaux flasques. Il est quasi-cohérent d'après le théorème 7.12. □

D'après le lemme, on peut donc écrire une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow 0 \tag{6}$$

avec  $\mathcal{G}$  flasque et quasi-cohérent. D'après la proposition 5.6, les ouverts  $U_{i_0, \dots, i_p}$  associés au recouvrement  $\mathcal{U}$  sont tous affines car  $X$  est supposé séparé. Comme  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent, la suite exacte de cohomologie donne, avec le théorème 8.15, une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \mathcal{G}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \mathcal{R}(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow 0$$



et en prenant les produits, on obtient une suite exacte de complexes de Čech :

$$0 \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \rightarrow 0$$

qui donne naissance à une longue suite exacte de cohomologie de Čech. Comme  $\mathcal{G}$  est flasque, la proposition 9.4 dit qu'il n'a pas de cohomologie de Čech en degré  $> 0$ , d'où des isomorphismes

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{R}) \rightarrow \check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

En utilisant les applications du lemme 9.5, le cas  $p = 0$ , et la suite exacte de cohomologie associée à (6) on obtient l'isomorphisme voulu pour  $p = 1$ . Comme  $\mathcal{R}$  est quasi-cohérent par le corollaire 7.8, on conclut par récurrence sur  $p$ . □

**Remarque :** La même preuve par récurrence fonctionne (dans le cadre d'un espace topologique  $X$  quelconque) en supposant seulement qu'on a  $H^p(V, \mathcal{F}|_V) = 0$  pour tout ouvert  $V$  intersection finie d'ouverts de  $\mathcal{U}$  et tout  $p > 0$ . En effet si on plonge  $\mathcal{F}$  dans un injectif  $I$ , la longue suite exacte de cohomologie donne immédiatement la même propriété pour le quotient  $\mathcal{R} = I/\mathcal{F}$  (en effet tous les  $I|_V$  sont flasques, donc acycliques). Le lemme 9.7 n'est donc pas nécessaire.

**Corollaire 9.8** *Soit  $X$  un schéma noethérien et séparé qui est recouvert par  $r + 1$  ouverts affines (par exemple  $\mathbf{P}_A^r$  avec  $A$  noethérien. Alors pour  $i > r$ , on a  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ .*

En effet on peut calculer ces groupes via la cohomologie de Čech associée à un recouvrement affine (théorème 9.6), qui est ici triviale en degré  $> r$  parce que  $X$  admet un recouvrement par  $r + 1$  ouverts affines.

### 9.3. La cohomologie de l'espace projectif

Soient  $A$  un anneau noethérien et  $S$  l'anneau gradué  $A[x_0, \dots, x_r]$ . On pose  $X = \text{Proj } S$ .

**Theorème 9.9** *Soit  $X = \mathbf{P}_A^r$ .*

- a) *On a  $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$  pour  $0 < i < r$  et  $n \in \mathbf{Z}$ .*
- b) *Le groupe  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r - 1))$  est isomorphe à  $A$ .*
- c) *Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , l'application naturelle*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n - r - 1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r - 1)) \simeq A$$

*est un accouplement parfait de  $A$ -modules libres de type fini.*

Rappelons que pour  $i > r$ , on sait déjà que  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ .

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{F}$  le faisceau quasi-cohérent défini par  $\mathcal{F} := \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$ . Sur un espace topologique noethérien, la cohomologie commute avec les sommes directes, on va donc calculer la cohomologie de  $\mathcal{F}$  pour obtenir celle des différents  $\mathcal{O}_X(n)$  (via la graduation de  $\mathcal{F}$ ). En particulier  $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  est isomorphe à  $S$  (proposition 7.22). Notons que tous les groupes de cohomologie qui interviennent ici peuvent être considérés comme des  $A$ -modules. Pour calculer la cohomologie de Čech de  $\mathcal{F}$ , on va utiliser le recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $X$  par les ouverts affines  $U_i = D_+(x_i)$ ; cela donnera le résultat via le théorème de comparaison 9.6. Ici pour toute famille d'indices  $i_0, \dots, i_p$ , l'ouvert  $U_{i_0, \dots, i_p}$  est juste  $D_+(x_{i_0} \dots x_{i_p})$ , ce qui fait qu'on a

$$\mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \simeq S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}}$$

(en effet pour tout  $f$  homogène dans  $S$ ,  $\mathcal{O}_X(n)(D_+(f))$  est constitué des éléments de degré  $n$  du localisé  $S_f$ ) et de plus la graduation sur  $\mathcal{F}$  correspond via cet isomorphisme à la graduation naturelle sur  $S_{x_{i_0} \dots x_{i_p}}$ . Finalement le complexe de Čech  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est donné par

$$\prod S_{x_{i_0}} \rightarrow \prod S_{x_{i_0} x_{i_1}} \rightarrow \dots \rightarrow S_{x_0 \dots x_r}$$

la graduation de tous les  $A$ -modules étant compatibles avec celle de  $\mathcal{F}$ . On traite alors les différents cas séparément.

**Preuve de b) :** Le groupe  $H^r(X, \mathcal{F})$  est le conoyau de la dernière flèche du complexe de Čech :

$$d^{r-1} : \prod_k S_{x_0 \dots \hat{x}_k \dots x_r} \rightarrow S_{x_0 \dots x_r}$$

On peut voir  $S_{x_0 \dots x_r}$  comme un  $A$ -module libre de base  $x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$  avec les  $l_i$  dans  $\mathbf{Z}$ . L'image de  $d^{r-1}$  est le sous-module libre engendré par les éléments de la base pour lesquels au moins l'un des  $l_i$  est positif ou nul. On peut donc voir  $H^r(X, \mathcal{F})$  comme le  $A$ -module libre de base les  $x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}$  tels que tous les  $l_i$  soient  $< 0$ , la graduation étant donnée par  $\sum l_i$ . En particulier le seul monôme de degré  $-r - 1$  est  $x_0^{-1} \dots x_r^{-1}$ , ce qui fait que  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r - 1))$  est un  $A$ -module libre de rang 1, ce qui prouve b).

**Preuve de c) :** D'après la description de  $H^r(X, \mathcal{F})$  ci-dessus, on a  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n - r - 1)) = 0$  si  $n < 0$ , et on savait déjà que  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$  si  $n < 0$ . Ainsi si  $n < 0$ , l'énoncé est trivial. Pour  $n \geq 0$ ,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  a

une base constituée des monômes  $x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r}$  avec  $m_i \geq 0$  et  $\sum m_i = n$ . On a un accouplement naturel de  $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$  avec  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n - r - 1))$ , à valeurs dans  $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r - 1))$ , défini par

$$(x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r}) \cdot (x_0^{l_0} \dots x_r^{l_r}) = x_0^{m_0+l_0} \dots x_r^{m_r+l_r}$$

étant entendu que  $x_i^{m_i+l_i} = 0$  si  $m_i + l_i < 0$ . On a donc bien un accouplement parfait, la base duale de  $(x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r})$  étant  $(x_0^{-m_0-1} \dots x_r^{-m_r-1})$ .

**Preuve de a)** : On procède par récurrence sur  $r$ . Pour  $r = 1$ , il n'y a rien à démontrer, supposons donc  $r \geq 2$ . La localisation du complexe  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  par rapport à  $x_r$  donne le complexe de Čech de  $\mathcal{F}|_{U_r}$  sur  $U_r$  par rapport au recouvrement affine  $(U_i \cap U_r)$ ,  $i = 0, \dots, r$ . Ce complexe donne donc la cohomologie de  $\mathcal{F}|_{U_r}$  sur  $U_r$  (d'après le théorème de comparaison 9.6), qui est nulle d'après le théorème 8.15. Comme la localisation est un foncteur exact, on en déduit que le localisé de  $H^i(X, \mathcal{F})$  en  $x_r$  est trivial, autrement dit tout élément de  $H^i(X, \mathcal{F})$  pour  $i > 0$  est annulé par une puissance de  $x_r$ . Il suffit donc de montrer que la multiplication par  $x_r$  est injective sur  $H^i(X, \mathcal{F})$ ; on peut voir cette multiplication comme un homomorphisme entre les  $A$ -modules gradués  $H^i(X, \mathcal{F}(-1))$  et  $H^i(X, \mathcal{F})$  (noter que  $\mathcal{F}(-1)$  est le même faisceau que  $\mathcal{F}$  mais avec la graduation décalée d'un cran).

La suite exacte de  $S$ -modules gradués

$$0 \rightarrow S(-1) \xrightarrow{x_r} S \rightarrow S/(x_r) \rightarrow 0$$

donne la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_H \rightarrow 0$$

où  $H$  est l'hyperplan  $x_r = 0$  et  $i : H \rightarrow X$  désigne l'immersion fermée correspondante. En tensorisant par  $\mathcal{O}_X(n)$  puis en prenant la somme directe, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_H \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} i_*(\mathcal{O}_H(n))$ . On obtient donc une longue suite exacte de cohomologie

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}_H) \rightarrow \dots$$

où la flèche  $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F})$  est la multiplication par  $x_r$ .

Le schéma  $H$  est isomorphe à  $\mathbf{P}_A^{r-1}$ ; on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence en notant aussi (proposition 8.14) que  $H^i(X, \mathcal{F}_H) =$

$H^i(H, \bigoplus_n \mathcal{O}_H(n))$ . Ainsi  $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0$  pour  $0 < i < r - 1$ . On obtient alors que la multiplication par  $x_r$  est injective sur  $H^i(X, \mathcal{F})$  pour  $1 < i < r$ . Il reste juste à traiter à part le cas  $i = 1$ . Pour cela, on note que  $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}_H)$  est surjective vu que  $H^0(X, \mathcal{F}) = S$  et  $H^0(X, \mathcal{F}_H) = S/(x_r)$ . La longue suite exacte donne alors le résultat.  $\square$

## 9.4. Application aux morphismes projectifs

La principale application du calcul de la cohomologie des  $\mathcal{O}(n)$  sur  $\mathbf{P}_A^r$  est le théorème suivant (qui vaut plus généralement pour un morphisme propre, voir [EGA3], 3.2.1.).

**Théorème 9.10** *Soient  $A$  un anneau noethérien et  $X \rightarrow \text{Spec } A$  un morphisme projectif. Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors :*

- a) *Pour tout  $i \geq 0$ , le  $A$ -module  $H^i(X, \mathcal{F})$  est de type fini.*
- b) *Soit  $j : X \rightarrow \mathbf{P}_A^r$  une immersion fermée. Alors il existe un entier  $n_0$  tel qu'on ait  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  pour tout  $i > 0$  et tout  $n \geq n_0$ .*

**Démonstration :** Soit  $j : X \rightarrow \mathbf{P}_A^r$  une immersion fermée. On a vu que  $j_*\mathcal{F}$  était un faisceau cohérent sur  $\mathbf{P}_A^r$  (th. 7.12) avec de plus  $j_*(\mathcal{F}(n)) = (j_*\mathcal{F})(n)$  (lemme 7.18). D'autre part d'après la proposition 8.14, <sup>66</sup> on a  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbf{P}_A^r, j_*\mathcal{F})$ . Il suffit donc de prouver a) et b) quand  $X = \mathbf{P}_A^r$ . Le théorème 9.9 donne le résultat voulu pour tout faisceau de la forme  $\mathcal{O}_X(q)$  avec  $q \in \mathbf{Z}$ , donc aussi pour toute somme directe finie de tels faisceaux. On a aussi que si  $i > r$  alors pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  on a  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  (pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ ) vu que  $X = \mathbf{P}_A^r$  est recouvert par  $r + 1$  ouverts affines. Ainsi pour le b), il suffit de montrer l'assertion b') suivante : pour chaque  $i > 0$ , il existe un entier  $n_0$  (dépendant éventuellement de  $i$ ) tel que  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  pour  $n \geq n_0$ . On montre maintenant a) et b') par récurrence descendante sur  $i$ .

Supposons donc a) vrai pour  $i + 1 > 0$  et montrons-le pour  $i$ . D'après le corollaire 7.20, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{E}$  est une somme directe finie de faisceaux de la forme  $\mathcal{O}(q)$ , et  $\mathcal{R}$  est encore cohérent. La longue suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \rightarrow \dots$$

---

<sup>66</sup>Attention, ceci n'est pas vrai pour un morphisme propre  $j$  quelconque.

or  $H^{i+1}(X, \mathcal{R})$  est de type fini sur  $A$  par hypothèse de récurrence et il en va de même de  $H^i(X, \mathcal{E})$  comme on l'a vu plus haut. Comme  $A$  est noethérien, on obtient bien que  $H^i(X, \mathcal{F})$  est de type fini.

Pour b'), on utilise la même suite exacte que l'on tensorise par  $\mathcal{O}_X(n)$ . On obtient une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathcal{E}(n)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \rightarrow \dots$$

Par hypothèse de récurrence les  $H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n))$  sont nuls pour  $n$  assez grand, et de même pour les  $H^i(X, \mathcal{E}(n))$  d'après ce qu'on a vu plus haut. Ainsi  $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$  est nul pour  $n$  assez grand. □

**Remarque :** Si  $A \rightarrow A'$  est un homomorphisme plat d'anneaux et  $X$  est un  $A$ -schéma noethérien et séparé, alors pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on a  $H^i(X', f^*\mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A'$ , où  $X' = X \times_A A'$  et  $f : X' \rightarrow X$  est la projection. En effet on peut calculer  $H^i(X, \mathcal{F})$  comme  $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  pour un recouvrement affine  $\mathcal{U}$  de  $X$ . Alors  $\mathcal{U}' = f^{-1}(\mathcal{U})$  est un recouvrement ouvert affine de  $X'$ , et le complexe de Čech de  $X'$  pour  $f^*\mathcal{F}$  est  $C^\bullet(\mathcal{U}', f^*\mathcal{F}) \otimes_A A'$ ; on en déduit le résultat par platitude de  $A$ . Ceci s'applique en particulier pour une extension de corps  $k'/k$  : on obtient  $\dim_k H^i(X, \mathcal{F}) = \dim_{k'} H^i(X', f^*\mathcal{F})$  quand  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent sur une  $k$ -variété projective  $X$ . Le même argument donne :

**Proposition 9.11** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme affine entre schémas noethériens et séparés. Alors  $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(Y, f_*\mathcal{F})$  pour tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ .*

**Définition 9.12** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Pour tout  $i \geq 0$ , on définit les foncteurs *images directes supérieures*  $R^i f_*$  comme les foncteurs dérivés du foncteur  $f_*$  de  $\mathcal{A}b(X)$  vers  $\mathcal{A}b(Y)$ .

Notons que pour  $Y$  affine, on a  $R^i f_*(\mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})^\sim$  (voir [H], prop. III.8.5 pour une preuve détaillée) : l'idée est que la formule est vraie pour  $i = 0$  via le théorème 7.12; d'autre part les deux cotés sont des  $\delta$ -foncteurs sur  $\mathcal{Q}Coh(X)$ , qui sont *effaçables* pour  $i > 0$  via le lemme 9.7. On applique alors un résultat général d'algèbre homologique pour conclure. Le théorème 8.15 donne alors :

**Proposition 9.13** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme affine entre schémas noethériens. Alors si  $\mathcal{F}$  est un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ , les faisceaux  $R^i f_*$  sont nuls pour  $i > 0$ .*

Voici maintenant une conséquence du théorème 9.10 :

**Corollaire 9.14** *Soient  $X$  et  $Y$  des schémas noethériens et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif. Alors pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , les faisceaux  $R^i f_* \mathcal{F}$  ( $i \geq 0$ ) sont cohérents sur  $Y$ . En particulier l'image directe  $f_* \mathcal{F}$  est un faisceau cohérent.*

Là encore, ce résultat reste vrai en remplaçant "projectif" par "propre".

**Démonstration :** La question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer  $Y = \text{Spec } A$  avec  $A$  noethérien. On a alors  $R^i f_* \mathcal{F} = \widetilde{M}$  avec  $M = H^i(X, \mathcal{F})^\sim$ . Mais  $M$  est un  $A$ -module de type fini d'après le théorème 9.10. Ainsi  $R^i f_* \mathcal{F}$  est cohérent. □

**Corollaire 9.15** *Soient  $k$  un corps et  $X$  un schéma projectif sur  $k$ . On suppose  $X$  géométriquement intègre sur  $k$ . Alors  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ .*

**Démonstration :** Soit  $f : X \rightarrow \text{Spec } k$  un morphisme projectif. Alors  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est une  $k$ -algèbre  $L$  de dimension finie d'après le théorème 9.10. Comme  $X$  est intègre,  $L$  est intègre (proposition 3.16) donc c'est un corps qui est une extension finie de  $k$ . En particulier le corps des fonctions de  $X$  contient  $L$  comme sous-corps. Ceci implique  $L = k$  d'après la proposition 3.19. □

**Corollaire 9.16** *Soit  $X$  un schéma propre sur un anneau noethérien  $A$ . Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau ample sur  $X$ . Alors pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $i > 0$ , on ait  $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ .*

(On a une réciproque, voir [H], prop. III.5.3).

**Démonstration :** D'après le théorème 7.31, il existe  $m > 0$  tel que  $\mathcal{L}^m$  soit très ample. Comme  $X$  est propre sur  $\text{Spec } A$ , on peut trouver une immersion fermée  $X \rightarrow \mathbf{P}_A^r$  tel que  $\mathcal{L}^m = \mathcal{O}_X(1)$ . On applique alors le théorème 9.10 à  $\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{m-1}$ . □

## 10. Diviseurs, faisceaux inversibles, courbes.

*Faute de temps, ce dernier chapitre est assez allusif. On se reportera à [H] (II.6, II.7, III.7, IV.1, IV.2) pour plus de détails.*

## 10.1. Diviseurs de Weil sur un schéma

Il y a plusieurs notions de diviseurs sur un schéma. La plus générale est celle de diviseur de Cartier, qui est étroitement liée aux faisceaux inversibles (ou encore aux fibrés en droites) mais la plus intuitive est celle de diviseur de Weil.

Dans tout ce paragraphe, on va travailler avec des schémas  $X$  vérifiant la condition :

(\*)  $X$  est noethérien, intègre, séparé, et régulier en codimension 1.

La dernière condition signifie que pour tout point  $x$  de codimension 1 (i.e.  $\mathcal{O}_{X,x}$  est de dimension 1), l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier (donc est de valuation discrète vu que  $X$  est supposé noethérien). Par exemple tout schéma noethérien, séparé et normal vérifie (\*).

**Définition 10.1** Soit  $X$  un schéma vérifiant (\*). Un *diviseur premier* sur  $X$  est un sous-schéma fermé intègre<sup>67</sup> de codimension 1 de  $X$ . Un *diviseur de Weil* sur  $X$  est un élément du groupe abélien libre  $\text{Div } X$  engendré par les diviseurs premiers. Un tel diviseur est dit *effectif* s'il s'écrit comme somme formelle à coefficients  $\geq 0$  de diviseurs premiers.

Ainsi un diviseur s'écrit  $D = \sum_Y n_Y Y$  avec  $n_Y \in \mathbf{Z}$ , la famille  $(n_Y)$  étant presque nulle et indexée par les sous-schémas fermés intègres de codimension 1. Le *support* de  $D$  est l'ensemble (fini) des diviseurs premiers  $Y$  tels que  $n_Y \neq 0$ .

Si maintenant  $K$  est le corps des fonctions de  $X$  et  $Y$  est un diviseur premier, alors on a une valuation  $v_Y : K^* \rightarrow \mathbf{Z}$  (correspondant à la valuation discrète sur  $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$ , où  $\eta_Y$  est le point générique de  $Y$ ).

**Définition 10.2** Soit  $f \in K^*$ . Le *diviseur de  $f$*  est l'élément de  $\text{Div } X$  défini par

$$\text{Div } f = \sum_Y v_Y(f) Y$$

Les diviseurs de la forme  $\text{Div } f$  avec  $f \in K^*$  sont dits *principaux*.

Notons que  $\text{Div } f$  est bien un élément de  $\text{Div } X$  via le

**Lemme 10.3** Soit  $f \in K^*$ . Alors  $v_Y(f) = 0$  pour presque tout diviseur premier  $Y$ .

---

<sup>67</sup>ou encore un fermé irréductible de codimension 1, vu qu'il y a une unique structure réduite dessus.

**Démonstration :** Soit  $U = \text{Spec } A$  un ouvert affine de  $X$  tel que  $f \in A$ , alors seul un nombre fini de diviseurs premiers ne rencontrent pas  $U$  car  $X$  est noethérien (donc  $X - U$  est réunion d'un nombre fini de composantes irréductibles, qui sont de codimension au moins 1). On se ramène ainsi au cas  $X = \text{Spec } A$  avec  $f \in A$ . Alors  $v_Y(f) \geq 0$  pour tout diviseur premier  $Y$ , et  $v_Y(f) > 0$  implique  $Y \subset V(fA)$ , avec  $V(fA)$  fermé strict de  $\text{Spec } A$  vu que  $f \neq 0$  et  $A$  est intègre. Ainsi  $V(fA)$  ne contient qu'un nombre fini de fermés irréductibles de codimension 1 (toujours parce que  $A$  est noethérien). □

**Définition 10.4** Le groupe des classes de diviseurs  $\text{Cl } X$  de  $X$  est le quotient de  $\text{Div } X$  par le groupe  $\text{Div}_0 X$  des diviseurs principaux. Deux diviseurs  $D_1$  et  $D_2$  sont dits *linéairement équivalents* (ou *rationnellement équivalents*) si  $D_1 - D_2$  est principal.

Le groupe  $\text{Cl } X$  est un invariant en général assez difficile à calculer.

**Exemples :** a) Si  $A$  est un anneau de Dedekind, alors  $\text{Cl}(\text{Spec } A)$  est le groupe des classes d'idéaux usuel  $\text{Cl}(A)$ . Il est fini pour l'anneau des entiers d'un corps de nombres (ou du corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini), mais pas en général.

b) Soit  $A$  un anneau noethérien et factoriel. Alors  $\text{Cl}(\text{Spec } A) = 0$  (en particulier  $\text{Cl}(\mathbf{A}_k^n) = 0$  si  $k$  est un corps). En effet un anneau intègre noethérien est factoriel si et seulement si tout idéal premier de hauteur 1 est principal (cela résulte du *Hauptidealsatz*, cf. [Mat], p. 141). Les diviseurs premiers de  $\text{Spec } A$  sont les  $Y = V(\wp)$  avec  $\wp$  premier de hauteur 1, et si  $\wp$  est engendré par  $f \in A$ , alors  $\text{Div } f = 1 \cdot Y$  (il n'y a pas d'idéal premier non nul de hauteur 1 strictement inclus dans  $\wp$ ). Réciproquement si  $A$  est un anneau normal avec  $\text{Cl}(\text{Spec } A) = 0$ , alors  $A$  est factoriel via la proposition 6.3

c) Les diviseurs premiers de  $\mathbf{A}_k^n$  sont les fermés de la forme  $V(f)$  avec  $f$  polynôme irréductible. En effet comme  $k[T_1, \dots, T_n]$  est factoriel, ses idéaux premiers de hauteur 1 sont principaux.

d) On déduit de c) que les diviseurs premiers de  $\mathbf{P}_k^n$  sont les fermés de la forme  $V_+(f)$  avec  $f$  polynôme homogène irréductible. En effet si  $Y$  est un tel diviseur premier, alors son intersection avec l'ouvert  $D_+(T_0) \simeq \mathbf{A}_k^n$  est de la forme  $Z = V(g)$ , où  $g(T_1, \dots, T_n)$  est un polynôme irréductible, et  $Y$  est alors l'adhérence de  $Z$  dans  $\mathbf{P}_k^n$ , i.e. le fermé  $V_+(f)$ , où  $f \in k[T_0, T_1, \dots, T_n]$  est l'homogénéisé de  $g$ . Le degré de  $f$  s'appelle le *degré* (noté  $\text{deg } Y$ ) du diviseur premier  $Y \subset \mathbf{P}_k^n$  (il est bien défini car  $f$  est unique à une constante multiplicative près). Il faut bien noter qu'il ne s'agit pas d'une notion intrinsèque associée au schéma intègre  $Y$  : le degré dépend du plongement projectif. On étend cette notion par additivité en un homomorphisme  $\text{deg} : \text{Div}(\mathbf{P}_k^n) \rightarrow \mathbf{Z}$ .



**Proposition 10.5** Soient  $X = \mathbf{P}_k^n$  et  $H$  l'hyperplan  $T_0 = 0$  (i.e.  $H = V_+(T_0)$ ). Alors :

- a) Tout diviseur  $D$  de degré  $d$  est linéairement équivalent à  $dH$ .
- b) Soit  $K$  le corps des fonctions de  $X$ . Pour toute fonction  $f \in K^*$ , on a  $\deg(\text{Div } f) = 0$ .
- c) La fonction  $\deg$  induit un isomorphisme de  $\text{Cl } X$  sur  $\mathbf{Z}$ .

**Démonstration :** Comme le degré du diviseur  $H$  est 1, l'assertion c) est une conséquence immédiate de a) et b). Soit  $g \in k[T_0, \dots, T_n]$  un polynôme homogène de degré  $d$ , on le factorise en un produit de polynômes irréductibles homogènes

$$g = g_1^{n_1} \dots g_r^{n_r}$$

Chaque  $g_i$  définit un diviseur premier  $Y_i$  de  $X$  de degré  $d_i = \deg g_i$ ; définissons<sup>68</sup>  $\text{Div } g := \sum_i n_i Y_i$ . Alors le degré de  $\text{Div } g$  est  $d$ . Comme une fonction  $f$  de  $K^*$  est le quotient  $g/h$  de deux polynômes homogènes de même degré, on obtient b) vu que le diviseur de  $f$  est clairement  $\text{Div } g - \text{Div } h$ .

Montrons enfin a). Soit  $D$  un diviseur de degré  $d$ , on peut écrire  $D = D_1 - D_2$ , avec  $D_1$  et  $D_2$  effectifs de degrés respectifs  $d_1$  et  $d_2$ . D'après la description des diviseurs premiers de  $\mathbf{P}_k^n$ , on peut écrire  $D_1 = \text{Div } g_1$  et  $D_2 = \text{Div } g_2$  avec  $g_1$  et  $g_2$  polynômes homogènes non nuls. Alors  $D - dH = \text{Div } f$ , où  $f = g_1/T_0^d g_2$  est dans  $K^*$ .  $\square$

**Remarques :** a) Le même type de raisonnement montre que le groupe des classes de diviseurs de  $\mathbf{P}_k^1 \times_k \mathbf{P}_k^1$  est  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , ce qui montre en particulier que  $\mathbf{P}_k^1 \times_k \mathbf{P}_k^1$  n'est pas isomorphe à  $\mathbf{P}_k^2$ , bien que ces deux variétés soient projectives, lisses et  $k$ -birationnelles. Attention, il n'est pas vrai en général que  $\text{Cl}(X \times_k X)$  soit isomorphe à  $\text{Cl } X \oplus \text{Cl } X$  pour une  $k$ -variété projective et lisse  $X$ ; par contre on a  $\text{Cl}(\mathbf{A}_X^1) = \text{Cl}(X)$  pour tout schéma  $X$  vérifiant (\*), voir [H], prop II.2.6 et exercice IV.4.10.

b) Il est facile de voir que si  $U$  est un ouvert non vide d'un schéma  $X$  vérifiant (\*), alors on a un homomorphisme surjectif de restriction  $\text{Cl } X \rightarrow \text{Cl } U$ , dont le noyau consiste en les classes des diviseurs dont le support est dans  $Z := X - U$ . Si  $Z$  est irréductible, ce noyau est le sous-groupe de  $\text{Cl } X$  engendré par  $1.Z$ . On en déduit par exemple que si  $Y$  est une courbe irréductible de degré  $d$  dans  $\mathbf{P}_k^2$ , alors  $\text{Cl}(\mathbf{P}_k^2 - Y) = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ .

Dans le cas des courbes, on dispose d'une notion de degré "intrinsèque" :

**Définition 10.6** Soit  $X$  une courbe propre, lisse et intègre sur un corps  $k$ . Soit  $D = \sum_i n_i P_i$  un diviseur de Weil sur  $X$ . On définit le *degré*  $\deg D = \sum_i [k(P_i) : k]$ , où  $k(P_i)$  est le corps résiduel de  $P_i$ .

<sup>68</sup>Comme  $g$  n'est pas un élément de  $K^*$ ,  $\text{Div } g$  n'est pas défini a priori.

Notons que  $k(P_i)$  est bien une extension finie de  $k$  car un diviseur premier  $P_i$  est ici simplement un point fermé de  $X$ . L'hypothèse que  $X$  est propre permet de voir (cf. [H], corollaire II.6.10) que le diviseur d'une fonction est de degré zéro, d'où un homomorphisme  $\text{deg} : \text{Cl } X \rightarrow \mathbf{Z}$ . Cet homomorphisme n'est pas forcément surjectif si  $k$  n'est pas algébriquement clos (prendre une conique sans  $k$ -point). D'autre part son noyau peut être gros (si  $X$  est une courbe elliptique, ce noyau est  $X(k)$ , cf. [H], th. IV.4.11).

## 10.2. Diviseurs de Cartier

C'est une notion moins intuitive, mais qui a l'avantage d'être définie pour tout schéma. Grosso modo un diviseur de Cartier doit être partout localement le diviseur d'une fonction.

Soit  $X$  un schéma. Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , notons  $K(U)$  le localisé de  $\mathcal{O}_X(U)$  par rapport à la partie multiplicative formée des éléments qui ne deviennent diviseur de zéro dans aucun  $\mathcal{O}_{X,x}$ ,  $x \in U$  (pour  $U$  affine,  $K(U)$  est donc simplement le localisé d' $\mathcal{O}_X(U)$  par rapport aux éléments non diviseurs de zéro). On définit alors  $\mathcal{K}$  comme le faisceautisé du préfaisceau  $U \mapsto K(U)$ . On a de même les faisceaux  $\mathcal{K}^*$  et  $\mathcal{O}^*$  obtenus en prenant les inversibles respectivement pour  $\mathcal{K}$  et pour  $\mathcal{O}_X$ . Bien entendu si  $X$  est intègre  $\mathcal{K}$  est simplement le faisceau constant égal au corps des fonctions de  $X$ .

**Définition 10.7** Un *diviseur de Cartier* sur  $X$  est une section globale du faisceau de groupes multiplicatifs  $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ . Un tel diviseur est dit *principal* s'il est dans l'image de l'application canonique  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ . On note  $\text{CaCl } X$  le quotient du groupe des diviseurs de Cartier par les diviseurs principaux. Les diviseurs de Cartier *effectifs* sont ceux que l'on peut définir par une famille  $(U_i, f_i)$  telle que les  $f_i$  soient des sections de  $\mathcal{O}_X$  sur  $U_i$ .

Ainsi se donner un diviseur de Cartier revient à se donner un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $X$  et des éléments  $f_i$  de  $\Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$  tels que la restriction de  $f_i/f_j$  à  $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{K}^*)$  soit dans  $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$  pour tous  $i, j$ .

On dit qu'un schéma est *localement factoriel* si tous ses anneaux locaux sont factoriels. C'est par exemple le cas pour un schéma régulier (cf. [AC, 12]). Attention cela n'implique pas qu'on ait un recouvrement affine par des spectres d'anneaux factoriels : par exemple une courbe elliptique sur un corps infini  $k$  est un schéma régulier, mais pour un ouvert affine  $\text{Spec } A$ , le groupe  $\text{Cl}(A)$  est toujours infini donc  $A$  ne peut pas être factoriel.

**Theorème 10.8** *Soit  $X$  un schéma intègre, noethérien, séparé et localement factoriel. Alors on a une bijection entre le groupe  $\text{Div } X$  des diviseurs de*

Weil et le groupe  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$  des diviseurs de Cartier, dans laquelle les diviseurs de Weil principaux (resp. effectifs) correspondent aux diviseurs de Cartier principaux (resp. effectifs). Ainsi les groupes  $\text{Cl } X$  et  $\text{CaCl } X$  sont isomorphes.

**Démonstration :** Comme  $X$  est intègre,  $\mathcal{K}$  est juste le faisceau constant  $K$ , où  $K$  est le corps des fonctions de  $X$ . Soit  $D = (U_i, f_i)$  un diviseur de Cartier, où  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $X$  et  $f_i \in K^*$ . Pour tout diviseur de Weil premier  $Y$  de  $X$ , on pose  $v_Y(D) = v_Y(f_i)$ , où on a choisi  $i$  tel que  $Y$  rencontre  $U_i$ ; ceci est bien défini car  $f_i/f_j$  est inversible sur  $U_i \cap U_j$ . Alors  $\sum_Y v_Y(D)$  est un diviseur de Weil, la somme étant finie parce que  $X$  est noethérien (on a vu que pour chaque  $f_i$ , seul un nombre fini de  $Y$  satisfont  $v_Y(f_i) \neq 0$ , et d'autre part  $X$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$ ).

En sens inverse, soit  $D$  un diviseur de Weil et  $x \in X$ . Alors on dispose de la restriction<sup>69</sup> de  $D_x$  de  $D$  à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ . Comme  $\mathcal{O}_{X,x}$  est factoriel, son groupe des classes est nul et  $D_x$  est principal. On peut donc écrire  $D_x = \text{Div } f_x$  avec  $f_x \in K^*$ . Alors  $D$  et  $\text{Div } f_x$  ont la même restriction à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , donc ils ne peuvent différer qu'aux diviseurs premiers figurant dans leur écriture et qui ne contiennent pas  $x$ . Comme il y a un nombre fini de tels diviseurs premiers, il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  tel que  $D$  et  $\text{Div } f_x$  aient même restriction à  $U_x$ . On obtient alors un diviseur de Cartier en recouvrant  $X$  par les  $U_x$  : en effet sur  $U_x \cap U_{x'}$ ,  $f_x/f_{x'}$  est inversible en tout point de codimension 1, donc inversible vu que  $X$  est normal ([AC, 10]).

Il est immédiat que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre et que les diviseurs de Weil principaux (resp. effectifs) correspondent aux diviseurs de Cartier principaux (resp. effectifs).  $\square$

**Remarque :** Si on suppose que  $X$  vérifie (\*) (sans être localement factoriel), on obtient une bijection entre diviseurs de Cartier et diviseurs de Weil *localement principaux* (i.e. tels que  $X$  puisse être recouvert par des ouverts  $U_i$  avec chaque  $D|_{U_i}$  principal). Par exemple si  $X$  est le cône affine  $xy - z^2 = 0$ , le diviseur de Weil  $Y : y = z = 0$  n'est pas un diviseur de Cartier car si  $A := k[x, y, z]/(xy - z^2)$ , l'idéal premier  $\wp = (y, z)$  ne devient pas principal dans le localisé de  $A$  en  $(x, y, z)$ . On peut montrer que  $\text{Cl } X = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  tandis que  $\text{CaCl } X = 0$  ([H], exemples II.6.5.2. et II.6.11.3).

<sup>69</sup>Plus précisément, le morphisme  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$  est plat, ce qui fait que l'image inverse d'un diviseur de Weil reste un diviseur de Weil.

### 10.3. Diviseurs et faisceaux inversibles

La notion d' $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang  $n$  est l'analogue<sup>70</sup> de la notion usuelle de fibré vectoriel de rang  $n$ . En particulier les faisceaux inversibles correspondent aux fibrés en droites. On va voir que ceux-ci sont étroitement liés aux diviseurs. Rappelons que le produit tensoriel  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$  de deux faisceaux inversibles est encore inversible, et que pour tout faisceau inversible  $\mathcal{L}$ , le faisceau  $\mathcal{M} = \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$  vérifie  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ . Cela justifie la définition suivante :

**Définition 10.9** Le *groupe de Picard*  $\text{Pic } X$  d'un schéma  $X$  est le groupe des classes d'isomorphismes sur  $X$  pour la loi  $\otimes$ .

Par exemple pour tout anneau local  $R$ , on a  $\text{Pic}(\text{Spec } R) = 0$  car les faisceaux localement libres de type fini sur  $\text{Spec } R$  correspondent aux  $R$ -modules plats de type fini (cf. [AC, 14]) et tout module plat de type fini sur un anneau local est libre (voir [AC, 13], c).

Soit  $D = (U_i, f_i)$  un diviseur de Cartier sur  $X$ . On définit un faisceau inversible  $\mathcal{L}(D)$  (ou  $\mathcal{O}_X(D)$ ) sur  $X$  comme le sous  $\mathcal{O}_X$ -module de  $\mathcal{K}$  engendré par  $f_i^{-1}$  sur chaque  $U_i$ ; ceci a bien un sens car  $f_i/f_j$  est inversible sur  $U_i \cap U_j$ . Par exemple si  $X = \mathbf{P}_A^d$  et  $D$  correspond à une section hyperplane, alors  $\mathcal{L}(D)$  n'est autre que  $\mathcal{O}_X(1)$ .

**Proposition 10.10** a) *L'application  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  est une bijection entre les diviseurs de Cartier et les sous-faisceaux inversibles de  $\mathcal{K}$ .*

b) *On a  $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$  pour tous diviseurs de Cartier  $D_1, D_2$ .*

c) *Le diviseur  $D_1 - D_2$  est principal si et seulement si les  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{L}(D_1)$  et  $\mathcal{L}(D_2)$  sont isomorphes.<sup>71</sup>*

**Démonstration :** a) Soit  $\mathcal{L}$  un sous-faisceau inversible de  $\mathcal{K}$  et soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert de  $X$  tel que la restriction de  $\mathcal{L}$  à chaque  $U_i$  soit libre de rang 1. Soit  $g_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$  un générateur de  $\mathcal{L}$  sur  $U_i$  et soit  $f_i = g_i^{-1}$ . Alors  $D = (U_i, f_i)$  est un diviseur de Cartier (deux générateurs de  $\mathcal{L}$  sur  $U_i \cap U_j$  diffèrent par un élément de  $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$ ). On obtient ainsi une application entre sous-faisceaux inversibles de  $\mathcal{K}$  et diviseurs de Cartier, qui est clairement la réciproque de  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ .

b) Si  $D_1$  est défini localement par  $f_i$  et  $D_2$  par  $g_i$ , alors  $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$  est engendré localement par  $f_i^{-1}g_i$ , donc les sous  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$  et  $\mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$  de  $\mathcal{K}$  sont égaux. Or le second est isomorphe au produit tensoriel  $\mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ .

<sup>70</sup>On peut formaliser cette analogie, voir [H], exercice II.5.18.

<sup>71</sup>au sens : isomorphes comme  $\mathcal{O}_X$ -modules abstraits, en oubliant que ce sont des sous-faisceaux de  $\mathcal{K}$ .

c) D'après b), il suffit de montrer que  $D$  est principal si et seulement si  $\mathcal{L}(D)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X$ . Si  $D$  est principal défini par  $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ , alors  $\mathcal{L}(D)$  est globalement engendré par  $f^{-1}$ , donc il est bien isomorphe à  $\mathcal{O}_X$ . Réciproquement si on a un tel isomorphisme, alors l'image de la section globale  $1 \in \mathcal{O}_X(X)$  donne un élément de  $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$  dont l'inverse définit un diviseur de Cartier principal.  $\square$

**Corollaire 10.11** *Pour tout schéma  $X$ , l'application  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  induit un homomorphisme injectif entre  $\text{CaCl } X$  et  $\text{Pic } X$ .*

Il peut arriver que cette application ne soit pas surjective car un faisceau inversible "abstrait" n'est pas nécessairement isomorphe à un sous-faisceau de  $\mathcal{K}$ ; cependant ces situations sont assez pathologiques. En particulier on a la proposition suivante :

**Proposition 10.12** *Soit  $X$  un schéma intègre. Alors la flèche  $\text{CaCl } X \rightarrow \text{Pic } X$  définie ci-dessus est un isomorphisme.*

**Démonstration :** Ici  $\mathcal{K}$  est juste le faisceau constant  $K$ , où  $K$  est le corps des fonctions de  $X$ . Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ , posons  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ . Sur tout ouvert  $U$  qui trivialisent  $\mathcal{L}$ , on obtient que  $\mathcal{L}'|_U$  est constant égal à  $K$ . Par irréductibilité de  $X$ ,  $\mathcal{L}'$  est constant ce qui permet d'exprimer  $\mathcal{L}$  comme un sous-faisceau du faisceau constant  $\mathcal{K}$  via l'application canonique  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}$ .  $\square$

Ainsi pour un schéma noethérien, intègre, séparé et localement factoriel, les trois notions (diviseurs de Weil, diviseurs de Cartier, faisceaux inversibles) coïncident. Si  $D$  est un diviseur de Weil, il faut alors penser le faisceau  $\mathcal{L}(D)$  comme sous faisceau de  $K$  correspondant aux "fonctions dont la valuation en chaque diviseur premier est au moins le coefficient correspondant de  $-D$ ". Si par exemple  $X$  est donné par des équations homogènes  $P_i(T_0, \dots, T_d) = 0$  dans  $\mathbf{P}_A^d$ , alors le faisceau  $\mathcal{O}_X(1)$  n'est autre que  $\mathcal{L}(D)$ , où  $D$  est le diviseur obtenu en coupant  $X$  par une section hyperplane qui ne contient pas  $X$ .<sup>72</sup>

Notons que si  $D = (U_i, f_i)$  est un diviseur de Cartier effectif, alors le sous-schéma fermé  $Y$  qui correspond au faisceau d'idéaux localement engendré (sur  $U_i$ ) par  $f_i$  n'est autre que  $\mathcal{L}(-D)$ .

**Corollaire 10.13** *Soit  $k$  un corps. Alors tout faisceau inversible sur  $X = \mathbf{P}_k^n$  est isomorphe à  $\mathcal{O}(r)$  pour un certain  $r \in \mathbf{Z}$ .*

<sup>72</sup>Noter que l'image inverse d'un faisceau inversible est toujours définie, mais pas celle d'un diviseur de Weil ou de Cartier; cf [H], exercices II.6.2. et II.6.8.

**Démonstration :** Un générateur de  $\text{Cl } X$  est un hyperplan, qui correspond au faisceau inversible  $\mathcal{O}(1)$ . Le résultat découle alors de la proposition 10.5, du théorème 10.8, et de la proposition 10.12. □

La proposition suivante donne une description un peu plus concrète du  $k$ -espace vectoriel  $H^0(X, \mathcal{L}(D))$  quand  $X$  est une variété projective (propre suffirait), lisse et géométriquement intègre sur un corps  $k$  et  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $X$ . On définit pour toute  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  (non nulle) son *diviseur des zéros*  $(s)_0$  de la manière suivante : sur tout ouvert  $U$  de  $X$  tel qu'on ait un isomorphisme  $\varphi : \mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ , on a  $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  ; on prend alors le diviseur de Cartier effectif  $D = (U, \varphi(s))_U$  associé à un recouvrement ouvert trivialisant  $\mathcal{L}$ . Ceci est bien défini car sur chaque ouvert  $U$ ,  $\varphi$  est bien déterminé à multiplication par un élément de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$  près. Il s'agit donc de la généralisation du diviseur d'une fonction (régulière), qui correspond au cas  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ .

**Proposition 10.14** *Soit  $X$  une variété projective, lisse, et géométriquement intègre sur un corps  $k$ . Soient  $D_0$  un diviseur sur  $X$  et  $\mathcal{L} := \mathcal{L}(D_0)$  le faisceau inversible correspondant.*

a) *Pour toute section globale non nulle  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ , le diviseur des zéros  $(s)_0$  est effectif et linéairement équivalent à  $D_0$ .*

b) *Tout diviseur effectif linéairement équivalent à  $D_0$  est de la forme  $(s)_0$  pour une section  $s$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{L})$ .*

c) *Deux sections  $s, s'$  de  $\Gamma(X, \mathcal{L})$  ont même diviseur des zéros si et seulement si elles diffèrent par une constante multiplicative près.*

**Démonstration :** a) Une section  $s$  correspond à un élément  $f$  du corps des fonctions  $K$  de  $X$ . On écrit  $D_0$  comme un diviseur de Cartier  $(U_i, f_i)$  avec  $f_i \in K^*$ . Alors  $\mathcal{L}(D_0)$  est engendré localement par  $f_i^{-1}$ , d'où un isomorphisme local  $\varphi : \mathcal{L}(D_0) \rightarrow \mathcal{O}$  (la multiplication par  $f_i$ ). On obtient que  $D = (s)_0$  est défini par  $(U_i, f_i f)$ , ce qui donne  $D = D_0 + (f)$ .

b) Si  $D$  est effectif et  $D = D_0 + \text{Div } f$ , alors comme  $\text{Div } f + D_0$  est effectif,  $f$  induit une section globale de  $\mathcal{L}(D_0)$  dont le diviseur des zéros est  $D$ .

c) Si  $(s)_0 = (s')_0$ , alors les fonctions  $f, f'$  de  $K$  correspondant respectivement à  $s, s'$  vérifient  $\text{Div}(f/f') = 0$ . Ainsi  $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ . Mais  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$  car  $X$  est géométriquement intègre sur  $k$  (corollaire 9.15). Ainsi  $f = \lambda f'$  avec  $\lambda \in k^*$ , d'où le résultat. □

Ainsi l'ensemble (qui peut être vide)  $| D_0 |$  des diviseurs effectifs linéairement équivalents à  $D_0$  est en bijection avec  $(\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\})/k^*$ , i.e. avec les

points rationnels d'un espace projectif sur  $k$ . On dit que c'est un *système linéaire complet*.

On termine ce paragraphe avec une notion fondamentale (que nous ne ferons qu'évoquer ici), liée notamment à la lissité (voir [H], chapitres II.8 et III.10). Pour tout morphisme de schémas  $X \rightarrow Y$ , on peut définir le *faisceau des différentielles relatives*  $\Omega_{X/Y}$  en "faisceautisant" la construction classique du module des différentielles  $\Omega_{B/A}$  quand  $B$  est une algèbre sur un anneau  $A$ . En particulier  $\Omega_{X/Y} = \widetilde{\Omega_{B/A}}$  quand  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$ . Quand  $X$  est une variété sur un corps  $k$ , on notera  $\Omega_{X/k}$  pour  $\Omega_{X/\text{Spec } k}$ . La lissité de  $X$  correspond alors au fait que  $\Omega_{X/k}$  soit localement libre de rang  $\dim X$ .

**Définition 10.15** Soit  $X$  une variété géométriquement intègre de dimension  $n$ , lisse sur un corps  $k$ . On définit le *faisceau canonique*  $\omega_X$  comme la puissance extérieure  $n$ -ième  $\wedge^n \Omega_{X/k}$  du faisceau des différentielles.

Ainsi  $\omega_X$  est un faisceau inversible sur  $X$ . Un *diviseur canonique* est un diviseur de Cartier correspondant (il est bien défini à un diviseur principal près).

**Définition 10.16** Soit  $X$  une variété géom. intègre, projective et lisse sur un corps  $k$ . Le *genre géométrique* de  $X$  est l'entier  $p_g = \dim_k \Gamma(X, \omega_X)$

On montre facilement en utilisant le théorème 6.6 et [AC, 10] que le genre géométrique est un *invariant birationnel*. Par ailleurs si  $X = \mathbf{P}_k^n$  avec  $n > 0$ , on a  $\omega_X = \mathcal{O}_X(-n-1)$ . Plus généralement si  $Y$  est une hypersurface lisse de degré  $d$  dans  $\mathbf{P}_k^n$  ( $n \geq 2$ ), on a  $\omega_Y = \mathcal{O}_Y(d-n-1)$  ([H], exemple II.8.20.3). Par exemple pour  $n = 2$  et  $d = 3$ ,  $Y$  est une courbe elliptique pour laquelle on trouve  $p_g(Y) = 1$ . Ainsi une telle courbe n'est pas birationnelle à la droite projective.

## 10.4. Courbes, théorème de Riemann-Roch

Dans toute la suite, le terme de *courbe* sur un corps  $k$  désignera un schéma de type fini sur  $k$ , géométriquement intègre et de dimension 1. Notons que deux courbes propres, lisses et  $k$ -birationnelles sont isomorphes via le théorème 6.6. Il se trouve que toute courbe propre est projective (nous n'utiliserons pas ce fait).

Pour une courbe propre et lisse  $X$  sur  $k$ , rappelons que le degré d'un diviseur de Weil  $D = \sum_i n_i P_i$  est défini comme  $\sum_i n_i [k(P_i) : k]$ . D'autre part l'application  $D \mapsto \mathcal{L}(D)$  induit un isomorphisme entre  $\text{Cl}(X)$  et  $\text{Pic } X$ .

Soient  $X$  une courbe projective et lisse sur  $k$ . Pour tout diviseur  $D$  de  $X$ , on pose  $l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$ .

**Lemme 10.17** Si  $l(D) \neq 0$ , alors  $\deg D \geq 0$ . Si  $l(D) \neq 0$  et  $\deg D = 0$ , on a  $D \simeq 0$  (i.e.  $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{O}_X$ ).

**Démonstration :** Si  $l(D) \neq 0$ , il existe un diviseur effectif  $D'$  linéairement équivalent à  $D$ ; ainsi  $\deg D = \deg D' \geq 0$ . Comme  $D'$  est effectif, son degré est nul si et seulement si  $D' = 0$ , donc  $\deg D = 0$  implique  $D \simeq 0$ . □

Le théorème de Riemann-Roch (joint au lemme précédent) permet souvent d'obtenir des renseignements essentiels sur  $\dim_k \mathcal{L}(D)$ . On notera  $\omega_X = \Omega_{X/k}$  le faisceau canonique sur  $X$  et  $K$  un diviseur canonique sur  $X$ .

**Théorème 10.18 (Riemann-Roch)** Soit  $X$  une courbe projective et lisse de genre géométrique  $p_g(X)$  sur un corps  $k$ . Soit  $D$  un diviseur sur  $X$ . Alors

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - p_g(X)$$

Pour démontrer ce théorème, on admettra qu'on a l'égalité  $l(K - D) = \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D))$  (ceci résulte du théorème de dualité de Serre, voir [H], III.7) et donc en particulier que le genre géométrique coïncide avec le *genre arithmétique*  $g = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ . On obtiendra donc une preuve complète seulement de la *formule de Riemann-Roch* (pour laquelle on n'a pas besoin de l'hypothèse de lissité de  $X$  à condition de travailler avec les diviseurs de Cartier, dont on peut également définir le degré <sup>73</sup>) :

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$$

où  $\chi(\mathcal{F})$  désigne la *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un faisceau cohérent  $\mathcal{F}$ , i.e. l'entier  $\sum_i (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$  (pour une courbe on peut se limiter à faire la somme pour  $i = 0, 1$ ). Cette formule implique en particulier l'inégalité due à Riemann (qui suffit pour beaucoup d'applications) :

$$l(D) \geq \deg D + 1 - g$$

notons aussi que cette formule permet de retrouver immédiatement que si  $D$  est un diviseur principal sur  $X$ , alors  $\text{Div } f = 0$  car dans ce cas  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_X$  donc  $l(D) = 1$  et  $g = \dim_k H^1(X, \mathcal{L}(D))$ .

---

<sup>73</sup>Il suffit en effet de le faire pour un diviseur de Cartier  $D$  effectif; on pose alors  $\text{Div } D = \sum_P [k(P) : k] m_P(D)$ , où pour tout point fermé  $P$  on a posé  $m_P(D) = \dim_{k(P)} \mathcal{O}_{X,P} / f \mathcal{O}_{X,P}$ , où  $f$  définit localement  $D$  au voisinage de  $P$ .



**Démonstration :** Il s'agit de montrer l'égalité

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg D + 1 - g$$

Si  $D = 0$ , la formule est vraie car  $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$  par le corollaire 9.15 et  $\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$ .

Soit  $P$  un point fermé de  $X$ . Il suffit maintenant de montrer que la formule est vraie pour  $D$  si et seulement si elle est vraie pour  $D + P$ . On regarde  $P$  comme un sous-schéma fermé de  $X$  (avec sa structure réduite), alors  $i_*\mathcal{O}_P$  (où  $i$  est l'immersion fermée correspondante) est un faisceau dont le support est  $\{P\}$  (la fibre en  $P$  étant le corps résiduel  $k(P)$ ); d'autre part le faisceau d'idéaux correspondant à  $P$  est  $\mathcal{L}(-P)$ . On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-P) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

d'où par tensorisation par le faisceau inversible  $\mathcal{L}(D + P)$ , une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D + P) \rightarrow i_*\mathcal{O}_P \rightarrow 0$$

Maintenant par additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré (qui résulte immédiatement de la longue suite exacte de cohomologie), on obtient

$$\chi(\mathcal{L}(D)) + [k(P) : k] = \chi(\mathcal{L}(D + P))$$

car

$$\chi(i_*\mathcal{O}_P) = \dim_k H^0(X, i_*\mathcal{O}_P) = \dim_k H^0(\text{Spec}(k(P)), \mathcal{O}_P)$$

et  $H^1(\text{Spec}(k(P)), \mathcal{O}_P)$  est nul vu que  $\text{Spec}(k(P))$  est réduit à un point. Comme  $\deg(D + P) = \deg D + [k(P) : k]$ , le résultat en découle. □

**Exemples :** a) Soit  $D$  un diviseur de degré  $> 0$  sur une courbe projective et lisse  $X$ . Alors  $\dim |nD| = n \cdot \deg D - g$  pour  $n$  assez grand. En effet  $l(K - nD) = 0$  dès que  $\deg K < n \cdot \deg D$ .

b) Sur une courbe projective lisse de genre  $g$ , le degré du diviseur canonique  $K$  est  $2g - 2$ . En effet, en prenant  $D = K$  dans le théorème de Riemann-Roch, on obtient  $g - 1 = \deg K + 1 - g$ .

c) Si  $X$  est une courbe elliptique, son genre est 1 (on peut d'ailleurs prendre ceci comme définition d'une courbe elliptique en imposant la condition supplémentaire  $X(k) \neq \emptyset$ ). Dans ce cas  $\deg K = 0$  d'après b). Comme  $l(K) = g = 1$ , on en déduit que  $K \simeq 0$ .

d) Soit  $X$  une courbe elliptique, fixons un point rationnel  $P_0$  sur  $X$ . Soit  $\text{Pic}^0 X$  le sous-groupe de  $\text{Pic} X$  correspondant aux diviseurs de degré zéro.

Alors  $P \mapsto \mathcal{L}(P - P_0)$  est une bijection entre l'ensemble des points rationnels de  $X$  et  $\text{Pic}^0 X$  (ce qui permet de définir correctement une structure de groupe abélien sur  $X(k)$  dont l'identité est  $P_0$ ). Soit en effet  $D$  un diviseur de degré zéro. Le théorème de Riemann-Roch pour  $D + P_0$  donne

$$l(D + P_0) - l(K - D - P_0) = 1$$

Ici  $l(K - D - P_0) = 0$  car  $\deg(K - D - P_0) = -1$ . Ainsi  $l(D + P_0) = 1$ , ce qui signifie qu'il existe un unique diviseur effectif linéairement équivalent à  $D + P_0$  d'après la prop. 10.14. Comme son degré doit être 1, il s'agit d'un  $k$ -point  $P$  de  $X$ . Ainsi on a un unique point rationnel  $P$  tel que  $D \simeq P - P_0$ .

e) On peut aussi montrer qu'un diviseur  $D$  est très ample si  $\deg D \geq 2g + 1$ , et ample si et seulement si  $\deg D > 0$  ([H], cor. IV.3.2.). Cela fournit notamment des exemples de diviseurs (ou de faisceaux inversibles) amples qui ne sont pas très amples.

## 10.5. Formule de Hurwitz

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini entre deux courbes projectives et lisses sur un corps  $k$ . On aimerait relier le genre des courbes  $X$  et  $Y$  à la *ramification* de  $f$ . Rappelons que le *degré* de  $f$  est le degré de l'extension de corps des fonctions  $[k(X) : k(Y)]$ . L'*indice de ramification* d'un point  $P$  de  $X$  d'image  $Q$  est l'indice de ramification de l'extension d'anneaux de valuation discrète  $\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,Q}$ , i.e. la valuation d'une uniformisante de  $\mathcal{O}_{Y,Q}$  dans  $\mathcal{O}_{X,P}$  (en particulier le rang de  $\mathcal{O}_{X,P}$  sur  $\mathcal{O}_{Y,Q}$  est  $e_P[k(P) : k(Q)]$ ) et pour tout point  $Q$  de  $Y$ , on a  $d = \sum_{f(P)=Q} e_P[k(P) : k(Q)]$ . Ainsi si  $k(Q)$  est parfait, alors  $f$  est non ramifié en  $P$  si et seulement si  $e_P = 1$ . On dit que  $Q$  est un *point de branchement* de  $f$  s'il existe un point ramifié  $P$  de  $f$  avec  $f(P) = Q$ . On dit que la ramification en  $P$  est *modérée* si  $\text{Car } k$  est zéro ou ne divise pas  $e_P$ , *sauvage* sinon. On dit que  $f$  est *séparable* si l'extension  $k(X)/k(Y)$  est séparable.

**Théorème 10.19 (Hurwitz)** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini séparable de courbes projectives et lisses sur un corps  $k$ . Soit  $d$  le degré de  $f$ . Alors si  $f$  n'a pas de ramification sauvage, on a*

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \sum_{P \in X} (e_P - 1)[k(P) : k]$$

Pour une preuve détaillée, voir [H], IV.2.4. L'idée consiste à exprimer le faisceau  $\omega_X$  en fonction de  $\omega_Y$  et du faisceau  $\Omega_{X/Y}$ . En termes de diviseurs, on obtient

$$K_X \simeq f^* K_Y + R$$

où  $R = \sum_{P \in X} \text{long}(\Omega_{X/Y})_P \cdot P$  est le *diviseur de ramification*. Quand il n'y a pas de ramification sauvage la longueur de  $(\Omega_{X/Y})_P$  est  $e_P - 1$ . On obtient la formule en prenant les degrés, compte tenu du fait que  $\deg K_X = 2(g(X) - 2)$  et  $\deg K_Y = 2(g(Y) - 2)$  via le théorème de Riemann-Roch.

## Références

- [Bki] N. Bourbaki : *Algèbre commutative*, (Éléments de mathématique, Fasc. 30), chapitre 6.
- [H] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [L] Q. Liu : *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, 2002.
- [Mat] H. Matsumura : *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. 1980.
- [Mil] J.S. Milne : *Étale Cohomology*, Princeton University Press 1980.
- [Nag] M. Nagata : *Local rings*, J.Wiley, 1962.
- [Spr] T.A. Springer : *Linear algebraic groups*, second edition, Birkhäuser 1998.
- [W] C. Weibel : *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.