Équations elliptiques

Fabrice Bethuel

10 novembre 2016

Table des matières

Chapitre 1

Opérateurs elliptiques du 2^{eme} ordre

1.1 Introduction

1.1.1 Cadre

Soit Ω une ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne n^2 fonction $a_{i,j}$:

$$a_{i,j} \ : \ \Omega \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

Dans tout le cours, nous ferons les hypothèses suivantes sur les fonctions $a_{i,j}$

— H1. Les fonctions $a_{i,j}$ sont bornées

$$\exists C > 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall i, j, \ |a_{i,j}(x)| \leq C$$

— H2. Les fonctions $a_{i,j}$ sont symétriques

$$\forall x \in \Omega, \ \forall i, j, \ a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$$

— H3. Ellipticité

$$\exists (\alpha_0, \alpha_1) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \alpha_0 \left|\xi\right|^2 \ \leq \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ \leq \ \alpha_1 \left|\xi\right|^2$$

où $\left|\xi\right|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$. En fait, l'existence de α_1 résulte de 1.

L'hypothèse d'ellipticité montre en particulier que pour tout x, la matrice $A(x) \in M_n(\mathbb{R})$, définie par

$$A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une matrice symétrique définie positive ($\forall x \in \Omega$). De plus, sa plus petite valeur propre est minorée par α_0.

Nous considérons essentiellement dans ce cours des opérateurs elliptiques sous forme divergence, de la forme

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = div\left(A(x)\nabla\right) \tag{1.1}$$

Il s'agit d'un opérateur différentiel du deuxième ordre. Il agit en particulier sur les fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$ à support compact.

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty},\ L\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) \tag{1.2}$$

Si on ne fait pas l'hypothèse supplémentaire de régularité sur les coefficients $a_{i,j}$ (du style $a_{i,j} \in \mathcal{C}^1, \cdots$), alors $L\varphi$ est définie au sens des distributions. De manière générale, si v appartient à un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, où pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega)\ \mid \forall j \in \{1,\cdots,n\},\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)\right\}$$

alors, on peut définir $Lv = f$ comme une distribution par

$$\forall\psi \in \mathcal{C}_c^{\infty},\ \langle Lv,\psi\rangle = \int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} \tag{1.3}$$

La classe la plus générale dans laquelle 1.3 a encore un sens est

$$W_{loc}^{1,1}(\Omega) = \left\{u \in L_{loc}^1(\Omega)\ \mid \forall j \in \{1,\cdots,n\},\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{loc}^1(\Omega)\right\}$$

On rappelle que

$$L_{loc}^1(\Omega) = \left\{g \in L^1(K)\ \mid K \text{ compact } \subset \Omega\right\}$$

<u>Conclusion</u> Sous les hypothèses H1, H2, et H3, Lv peut être défini, au sens des distributions, pour tout $v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$

1.1.2 Coefficients réguliers

Si les coefficients $a_{i,j}$ sont des fonctions plus régulières, alors on peut définir Lv pour des classes plus larges de fonctions, voire de distributions.

Par exemple, si $\forall i,j,\ a_{i,j} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, alors Lv peut être défini pour toute distribution $v \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$, par

$$\forall\psi \in \mathcal{C}_c^{\infty},\ \langle Lv,\psi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{i,j=1}^{n}\left\langle v(x),\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

L'expression du membre de gauche appartient à $\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ car $a_{i,j}(x)\dfrac{\partial\psi}{\partial x_j} \in \mathcal{C}_c^{\infty}$

1.1.3 Le Laplacien

L'exemple le plus simple d'un opérateur elliptique est celui où les ocefficients $a_{i,j}$ sont constants, en particulier le cas où

$$\forall x \in \Omega,\ \forall i,j,\ a_{i,j} = \delta_{i,j}$$

Soit

$$\forall x \in \Omega,\ A(x) = Id_{\mathbb{R}^n}$$

On a alors

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, L est appelé Laplacien, et on note

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\left[\text{Si } n=1,\ \Delta = \dfrac{d^2}{dx^2}\right]$. Au vu de la discussion précédente, on peut définir Δv pour $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ distribution sur Ω.

Exercice Soit L un opérateur elliptique du 2^{eme} ordre à coefficients constants. Montre qu'en changeant de base, on peut se ramener au Laplacien.

Hint Théorème spectral

1.1.4 Opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence

On peut également considérer des opérateurs de la forme

$$\tilde{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bien entendu, si les coefficients $a_{i,j}$ sont constants ,les deux opérateurs L, et $\tilde{L}$ coïncident. En revenche, si on ne fait pas d'hypothèse de régularité sur les coefficients $a_{i,j}$, on voit que $\tilde{L}$ ne peut être défini pour des fonctions de $W^{1,1}_{loc}$. Néanmoins il est facile de voir que $\tilde{L}v$ peut être défini pour $v \in W^{2,1}_{loc}$, où

$$W^{2,1}_{loc} = \left\{ u \in W^{1,1}_{loc} \mid \forall i,j,\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^1_{loc}(\Omega) \right\}$$

Dans toute la suite de cette partie, nous nous intéresserons au problème "inverse" : étant donné f une fonction sur Ω, et v tels que

$$Lv = f \quad \Omega$$

que peut-on dire de v ? Dans un premier temps nous supposerons qu'un tel v existe, et nous nous intéresserons aux propriétés de régularité de v. Le cas le plus simple est bien entendu $f = 0$, où nous considérons les solutions du problème homogène.

$$Lv = 0 \tag{1.4}$$

L'étude de ce problème est l'objet des paragraphes qui suivent. Le cas général f fonction sera considéré dans les sections suivantes.

1.2 Distributions Harmoniques

1.2.1 Propriétés

On considère dans cette partie les solutions $v \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ de l'équation

$$\Delta v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(\Omega) \tag{1.5}$$

L'équation 1.5 signifie au sens des distributions

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \;\; \langle \Delta v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \;=\; \langle v, \Delta \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \tag{1.6}$$

Les solutions de 1.5 (ou 1.6) sont appelées distributions harmoniques. Il existe beaucoup d'exemples de distributions harmoniques.

Si $n = 1$, et $\Omega = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, les solutions de 1.5 vérifient

$$v^{''} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(I)$$

et les solutions sont alors les fonctions affines

$$v(x) = ax + b \quad\;\; (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

On a donc un espace vectoriel de dimension 2 de solutions.

Si $n \geq 2$, l'ensemble des solutions de 1.5 forment un espace vectoriel qui n'est plus de dimension finie. En particulier, pour $n = 2$ toutes les fonctions holomorphes sont des fonctions harmoniques.

On démontre grâce aux techniques de la théorie des distributions.

Théorème 1.2.1

Toute distribution harmonique, i.e toute distribution v solution de 1.5 est une fonction de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$

⊠

Nous admettrons la preuve de ce résultat. Le théorème 1.2.1 fait partie de ce qu'on appelle les propriétés régularisantes du laplacien.

Il est souvent utile, en pratique d'avoir des propriétés plus "quantitatives". Un exemple de tels résultats est l'inégalité de Cacciopoli, qui joue également un rôle important pour des opérateurs généraux.

Proposition 1.2.1

Soit $x_0 \in \Omega,\ 0 < \rho' < \rho$ tels que

$$B\left(x_0, \rho\right) \subset \Omega$$

Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que si

$$\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega$$

alors

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \ \leq \ \frac{C}{\left(\rho - \rho'\right)^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

(Inégalité de Cacciopoli)

⊠

Remarques

1. Si w est harmonique, il en est de même de $w - A$, pour n'importe quelle constante $A \in \mathbb{R}$. En particulier on peut prendre

$$A = \frac{1}{B(x_0, \rho)} \int_{B(x_0,\rho)} w = \overline{w}_{x_0,\rho} \quad \text{(moyenne de w sur } B(x_0, \rho))$$

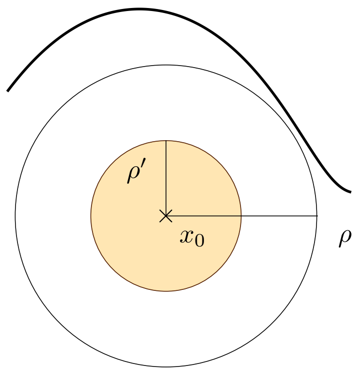
   On a donc

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \ \leq \ \frac{C}{\left(\rho - \rho'\right)^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w - \overline{w}_{x_0,\rho}|^2 \tag{1.7}$$

2. L'inégalite 1.7 est à rapprocher de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, (dont elle est une sorte d'inverse pour les fonctions harmoniques)

$$\int_{B(x_0,\rho)} |w - \overline{w}_{x_0,\rho}|^2 \ \leq \frac{C}{\rho^2} \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla w|^2$$

   vérifiée pour toute fonction harmonique de $W^{1,2}_{loc}\left(\Omega\right) = H^1_{loc}\left(\Omega\right)$



Preuve de l'inégalité de Cacciopoli

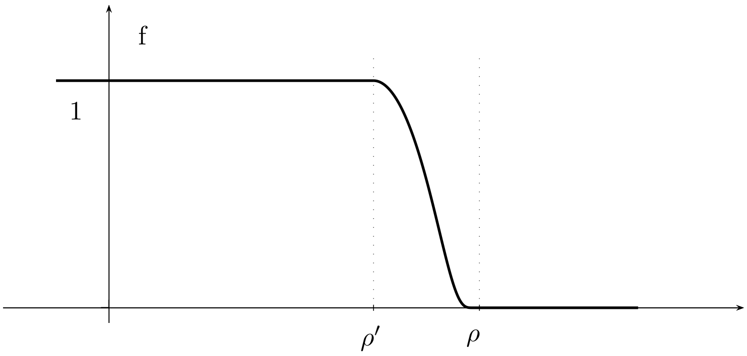
L'idée est de multiplier l'équation 1.5 (on prend w comme variable et non plus v) par la solution w elle même. Bien entendu ceci n'est pas possible car w n'est pas à support compact. Pour remédier à ce problème, on construit une fonction plateau η telle que $\eta = 1$ sur $B(x_0, \rho')$, et $\eta = 0$ sur $\Omega \backslash B(x_0, \rho)$

A cet effet, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0$ et

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } |t| \leq \rho' \\ f(t) = 0 & \text{si } |t| \geq \rho \end{cases}$$

et qui vérifie de plus

$$|f'(t)| \leq \frac{2}{\rho - \rho'}$$



Soit alors η la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\eta(x) = f(|x - x_0|)$$

On vérifie alors que η a bien les propriétés désirées :

$$\begin{cases} -\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),\ \text{et } \eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, \rho)) \\ \forall x \in B(x_0, \rho'),\ \eta(x) = 1 \text{ et } \forall x \in \Omega \backslash B(x_0, \rho),\ \eta(x) = 0 \\ \|\nabla \eta\|_{L^\infty} \leq \dfrac{2}{\rho - \rho'} \end{cases}$$

Rappelons que l'équation

$$\Delta w = 0 \ \text{ sur } \Omega$$

est équivalente à

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty,\ \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty,\ \int_\Omega \nabla w . \nabla \varphi = 0$$

On choisit alors pour fonction test φ la fonction

$$\varphi = w\eta^2 \ \in \mathcal{C}_c^\infty$$

On a donc
$$\int_\Omega \nabla w.\nabla\left(w\eta^2\right) = 0 \tag{1.8}$$

Développons cette équation. On a

$$\begin{aligned}\nabla w.\nabla\left(w\eta\right)^2 &= \nabla w.\nabla\left(w\eta\right).\eta + \nabla w.\nabla\eta.\left(w\eta\right)\\ &= |\nabla\left(w\eta\right)|^2 - \nabla\eta.\nabla\left(w\eta\right).w + \nabla\left(w\eta\right).\nabla\eta.w - |\nabla\eta|^2 w^2\\ &= |\nabla\left(w\eta\right)|^2 - |\nabla\eta|^2 w^2\end{aligned}$$

En intégrant, 1.8 donne donc

$$\int_\Omega |\nabla\left(w\eta\right)|^2 = \int_\Omega |\nabla\eta|^2 w^2 = \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla\eta|^2 w^2$$

Par définition de η, $\eta = 1$ sur $B(x_0,\rho')$ et donc $|\nabla\left(w\eta\right)|^2 = |\nabla w|^2$ sur $B(x_0,\rho')$. On a donc par l'égalité précédente.

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 &\leq \int_\Omega |\nabla\left(w\eta\right)|^2 = \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla\eta|^2 w^2\\ &\leq \frac{4}{\left(\rho-\rho'\right)^2}\int_{B(x_0,\rho)} w^2\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve

⊠

L'inégalité de Cacciopoli montre que l'on peut majorer une norme forte, la norme H^1 sur une boule $B(x_0,\rho')$, incluse dans Ω, par une norme "faible", la norme L^2 sur une boule plus grande $B(x_0,\rho)$ contenant $B(x_0,\rho')$. Nous allons voir, par dérivation de l'équation que la norme L^2 sur $B(x_0,\rho)$ "contrôle" toutes les normes sur $B(x_0,\rho')$.

1.2.2 Majoration de normes $H^s\left(B(x_0,\rho'\right)$

Le laplacien étant un opérateur differentiel à coefficients constants, on peut dériver l'équation 1.5, i.e si w est solution de
$$\Delta w = 0$$
alors
$$\forall i \in \{1,\cdots,n\}\ \ \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}w\right) = 0$$
De manière fénérale, si α est un multi-indice d'ordre k, alors

$$\Delta\left(\partial^\alpha w\right) = 0 \ \text{ sur } \Omega$$

Par itération on en déduit alors

Proposition 1.2.2

Soit $x_0 \in \Omega$, $0 < \rho' < \rho$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$, si $\Delta w = 0$ sur Ω on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u\|^2_{\mathcal{H}^k(B(x_0,\rho'))} \leq C(\rho', \rho, k)\, \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(B(x_0,\rho))}$$

et de même par injection de Sobolev

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u\|^2_{\mathcal{C}^k(B(x_0,\rho'))} \leq C(\rho', \rho, k)\, \|u\|^2_{\mathcal{L}^2(B(x_0,\rho))}$$

⊠

Preuve

Voyons d'abord pour $k = 2$
Soit $\rho_1 = \dfrac{\rho' + \rho}{2}$ de sorte que $\rho_1 \in]\rho', \rho[$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, la fonction $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ est harmonique, on a donc par l'inégalité de Cacciopoli appliquée à $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$

$$\int_{B(x_0,\rho')} \left|\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right|^2 \ \leq\ \frac{4}{(\rho_1 - \rho')^2} \int_{B(x_0,\rho_1)} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^2 \ \leq\ \frac{4}{(\rho_1 - \rho')^2} \int_{B(x_0,\rho_1)} |\nabla w|^2$$

En appliquant l'inégalité de Cacciopoli entre ρ_1 et ρ à w on a

$$\int_{B(x_0,\rho_1)} |\nabla w|^2 \ \leq\ \frac{4}{(\rho - \rho_1)^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

En combinant il vient

$$\int_{B(x_0,\rho')} \left|\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right|^2 \ \leq\ C \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

d'où

$$\|w\|^2_{\mathcal{H}^2(B(x_0,\rho'))} \leq C\, \|w\|^2_{B(x_0,\rho)}$$

Le cas k quelconque se fait par itération

⊠

Remarque La méthode précédente permet de retrouver le fait que si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sans utiliser le théorème 1.2.1. Le résultat néanmoins est plus précis puisqu'on dispose de majoration.

Exercice Soit $k \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'inégalité de Cacciopoli et les résultats de la proposition 1.2.1 se généralisent aux solutions $w \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ de

$$-\Delta w + b.\nabla w + cw = 0 \text{ sur } \Omega$$

$$\left(b.\nabla w = \sum_{i,j=1}^{n} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)$$

1.2.3 Résultats de compacité pour les distributions harmoniques

Une conséquence intéressante de l'inégalité de Cacciopoli et de la proposition 1.2.2 est la suivante

Proposition 1.2.3

Soit $\rho > 0$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques sur $B(\rho)$, i.e telles que

$$\Delta w = 0 \text{ sur } B(\rho)$$

On suppose que la suite est bornée dans $L^2(B(\rho))$ c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_{B(\rho)} |w_n|^2 \leq C$$

Alors pour tout $0 < \rho' < \rho$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite de w_n, $(w_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w \in \mathcal{C}^k(B(\rho))$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} = w \text{ dans } \mathcal{C}^k(B(\rho'))$$

De plus, on a lors

$$\Delta w = 0 \text{ dans } B(\rho)$$

⊠

Preuve

Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}^2(B(\rho))$ on peut en extraire une sous-suite $w_{\sigma(n)}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} = w \text{ faiblement dans } \mathcal{L}^2(B(\rho))$$

En passant à la limite dans l'équation, on déduit que

$$\Delta w = 0$$

La fonction $w_{\sigma(n)} - w$ est donc harmonique. Soit $\rho_1 = \dfrac{\rho' + \rho}{2}$. Par l'inégalité de Cacciopoli on a

$$\int_{B(\rho_1)} |\nabla(w_n - w)|^2 \ \leq \ C \int_{B(\rho)} |w_n - w|^2 \leq C$$

La suite $(w_n - w)$ est donc bornée dans $\mathcal{H}^1(B(\rho_1))$

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} - w = 0 \text{ faiblement dans } \mathcal{H}^1(B(\rho_1))$$

Par injection compacte de Rellich, il résulte

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} - w = 0 \text{ fortement dans } \mathcal{L}^2(B(\rho_1))$$

Ecrivons maintenant l'inégalité de Cacciopoli pour ρ' et ρ_1

$$\int_{B(\rho')} \left|\nabla\left(w_{\sigma(n)} - w\right)\right|^2 \ \leq \ C \int_{B(\rho_1)} \left|w_{\sigma(n)} - w\right|^2 \to 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} = w \text{ fortement dans } \mathcal{H}^1(B(\rho'))$$

en raisonnant comme dans la proposition 1.2.2, on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} w_{\sigma(n)} = w \text{ fortement dans } \mathcal{H}^k(B(\rho'))$$

⊠

1.3 Distribution homogène pour des opérateurs sous forme divergence

1.3.1 Propriétés

On considère ici un opérateur général, sous forme divergence vérifiant les hypothèses H1,H2, et H3.

$$L = div\,(A(x)\nabla)$$

$A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ On considère des fonctions $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ de

$$Lu = 0 \text{ dans } \Omega \tag{1.9}$$

Remarques Noter que $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset \mathcal{W}^{1,1}_{loc}(\Omega)$, et l'on peut donc définir Lu au sens des distributions.

Rappelons que 1.9 est équivalent à

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)\, \langle Lu, \varphi\rangle$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$$

ou encore

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

On a donc

Proposition 1.3.1

$u \in \mathcal{W}^{1,1}_{loc}(\Omega)$ est solution de 1.9 si, et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \tag{1.10}$$

⊠

Si $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, on vérifie alors par densité de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ dans $\mathcal{H}^1_0(\Omega)$ que l'expression 1.10 a un sens, et est vérifiée pour $\varphi \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)$, c'est-à-dire

Proposition 1.3.2

$u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ est solution de 1.9 si, et seulement si

$$\forall v \in \mathcal{H}^1_0(\Omega)\,, \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{\partial v}{\partial x_j} = 0 \tag{1.11}$$

⊠

L'inégalité de Cacciopoli s'étend alors aux solutions de 1.9. On a

Proposition 1.3.3

(Inégalité de Cacciopoli)

Soit $w \in \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega)$ solution de

$$div\,(A(x)\nabla w) = 0 \ \text{ sur } \Omega$$

Soit $0 < \rho' < \rho$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de α_0 et α_1 (voir H3) telle que

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \ \le \ \frac{C}{\rho - \rho'} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

et donc

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \ \le \ \frac{C}{\rho - \rho'} \int_{B(x_0,\rho)} |w - \overline{w}_{x_0,\rho}|^2$$

où $\overline{w}_{x_0,\rho} = \dfrac{1}{|B(x_0,\rho)|} \int_{B(x_0,\rho)} w$

⊠

Preuve

La preuve est similaire à la preuve de la proposition 1.2.1. En utilisant les mêmes notations, on vérifie que $w\eta^2 \in \mathcal{H}^1_0(B(x_0,\rho))$ car $w \in \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega)$, par hypothèse. On peut donc ici appliquer la proposition 1.3.2 pour conclure que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta^2)}{\partial x_j} = 0 \tag{1.12}$$

On développe ensuite l'intégrande :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_i} . \frac{\partial \left(w\eta^2\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial w}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} .\eta + \frac{\partial w}{\partial x_i} . \frac{\partial \eta}{\partial x_j} . (w\eta) \\ &= \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} .w + \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} . \frac{\partial \eta}{\partial x_j} .w - \frac{\partial \eta}{\partial x_i} . \frac{\partial \eta}{\partial x_j} .w^2 \end{aligned}$$

Par symétries de $a_{i,j}$ on a alors

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial w}{\partial x_i} . \frac{\partial \left(w\eta^2\right)}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} . \frac{\partial \eta}{\partial x_j} .w^2$$

L'égalité 1.12 donne donc

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla (w\eta)|^2 \ \le \ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} . \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} . \frac{\partial \eta}{\partial x_j} .w^2 \ \le \ \alpha_1 \int_\Omega |\nabla \eta|^2 w^2$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega |\nabla (w\eta)|^2 \ \le \ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \int_\Omega |\nabla \eta|^2 w^2$$

Le reste de la preuve est ensuite identique à celui de la proposition 1.2.1

⊠

Une différence essentielle avec le cas du Laplacien (ou de manière générale, les opérateurs à coefficients constants ou réguliers) est qu'on ne peut espérer obtenir plus de régularité sur la solution w (i.e on ne peut espérer qu'elle appartienne à des espaces $\mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$ pour $k > 1$). Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas $n = 1$

Dans ce cas, en effet

$$L = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)$$

où la fonction $a \in \mathcal{L}^\infty(I)$. L'hypothèse d'ellipticité signifie alors

$$\forall x \in I, \quad 0 < \alpha_0 \leq a(x) \leq \alpha_1$$

Si u est solution de $Lu = 0$, i.e

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = 0 \tag{1.13}$$

on peut intégrer cette équation directement et donner la forme de TOUTES les solutions, à savoir

$$u(x) = \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a(s)} ds + \lambda_2, \quad \text{où } x_0 \in I \text{ est fixé}$$

On voit en particulier que si $\dfrac{1}{a(s)} \notin H^1$ alors $u \notin H^2$

Conclusion Si $u \in \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega)$ est solution de $Lu = 0$ on ne peut espérer pour $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, et pour des coefficients $a_{i,j}$ généraux, avoir $u \in \mathcal{H}^k_{loc}(\Omega)$

En revenche, nous verrons plus loin d'autres propriétés impliquées par l'équation $Lu = 0$, en particulier

$$u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

[On peut aussi montrer, mais c'est un résultat difficile, que si $u \in \mathcal{H}^1_{loc}(\Omega)$, $Lu = 0$, alors $\exists p > 2$, tel que $u \in \mathcal{W}^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Dans le cas où la matrice $A(x)$ est proche de l'identité, nous verrons une preuve de ce résultat par la méthode de Schauder.]

1.3.2 Résultats de compacité

Le résultat de la partie 1.2 se généralise de la façon suivante :

Proposition 1.3.4

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de

$$Lw_n = 0$$

telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in \mathcal{H}^1(B(\rho))$. On suppose que la suite est bornée dans $\mathcal{L}^2(B(\rho))$, i.e qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{B(\rho)} |w_n|^2 \leq C$$

Soit $0 < \rho' < \rho$. Il existe une sous-suite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} w_{\sigma(n)\|B(\rho')} = w \ \text{ fortement dans } \mathcal{H}^1(B(\rho'))$$

où $w \in \mathcal{H}^1(B(\rho'))$ vérifie

$$Lw = 0 \text{ sur } B(\rho')$$

$\boxtimes$

Preuve

Elle est identique à celle de la proposition 1.2.3

$\boxtimes$

1.4 Autres propriétés des solutions de $Lu = 0$

Dans cette partie, nous allons étudier des propriétés des solutions $\mathcal{H}^1$ de $Lu = 0$. Nous verrons tout d'abord que

$$\forall p > 2, u \in \mathcal{L}^p_{loc}(\Omega) \tag{1.14}$$

grâce à une généralisation de l'inégalité de Cacciopoli. Ensuite en utilisant une méthode itérative, due à J. Moser, nous en déduirons que

$$u \in \mathcal{L}^\infty_{loc}(\Omega) \tag{1.15}$$

Un résultat difficile dû à E. de Giorgi affirme en fait que toute solution de $Lu = 0$, dans $\mathcal{H}^1$ est en fait une fonction continue sur Ω, et même qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$$

Ce résultat sort malheureusement du cadre de ce cours.

1.4.1 Une généralisation de l'inégalité de Cacciopoli

Dans cette partie, nous allons établir

Lemme 1.4.1

Soit $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ solution de

$$Lu = 0$$

Soit $p \geq 1$, $x_0 \in \Omega$, et $\rho > 0$ tels que

$$|u|^{p+1} \in \mathcal{L}^1(B(x_0, \rho)) \tag{1.16}$$

Alors pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^\infty_c(B(x_0, \rho))$

$$|u|^{\frac{p+1}{2}}\eta \in \mathcal{H}^1(B(x_0, \rho))$$

et

$$\int_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{p+1}\eta\right)\right|^2 \;\leq\; C(p+1)^2 \int_{B(x_0,\rho)} |u|^{p+1}\,|\nabla\eta|^2 \tag{1.17}$$

$\boxtimes$

<u>Commentaire</u>

1. Dans le cas $p = 1$, cette inégalité a été établie dans le cadre de la preuve de l'inégalité de Caccioppoli.
2. Pour $p \leq 2^* - 1$, où 2^* est l'exposant conjugué de Sobolev $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, la propriété 1.16 est automatiquement vérifiée, en raison de l'injection
$$\mathcal{H}^1(B(x_0,\rho)) \hookrightarrow \mathcal{L}^{2^*}(B(x_0,\rho))$$
Notons que $2^* - 1 = \dfrac{n+2}{n-2} > 1,\ 2^* > 2$

Preuve

Rappelons que $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est solution de $Lu = 0$ si et seulement si
$$\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0 \tag{1.18}$$
Comme dans l'inégalité de Caccioppoli, le calcul repose sur un choix adéquat de fonction test v. L'idée de base est de prendre comme fonction test
$$v_+ = u_+^p\, \eta^2, \quad v_- = (-u_-)^p \eta^2$$
où les fonctions u_+, u_- sont données par $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = \min\{u, 0\}$ de sorte que
$$\begin{cases} u &= u_+ + u_- \\ |u| &= u_+ - u_- \end{cases}$$
Pour une fonction $u \in \mathcal{W}_{loc}^{1,1}(\Omega)$, on a alors $u_+ \in \mathcal{W}_{loc}^{1,1}(\Omega)$, et $u_- \in \mathcal{W}_{loc}^{1,1}(\Omega)$ et
$$\begin{cases} \nabla u^+ = \nabla u, & \text{si } u \geq 0 \quad \nabla u^+ = 0 \quad \text{si } u \leq 0 \\ \nabla u^- = \nabla u, & \text{si } u \leq 0 \quad \nabla u^- = 0 \quad \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$
Soit
$$\begin{cases} \nabla u^+ = \nabla u \chi_{\{u \geq 0\}} \\ \nabla u^- = \nabla u \chi_{\{u \leq 0\}} \end{cases}$$
Si $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega)$, on a alors
$$\nabla u_+^p = p u_+^{p-1} \nabla u_+ = p u_+^{p-1} \nabla u \chi_{\{u \geq 0\}}$$
Au vu de cette formule on voit que v_+ (respectivement v_-) ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{H}^1$. C'est pourquoi nous commencerons par démontrer l'inégalité 1.17 sous l'hypothèse supplémentaire $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega)$. Dans un deuxième temps nous verrons comment nous débarasser de cette hypothèse.

A Démonstration de 1.17 lorsque $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega)$

Si $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\Omega)$ on vérifie que v_+ et v_- sont des fonctions de $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$. On peut donc les utiliser comme fonctions tests dans 1.18. Nous allons commencer par efectuer le calcul pour v_+

On a par 1.18
$$\int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_+^p \eta^2\right) = 0, \quad \text{car } v_+ \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

Développons l'intégrande

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_+^p\eta^2\right) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_+^p\right)\eta^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i}u_+^p\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta^2\right) \\
&= pu_+^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_+}{\partial x_j}\eta^2 + u_+^p\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \\
&= pu_+^{p-1}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial u_+}{\partial x_j}\eta^2 + u_+^p\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

[Seule la fonction u_+ apparaît dans ce calcul] Nous avons les identités

$$\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i}\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} = \frac{(p+1)^2}{4}u_+^{p-1}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial u_+}{\partial x_j}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i}\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j}\eta^2 + u_+^{p+1}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\
&+ \frac{p+1}{4}u_+^p\left[\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i}\right]
\end{aligned}$$

et en combinant

$$\begin{aligned}
pu_+^{p-1}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial u_+}{\partial x_j}\eta^2 &= \frac{4p}{(p+1)^2}\left[\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j}\right] \\
&- \frac{4p}{(p+1)^2}\left[u_+^{p+1}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right. \\
&\quad \left. + \frac{p+1}{4}u_+^p\left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i}\right)\right]
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{(p+1)^2}{4p}a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_+^p\eta^2\right) &= a_{i,j}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j} \\
&- a_{i,j}u_+^{p+1}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\
&+ u_+^p\left[\frac{(p+1)^2}{4p}a_{i,j}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}\right. \\
&\quad \left. - \frac{p+1}{4}a_{i,j}\left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i}\right)\right]
\end{aligned}$$

Donc par 1.18, en utilisant la symétrie de $a_{i,j}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j} &= \int_\Omega u_+^{p+1}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\
&+ \left(\frac{p+1}{2} - \frac{(p+1)^2}{4p}\right)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_+^p a_{i,j}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j} &= \int_\Omega u_+^{p+1}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\ &+ \left((p+1)-\frac{(p+1)^2}{2p}\right)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_+^p \eta a_{i,j}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\end{aligned}$$

En utilisant l'ellipticité de $A(x)$ on obtient alors

$$\alpha_0 \int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_i}\frac{\partial\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)}{\partial x_j}$$

et

$$0 \leq \int_\Omega u_+^{p+1}\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \leq \alpha_1 \int_\Omega u_+^{p+1}\left|\nabla \eta\right|^2$$

puis, comme $0 \leq \eta \leq 1$

$$\left|\int_\Omega u_+^p \eta \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right| \leq \alpha_1 \int_\Omega u_+^p |\nabla u_+||\nabla \eta|$$

En regroupant on trouve donc

$$\alpha_0 \int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq \alpha_1\left[\int_\Omega u_+^{p+1}\left|\nabla\eta\right|^2 + (p+1)\int_\Omega u_+^p|\nabla u_+||\nabla\eta|\right]$$

i.e

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq C\left[\int_\Omega u_+^{p+1}\left|\nabla\eta\right|^2 + (p+1)\int_\Omega u_+^p|\nabla u_+||\nabla\eta|\right] \tag{1.19}$$

Cette inégalité correspond "presque" à l'inégalité désirée. Il reste à nous débarasser du dernier terme, en l'absorbant par les deux autres. A cet effet on ecrit

$$u_+^p = u_+^{\frac{p+1}{2}} u_+^{\frac{p-1}{2}}$$

et

$$\eta u_+^p |\nabla u_+||\nabla \eta| = \left(\eta u_+^{\frac{p-1}{2}}\right)\left(|u|^{\frac{p+1}{2}}|\nabla\eta|\right)$$

On remarque que

$$u_+^{\frac{p-1}{2}}|\nabla u_+| = \left|\nabla u_+^{\frac{p+1}{2}}\right|\frac{2}{p+1}$$

Enfin on majore,

$$\left(\eta u_+^{\frac{p-1}{2}}|\nabla u_+|\right) \leq \left(\left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right| + |\nabla\eta|\, u_+^{\frac{p+1}{2}}\right)\frac{2}{p+1}$$

Pour conclure, on utilise la majoration, pour $\varepsilon > 0$ et deux nombres positifs, a et b

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2\right)$$

avec

$$a = \eta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+| \quad b = u_+^{\frac{p+1}{2}} |\nabla \eta|$$

Il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \eta u_+^p |\nabla u_+||\nabla \eta| \leq \frac{1}{2}\left[\varepsilon \left(\eta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|\right)^2 + \varepsilon^{-1}\left(u_+^{p+1}|\nabla \eta|^2\right)\right]$$

On utilise alors encore le même type de majoration

$$(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 + 2 \times \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) = 2(a^2+b^2)$$

Soit

$$\left(\eta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|\right)^2 \leq 2 \times \frac{4}{(p+1)^2}\left(\left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 + |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}\right)$$

Ainsi

$$\eta u_+^p |\nabla u_+||\nabla \eta| \leq \frac{4\varepsilon}{(p+1)^2}\left[\left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 + |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}\right] + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1} u_+^{p+1}|\nabla \eta|^2$$

En intégrant il résulte

$$(p+1)\int_\Omega \eta u_+^p |\nabla u_+||\nabla \eta| \leq \frac{4\varepsilon}{p+1}\int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 + \left(\frac{4\varepsilon}{p+1} + \frac{\varepsilon^{-1}(p+1)}{2}\right)\int_\Omega |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}$$

En revenant à 1.19

$$\left(1 - \frac{4C\varepsilon}{p+1}\right)\int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq C\left(1 + \frac{4\varepsilon}{p+1} + \frac{p+1}{2\varepsilon}\right)\int_\Omega |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}$$

on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq C' \int_\Omega |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}$$

On procède de même pour v_- ce qui donne la conclusion

B Cas général

Dans cette partie on ne suppose plus que $u \in L^\infty(\Omega)$. Indiquons brièvement les adaptations nécessaires. Au lieu de prendre les fonctions test v_+ et v_-, on introduit des troncatures au niveau N, puis on passe à la limite pour $N \to +\infty$. Plus précisément, posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_{+,N} = u_+ & \text{si } u_+ \leq N \\ u_{+,N} = N & \text{si } u_+ \geq N \end{cases}$$

de sorte que,

$$\begin{cases} \nabla u_{+,N} = \nabla u & \text{si } 0 \leq u(x) \leq N \\ \nabla u_{+,N} = 0 & \text{si } u(x) \geq N \text{ ou } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

On prend comme fonction test la fonction

$$v_{+,N} = u_{+,N}^{p-1} u \eta^2$$

de sorte que $v_{+,N} \in H_0^1(\Omega)$. On a par 1.18

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_{+,N}^{p-1} u \eta^2 \right) = 0$$

On développe l'intégrande. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_{+,N}^{p-1} u \eta^2 \right) &= (p-1) u_{+,N}^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_j} \eta^2 \\
&+ u_{+,N}^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta^2 \\
&+ u_{+,N}^{p-1} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \\
&= (p-1) u_{+,N}^{p-1} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_j} \eta^2 \\
&+ N^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta^2 \chi_{\{u \geq N\}} + u_{+,N}^{p-1} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_j} \eta^2 \\
&+ u_{+,N}^{p} \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + N^{p-1} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} \eta^2 \chi_{\{u \geq N\}}
\end{aligned}$$

Des calculs similaires à ceux de la partie A permettent alors de montrer la majoration suivante :

$$\int_\Omega \left| \nabla \left(u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta \right) \right|^2 + \int_\Omega N^{p-1} |\nabla u|^2 \chi_{\{u \geq N\}} \leq C' \int_\Omega |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1} \tag{1.20}$$

Comme $\lim_{N \to +\infty} u_{+,N} = u_+$ pour presque tout $x \in \Omega$, et que la suite $u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}} \eta$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ d'après **??**, on en déduit que $u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, et que

$$u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}} \eta \rightharpoonup u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

[Rappelons le raisonnement : posons $w_n = u_{+,n}^{\frac{p+1}{2}} \eta$. D'après 1.20, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc toute suite extraite de w_n possède une sous-suite qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et donc fortement dans $L^2(\Omega)$ par injection de Rellich. Comme $w_n \to u_{+,n}^{\frac{p+1}{2}} \eta$ simplement, la limite est forcément $u_{+,n}^{\frac{p+1}{2}} \eta$. Par unicité de la limite, toute la suite converge.]

Par semi-continuité-inférieur on a

$$\int_\Omega \left| \nabla \left(u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta \right) \right|^2 \leq \liminf_{N \to +\infty} \int_\Omega \left| \nabla \left(u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}} \eta \right) \right|^2 \leq C' \int_\Omega |\nabla \eta|^2 u_+^{p+1}$$

et la conclusion en découle.

⊠

1.4.2 Majorations dans $L^q_{loc}(\Omega)$

Le lemme 1.4.1 permet de démontrer le résultat suivant, qui nous permettra ensuite, par itération, de prouver que toute solution de $Lu = 0$, dans $H^1_{loc}(\Omega)$ appartient en fait à $L^q_{loc}(\Omega)$ pour $q < +\infty$. On posera à cet effet

$$\lambda = \frac{2^*}{2} = \frac{N}{N-2} > 1$$

Lemme 1.4.2

Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$. On suppose de plus qu'il existe $q > 2$ tel que $u \in L^q_{loc}(\Omega)$. Alors $\forall x \in \Omega,\ 0 < \rho < \rho'$ tels que $B(x,\rho) \subset \Omega$ on a

$$\left[\int_{B(x,\rho')} |u|^{\lambda q}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\frac{(1+q)^2}{(\rho-\rho')^2}\int_{B(x,\rho)} |u|^q$$

En particulier, $\forall K$ compact $\subset \Omega,\ u \in L^{\lambda q}(K)$, i.e $u \in L^{\lambda q}_{loc}(\Omega)$

$\boxtimes$

Preuve

On part du lemme 1.4.1, et on prend pour fonction η la fonction "plateau" définie dans la preuve de l'inégalité de Caccioopoli, i.e telle que $\eta \in C^\infty_c(B(x_0,\rho))$, $\eta \geq 0$ et

On vérifie alors que η a bien les propriétés désirées :

$$\begin{cases} \eta(x) = 1 \text{ sur } \Omega\backslash B(x_0,\rho') \\ \eta(x) = 0, \text{ en dehors de } \Omega\backslash B(x_0,\rho) \\ |\nabla\eta|_{L^\infty} \leq \dfrac{2}{\rho-\rho'} \end{cases}$$

D'après le lemme 1.4.1, $|u|^{\frac{q}{2}}\eta \in H^1_0(B(x_0,\rho))$, et par injection de Sobolev $H^1_0 \hookrightarrow L^{2^*}$ on a donc

$$\left|\int_{B(x,\rho')} |u|^{\frac{q}{2}}\eta^{2^*}\right|^{\frac{1}{2^*}} \leq C\left[\int_{B(x,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{\frac{q}{2}}\eta\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

où C est une constante universelle (sans dimension). [ici on a pris $p = q-1$, i.e $q = p+1$]

Comme $\eta \geq 0$, $\eta = 1$ sur $B(x,\rho')$ on obtient donc ($\lambda = \dfrac{2^*}{2} > 1$)

$$\left[\int_{B(x,\rho')} |u|^{\lambda q}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leq C\int_{B(x,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{\frac{q}{2}}\eta\right)\right|^2 \tag{1.21}$$

Le résultat du lemme 1.4.1 donne alors

$$\int_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{\frac{q}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq C(1+q)^2\int_{B(x_0,\rho)} |u|^q|\nabla\eta|^2$$

Comme $|\nabla\eta| \leq \dfrac{2}{\rho-\rho'}$, on a donc

$$\int_{B(x,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{\frac{q}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq \frac{C(1+q)^2}{(\rho-\rho')^2}\int_{B(x_0,\rho)} |u|^q \tag{1.22}$$

En combinant 1.21 et 1.22 on obtient la majoration du lemme 1.4.2. Une conséquence directe de ce lemme est la suivante.

$\boxtimes$

Proposition 1.4.1

Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. Alors pour tout $r < +\infty$, $u \in L^r\left(B(x_0, \frac{\rho}{2}\right)$ et

$$\left[\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq C(\rho, r)\left[\int_{B(x_0,\rho)} |u|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Il en résulte en particulier que $u \in L^r(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$ et donc $u \in L^q_{loc}(\Omega)$

$\boxtimes$

Preuve

Elle repose sur une méthode d'itération dûe à J.Moser. Comme $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, on sait que $u \in L^2(B(x_0, \rho))$ (et même $u \in L^r(B(x_0, \rho))$ pour $r = 2^*$). Pour $i \in \mathbb{N}$ on pose

$$q_i = 2\lambda^i = \lambda q_{i-1}$$

avec $q_0 = 2$ et $\lambda = \dfrac{2^*}{2} = \dfrac{N}{N-2} > 1$. On pose également

$$\rho_i = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{i+1}}$$

de sorte que la suite $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroît de $\rho_0 = \rho$ vers $\dfrac{\rho}{2}$ et

$$\rho_i - \rho_{i+1} = \frac{\rho}{2^{i+1}}$$

On a alors

$$\left[\int_{B(x_0,\rho_{i+1})} |u|^{q_{i+1}}\right]^{\frac{1}{\lambda^{i+1}}} = \left[\int_{B(x_0,\rho_{i+1})} |u|^{\lambda q_i}\right]^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{q_i}}$$

Par le lemme 1.4.2 on a si $u \in L^{q_i}(B(x_0, \rho_i))$

$$\left[\int_{B(x_0,\rho_{i+1})} |u|^{\lambda q_i}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{C(1+q_i)^2}{2^{-2(i+1)\rho^2}} \int_{B(x_0,\rho_i)} |u|^{q_i}$$

Donc

$$\left[\int_{B(x_0,\rho_{i+1})} |u|^{q_{i+1}}\right]^{\frac{1}{\lambda^{i+1}}} \leq \left(\frac{C(1+q_i)^2}{2^{-2(i+1)\rho^2}}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}} \left(\int_{B(x_0,\rho_i)} |u|^{q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}}$$

On en déduit donc que si $u \in L^{q_i}(B(x_0, \rho_i))$, alors $u \in L^{q_{i+1}}(B(x_0, \rho_{i+1}))$. Comme pour $i = 0$ $u \in L^2(B(x_0, \rho))$, on en déduit par récurrence que $u \in L^{q_{i+1}}(B(x_0, \rho_{i+1}))$, et que

$$\left[\int_{B(x_0,\rho_i)} |u|^{q_i}\right]^{\frac{1}{\lambda^i}} \leq \prod_{k=0}^{i-1} \left(\frac{C(1+q_k)^2}{4^{-(k+1)\rho^2}}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}} \int_{B(x_0,\rho)} |u|^2$$

Ce qui conclut la preuve car $q_i \to +\infty$ lorsque $i \to +\infty$ et $\forall i,\ \rho_i \geq \dfrac{\rho}{2}$

$\boxtimes$

Le calcul précédent nous a fourni une constante explicite, à savoir

$$K(i,\rho) = \prod_{k=0}^{i} \left(\frac{C(1+q_k)^2}{4^{-(k+1)\rho^2}} \right)^{\frac{1}{\lambda^k}}$$

Nous allons étudier le comportement de cette constante lorsque $i \to +\infty$.

Lemme 1.4.3

Il existe une constante K_0 ne dépendant que de α_0 et α_1 telle que

$$\lim_{i\to+\infty} K(i,\rho) = \rho^{-N} K_0$$

$\boxtimes$

Preuve

Écrivons

$$K(i,\rho) = \prod_{k=0}^{i} \alpha(k,\rho)$$

où pour $k \in \mathbb{N}$ on a posé

$$\alpha(k,\rho) = \left(\frac{C(1+q_k)^2}{4^{-(k+1)\rho^2}} \right)^{\frac{1}{\lambda^k}}$$

Passons l'expression précédente au logarithme pour étudier le produit. On a

$$\begin{aligned} \log(\alpha(k,\rho)) &= \lambda^{-k} \log\left(\frac{C(1+q_k)^2}{4^{-(k+1)\rho^2}} \right) \\ &= 2\lambda^{-k} \left(\frac{1}{2}\log(C) - \log(\rho) + \log\left(\frac{1+q_k}{2^{-(k+1)}} \right) \right) \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \log(K(i,\rho)) &= \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{2}{\lambda^k} \left[\log(\sqrt{C}) - \log(\rho) + \log\left(\frac{1+q_k}{2^{-(k+1)}} \right) \right] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \left[\log(C) - 2\log(\rho) \right] + 2\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \log\left(\frac{1+q_k}{2^{-(k+1)}} \right) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Comme $\lambda > 1$ le premier terme converge, car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} = \frac{1}{1-\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{\frac{N}{N-2}}{\frac{N}{N-2}-1} = \frac{N}{2}$$

D'où

$$\lim_{i\to+\infty} \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \left[\log(C) - 2\log(\rho) \right] = \frac{N}{2} \left[\log(C) - 2\log(\rho) \right]$$

i.e

$$\lim_{i\to+\infty}\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{\lambda^k}\left[\log(C)-2\log(\rho)\right]=\log\left(C\rho^{-N}\right)$$

Le dernier terme de la somme 1.23 est indépendant de ρ.

Notons que

$$\log\left(\frac{1+q_k}{2-(k+1)}\right)=\log\left(1+q_k\right)+(k+1)\log\left(2\right)$$

Or $q^k=2\lambda^k$ Donc

$$0\leq\log\left(1+q_k\right)=\log\left(1+2\lambda^k\right)\underset{k\to\infty}{\sim}k\log(\lambda)$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{\lambda^k}\log(1+q_k)\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{1}{\lambda^k}\left(\log(2)+k\log(\lambda)\right)\to C_1<+\infty$$

En regroupant les calculs précédents on obtient

$$\log(K(i,\rho))\to\log(\rho^{-N})+C_0$$

où C_0 est une constante. Le lemme en découle.

⊠

1.4.3 Estimations $L^\infty_{loc}\left(\Omega\right)$

Les cacluls précédents vont nous permettre de montrer que $u\in L^\infty_{loc}\left(\Omega\right)$. A cet effet, pour passer des majorations L^r aux majorations L^∞ nous allons utiliser le résultat suivant de la théorie de la mesure.

Lemme 1.4.4

Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}^N$ de mesure non nulle. Soit f une fonction mesurable sur A. On suppose qu'il existe une constante $M_0>0$ et $r_0>1$ tels que

$$\forall r\geq r_0,\quad\left[\int_\Omega|f(x)|^r\right]^{\frac{1}{r}}\leq M_0$$

Alors $f\in L^\infty\left(A\right)$ et

$$|f(x)|\leq M_0,\quad\text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}$$

⊠

Preuve

Soit $\varepsilon>0$. On considère l'ensemble :

$$W_\varepsilon=\{x\in A\mid|f(x)|\geq M_0+\varepsilon\}$$

On a

$$\forall r\geq r_0,\quad|W_\varepsilon|^{\frac{1}{r}}(M_0+\varepsilon)\leq\left[\int_\Omega|f(x)|^r\right]^{\frac{1}{r}}\leq M_0$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $|W_\varepsilon| \neq 0$. Alors

$$|W_\varepsilon|^{\frac{1}{r}} \to 1 \quad \text{lorsque } r \to +\infty$$

et donc l'inégalité précédente donne

$$M_0 + \varepsilon \leq M_0$$

ce qui, bien entendu, est contradictoire. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ |W_\varepsilon| = 0$$

Il en résulte que

$$W = \{x \in A \mid |f(x)| \geq M_0\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} W_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{\frac{1}{n+1}}$$

est de mesure nulle.

⊠

Revenons à notre problème initial. On a

Théorème 1.4.1

Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ solution de $Lu = 0$ sur Ω. Alors $\forall x_0 \in \Omega$, $0 < \rho$, $B(x_0, \rho) \subset \Omega$ on a

$$|u(x)| \leq K_1 \left(\frac{1}{|B(x_0,\rho)|} \int_{B(x_0,\rho)} |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{presque pour tout } x \in B(x_0, \frac{\rho}{2})$$

où K_1 est une constante qui ne dépend que de α_0 et α_1

En particulier $u \in L^\infty(\Omega)$

⊠

Preuve

Il résulte de la proposition 1.4.2 et de sa preuve que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left[\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^{q_{k+1}} \right]^{\frac{1}{\lambda^{k+1}}} \leq K(k,\rho) \int_{B(x_0,\rho)} |u|^2$$

Comme $q_{k+1} = 2\lambda^{k+1}$ on a donc

$$\left[\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^{q_{k+1}} \right]^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq K(k,\rho)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{B(x_0,\rho)} |u|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dans le lemme 1.4.3, nous avons vu que

$$\lim_{k \to \infty} K(k,\rho) = K_0 \rho^{-N}$$

il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq k_0$

$$K(k,\rho) \leq 2K_0\rho^{-N}$$

Ainsi $\forall r \geq q_{k_0+1}$,

$$\begin{aligned}
\left[\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^r\right]^{\frac{1}{r}} &\leq \sqrt{2K_0}\left[\frac{1}{\rho^N}\int_{B(x_0,\rho)} |u|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2K_0|B(1)|}\left[\frac{1}{|B(x_0,\rho)|}\int_{B(x_0,\rho)} |u|^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

La conclusion découle alors du lemme 1.4.4

$\boxtimes$

Chapitre 2

Majorations globales et existence pour les problèmes elliptiques

2.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous avons étudié des propriétés locales de solutions d'équations elliptiques homogènes du type

$$Lu = 0 \tag{2.1}$$

où L est sous forme divergence. Comme nous l'avions vu, l'ensemble des solutions de 2.1 forme un espace vectoriel (de dimension infinie). Nous avions vu que ces solutions possèdent des propriétés locales assez intéressantes. Notre résulat principal était le suivant :

$$u \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$$

i.e $\forall K$ compact $\subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |u(x)| < +\infty$$

Dans cette partie, nous considérons le problème "inverse" suivant. Étant donné une fonction f (ou une distribution) définie sur Ω, existe-t-il u tel que

$$Lu = f \text{ dans } \Omega \tag{2.2}$$

Bien entendu, si ce problème possède une solution particulière u_0, l'ensemble des solutions est un espace affine, de la forme $\{u_0\} + W$, où W est l'espace vectoriel des solutions du problème homogène 2.1. Afin d'avoir un problème bien posé (i.e pour avoir existence et unicité de la solution), il faut imposer en plus de l'équation 2.2 des conditions aux limites (i.e sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω). Il existe des conditions aux limites de nature très différentes (Neumann, Dirichlet, mixtes, etc...). Afin de fixer les idées, et pour limiter les difficultés, nous nous contenterons de considérer, dans ce cours, les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, c'est-à-dire

$$u = \text{ sur } \partial\Omega \tag{2.3}$$

i.e le problème type sera

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -Lu & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

ou encore

$$(II) \quad \begin{cases} -Lu + cu & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où c est une fonction définie sur Ω.

Les problèmes du type $(I), (II)$ ont été considérés dès le début du $XIX^{ème}$ siècle. Le point de vue de l'analyse fonctionnelle (fin $XIX^{ème}$, début $XX^{ème}$) a néanmoins radicalement changé leur approche. L'idée est d'introduire des espaces de fonctions (ou de distributions), X pour u, Y pour f, de sorte que les éléments de X vérifient la consition aux limites 2.2, et que

$$L : X \to Y \text{ (X,Y Banach)} \tag{2.4}$$

soit un isomorphisme. Dans ce cas, en effet, le problème (I) possède une solution unique u, $\forall f \in Y$ donné, à savoir

$$(I) \Leftrightarrow u = L^{-1}(f)$$

Comment montrer que L est un isomoprhisme de X vers Y ?

Comme il s'agit de problèmes linéaires, le point essentiel est d'établir des majorations dans les normes des espaces de Banach du type :

$$\forall u \in X, \quad ||u||_X \leq C||Lu||_Y \tag{2.5}$$

[Pour une telle majoration, il est essentiel d'avoir des espaces vectoriels normés !]

Lorsqu'une égalité du type 2.5 est établie, on vérifie en effet

A $Ker\ L = \{0\}$ En effet si $Lu = 0$, par 2.5, il vient $||u||_X = 0$, i.e $u = 0$

B $Im\ L$ est fermé dans Y En effet si $(y_n)_{n\in\mathbb{B}}$ est une suite de Cauchy de ImŁ, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{B}}$ dans X telle que

$$\forall n, \ y_n = Lx_n$$

Par 2.5 on a

$$\forall n, m, \ ||y_n - y_m|| = ||L(x_n - x_m)|| \geq \frac{1}{C}||x_n - x_m||$$

et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{B}}$ est de Cauchy dans X, donc admet une limite x, $x_n \to x$. Il en résulte par continuité

$$y_n = Lx_n \to y = Lx$$

i.e la limite de la suite y_n est donc dans $Im\ L$

Il reste alors en général à vérifier ImŁ $= Y$. (on peut par exemple montrer que $Im\ L$ est dense).

Remarque Au lieu de vérifier 2.5, il suffit de vérifier

$$\forall u \in \tilde{X}, \ ||u||_X \leq C||Lu||_Y \tag{2.6}$$

où $\tilde{X}$ est un sous-espace dense de X. Dans notre contexte, comme nous avons à faire à des espaces de fonctions, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est souvent dense dans X, et on peut prendre $\tilde{X} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Conclusion Le preoblème d'existence de solutions pour (I) (ou (II)) se ramène à établir une majoration du type 2.5. On appelle une telle majoration une estimation a priori. En général on peut se contenter de le faire pour des fonctions assez régulières.

Un exemple élémentaire où une telle méthode est mise en oeuvre est le théorème de Lax-Milgram et ses applications.

2.2 Le théorème de Lax-Milgram

2.2.1 Cadre abstrait

On considère ici un espace de Hilbert H et L une application linéaire de H vers H^* continue. On fait l'hypothèse suivante sur L (ellipticité) :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall u \in H,\ \langle Lu, u\rangle_{H^*,H} \geq \alpha ||u||^2 \tag{2.7}$$

On a alors

Proposition 2.2.1

L est un isomorphisme de H vers H^*

⊠

Preuve

On a $\forall u \in H,\ \left|\langle Lu, u\rangle_{H^*,H}\right| \leq ||Lu||_{H^*}||u||_H$ et donc par 2.7

$$\alpha ||u||_H^2 \leq ||Lu||_{H^*}||u||_H$$

i.e

$$\forall u \in H,\ ||u||_H \leq \frac{1}{\alpha}||Lu||_{H^*}$$

c'est-à-dire que L vérifie la majoration 2.6. Il résulte de la discussion de l'introduction que L est injective, et que $Im\ L$ est fermé dans H^*. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une application continue $\tilde{L} : H \to H$ telle que $\langle Lu, u\rangle_{H^*,H} = \langle \tilde{L}u, u\rangle_{H,H}$. Il suffit de montrer que $Im\ \tilde{L} = H$. Comme $Im\ \tilde{L}$ est fermé, d'après ce qui précède montrons que $Im\ \tilde{L}$ est dense dans H, i.e $\left(Im\ \tilde{L}\right)^\perp = \{0\}$. Or

$$\begin{aligned} v \in \left(Im\ \tilde{L}\right)^\perp &\Leftrightarrow \forall u \in H \langle \tilde{L}u, v\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall u \in H \langle u, \tilde{L}^* v\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{L}^* v = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in Ker\ \tilde{L}^* \end{aligned}$$

Par 2.7 on a $\forall u,\ \langle u, \tilde{L}^* u\rangle \geq \alpha ||u||^2$ et donc par le même raisonnement que précédemment, on déduit que $Ker\ \tilde{L}^* = \{0\}$, d'où le résultat.

⊠

2.2.2 Application aux problèmes elliptiques

2.2.2.1 Cadre

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère ici

$$H = H_0^1(\Omega)$$

On rappelle que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{H^1}$$

i.e H_0^1 est l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour la norme H^1. On identifie le dual de $H_0^1(\Omega)$ avec l'ensemble $H^{-1}(\Omega)$ des distributions f sur Ω telles que

$$\exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad |\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq C||\varphi||_{H^1} \tag{2.8}$$

On munit alors $H^{-1}(\Omega)$ de la norme

$$||f||_{H^{-1}} = \sup\left\{|\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}|\,,\ ||\varphi||_{H^1} \leq 1,\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right\}$$

La dualité 2.8 s'étend alors par densité à $H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)\,,\ \left|\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{H}^{-1},\mathcal{H}^1}\right| \leq ||f||_{H^{-1}}||v||_{H^1}$$

Il en résulte que $H^{-1}(\Omega)$ s'identifie à $\left[H_0^1(\Omega)\right]^*$. Comme exemple d'éléments de $H^{-1}(\Omega)$ on a

Lemme 2.2.1

$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (de manière continue). De manière plus générale

$$\forall q \geq \frac{2^*}{2^* - 1} = \frac{2N}{N+2},\ L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

⊠

Preuve

Soit $f \in L^q(\Omega)$, pour $q \geq \dfrac{2N}{N+2}$. On a pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega f.\varphi\right| \leq ||f||_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}||\varphi||_{L^{2^*}(\Omega)} \leq ||f||_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}$$

où on a utilisé le fait que $\dfrac{2N}{N+2}$ est l'exposant conjugué de 2^* ainsi que l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Il en résulte que $f \in H^{-1}(\Omega)$ et

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C||f||_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}$$

ce qui termine la preuve.

⊠

2.2.2.2 Opérateurs elliptiques sous forme divergence

Comme dans la partie précédente, on considère un opérateur elliptique

$$L = div(A(x)\nabla)$$

où la matrice $A(x) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique, à coefficients bonés, et vérifie la condition d'ellipticité : $\exists \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$

$$(H3) \quad \alpha_0||\xi||^2 \leq \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1||\xi||^2$$

Soit alors $u \in H_0^1(\Omega)$. Considérons

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

On vérifie aisément

Lemme 2.2.2

L'application $L : u \mapsto Lu$ est une application continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$

⊠

Preuve

Comme les coefficients $a_{i,j}$ sont bornés, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \Omega,\ \forall i, j,\ |a_{i,j}(x)| \leq M$$

En particulier, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \sum_{i,j}\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\langle Lu, \varphi\rangle| &\leq M||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla\varphi||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq CM||u||_{H^1(\Omega)}||\varphi||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Poincaré. Il en résulte que $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ et que

$$||Lu||_{H^{-1}(\Omega)} \leq CM||u||_{H^1(\Omega)}$$

⊠

Remarque Le lemme 2.2.2 ne fait pas intervenir la condition d'ellipticité (H3)

Lemme 2.2.3

On a pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle Lu, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} \geq \alpha_0||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

⊠

Preuve

On a

$$\langle Lu, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \geq \alpha_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 = \alpha_0 ||u||^2_{H_0^1}$$

et la conclusion en résulte.

$\boxtimes$

Il résulte alors du théorème de Lax-Milgram (Proposition 2.2.1)

Proposition 2.2.2

L est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$. En particulier, pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$div\,(A(x)\nabla u) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

i.e

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

$\boxtimes$

<u>Commentaire</u>

Le fait que $u \in H_0^1(\Omega)$ est interprété comme : " u vérifie la condition aux limites homogène $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ". Ce fait peut être analysé de manière plus claire grâce à la théorie des Traces (qui suppose que l'ouvert soit suffisamment régulier).

Dans le cas où f est plus régulière, on peut se demander si la solution u elle-même l'est également. En termes d'isomorphisme, cela reviendrait à remplacer les espaes $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ par des espaces plus petits.

Lorsque les coefficients $a_{i,j}$ sont réguliers, et en particulier constants nous allons voir que ceci est possible, et que l'on peut gagner des "ordres de dérivation" pour u.

2.3 Théorie de la régularité pour le laplacien

On considère ici

$$L = -\Delta = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Rappelons que pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$W^{2,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \nabla u \in L^p(\Omega),\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega) \right\}$$

et de manière générale, pour $k \in \mathbb{N}^N$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme
$$||u||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha u||_{L^p}$$
Muni de cette norme, $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif pour $1 < p < +\infty$, séparable pour $1 \leq p < +\infty$. Au vu de la définition de L, on voit clairement que $L = -\Delta$ est une application linéaire de $W^{2,p}(\Omega)$ vers $L^p(\Omega)$ et de manière générale
$$-\Delta : W^{k+2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$$
est continue pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$. Pour obtenir un isomorphisme, il faut rajouter des conditions aux limites. C'est pourquoi nous considérons
$$X_p = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty$$
et de manière plus générale pour $k \geq 1$
$$X_p = W^{k,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$
Lorsque $N = 1$, et $\Omega =]0,1[$ (ou tout autre intervalle borné de $\mathbb{R}$), l'opérateur Δ se réduit à la dérivée seconde, i.e
$$-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$$
On a alors

Proposition 2.3.1

Soit $N = 1$, $I =]0,1[$. Alors $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ est un isomorphisme de $W^{k+2,p} \cap W_0^{1,p}(I)$ vers $W^{k,p}(I)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, pour tout $f \in W^{k,p}(I)$, il existe un unique $u \in W^{k+2,p}(I)$ tel que
$$\left\{\begin{array}{lllll} -u'' & = & f & & \text{sur } [0,1] \\ u(0) & = & u(1) & = & 0 \end{array}\right.$$
De plus,
$$||u||_{W^{k+2,p}} \leq C||f||_{W^{k,p}}$$
où C est une constante qui ne dépend que de k et de p.

⊠

Preuve

Pour $f \in W^{k,p}(I) \subset H^{-1}(I)$, donc l'existence d'une solution $u \in H_0^1(I)$ est claire. Par ailleurs, comme
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(I)$$
il en résulte par dérivation que
$$\forall j \in \{1, \cdots, k+2\}, \; \frac{d^j}{dx^j}u = \frac{d^{j-2}}{dx^{j-2}}f$$

Ainsi

$$\sum_{i=2}^{k+2} \left|\left| \frac{d^j}{dx^j} u \right|\right|_{L^p(I)} = ||f||_{W^{k+2,p}}$$

Pour conclure, il suffit de majorer $||u||_{L^p} + ||\dot{u}||_{L^p}$ en fonction de f (exercice)

$\boxtimes$

Dans le cas où $N \geq 2$, le résultat de la proposition 2.3.1 s'étend au cas des ouverts bornés réguliers, MAIS uniquement pour des exposants p tels que $1 < p < +\infty$.

Nous avons alors le résultat suivant, que nous admettrons.

Théorème 2.4.1

Soit $N \geq 2$ et Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $1 < p < \infty$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Alors $-\Delta$ est un isomorphisme de $W^{k+2,p}(\Omega) \cup W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{k,p}(\Omega)$.

En particulier, pour tout $f \in W^{k,p}(\Omega)$ il existe un unique $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \mathcal{D}\text{"} \\ u(0) &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus

$$||u||_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C(p,k,\Omega)||f||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

où $C(p,k,\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de p, k et Ω

$\boxtimes$

Commentaire

1. Comme dans le cas $N = 1$ on voit que la solution "gagne" deux ordres de dérivation par rapport à f
2. le résultat ne s'étend pas aux cas $p = 1$ et $p = +\infty$
3. Lorsque $p = 2$, on peut démontrer ce résultat à l'aide de méthodes élémentaires hilbertiennes (mais la condition aux limites introduit de nombreuses complications techniques.)
4. En revenche, pour $p \neq 2$, la preuve utilise la théorie très délicate des intégrales singulières, et en particulier la méthode de Calderon-Zygmund.
5. Dans le cas où $k = 2$, on voit que pour $f \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(p,\Omega)||f||_{L^p(\Omega)}$$

Grâce aux injections de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

c'est-à-dire

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad \textit{pour} \text{ pour } p < N$$

($p^* > p$), on en déduit que

$$||u||_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C(p,\Omega)||f||_{L^p(\Omega)}$$

Dans cette dernière estimée nous n'avons pas gagné d'ordre de dérivation, mais nous avons gagné en intégrabilité de la dérivée. Nous allons voir que ce type de majoration peut s'étendre à des opérateurs elliptiques sous forme divergence.

2.4 La méthode de Schauder

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ symétrique à coefficients bornés vérfiant l'hypothèse d'ellipticité (H3). Soit $1 < p < +\infty$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) & = & f & \text{dans } \mathcal{D}' \\ u(0) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour des coefficients $a_{i,j}$ généraux, fonctions mesurables bornées sur Ω, il serait illusoire de vouloir étendre la théorie elliptique complète du laplacien à ce type d'opérateur, i.e $f \in L^p(\Omega)$ n'implique pas $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en général.

[Pour s'en convaincre, on peut considérer de nouveau le cas $N = 1$, $I =]0,1[$, $a(x) = (a(x))$. L'équation devient alors

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = f \quad \text{sur } [0,1]$$

et donc

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{a(x)}\int_0^x f(s)ds + C$$

On vérifie que si $f \in L^p(I)$, $\dfrac{du}{dx} \in L^\infty(I)$; en revenche, en général $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas une fonction]

Toutefois, on peut espérer démontrer des majorations de ∇u dans des normes $L^q(\Omega)$, avec $q > p$. La méthode de Schauder ci-dessous permet d'obtenir de telles majorations à condition que la matrice A soit proche de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}$ uniformément sur Ω. On a

Théorème 2.4.1

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < N$. Soit $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$. Pour tout $q \leq p^*$, il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de Ω, p, et q) tel que si

$$||A(x) - \mathrm{Id}||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 1\leq i,j\leq N}} |a_{i,j}(x) - \delta_{i,j}| \leq \varepsilon$$

alors, pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u(0) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, il existe une constante $C(p,q,\Omega)$ ne dépendant que de p,q, et Ω telle que

$$||u||_{W^{1,q}} \leq C(p,q,\Omega)||f||_{L^p(\Omega)}$$

⊠

Preuve

On décompose la matrice A sous la forme

$$A(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} + B(x)$$

i.e

$$B(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} - A(x)$$

de sorte que $B(x) = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique et vérifie

$$||B(x)||_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$$

i.e

$$\forall i,j \ ||b_{i,j}(x)||_L^\infty(\Omega) \leq \varepsilon$$

On a ainsi $\forall v \in W^{1,q}(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla v) &= -\mathrm{div}\,((\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} + B(x))\,\nabla v) \\ &= -\Delta v + \mathrm{div}\,(B(x)\nabla v) \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{div}\,(B(x)\nabla v) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)$$

A Réécriture de l'équation

Au vu de ce qui précède, l'équation

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) \tag{2.9}$$

est donc équivalente à $-\Delta u - \mathrm{div}\,(B(x)\nabla u) = f$ ou encore

$$-\Delta u = f + \mathrm{div}\,(B(x)\nabla u) \tag{2.10}$$

Par la théorie de régularité du Laplacien, Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $L^p(\Omega)$. Notons Δ_0^{-1} son inverse

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \Delta_0^{-1} & : & L^p(\Omega) & \to & W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ & & f & \mapsto & \Delta_0^{-1} f = w \end{array} \right.$$

où w est la solution de
$$\left\{ \begin{array}{cclc} \Delta w & = & f & \text{dans } \Omega \\ w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

[L'indice $_0$ en bas de Δ_0^{-1} fait référence à la condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$]

Dans ce contexte, l'équation 2.10 s'écrit alors

$$u = -\Delta_0^{-1}\left[f + \mathrm{div}\,(B(x)\nabla u)\right]$$

ou encore
$$u = -\Delta_0^{-1}\left[\mathrm{div}\,(B(x)\nabla u)\right] - \Delta_0^{-1} f$$

i.e

$$(\mathrm{Id} - T)\, u = -\Delta_0^{-1} f \tag{2.11}$$

pour

$$Tu = -\Delta_0^{-1} \left[\mathrm{div}\,(B(x)\nabla u)\right]$$

Ici, T désigne l'opérateur

$$\begin{array}{rcccl} T & : & W^{1,q}(\Omega) & \to & W^{1,q}(\Omega) \\ & & v & \mapsto & Tv = -\Delta_0^{-1}\left[\mathrm{div}\,(B(x)\nabla u)\right] \end{array}$$

B Propriétés de T

Pour $v \in W^{1,q}(\Omega)$, $\nabla v \in L^q(\Omega)$ et donc comme B est bornée, $B(x).\nabla v \in L^q(\Omega)$, avec

$$\begin{aligned} ||B(x)\nabla v||_{L^q(\Omega)} &\leq C||B||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla v||_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon||\nabla v||_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathrm{div}\,(B(x)\nabla v) \in W^{-1,q}(\Omega)$ et

$$||\mathrm{div}\,(B(x)\nabla v)\,||_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon||\nabla v||_{L^q(\Omega)}$$

[Rappelons que $W^{-1,q}(\Omega)$ désigne l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'$ qui sont des dérivées de fonctions de $L^q(\Omega)$, au sens des distributions. En d'autres termes, $g \in W^{-1,q}(\Omega)$ si et seulement si $\exists h = (h_1, \cdots, h_n) \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ tel que

$$g = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i \qquad \text{(au sens des distributions) } (\circledast)$$

On pose alors $||g||_{W^{-1,q}} = \inf\limits_{h \text{ verifiant } (\circledast)} ||h||_{L^q}$]

D'après la théorie elliptique du Laplacien, Δ est un isomorphisme de $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers $W^{-1,q}(\Omega)$, et donc Δ_0^{-1} est un isomorphisme de $W^{-1,q}(\Omega)$ vers $W_0^{1,q}(\Omega)$. On en déduit que $\forall v \in W^{1,q}(\Omega)$

$$\Delta_0^{-1}\left(\mathrm{div}\,(B(x)\nabla v)\right) \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

et

$$||\Delta_0^{-1}\left(\mathrm{div}\,(B(x)\nabla v)\right)||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon||\nabla v||_{L^q}$$

Ainsi

$$||Tv||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon||v||_{W^{1,q}(\Omega)}$$

L'opérateur T est donc une application linéaire continue de $W_0^{1,q}(\Omega)$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. De plus

$$||T|| \leq C\varepsilon \tag{2.12}$$

C Résolution de 2.11

Revenons à l'équation

$$(\mathrm{Id} - T)\, u = -\Delta_0^{-1} f$$

Posons $h = -\Delta_0^{-1} f$. Comme $f \in L^p(\Omega)$, on déduit de la partie 2.3 (Théorie du Laplacien) que $h \in W^{2,p}(\Omega)$, et donc par injection de Sobolev $W^{2,p} \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < p^*$ que $h \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec

$$||h||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C||h||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||f||_{L^p(\Omega)}$$

L'équation

$$(\mathrm{Id} - T)\, u = h$$

peut donc être analysée comme une équation dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, et il suffit de voir si $(\mathrm{Id} - T)$ est une application inversible de $W^{1,q}(\Omega)$ vers $W_0^{1,p}(\Omega)$. Rappelons le résultat classique suivant :

Lemme 2.4.1

Soit X un espace de Banach, et T une application linéaire continue de X vers X (i.e $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $||T|| < 1$, alors $(\mathrm{Id} - T)$ est inversible d'inverse continue et

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$$

⊠

Comme

$$||T|| \leq C\varepsilon$$

Si

$$C\varepsilon < 1$$

alors $(\mathrm{Id} - T)$ est inversible et

$$u = (\mathrm{Id} - T)^{-1} h$$

appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$ et est solution de notre problème inital. Ceci termine donc la preuve du théorème.

⊠

Commentaire

1. Lorsque la matrice $A(x)$ n'est pas proche, en norme uniforme, de l'identité (ou d'une constante), on peut néanmoins montrer qu'il existe un nombre $q > p$ dépendant de p, α_0 et α_1 tel que $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Il s'agit d'un résultat difficile, utilisant la technique des inégalités de Hölder inversées.
2. Lorsque $p \geq N$, alors sous les mêmes hypothèses on peut prendre tou $q < +\infty$ dans le théorème 2.4.1.

2.5 Méthodes de dualité

2.5.1 Cadre

Lorsque $p = 1$, la méthode précédente ne s'applique pas : dans ce cas $1^* = \dfrac{N}{N-1}$, et on peut montrer même pour le Laplacien qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tel que

$$\forall q < \frac{N}{N-1} \qquad -\Delta u = f$$

et $u \notin W^{1,\frac{N}{N-1}}(\Omega)$

Néanmoins nous allons voir que dans ce cas, on peut construire pour tout opérateur elliptique sous forme divergence, à coefficients bornés une solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, tel que $\forall 1 \leq q < \dfrac{N}{N-1}$

$$(I) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u(0) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le point le plus important dans la construction de telles solutions u est la majoration a priori suivante pour des solutions de régularité H^1

Théorème 2.5.1

Soit $L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla)$ un opérateur elliptique sous forme divergence, (i.e $A : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie (H1),(H2) et (H3)) sur Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) & = & f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u(0) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors pour tout $1 \leq r < \dfrac{N}{N-1}$, il existe une constante $C(N,r)$, ne dépendant que de N et r telle que

$$||u||_{W^{1,r}} \leq \frac{C(N,r)}{\alpha_0} |\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{r}-1} ||f||_{L^1(\Omega)}$$

$\boxtimes$

<u>Commentaire</u>

1. Nous insistons de nouveau sur le fait que le théorème 2.5.1 suppose l'exisence d'un tel u et d'un tel f (en général pour $f \in L^1(\Omega)$ le problème (I) n'a pas de solution dans $H_0^1(\Omega)$!
2. On vérifie que $C(N,r) \to +\infty$ lorsque $r \to \dfrac{N}{N-1}$, et la majoration n'a pas lieu pour $r = \dfrac{N}{N-1}$!
3. Nous verrons plus loin (cf théorème 2.5.2) commment l'estimation a priori permet de conclure à l'existence de solutions.

La démonstration du théorème 2.5.1 repose sur une méthode de dualité, qui fiat l'objet des prochains paragraphes.

2.5.2 Normes et dualité

Commençons par une remarque générale. Soit X un espace de Banach, X^* le dual topologique de X. On a

Lemme 2.5.1

Pour tout $u \in X$ on a

$$||u|| = \sup_{\substack{L \in X^* \\ ||L|| \leq 1}} \left| \langle L, u \rangle_{X^*, X} \right| \tag{2.13}$$

Pour une preuve, voir [**?**] (elle repose sur le théorème de Hahn-Banach)

⊠

L'égalité 2.13 premet de définir $||u||$ par le membre de droite. Par exemple, si $X = L^r(\Omega)$, avec $1 < r < +\infty$, alors $X^* = L^q(\Omega)$, où q est l'exposant conjugué de r défini par

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

et on a donc

$$||u||_{L^r}(\Omega) = \sup \left\{ \left| \int_\Omega ug \right|, \; g \in L^q(\Omega), \; ||g||_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

De même si $u \in W^{1,r}(\Omega)$ on a

$$||\nabla u||_{L^r}(\Omega) = \sup \left\{ \left| \int_\Omega \nabla u.h \right|, \; h = (h_1, \cdots, h_n) \in L^q(\Omega), \; ||h||_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

Dans cette expression

$$\int_\Omega \nabla u.h = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} h = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, h \right\rangle$$

En désignant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité pour les distributions, et ses diverses extensions par densité, on a donc

$$\int_\Omega \nabla u.h = -\langle u, \text{div } h \rangle \tag{2.14}$$

où div $h = \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \in W^{-1,q}(\Omega) \quad \left(= W^{1,q}(\Omega)\right)^*$. Donc pour $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$

$$||u||_{W_0^{1,r}(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^r(\Omega)} = \sup \left\{ |\langle u, \text{div } h \rangle|, \; h \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right), \; ||h||_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\} \tag{2.15}$$

2.5.3 Le problème dual

Considérons maintenant $u \in H_0^1(\Omega)$, l'opérateur $L : H_0^1 \hookrightarrow H_0^{-1}$ défini par

$$-Lu \equiv -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) \quad \in H_0^{-1}(\Omega)$$

Pour tout $\xi \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle -Lu, \xi \rangle &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) \\
&= \left\langle u, -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \langle u, -L\xi \rangle
\end{aligned}$$

i.e

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega) \quad \langle -Lu, \xi \rangle = \langle u, -L\xi \rangle \tag{2.16}$$

Pour $h \in L^q(\Omega)$, considérons alors le problème (dit problème dual) : Trouver $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(II) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla \xi) = -\mathrm{div}\ h = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

i.e

$$-L\xi = \mathrm{div}\ h \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Soit alors $u \in H_0^1(\Omega)$, $h \in L^q(\Omega)$. Si u vérifie (I) et si $\xi \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (II) on a

$$\begin{aligned}
\langle u, \mathrm{div}\ h \rangle &= \langle u, -L\xi \rangle = \langle -Lu, \xi \rangle \quad \text{par 2.16} \\
&= \langle f, \xi \rangle
\end{aligned}$$

En particulier, comme on suppose $f \in L^1(\Omega)$, pour majorer $\langle f, \xi \rangle$, il faut une majoration de ξ dans $L^\infty(\Omega)$. On a alors

$$|\langle u, \mathrm{div}\ h \rangle| \leq ||f||_{L^1(\Omega)} ||\xi||_{L^\infty(\Omega)}$$

Ces considération nous conduisent donc à rechercher des majorations a priori pour le problème dual en norme $L^\infty(\Omega)$

2.5.4 Étude du problème dual

Ici, on choisit comme dans l'énoncé de la proposition 2.5.1

$$1 < r < \frac{N}{N-1}$$

Si q est l'exposant conjugué de r, i.e tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, on a alors

$$q > N$$

Comme $N \geq 2$, et comme Ω est borné on a $L^q(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, et donc $\forall h \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$

$$\text{div } h \in H^{-1}(\Omega)$$

Il résulte alors du théorème de Lax-Milgram

Lemme 2.5.2

Soit $h = (h_1, \cdots, h_N) \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$. Il existe un unique $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\text{div } \left(A(x)\nabla\xi\right) = -\text{div } h \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.17}$$

i.e $\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega h_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \tag{2.18}$$

⊠

<u>Remarque</u> Si $L = -\Delta$, alors la théorie du Lapalcien (cf partie 2.3) montre que $\xi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, et que

$$||\xi||_{W^{1,q}} \leq C||h||_{L^q(\Omega)}$$

Comme $q > N$, et que Ω est borné, on a alors $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, et donc

$$||\xi||_{L^\infty} \leq C||h||_{L^q(\Omega)} \tag{2.19}$$

Nous allons voir dans ce qui suit qu'une telle majoration reste valide pour des opérateurs elliptiques L généraux : de plus, on peut explicier la constante en fonction de Ω

Proposition 2.5.1

Soit $\xi \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème 2.17. On a alors

$$\sup_{x \in \Omega} |\xi(x)| = ||\xi||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C(N,q)}{\alpha_0} |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q}} ||h||_{L^q(\Omega)}$$

où la constante $C(N,q)$ ne dépend que de N et q.

⊠

Preuve

Pour $k \in \mathbb{R}^+$ on considère la fonction test

$$\varphi = (\xi - k)^+$$

Comme $\xi \in H_0^1(\Omega)$, et $k \geq 0$, on voit que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, et

$$\begin{cases} \nabla\varphi &= \nabla\xi & \text{si } \xi(x) \geq k \\ \nabla\varphi &= 0 & \text{si } \xi(x) \leq k \end{cases}$$

[Comme $\xi = 0$, $\xi - k \leq 0$ sur $\partial\Omega$, et donc $(\xi - k)^+ = 0$ sur $\partial\Omega$. Ceci montre que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$]

On peut donc prendre φ comme fonction test dans 2.18, ce qui donne

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \frac{\partial(\xi - k)^+}{\partial x_j} = \int_\Omega h.\nabla(\xi - k)^+$$

i.e

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial(\xi - k)^+}{\partial x_i} \frac{\partial(\xi - k)^+}{\partial x_j} = \int_\Omega h.\nabla(\xi - k)^+$$

Comme $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est elliptique de constantes $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$. On a

$$\alpha_0|\nabla(\xi - k)^+|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial(\xi - k)^+}{\partial x_i} \frac{\partial(\xi - k)^+}{\partial x_j}$$

d'où l'on déduit

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla(\xi - k)^+|^2 \leq \int_\Omega h.\nabla(\xi - k)^+ \leq \int_\Omega |h|.|\nabla(\xi - k)^+| \tag{2.20}$$

Considérons l'ensemble

$$\Omega_k = \{x \in \Omega,\ \xi(x) \geq k\}$$

et posons

$$\mu(k) = |\Omega_k| \quad (\text{ mesure de } \Omega_k)$$

On a $\nabla(\xi - k)^+ = 0$ sur $\Omega \backslash \Omega_k$ de sorte que 2.20 devient

$$\alpha_0 \int_{\Omega_k} |\nabla(\xi - k)^+|^2 \leq \int_{\Omega_k} |h|.|\nabla(\xi - k)^+| \leq \left(\int_{\Omega_k} |h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_k} |\nabla(\xi - k)^+|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi

$$\alpha_0||\nabla(\xi - k)^+||_{L^2(\Omega_k)} \leq ||h||_{L^2(\Omega_k)} \tag{2.21}$$

Pour majorer le membre de droite de cette inégalité, utilisons l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega_k} |h|^2 \leq \left(\int_{\Omega_k} |h^2|^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_{\Omega_k} 1\right)^{1-\frac{2}{q}}$$

i.e

$$||h||_{L^2(\Omega_k)} \leq \left(\int_{\Omega_k} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq ||h||_{L^q(\Omega)} |\Omega_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$$

2.21 donne alors

$$\alpha_0 ||\nabla(\xi - k)^+||_{L^2(\Omega_k)} \leq ||h||_{L^q(\Omega)} |\Omega_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \tag{2.22}$$

On peut prolonger $(\xi - k)^+$ par 0 en dehors de Ω_k de sorte que $(\xi - k)^+ \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Rappelons que pour toute fonction w de $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, on a l'inégalité de Sobolev critique, pour $N \geq 3$

$$S||w||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq ||\nabla w||_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

où S est une constante qui ne dépend que de N [**?**] et $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Appliquons cette inégalité à la fonction $(\xi - k)^+$ (dans le cas $N \geq 3$, nous ne traiterons pas le cas $N = 2$, mais on peut le faire avec des idées similaires). On a

$$S||(\xi - k)^+||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq ||\nabla(\xi - k)^+||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{2.23}$$

et par l'inégalité de Hölder

$$||(\xi - k)^+||_{L^1(\Omega_k)} \leq \left(\int_{\Omega_k} (\xi - k)_+{}^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\Omega_k} 1 \right)^{1-\frac{1}{2^*}} \tag{2.24}$$

Soit

$$||(\xi - k)^+||_{L^1(\Omega_k)} \leq ||(\xi - k)^+||_{L^{2^*}(\Omega_k)} \, |\Omega_k|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}} \tag{2.25}$$

En combinant 2.22, 2.22 et 2.25 on obtient

$$\alpha_0 S \int_{\Omega_k} (\xi - k)^+ \leq ||h||_{L^q(\Omega)} \, |\Omega_k|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}+1} \tag{2.26}$$

Nous allons voir que 2.26 permet de déduire la majoration de la proposition 2.5.1, grâce aux résultat suivant de la théorie de la mesure.

Lemme 2.5.3

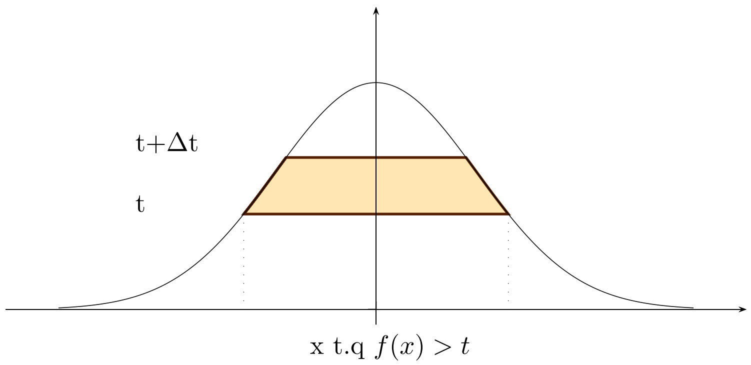
Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction positice mesurable sur Ω. Pour tout $t \geq 0$ on pose

$$\nu(t) = \{x \in \Omega, \ f(x) \geq t\}$$

On a alors

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_0^{+\infty} \nu(t)dt = \int_0^{+\infty} |x \in \Omega,\ f(x) \geq t|\, dt \tag{2.27}$$

Commentaire Pour se convaincre de cette égalité, le plus simple est probablement de regarder un dessin.



L'aire de la partie colorée vaut $|x \in \Omega,\ f(x) > t| \times \Delta t$. Une preuve "rigoureuse" peut-être obtenue de deux manières.

- En utilisant le théorème de Fubini sur le domaine $\Omega \times [0, +\infty[$ et en intégrant χ la fonction caractéristique du domaine sous la courbe, i.e $\{(x,t) \in \Omega \times [0, +\infty[,\ 0 \leq t \leq f(x)\}$
- En démontrant le résultat pour des fonctions en escalier, puie en utilisant un résultat de densité.

Revenons à l'inégalité 2.26, et à notre problème initial. Nous appliquons l'égalité 2.27 à la fonction $(\xi - k)^+$ sur Ω_k. On a donc

$$\int_{\Omega_k} (\xi - k)^+ = \int_0^{+\infty} |\{x \in \Omega,\ \xi \geq t + k\}|\, dt$$

Effectuons un changement de variable dans l'intégrale de droite.

$$s = t + k \quad \text{i.e} \ \ t = s - k$$

Il vient

$$\int_{\Omega_k} (\xi - k)^+ = \int_k^{+\infty} |\{x \in \Omega,\ \xi(s) \geq s\}|\, ds$$

$$\int_{\Omega_k} (\xi - k)^+ = \int_k^{+\infty} |\Omega_k|\, ds = \int_k^{+\infty} \mu(s)ds$$

où, rappelons le

$$\mu(s) = |\{x \in \Omega,\ \xi(s) \geq s\}|$$

Introduisons alors, pour $k \in \mathbb{R}^+$

$$H(k) = \int_{\Omega_k} (\xi - k)^+$$

de sorte que $H(k) \geq 0, \forall k$. On a donc

$$\forall k \geq 0 \quad H(k) = \int_k^{+\infty} \mu(s)ds \tag{2.28}$$

et donc

$$\forall k \geq 0 \quad H'(k) = -\mu(k) \tag{2.29}$$

(noter $\mu \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^0\right) \Rightarrow H \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^0\right)$)

Nous pouvons maintenant interpréter 2.26 comme une inégalité différentielle

$$\alpha_0 SH(k) \leq -||h||_{L^q(\Omega)} \left[H'(k)\right]^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}+1}$$

$$\forall k \in \mathbb{R}^+ \quad H'(k) \leq -\left[\frac{H(k)}{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{2.30}$$

où on a posé

$$\begin{cases} \gamma &= \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{q} + 1 \\ \beta &= \dfrac{1}{\alpha_0 S}||h||_{L^q(\Omega)} \end{cases}$$

On étudie alors l'inégalité 2.30. Comme nous l'avons indiqué, la fonction μ est continue (par des résultats généraux de la théorie de la mesure). L'égalité 2.28 montre donc que H est de classe $\mathcal{C}^1$, et par 2.29 nous en déduisons que la fonction H est décroissante. Posons

$$k_0 = \sup\left\{k \in \mathbb{R}^+,\ H(k) > 0\right\}$$

de sorte que si $k < k_0,\ H(k) > 0$ et si $k \geq k_0,\ H(k) = 0$. 5à ce niveau de l'analyse, on ne peut bien entendu pas exclure l'éventualité $k = +\infty$). Remarquons enfin que

$$\sup_{x\in\Omega} \xi(x) \leq k_0 \tag{2.31}$$

En effet $H(k_0) = 0$ implique

$$\int_\Omega (\xi - k_0)^+ = 0$$

et donc $(\xi - k_0) \leq 0$ pour presque tout x, i.e

$$\xi(x) \leq k_0, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

Lorsque $k \leq k_0$ on peut diviser 2.30 par $H(k)^{\frac{1}{\gamma}} > 0$, et on obtient

$$\frac{H'(k)}{H(k)^{\frac{1}{\gamma}}} \leq -\left[\frac{1}{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall k < k_0$$

i.e

$$\frac{d}{dk}\left[H(k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] \leq -\left[\frac{1}{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma-1}{\gamma}, \quad \forall k < k_0$$

Intégrons cette équation entre 0 et k. Il vient

$$H(k_0)^{1-\frac{1}{\gamma}} - H(0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq -\int_0^{k_0}\left[\frac{1}{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma-1}{\gamma} = -k_0\left[\frac{1}{\beta}\right]^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Comme $H(k_0) = 0$, il en résulte

$$k_0 \leq H(0)^{1-\frac{1}{\gamma}}\beta^{\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma-1} \tag{2.32}$$

L'inégalité 2.32 montre que k_0 (et donc $\sup\limits_{x\in\Omega}\xi(x)$ par 2.31) est borné (i.e $\neq +\infty$). Dans la relation 2.32 nous pouvons obtenir une majoration explicite de $H(0)$ grâce à 2.26

$$\alpha_0 S H(0) \leq ||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}+1} = ||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\gamma} \tag{2.33}$$

Ainsi

$$k_0 \leq \frac{1}{\alpha_0 S}\frac{\gamma}{\gamma-1}||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\gamma-1}$$

Soit

$$k_0 \leq \frac{1}{\alpha_0 S}\frac{\gamma}{\gamma-1}||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}}$$

par 2.31 il résulte donc

$$\sup_{x\in\Omega}\xi(x) \leq C(N,q)||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}} \tag{2.34}$$

où

$$C(N,q) = \frac{1}{\alpha_0 S}\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

En considérant la fonction $-\xi$ on démontre de même

$$\sup_{x\in\Omega} -\xi(x) = \inf_{x\in\Omega}\xi(x) \leq C(N,q)||h||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}}$$

ce qui permet d'établir la proposition 2.5.1

2.5.5 Preuve du Théorème 2.5.1

On reprend l'argument de dualité développé dans la section 2.5.2. Pour $r < \dfrac{N}{N-1}$, soit q son exposant conjugué, $q = \dfrac{r}{r-1}$ de sorte que $q > N$. Pour $h \in L^q(\Omega)$, considérons la solution $\xi \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla\xi) = -\mathrm{div}\,h \quad \text{ sur } \Omega$$

donnée par le lemme 2.5.2, i.e telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \int_\Omega h.\nabla v \tag{2.35}$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f.\varphi \tag{2.36}$$

[raisonner par densité]

Par la proposition 2.5.1 nous avons vu que $\xi \in L^\infty(\Omega)$. On peut donc prendre $v = u$ dans 2.35 et $\varphi = \xi$ dans 2.36. Ceci donne

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} & = \int_\Omega h.\nabla v \\ \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} & = \int_\Omega f.\xi \end{cases}$$

et donc

$$\int_\Omega h.\nabla v = \int_\Omega f.\xi$$

Il en résulte

$$\left| \int_\Omega h.\nabla v \right| \leq ||f||_{L^1(\Omega)} ||\xi||_{L^\infty(\Omega)}$$

et donc par le résultat de la proposition 2.5.1

$$\left| \int_\Omega h.\nabla v \right| \leq C(N,q)\, |\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}}\, ||f||_{L^1(\Omega)} ||h||_{L^q(\Omega)} \quad \forall h \in L^q\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right)$$

Ceci montre donc (cf Section 2.5.1)

$$||\nabla v||_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C(N,q)\, |\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}}\, ||f||_{L^1(\Omega)}$$

et termine la preuve du théorème 2.5.1

$\boxtimes$

2.5.6 Résultats d'existence

Dans cette partie, nous allons voir comment l'estimation a priori du Théorème 2.5.1, valable pour des solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ permet de conclure à l'existence, pour tout $f \in L^1(\Omega)$, de solutions $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $(0 < r < \dfrac{N}{N-1} \leq 2)$ qui en général n'appartiennent pas à $H_0^1(\Omega)$.

La méthode est générale et s'applique à de nombreux problèmes. Elle consiste à approcher la donnée f par des données plus régulières pour lesquelles on connait l'existence de solutions qui ont la régularité souhaitée (ici H^1), et pour lesquelles on peut utiliser la majoration a priori. Ensuite on passe à la limite.

Nous avons

Théorème 2.52

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il existe alors une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $u \in W_0^{1,r}(\Omega), \forall 1 < r < \dfrac{N}{N-1}$, et qui vérifie

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

i.e $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f.\varphi \tag{2.37}$$

De plus on a la majoration $\forall r \in \left[1, \dfrac{N}{N-1}\right[$,

$$||\nabla u||_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{q}}\,||f||_{L^1(\Omega)}$$

où $C(N,r)$ est la constante du théorème 2.5.1

$\boxtimes$

Preuve

On commence par approcher f par une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$f_n \to f \quad \text{dans } L^1(\Omega) \tag{2.38}$$

Comme $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (et donc $f_n \in L^2(\Omega)$) , par le théorème de Lax-Milgram, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u_n) = f_n \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.39}$$

Comme $u_n \in H_0^1(\Omega)$, on peut utiliser la majoration du théorème 2.5.1. On a donc, $\forall 1 \leq r < \dfrac{N}{N-1}$

$$||\nabla u_n||_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{r}-1}\,||f_n||_{L^1(\Omega)}$$

Comme

$$||f_n||_{L^1(\Omega)} \to ||f||_{L^1(\Omega)}$$

On voit que $\forall 1 \leq r < \dfrac{N}{N-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$. Pour $1 \leq r < \dfrac{N}{N-1}$, $W_0^{1,r}(\Omega)$ est réflexif, donc il existe un sous-espace $u_{\sigma(n)}$ tel que $u_{\sigma(n)}$ converge vers un élément $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ faiblement

$$u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,r}(\Omega) \tag{2.40}$$

Par semi-continuité inférieure, on a

$$||\nabla u||_{L^r(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} ||\nabla u_{\sigma(n)}||_{L^r(\Omega)}$$

et donc

$$||\nabla u||_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\,|\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{r}-1}\,||f||_{L^1(\Omega)}$$

On vérifie alors que u est bien solution de l'équation. Par 2.39, on a $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f_n.\varphi \tag{2.41}$$

Par 2.40 on a $\forall i$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{dans } L^r(\Omega)$$

et donc

$$\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \to \int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

par convergence faible. De même par 2.38

$$\int_\Omega f_n.\varphi \to \int_\Omega f.\varphi$$

l'égalité 2.40 donne donc

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f.\varphi$$

i.e

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

Pour terminer la preuve, il suffit alors de vérifier que la limite u ne dépend pas de r. A cet effet, on utilise un argument d'unicité de limite, et on montre que toute la suite u_n converge faiblement vers u

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } W_0^{1,r}(\Omega)$$

[exercice]

<u>Commentaire</u> Notons que la méthode ne nous permet pas de conclure à l'unicité des solutions (qui revient à montrer que l'unique solution $W_0^{1,r}(\Omega)$ de l'équation $\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = O$ est $u = 0$)

Chapitre 3

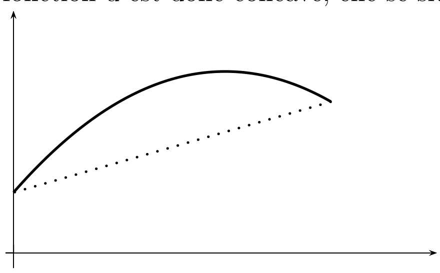
Le principe du maximum

3.1 Introduction

Considérons tout d'abord la situation suivante en dimension 1. Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$-u'' \geq 0$$

La fonction u est donc concave, elle se situe "au-dessus" de ses corde (voir figure)



Il en résulte en particulier que

$$u(x) \geq \inf\{u(0), u(1)\}$$

i.e

$$\inf_{x\in I} u(x) \geq \inf_{x\in\partial I} u(x) \quad I = [0,1]$$

Nous allons étendre ce type de résultat, connu sous le nom de PRINCIPE DU MAXIMUM, à diverses situations impliquant des opérateurs elliptiques d'ordre 2, en dimension N quelconque.

Le principe du maximum est un outil extrêmemen utile pour obtenir des majorations a priori de solutions d'équations linéaires ou non linéaires elliptiques du deuxième ordre.

Nous verrons successivement :

— La forme "classique" du principe du maximum, qui s'applique à des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc assez régulières, et des opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence.

— Son extension a des solutions "faibles" et des opérateurs sous forme divergence.

Notons que le principe du maximum est une propriété typique des opérateurs elliptiques d'ordre 2. (Il ne s'applique pas, par exemple, au bilaplacien, qui est d'ordre 4). En revenche, il existe également un principe du maximum pour les équations hyperboliques.

3.2 Formes classiques du principe du maximum

Nous commençons, pour fixer les idées par étudier le principe du maximum pour $L = -\Delta$, le laplacien.

3.2.1 Le laplacien

Soit Ω une domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On a

Théorème 3.2.1

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$. On suppose que

$$(H1) \quad -\Delta u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Alors

$$\inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x) \tag{3.1}$$

En particulier, si $u(x) \geq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$, alors

$$u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{3.2}$$

⊠

Remarque

1. Bien entendu si $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$, en considérant $-u$, on déduit de 3.1 qu'alors

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

2. En particulier si $\Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega$, on obtient

$$\inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y), \quad \forall x \in \Omega$$

Preuve du théorème 3.2.1

Nous allons commencer par donner la preuve dans le cas où la fonction u vérifie l'hypothèse plus forte (inégalité stricte !)

$$(H2) \quad -\Delta u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Ensuite par un argument d'approximation nous en déduirons la preuve dans le cas général.

A Preue de 3.1 lorsque u vérifie $(H2)$

Comme $\overline{\Omega}$ est fermé borné et qu'on y a supposé u continue, il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$$

i.e

$$u(x_0) \leq u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Nous avons alors l'alternative suivante.

— $x_0 \in \partial\Omega$ Alors 3.1 est automatiquement vérifiée.

— $x_0 \in \Omega$ On peut alors écrire le sconditions de minimalité du premier (3.3) et du deuxième (3.4) ordre pour un minimum intérieur,

$$\nabla u(x_0) = 0, \text{ i.e } \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0), \ \forall i \in \{1, \cdots, N\} \tag{3.3}$$

$$\text{Hess } u(x_0) \geq 0, \text{ et en particulier } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq 0, \ \forall i \in \{1, \cdots, N\} \tag{3.4}$$

[Rappelons que Hess $u(x)$ représente la Hessienne de u, i.e

$$\text{Hess } u(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq N}$$

elle est donc symétrique par le lemme de Schwartz. La condition du deuxième ordre 3.4 signifie qu'elle est positive en un point de minimum intérieur.]

Comme

$$\Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

on déduit donc de 3.4 qu

$$\Delta u(x_0) \geq 0$$

ce qui contredit $(H2)$. L'alternative 2. est donc exclue, ce qui établit 3.1 sous l'hypothèse $(H2)$.

B Cés général, Preuve de 3.1 lorsque u vérifie $(H1)$

On utilise un argument perturbatif. L'idée est de construire une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_0\left(\overline{\Omega}\right)$ qui vérifie $(H2)$

$$-\Delta\varphi > 0 \quad \text{ sur } \Omega$$

Ensuite pour $\varepsilon > 0$ on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$ de sorte que u_ε vérifie $(H2)$. On applique alors la partie A, puis on fait tendre ε vers 0 pour conclure.

1. Construction de φ Soit x_1 la première coordonnée de $\mathbb{R}^N$. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, \cdots, x_N) \equiv \exp x_1, \ \forall x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

On a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \exp x_1 \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0, \text{ si } i \neq 1$$

donc

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = -\exp x_1 > 0, \ \forall x \in \Omega$$

2. Étude de u_ε Posons $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, pour $\varepsilon > 0$. Comme $-\Delta\varphi > 0$, et par hypothèse $-\Delta u \geq 0$, on a

$$-\Delta u_\varepsilon > 0, \quad \text{sur } \Omega, \ \forall \varepsilon > 0$$

i.e u_ε vérifie $(H2)$ donc

$$\inf_{x\in\Omega} u_\varepsilon(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

Comme $u_\varepsilon \to u$ uniformément, on en déduit 3.1.

⊠

3.2.2 Opérateurs avec terme d'orde 1

Le résultat précédent peut se généraliser aux opérateurs du type

$$L = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

où les fonctions $a_{i,j}$ définies sur $\overline{\Omega}$ sont continues et vérifient

$$\forall x, \ \forall i, j, \ a_{i,j} = a_{j,i}$$

et telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, α_1 tels que $\forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^N$

$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j}^{N} a_{i,j} \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2$$

i.e $A(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ est elliptique. On a alors

Théorème 3.2.2

Soit $A(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ comme ci-dessus, et b une fonction continue de $\overline{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_0\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

$$(H1 \text{ bis}) - Lu(x) + b.\nabla u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

i.e

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall x \in \Omega$$

Alors

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

⊠

Preuve

Elle est similaire à celle du théorème 3.2.1. On commence par démontrer 3.1 sous l'hypothèse plus forte

$$(H2 \text{ bis}) - Lu(x) + b.\nabla u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

A Preuve de 3.1 lorsque u vérifie ($H2$ bis) Soit $x_0 \in \Omega$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$$

Si $x_0 \in \partial\Omega$ la propriété est vérifiée. Sinon $x \in \Omega$, et la condition du 1^{er} ordre donne $\nabla u(x_0) = 0$, i.e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ et donc

$$b.\nabla u(x_0) = 0 \tag{3.5}$$

La condition du deuxième ordre donne

$$\text{Hess } u(x_0) \geq 0 \quad (\text{ au sens des matrices symétriques}) \tag{3.6}$$

Soit $(e_1, \cdots, e_N)$ une base orthogonale dans laquelle la matrice $(a_{i,j}(x_0))_{1 \leq i,j \leq N}$ soit diagonale de la forme diag $(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ où $\lambda_i \geq \alpha_0, \forall i \in \{1, \cdots, N\}$. Dans cette base, soit $(x_1, \cdots, x_N)$ les coordonnées cartésiennes associées. On a alors

$$Lu(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

et donc

$$Lu(x_0) \geq 0 \tag{3.7}$$

par 3.5. Ainsi en combinant 3.5 et 3.7, on obtient

$$-Lu(x_0) + b.\nabla u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit ($H2$ bis). Il en résulte que l'hypothèse $x_0 \in \Omega$ est à exclure et donc $x_0 \in \partial\Omega$. Ceci donne donc 3.1.

B Cas général : u vérifie ($H1$ bis) Comme dans la preuve du théorème 3.2.1 on construit φ tel que

$$-L\varphi + b.\nabla\varphi > 0, \quad \text{sur } \Omega \tag{3.8}$$

A cet effet, introduisons $\mu > 0$ et considérons

$$\psi_\mu = -\exp(\mu x_1)$$

On a alors

$$-L\psi_\mu = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \exp(\mu x_1) = \mu^2 a_{11} \exp(\mu x_1)$$

de même

$$b.\nabla\psi_\mu = b_1 \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_1} = -\mu b_1 \exp(\mu x_1)$$

et donc

$$-L\psi_\mu + b.\nabla\psi_\mu = (\mu^2 a_{11} - \mu b_1)\exp(\mu x_1)$$

L'hypothèse d'ellipticité donne $a_{11} > \alpha_0$. Donc

$$\mu^2 a_{11} - \mu b_1 \geq \mu^2\alpha_0 - \mu||b||_{L^\infty} = \mu(\mu\alpha_0 - ||b||_{L^\infty})$$

de sorte que si $\mu > \mu_0 = \dfrac{||b||_{L^\infty}}{\alpha_0}$, on a

$$-L\psi_{\mu_0} + b.\nabla\psi_{\mu_0} > 0$$

On choisit donc $\varphi = \psi_\mu$ pour $\mu > \mu_0$ de sorte que φ vérifie 3.8.
On pose ensuite $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, et on conclut comme dans la preuve du théorème 3.2.1

⊠

3.2.3 Opérateurs avec termes d'ordre 0 et d'ordre 1

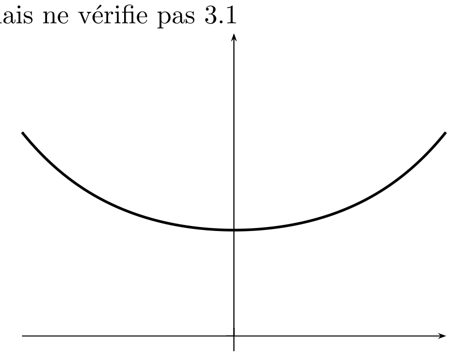
Le résultat ne s'étend pas au cas d'opérateurs avec des termes d'ordre 0, i.e du type

$$Lu + b.\nabla u + cu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u(x) + b.\nabla u(x) + c(x)u(x)$$

Pour s'en convaincre, considérons le cas $N = 1$, $I =]-1, 1[$, et enfin l'opérateur $-u'' + u$.
La fonction $u(x) = \exp(-x) + \exp(x)$ vérifie

$$-u'' + u = 0$$

mais ne vérifie pas 3.1



En revenche, la conclusion 3.2 reste vraie, comme nous allons le voir dans le résultat suivant.

Théorème 3.2.3

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On fait les même hypothèses sur A et b que dans le théorème 3.2.2. Soit c une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, supposée positive, i.e telle que

$$c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Soit alors $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_0\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

$$-Lu + b.\nabla u + cu \geq 0, \qquad \text{sur } \Omega$$

i.e

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + b.\nabla u(x) + c(x)u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Si, de plus $u(x) \geq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$, alors

$$u(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega$$

⊠

Preuve

On commence par démontrer le résultat sous l'hypothèse plus forte :

$$(H2 \text{ ter}) - Lu(x) + b.\nabla u(x) + cu > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

A Preuve de 3.2 lorsque u vérifie $(H2 \text{ ter})$. On raisonne par l'absurde, et on suppose que $\exists x \in \Omega$ tel que

$$u(x) < 0 \tag{3.9}$$

En particulier,

$$u(x_0) = \inf_{x \in \overline{\Omega}} u(x) < 0 \tag{3.10}$$

et donc x_0, le minimum, appartient à Ω (car $u(x) \geq 0$ sur $\partial\Omega$).
Comme dans la preuve du théorème 3.2.2, on a

$$-Lu(x_0) + b.\nabla u(x_0) \leq 0$$

Comme $c \geq 0$, par l'hypothèse 3.9, on en déduit que

$$c(x_0)u(x_0) \leq 0$$

Donc

$$-Lu(x_0) + b.\nabla u(x_0) + c(x0)u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit $(H2 \text{ ter})$. L'hypothèse 3.9 est donc fausse, et 3.2 est vérifiée.

B Preuve dans le cas général On construit comme pour les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 une fonction φ telle que

$$-L\varphi + b.\nabla\varphi + c\varphi > 0 \ \text{ dans } \Omega, \quad \varphi \geq 0 \ \text{ sur } \partial\Omega$$

(exercice). Ensuite on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$ et on conclut par la partie A que

$$u_\varepsilon \geq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

puis on fait tendre ε vers 0.

⊠

3.3 Opérateurs sous forme divergence

Dans cette partie, on considère pour Ω domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ un opérateur elliptique du 2^e ordre sous forme divergence, i.e

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) \equiv \mathrm{div}\,(A(x)\nabla u)$$

où les coefficients $a_{i,j}$ sont des fonctions bornées sur Ω telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, et $\alpha_1 > 0$ vérifiant

$$\alpha_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.11}$$

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x), \quad \forall x \in \Omega,\ \forall i, j \tag{3.12}$$

On a alors

Théorème 3.3.1

Soit $A(x) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ vérifiant 3.11, 3.12. Soit $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) \geq 0, \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.13}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \text{t.q } \varphi \geq 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.14}$$

Alors

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

⊠

Remarque

1. Un résultat de la théorie des distributions affirme que toute distribution positive est une mesure (positive). Il en résulte que

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = \mu$$

μ mesure positive sur Ω

2. On montre que les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ positives sont denses dans $\left\{u \in H_0^1(\Omega),\ u \geq 0\right\}$. 3.14 est donc équivalent à

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{t.q } v \geq 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.15}$$

Preuve du théorème 3.3.1

On utilise une méthode de troncature. Posons

$$K = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

On supposera $-\infty < K < +\infty$, sinon $K = -\infty$ implique par le théorème de Trace que $\inf_{x\in\Omega} u(x) = -\infty$. Considérons alors la fonction

$$w = -(u-K)^-$$

de sorte que $w \geq 0$, et $w = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc $w \in H_0^1(\Omega)$. On peut donc utiliser w comme fonction test dans 3.15. Il en résulte

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(u-K)^-}{\partial x_j} \geq 0$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial(u-K)^-}{\partial x_i}\frac{\partial(u-K)^-}{\partial x_j} \leq 0$$

et par 3.12 on a donc

$$\alpha_0\int_\Omega \left|\nabla(u-K)^-\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial(u-K)^-}{\partial x_i}\frac{\partial(u-K)^-}{\partial x_j} \leq 0$$

Ainsi

$$\int_\Omega \left|\nabla(u-K)^-\right|^2 = 0$$

et donc

$$(u-K)^- = 0$$

Ceci signifie $u(x) \geq K$ sur Ω et la conlusion en découle.

$\boxtimes$

On a également

Théorème 3.3.2

Soit A comme dans le théorème 3.3.1 et c une fonction de $L^\infty(\Omega)$ telle que

$$c(x) \geq 0$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) + cu \geq 0, \qquad \text{dans } \Omega$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + cu\varphi \geq 0, \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\,, \quad \text{t.q } \varphi \geq 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.16}$$

et

$$u(x) \geq 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega \tag{3.17}$$

Alors

$$u(x) \geq 0, \quad \forall x\in\Omega \tag{3.18}$$

⊠

Preuve

Par densité 3.16 est équivalent à

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+cuv\geq 0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)\,,\quad \text{t.q } v\geq 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.19}$$

Prenons alors

$$v=-u^-$$

de sorte que $v=-\inf(u,0)\geq 0$ sur Ω. Comme $u\geq 0$ sur $\partial\Omega$, $u^-=0$ sur $\partial\Omega$ et donc $v\in H_0^1(\Omega)$. Par 3.19 on a alors

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u^-}{\partial x_j}+cuu^-\geq 0$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{i,j}\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\frac{\partial u^-}{\partial x_j}+c|u^-|^2\leq 0$$

et par ellipticité

$$\int_{\Omega}\alpha_0\left|\nabla(u^-)\right|^2+c|u^-|^2\leq 0 \tag{3.20}$$

Comme $c\geq 0$, $u^-=0$ et donc $u\geq 0$ sur Ω

⊠

Remarques

1. Si c n'est pas positive, la conclusion du théorème peut être contredite. Par exemple pour $N=1$, $\Omega=]0,1[$, $L=u''$, et $c=-k^2\pi^2$. Alors pour $u=\sin k\pi x$, on a

$$\begin{cases} -u''+cu=0\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

mais u change de signe sur Ω

2. Néanmoins, pour un domaine Ω donné, la condition

$$c(x)\geq 0$$

peut-être affaiblie par la condition

$$c(x)>-\lambda_1 \tag{3.21}$$

où

$$\lambda_1=\inf\left\{\int_{\Omega}|\nabla v|^2,\ v\in H_0^1(\Omega)\,,\ ||v||_{L^2(\Omega)}=1\right\}$$

En effet, par définition de λ_1, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lambda_1 \int_\Omega |v|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2$$

En retournant à 3.20, on voit que 3.20 implique sous l'hypothèse 3.21 $u^- = 0$ et donc $u \geq 0$ sur Ω

3.4 Principe du maximum fort

Pour le laplacien, nous avons le résultat suivant, que nous admettrons, et qui permet de conclure à une positivité stricte.

Théorème 3.4.1

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

$$f \geq 0, \quad \text{sur } \Omega, \; f \neq 0$$

(en particulier $\exists x_0$ tel que $f(x_0) > 0$). Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors,

$$u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

et de plus,

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$

$\boxtimes$

Chapitre 4

Méthodes Hilbertiennes : Théorie de Riesz-Fredholm, Théorie Spectrale

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, de nombreux problèmes peuvent s'écrire

$$Au = f \tag{4.1}$$

où A est une application linéaire continue d'un espace de Banach X vers un espace de Banach Y. La question est alors de savoir si $f \in \text{Im } A$, ou plus généralement de savoir si A est un isomorphisme.

En dimension finie, le théorème noyau-image permet de décrire entièrement la situation. Rappelons que si A est linéaire de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^N$ alors

$$A \text{ injectif } \Leftrightarrow \text{ Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow A \text{ bijectif}$$

et de manière générale

$$\dim \text{ Ker } A + \dim \text{ Im } A = N \quad (\text{ théorème noyau-image })$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\dim \text{ Ker } A = \text{ codim Im } A \tag{4.2}$$

où on a posé pour V s.e.v de $\mathbb{R}^N$

$$\text{codim } V = \dim V^{\perp} = N - \dim A$$

Nous allons voir que 4.2 reste vrai, dans le cadre des espaces de Hilbert, pour des opérateurs très particuliers, les perturbations compactes de l'identité de la forme

$$T = \text{Id} + A$$

avec T compact. Cette propriété sera alors très utile pour étudier le problème 4.1.

4.2 Opérateurs compacts

Soit X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ une application linéaire continue de X vers Y.

Définition 4.2.1

On dit que A est compacte si et seulement si $\overline{A(B_X)}$ est compacte dans Y.

[Ici B_X désigne la boule unité de X, i.e $B_X = \{u \in X, ||u|| < 1\}$.]

On a alors la caractérisation suivante des opérateurs compacts.

Proposition 5.2.1

On suppose que X est réflexif, i.e $X^{**} = X$. Alors $A : X \to Y$ est compacte si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, on a

$$u_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Au_n \to 0 \text{ fort dans } Y$$

⊠

Exemples Si Ω est un borné de $\mathbb{R}^N$, l'injection (de Rellich)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

est compacte. De manière générale, pour $q < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, l'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compacte.

En revenche, l'injection $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ est continue, mais pas compacte (exercice).

Proposition 5.2.2

(compacité et ajonction)

Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. Alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que

$$\forall L \in F^*,\ \langle L, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*L, u\rangle_{E^*,E}$$

Si A est compact, alors A^* est compact.

⊠

4.3 Théorème de Riesz-Fredholm

Nous nous plaçons ici dans le cas où

$$X = Y = H, \quad H \text{ espace de Hilbert}$$

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ (i.e $A : H \to H$ continu). On suppose que A est compact et on pose

$$T = \text{Id } + A$$

i.e $T \in \mathcal{L}(H)$. Une telle application est appelée une perturbation compacte de l'identité. On a alors le résultat suivant.

4.3.1 Théorème de Riesz-Fredholm

Théorème 4.3.1

T a les propriétés suivantes.

1. Le noyau de T est de dimension finie
2. L'image de T est fermée, sa codimension (c'est-à-dire la dimension de $(\text{Im } T)^{\perp}$) est égale à la dimension du noyau, i.e

$$\dim\,(\text{Ker } T) = \text{codim}\,(\text{Im } T)$$

   En particulier, si Ker $T = \{0\}$, alors Im $T = H$
3. La restriction S de T à $(\text{Ker } T)^{\perp}$ est une application bijective et bicontinue de $(\text{Ker } T)^{\perp}$ vers Im T
   En particulier, si Ker $T = \{0\}$, T est un isomorphisme.

⊠

Décrivons brièvement la preuve.

Preuve

A Démontrons 1.
Si Ker T était de dimension infinie, il contiendrait une suite orthonormée infinie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H$$

et par la proposition 5.2.1 on a donc

$$Ae_n \to 0 \quad \text{fortement dans } H$$

Or $e_n \in$ Ker T, i.e

$$Ae_n = -e_n$$

On aurait donc $e_n \to 0$ ce qui est impossible car $||e_n|| = 1$

B Démontrons 3.

Soit S la restriction de T à (Ker $T)^{\perp}$. Comme Ker $T \cap$ (Ker $T)^{\perp} = \{0\}$ on a

$$\text{Ker } S = \{0\}$$

et donc S est injectif. S est donc une bijection de (Ker $T)^{\perp}$ sur Im T. Montrons que son inverse est continue. Raisonnons à cet effet par l'absurde et supposons que S^{-1} n'est pas continue. Il existerait alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Im T telle que, $||y_n|| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ et telle que $x_n = S^{-1}y_n$ (i.e $Tx_n = y_n$) vérifie alors

$$||x_n|| \to +\infty$$

Posons alors

$$x'_n = \frac{x_n}{||x_n||} = S^{-1}\left(\frac{y_n}{||x_n||}\right)$$

i.e

$$Tx'_n = \frac{y_n}{||x_n||} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

de sorte que

$$||x'_n|| = 1,\ x'_n \in (\text{Ker } T)^{\perp}$$

Comme x'_n est bornée, il existe une sous-suite, $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w \in$ (Ker $T)^{\perp}$ tel que

$$x'_{\sigma(n)} \rightharpoonup w \ \text{ lorsque } n \to +\infty$$

On a donc

$$Tx'_{\sigma(n)} \rightharpoonup Tw$$

Or $Tx'_n \to 0$ d'après ce qui précède, et donc

$$Tw = 0$$

Comme $w \in$ (Ker $T)^{\perp}$, on en déduit que $w = 0$, i.e

$$x'_{\sigma(n)} \rightharpoonup 0 \ \text{ dans } H$$

Comme A est compacte

$$Ax'_{\sigma(n)} \to 0 \ \text{ fort dans } H$$

Enfin, $Tx'_n = x'_n + Ax'_n$. Comme $Tx'_{\sigma(n)} \to 0$ fort dans H, $Ax'_{\sigma(n)} \to 0$ fort dans H, on en déduit

$$x'_{\sigma(n)} \to 0 \ \text{ fort dans } H$$

ce qui est contradictoire avec

$$||x'_{\sigma(n)}|| = 1$$

C Démontrons que Im T est fermé dans H.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ Im T une suite de Cauchy dans Im T convergeant vers un élément $y \in H$. Soit $x_n = S^{-1}y_n$. Comme S^{-1} est continue, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et par suite converge vers un élément $x \in$ (Ker $T)^{\perp}$. On a donc

$$y = \lim y_n = Sx \in \text{Im } T$$

D Montrons que si $\text{Ker } T = \{0\}$, alors $\text{Im } T = H$.
Soit $H_1 = \text{Im } T$ et supposons par l'absurde

$$H_1 \neq H$$

Posons

$$H_2 = T^2(H) = T(H_1) = S(H_1) \subset H_1$$

D'après C, H_2 est fermé dans H_1. En outre $H_2 \neq H_1$. En effet, sinon $\forall x \in H$, il existerait $w \in H$ tel que

$$Tx = T^2 w \Leftrightarrow T(x - Tw) = 0$$

Comme $\text{Ker } T = \{0\} \Leftrightarrow x = Tw$, et donc $x \in H_1$, i.e $H = H_1$ (contradiction).
Par récurrence, on pose

$$H_n = T(H_{n-1}) = T^n(H)$$

et on montre de même que H_n est strictement inclus dans H_{n-1},i.e

$$\forall n, \; H_{n+1} \subset H_n, \quad H_{n+1} \neq H_n$$

Par le procédé de Schmidt on peut alors construire une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$e_n \in H_n \cap H_{n+1}^{\perp}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme $e_n \in H_n$, $Te_n \in T(H_n) = H_{n+1}$ et donc

$$e_n \perp Te_n, \quad \text{i.e } \langle e_n, Te_n\rangle = 0$$

Or $Te_n = e_n + Ae_n$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée $e_n \rightharpoonup 0$ et donc

$$Ae_n \to 0 \quad \text{ fort dans } H$$

et

$$\langle e_n, Te_n\rangle \to \langle e_n, e_n\rangle = 1$$

Contradiction.

E Montrons enfin que $\text{codim } T = \dim \text{Ker } T$
Comme A est compact, A^* l'est aussi, et $\text{Ker } T^*$ est de dimension finie. Or

$$(\text{Im } T)^{\perp} = \text{Ker } T^*$$

donc $(\text{Im } T)^{\perp}$ est de dimension finie, égale à $\dim \text{Ker } T^*$. Il suffit donc de montrer que

$$\dim \text{Ker } T^* = \dim \text{Ker } T$$

Supposons que $\dim \text{Ker } T \leq \dim \text{Ker } T^*$ et soit P le projecteur sur $\text{Ker } T$ et V une isométrie de $\text{Ker } T$ dans $\text{Ker } T^*$. Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= A + VP \\ T_1 &= \text{Id} + A_1 = T + VP \end{aligned}$$

On a $\text{Ker } T_1 = \{0\}$. En Effet $v \in \text{Ker } T_1 \Leftrightarrow T_1 x = 0$. et donc

$$\begin{aligned} Tx &= -VPx \\ T^*Tx &= -T^*VPx = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\langle T^*Tx, x\rangle = ||Tx||^2 = 0, \quad \text{où } Tx = 0$$

En remontant il vient $VPX = 0$, et donc $Px = 0$ i.e

$$x \in (\text{Ker } T) \cap (\text{Ker } T)^{\perp} = \{0\}$$

Comme A_1 est compact, on déduit de la partie D que

$$\text{Im } T_1 = H$$

Comme Im $VP \subset (\text{Ker } T^*) = (\text{Im } T)^{\perp}$, il en résulte

$$\text{Im } VP = \text{Ker } T*$$

puis

$$\text{Im } V = \text{Ker } T*$$

et enfin

$$\dim \text{Im } VP = \dim \text{Ker } T*$$

[Le raisonnement est similaire pour $\dim \text{Ker } T \geq \dim \text{Ker } T^*$]

⊠

4.3.2 Alternative de Fredholm

On emploie cette expression pour discuter le cas d'une équation linéaire du type

$$Tu = f \tag{4.3}$$

où $u \in H$ est inconnu, $f \in H$ est la donnée, et

$$T = \text{Id } + A$$

avec A compact, est une perturbation compacte de l'identité. Comme en dimension finie (pour un système de N équations à N inconnues linéaire), on considère l'équilibre homogène

$$Tu = 0 \tag{4.4}$$

Deux alternatives se présentent.

A ou bien 4.4 a pour unique solution $u = 0$. Alors 4.3 possède une solution unique pour tout $f \in H$.

B 4.4 a un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. 4.3 admet alors une solution si et seulement si f vérifie m relations linéairement indépendantes.

4.4 Une application de la théorie de Riesz-Fredholm

Le résultat qui va suivre est une application directe de la théorie précédente aux equations elliptiques. On utilise également de manière cruciale le principe du maximum.

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, b une application de classe $\mathcal{C}^1\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et enfin une fonction $c : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue, telle que

$$\forall x \in \Omega, \quad c(x) \geq 0 \tag{4.5}$$

On a alors

Théorème 4.4.1

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -\Delta u + b.\nabla u + cu & = & f & & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & = & 0 & & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.6}$$

possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$

$\boxtimes$

Preuve

L'idée est de se ramener à une équation du type

$$Tu = g$$

où T est une perturbation compacte de l'identité dans un espace de Hilbert H, tel que $u \in H$, $g \in H$. A cet effet, on réecrit l'équation, en introduisant un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation 4.6 est équivalente à

$$-\Delta u + b.\nabla u + (c + \lambda)u = \lambda u + f$$

i.e

$$L_\lambda u = \lambda u + f \tag{4.7}$$

où

$$L_\lambda = -\Delta + b.\nabla + (c + \lambda)\text{Id}$$

Nous allons voir que pour λ assez grand, L_λ est inversible, de sorte que 4.7 devient (formellement)

$$u = L_\lambda^{-1}(\lambda u + f)$$

i.e

$$(\text{Id} + \lambda L_\lambda^{-1})u = L_\lambda^{-1} f$$

On montrera ensuite des propriétés de compacité de L_λ^{-1}

A Étude de L_λ

On a tout d'abord

1. Il existe λ_0 tel que si $\lambda \geq \lambda_0$, alors $\forall g \in H^{-1}(\Omega)$, le problème
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -L_\lambda u & = & -\Delta u + b.\nabla u + (c+\lambda)u & = & g \\ u & = & 0 & & \end{array} \right. \tag{4.8}$$
possède une solution unique $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tel que
$$||u_\lambda||_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\lambda)||g||_{H^{-1}(\Omega)} \tag{4.9}$$

<u>Démonstration</u>
Il s'agit d'une application directe du théorème de Lax-Milgram. En effet, $u \in H_0^1(\Omega)$, est solution de 4.8 si et seulement si
$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$
où
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + b.\nabla u.v + (c+\lambda)uv$$
et
$$L(v) = \langle g, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$
Il est claire que a et L sont continues sur $H_0^1(\Omega)$. Pour l'ellipticité de a, on a
$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + b.\nabla u.u + (c+\lambda)u^2$$
Le seul terme qui pose problème est $\int_\Omega b.\nabla u.u$. On peut le majorer comme suit
$$\begin{array}{rcl} \left|\int_\Omega b.\nabla u.u\right| & \leq & ||b||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & \frac{1}{2}\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||b||^2_{L^\infty(\Omega)}||u||^2_{L^2(\Omega)}\right) \end{array}$$
[où on a utilisé de nouveau l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ avec $a = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$, et $b = ||b||_{L^\infty(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)}$]

Il en résulte que
$$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\lambda - \frac{||b||_{L^\infty(\Omega)}}{2}\right)||u||^2_{L^2(\Omega)}$$
et donc si $\lambda \leq \dfrac{||b||_{L^\infty(\Omega)}}{2}$ on a
$$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$
Ainsi pour $\lambda \geq \lambda_0 = \dfrac{||b||_{L^\infty(\Omega)}}{2}$, a est elliptique, et le résultat en découle.

2. Définition de T
   Pour $g \in H^{-1}(\Omega)$ posons
   $$T_0 g = u_{\lambda_0}$$
   où u_{λ_0} est la solution de 4.8, pour $\lambda = \lambda_0$. Il est clair au vu de 4.9 que l'application linéaire
   $$T_0 : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
   est linéaire et continue. T_0 représente donc un "inverse de L_λ". (il s'agit d'un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$)
   Comme nous l'avons vu dans le préambule, on peut réecrire 4.6 sous la forme
   $$-\Delta u + b.\nabla u + (c + \lambda_0)u = \lambda_0 u + f$$
   c'est-à-dire, en utilisant l'opérateur T_0
   $$u = T_0(\lambda_0 u + f)$$
   ou encore
   $$u - \lambda_0 T_0 u = T_0 f \tag{4.10}$$
   Il s'agit maintenant d'analyser 4.10 comme une équation dans un Hilbert H, à déterminer.

B Réinterprétation de 4.10

A priori, $u \in H_0^1(\Omega)$, mais on a vu que T_0 était un opérateur défini sur $H^{-1}(\Omega)$. On peut donc interpréter 4.10 comme une équation de $H^{-1}(\Omega)$. Plus précisément, considérant
$$\tilde{T_0} = i \circ T_0$$
où i est l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.
Par le théorème de Rellich, cette injection est compacte (en effet, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, et l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est clairement continue). Il en résulte que
$$\tilde{T_0} : H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$
est compacte. Considérons alors le problème : Trouver $u \in H^{-1}(\Omega)$ tel que
$$u - \lambda_0 \tilde{T_0} u = T_0 f$$
i.e trouver $u \in H^{-1}(\Omega)$ tel que
$$\left(\mathrm{Id} - \lambda_0 \tilde{T_0}\right) u = T_0 f \tag{4.11}$$
On vérifie aisément que 4.11 est équivalent à 4.10. En effet, si u est solution de 4.11, alors $u = \lambda_0 \tilde{T_0} u + T_0 f$. Comme Im $\tilde{T} = H_0^1(\Omega)$ on en déduit que $u \in H_0^1(\Omega)$ et donc que u est solution de 4.10.

Finalement 4.11 est bien de la forme, pour $H = H^{-1}(\Omega)$
$$Au = g$$
avec $A = \mathrm{Id} - \lambda_0 \tilde{T_0}$, perturbation compacte de l'identité et $g \in H = H^{-1}(\Omega)$. Pour montrer que 4.11 possède une solution unique, il suffit donc au vu de la théorie de Riesz-Fredholm, de prouver que
$$\mathrm{Ker}\ A = \{0\} \tag{4.12}$$

C Étude de Ker A
Soit $w \in H^{-1}(\Omega)$ tel que $w \in$ Ker A, i.e

$$Aw = 0$$

ou encore

$$w = \lambda_0 \tilde{T}_0 w = \lambda_0 T_0 w = T_0(\lambda_0 w)$$

Comme Im $\overset{\sim]}{T_0} = H_0^1(\Omega)$, on obtient immediatement $w \in H_0^1(\Omega)$, et en revenant à la définition de T_0 on voit que

$$-\Delta w + b.\nabla w + (c + \lambda_0)w = \lambda_0 w$$

i.e w_0 solution du problème elliptique homogène

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w + b.\nabla w + cw & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.13}$$

On vérifie tout d'abord que les solutions w de 4.13 sont de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$

1. Les solutions de 4.13 appartiennent à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$
On écrit l'équation 4.13 sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta w & = & -b.\nabla w + cw \\ w & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.14}$$

On commence par montrer

α $w \in W^{2,p}, \ \forall p < +\infty$
La preuve est itérative. Au départ on sait que le membre de droite de 4.14 appartient à $L^2(\Omega)$, donc par la théorie du laplacien on en déduit que $w \in H^2(\Omega)$, puis par injecion de Sobolev $\nabla w \in L^{2^*}(\Omega)$. Grâce à cette information on voit que le membre de droite appartient à $L^{2^*}(\Omega)$, et donc par la théorie de régularité du laplacien $w \in W^{2,2^*} \hookrightarrow W^{1,(2^*)^*}$, et ainsi de suite. On vérifie que si, on sait que $w \in W^{1,q}$ alors $w \in W^{2,q}$ et $W^{2,q} \hookrightarrow W^{1,q^*}$, où $q^* = \dfrac{Nq}{N-q}$. On vérifie que la suite d'exposants obtenus tend vers $+\infty$.

β $w \in \mathcal{C}^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$
Ceci résulte de α pour α arbitrairement proche de 1. En effet, $\forall p > N$, on a l'injection de Sobolev

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega), \quad \text{avec } \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

Le membre de gauche appartient donc à $\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\forall 0 < \alpha < 1$. Par la théorie du laplacien on en déduit alors $w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. Ceci démontre donc C.1

2. Application du principe du maximum
   Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 3.2.2 (principe du maximum) à w, puisque nous savons que w est une solution "classique" (i.e de classe $\mathcal{C}^2$). Il en résulte que
   $$w(x) \geq O,\ \forall x \in \Omega$$
   Comme $-w$ est aussi une solution de 4.13, on a
   $$-w(x) \geq 0,\ \forall x \in \Omega$$
   i.e
   $$w = 0$$

On a donc établi que
$$\text{Ker } A = \{0\}$$
Ainsi A est bijective, d'inverse continue et 4.11 a une solution unique. Ceci termine la preuve du théorème 4.4.1

⊠

4.5 Théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

4.5.1 Cadre

Soit H un espace de Hilbert, et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est autoadjoint si et seulement si
$$A = A^*$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle,\ \forall u \in H,\ \forall v \in H$$
Lorsque H est de dimension finie, on sait qu'un opérateur linéaire autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e il existe une base orthonormée de H, formée de vecteurs propres de A. Lorsque H est un espace de Hilbert séparable, et A un opérateur linéaire compact autoadjoint, le résultat se généralise comme suit

Théorème 4.5.1

Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit A un opérateur linéaire compact de H vers H, tel que A est autoadjoint, c'est-à-dire
$$A^* = A$$
Il existe alors une base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de H formée de vecteurs propres de A, i.e tels que
$$Ae_n = \mu_n e_n$$
De plus, μ_n est de multiplicité finie, et $\mu_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Enfin si A est défini positif, i.e $\langle Au, u\rangle > 0,\ \forall u \neq 0$, alors $\mu_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

⊠

Nous admettrons ce théorème (voir exemple dans [?]). Nous donnons maintenant quelques applications aux EDP elliptiques.

4.5.2 Théorie spectrale des opérateurs elliptiques sous forme divergence

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $L = \text{div }(A(x)\nabla)$ un opérateur elliptique sous forme divergence, i.e tel que $A(x) = (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq N}$, où les fonction $a_{i,j}$ sont bornées sur Ω, vérifient $a_{i,j} = a_{j,i}$ et

$$\begin{aligned} &\exists\alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \Omega \\ &\alpha_0|\xi|^2, \leq \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Soit c une fonction continue définie sur $\overline{\Omega}$. On a alors

Théorème 4.5.2

Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante tels que $e_n \in H_0^1(\Omega)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(I_n) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div }(A(x)\nabla e_n) + ce_n & = & \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega \\ e_n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$$

Chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie (i.e l'ensemble des solutions de (I_n) est de dimension finie). Enfin, si $c(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$

$$\lambda_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

⊠

Preuve

On commence par se ramener au cas où $c \geq 0$. Pour cela posons

$$M = \inf_{x\in\overline{\Omega}} c(x)$$

et

$$\begin{array}{rcll} \tilde{c} & = & c & \text{si } M \geq 0 \\ \tilde{c} & = & c - M & \text{si } M \leq 0 \end{array}$$

de sorte que la fonction $\tilde{c} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie

$$\tilde{c} \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{4.16}$$

Pour $f \in L^2(\Omega)$, considérons le problème : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div }(A(x)\nabla u) + \tilde{c}u & = & f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.17}$$

La formulation variationnelle de 4.17 est : Trouver $u \in H = H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \tilde{c}uv$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv$$

Comme $\tilde{c} \geq 0$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 = \alpha_0 ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et donc a est elliptique. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe donc une solution unique u de 4.17, de plus

$$||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)} \tag{4.18}$$

où la constante C dépend de α_0 et Ω. Posons alors, pour $f \in L^2(\Omega)$

$$Tf = u$$

On vérifie alors aisément, grâce à 4.17, 4.18, que T est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$, i.e $T \in \mathcal{L}\left(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\right)$. Posons enfin

$$\tilde{T} = i \circ T$$

où i est l'injection de Rellich

$$i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

de sorte que $\tilde{T} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire compact. Montrons que $\tilde{T}$ est autoadjoint

— <u>$\tilde{T}$ est autoadjoint</u>
Soit f_1, f_2 deux éléments de $L^2(\Omega)$. Posons

$$u_k = \tilde{T}(f_k), \quad \text{pour } k = 1,2$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{T}(f_1), f_2 \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u_1 f_2 \\ \left\langle \tilde{T}(f_2), f_1 \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u_2 f_1 \end{aligned}$$

Par définition de $\tilde{T}$, on a, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \tilde{c}u_k v = \int_\Omega f_k v, \quad \text{pour } k = 1,2$$

Choisissons $v = u_2$ pour $k = 1$ et $v = u_1$ pour $k = 2$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_1 u_2 &= \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \tilde{c}u_1 u_2 \\ \int_\Omega f_2 u_1 &= \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \tilde{c}u_2 u_1 \end{aligned}$$

Comme $a_{i,j} = a_{j,i}$ (symétrie de a), il en résulte

$$\int_\Omega f_1 u_2 = \int_\Omega f_2 u_1$$

et donc

$$\forall f_1, f_2 \text{ dans } L^2(\Omega),\ \left\langle \tilde{T}(f_1), f_2 \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f_1, \tilde{T}(f_2) \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$\tilde{T}$ est donc un opérateur autoadjoint de Ω

— $\tilde{T}$ est défini positif
On a $\forall f \in L^2(\Omega)$

$$\left\langle \tilde{T}(f), f \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \tilde{c} u^2 = a(u,u) \geq \alpha_0 ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

où $u = \tilde{T}(f)$. Il en résulte

$$\left\langle \tilde{T}(f), f \right\rangle_{L^2(\Omega)} > 0,\ \forall f \neq 0 \tag{4.19}$$

$\tilde{T}$ est donc positif (strictement). (En articulier, Ker $\tilde{T} = \{0\}$)

— Application du Théorème 4.5.1
Comme $\tilde{T}$ est un opérateur compact autoadjoint défini positif de l'espace de Hilbert séparable $L^2(\Omega)$, nous pouvons appliquer le théorème 4.5.1. Il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite $\mu_n \to 0$, et

$$\mu_n > 0 \tag{4.20}$$

telles que

$$\tilde{T} e_n = \mu_n e_n \tag{4.21}$$

Bien entendu, on peut renuméroter les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sorte que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit décrroissnate, i.e

$$0 \leq \mu_{n+1} \leq \mu_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{4.22}$$

Revenons à 4.21. Comme Im $\tilde{T} \subset H_0^1(\Omega)$, on en déduit que

$$e_n = T\left(\frac{1}{\mu_n} e_n\right) \in H_0^1(\Omega)$$

Ainsi 4.21 signifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } (A(x)\nabla e_n) + \tilde{c} e_n & = & \frac{1}{\mu_n} e_n & \text{dans } \Omega \\ e_n & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.23}$$

Rappelons que

$$\tilde{c} = c - M_0$$

où $M_0 = \inf(M, 0)$, et $M = \inf_{x\in\overline{\Omega}} c(x)$. On a donc

$$-\text{div } (A(x)\nabla e_n) + c e_n = \left(\frac{1}{\mu_n} + M_0\right) e_n$$

Posons

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} + M_0$$

On a alors

$$-\text{div } (A(x)\nabla e_n) + ce_n = \lambda_n e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\begin{cases} 0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty \end{cases}$$

Le théorème est démontré.

⊠

Commentaire Le théorème précédent est un outil fondamental pour de nombreux problèmes théorique ou appliqués. Par exemple, il permet de décrire les solutions de certains problèmes d'évolution. Considérons, en guise d'illustration l'équation parabolique pour $v : \Omega \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ associée à L.

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \text{div } (A(x)\nabla v) & = & 0 & \text{sur } \Omega \times [0, +\infty[\\ v(x,t) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v(x,0) & = & v_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

où la conddition au temps $t = 0$, v_0 est donnée. Décomposons v_0 sur la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a par le théorème de Parseval-Bessel

$$v_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n, \quad \text{où } c_n = \int_\Omega v_0 e_n$$

La solution de (I) peut alors s'écrire (en faisant) quelques hypothèses de régularité sur v_0)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-\lambda_n t) e_n(x)$$

et on voit en particulier que

$$\lim_{t \to +\infty} v(x,t) = c$$
$$v(x,t) \sim c_1 \exp(-\lambda_1 t) e_1(x)$$

La première valeur propre (i.e la plus petite), λ_1 ainsi que la fonction propre associée e_1 joue donc un rôle important dans le comportement asymptotique de v lorsque $t \to +\infty$.

4.5.3 Caractérisation de la première valeur propre λ_1 (la plus petite)

Nous nous plaçons de nouveau dans le contexte du théorème 4.5.1. On a donc

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \to +\infty$$

La première valeur propre, λ_1 est donc la plus petite. On a alors

Proposition 4.5.1

On a l'identité

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2,\ u \in H_0^1(\Omega)\,,\ \int_\Omega |u|^2 = 1 \right\}$$

De plus l'infimum est atteint par les fonctions propres associées à λ_1

$\boxtimes$

Posons pour u, v dans $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \sum_{i,j}^{N} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \\ \tilde{a}(u,v) &= \sum_{i,j}^{N} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \tilde{c}uv \end{aligned}$$

La preuve de la proposition 4.5.1 est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 4.5.1

i La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans $H_0^1(\Omega)$ [i.e, vect$(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$]
ii Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $c_n = \langle u, e_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega ue_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$$

On a alors l'identité

$$a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2 \tag{4.24}$$

$\boxtimes$

Donnons tout d'abord la preuve de la proposition 4.5.1 en admettant le lemme 4.5.1.

Preuve de la proposition 4.5.1

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Avec les notations du lemme, on a

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$$

En particulier, comme $\lambda_n \geq \lambda_1$, on a par 4.24

$$\begin{aligned} a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2 &\geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \\ &\geq \lambda_1 ||u||^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ainsi, si $u \in H_0^1(\Omega)$, $||u||_{L^2(\Omega)} = 1$, alors

$$a(u,u) \geq \lambda_1$$

On vérifie par ailleurs que pour λ_1

$$a(e_1, e_1) = \lambda_1$$

ce qui termine la preuve.

⊠

Preuve du lemme 4.5.1

i On vérifie tout d'abord que $L^2(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$. En effet, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et dans $H^1(\Omega)$. Considérons alors de nouveau l'application $T : H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ associe la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$-\text{div } (A(x)\nabla u) + \tilde{c}u = f \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Nous avons vu dans la preuve du théorème 4.5.1, que T est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$. De plus

$$Te_n = \mu_n e_n, \quad \mu_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c'est-à-dire

$$e_n = \frac{1}{\mu_n} T^{-1}(e_n) \tag{4.25}$$

Comme la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est totale dans $L^2(\Omega)$, et $L^2(\Omega)$ dense dans $H^{-1}(\Omega)$, et comme la norme L^2 est plus forte que la norme H^{-1}, il en résulte que

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est totale dans } H^{-1}(\Omega)$$

Comme T^{-1} est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui prouve **i**.

ii Notons par ailleurs que $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent au produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$. De plus, il résulte de la formulation variationnelle de l'équation que

$$\begin{cases} \tilde{a}(e_i, e_j) & = & 0 & \text{si } i \neq j \\ a(e_i, e_i) & = & \dfrac{1}{\mu_i} & \text{si } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On a donc

$$a(\sqrt{\mu_i} e_i, \sqrt{\mu_j} e_j) = \delta_{ij}$$

La famille $(\sqrt{\mu_n} e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une famille orthonoréme pour le produit scalaire $\tilde{a}$. Comme elle est totale, il s'agit d'une base hilbertienne.

Appliquons le théorème de Parseval-Bessel dans le cadre précédent. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u,u) &= \sum_{n=1}^{+\infty} [\tilde{a}(u, \sqrt{\mu_n} e_n)]^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \tilde{a}(u, e_n)^2 \end{aligned}$$

Par la formulation variationnelle de l'équation on a

$$\tilde{a}(u, e_n) = \frac{1}{\mu_n}\langle u, e_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\mu_n} e_n$$

et donc

$$\tilde{a}(u, u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n} c_n^2$$

Comme $a(u, u) = \tilde{a}(u, u) + M_0\langle u, u\rangle_{L^2} = \tilde{a}(u, u) + M_0 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n^2$ on obtient

$$a(u, u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_n} - M_0\right) c_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2$$

⊠

4.5.4 Théorie spectrale pour le Laplacien

Dans le cas où $L = \Delta$, on peut bien entendu appliquer les résultats précédents. On a

Proposition 4.5.2

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telles que $e_n \in H_0^1(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, et

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{sur } \Omega \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, chaque valeur propre est de multiplicité finie et $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$

⊠

4.5.4.1 Propriétés des fonctions propres

On a

Proposition 4.5.3

Si Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, alors $e_n \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

⊠

Preuve

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} -\Delta e_n &= \lambda_n e_n & \text{sur } \Omega \\ e_n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En particulier, on voit par la théorie de régularité du laplacien que

$$e_n \in H^k(\Omega) \Rightarrow e_n \in H^{k+2}(\Omega)$$

Comme $e_n \in H^1(\Omega)$, on en déduit $e_n \in H^3(\Omega)$ puis, $e_n \in H^5(\Omega)$, et enfin

$$e_n \in H^k(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ainsi

$$e_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H^k(\Omega)$$

et donc

$$e_n \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$$

⊠

4.5.4.2 Propriétés de λ_1 et e_1

Par la proposition 4.5.2, pour $L = -\Delta$, on a

Proposition 4.5.4

On a

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2;\ u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^2 = 1\right\}$$

et le minimum est atteint si et seulement si $u \in F_{\lambda_1} \cap \left\{u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{L^2} = 1\right\}$ où $F_{\lambda_n} = \left\{v \in H_0^1(\Omega), -\Delta v = \lambda_n e_n\right\}$

⊠

Pour le laplacien on en déduit la conséquence importante suivante.

Proposition 4.5.5

Soit $u \in F_{\lambda_1}$ tel que $u \neq 0$. Alors, u ne s'annule pas sur Ω, i.e u est de signe constant. On a donc ou bien $u(x) > 0,\ \forall x \in \Omega$, ou bien $u(x) < 0,\ \forall x \in \Omega$.

⊠

Preuve

Soit $u \in F_{\lambda_1}$. Par homogénéité, on peut toujours supposer que $\int_\Omega |u|^2 = 1$ (sinon on considère $v = \dfrac{u}{||u||_{L^2}}$). Par la proposition 4.5.3 on a

$$u \in \mathcal{C}^\infty \left(\overline{\Omega}\right)$$

Par ailleurs on a

$$|\nabla |u|| = |\nabla u|, \quad \text{presque pour tout } x \in \Omega$$

Soit

$$\int_\Omega |\nabla |u||^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad |u| \in H_0^1(\Omega)$$

Il en résulte que $\int_\Omega |\nabla |u||^2 = \lambda_1,\ ||\ |u|\ ||_{L^2} = 1$. Par la proposition 4.5.4, on a donc $|u| \in F_{\lambda_1}$, i.e

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta |u| & = & \lambda_1 |u| & \text{sur } \Omega \\ |u| & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Par le principe du maximum fort on déduit

$$|u| > 0 \quad \text{sur } \Omega$$

ce qui termine la preuve.

⊠

On obtient finalement

Théorème 4.5.2

dim $F_{\lambda_1} = 1$, i.e la première valeur propre est de multiplicité 1. On a donc

$$F_{\lambda_1} = \mathbb{R} e_1$$

⊠

Preuve

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une famille libre de deux éléments u_1, u_2 dans F_{λ_1}. Par la proposition 4.5.5, $\forall x_0 \in \Omega,\ |u_1(x_0)| \neq 0,\ |u_2(x_0)| \neq 0$. Fixons x_0 et posons

$$\alpha = u_1(x_0) \quad \beta = u_2(x_0)$$

On a alors

$$(\beta u_1 - \alpha u_2)(x_0) = 0$$

Or $\beta u_1 - \alpha u_2 \in F_{\lambda_1}$ est une fonction non nulle qui, par la proposition 4.5.5 ne s'annule pas. On a donc une contradiction.

⊠

<u>Principe</u> La première fonction propre e_1 possède toutes les symétries du problèmes.

Nous allons illustrer ce principe sur un exemple. Soit $\Omega = B(R)$. On a

Théorème 4.5.3

Soit $\Omega = B(R)$. La fonction e_1 possède la symétrie radiale, i.e il existe une foncttion positive $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$e_1(x) = f(|x|), \quad \forall x \in \Omega$$

$[f(1) = 0]$

$\boxtimes$

Preuve

Soit $\mathcal{R}$ une rotation de $\mathbb{R}^N$, i.e $\mathcal{R} \in SO(N)$. On remarque que $B(R)$ est invariant par $\mathcal{R}$, i.e

$$\mathcal{R}\left(B(R)\right) = B(R)$$

i.e Ω est invariant par rotation. Pour $u \in H_0^1\left(B(R)\right)$, on pose

$$u_{\mathcal{R}}(x) = u\left(\mathcal{R}x\right)$$

Comme

$$\int_\Omega |\nabla u_{\mathcal{R}}|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \int_\Omega |u_{\mathcal{R}}|^2 = \int_\Omega |u|^2$$

on vérifie que $\forall \mathcal{R} \in SO(N),\ u_{\mathcal{R}} \in H_0^1\left(B(R)\right)$. Pour $u = e_1$ on a

$$\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla e_{1,\mathcal{R}}|^2 \qquad \int_\Omega |e_{1,\mathcal{R}}|^2 = 1$$

et donc par la proposition 4.5.4, $e_{1,\mathcal{R}} \in F_{\lambda_1}$. Comme

$$F_{\lambda_1} = \mathbb{R}e_1, \quad \text{et } ||e_{1,\mathcal{R}}||_{L^2} = 1$$

on en déduit que

$$e_{1,\mathcal{R}} = \pm e_1$$

Comme l'application $\mathcal{R} \to e_{1,\mathcal{R}}$ est continue de $SO(N)$ vers F_{λ_1}, on déduit finalement que

$$e_{1,\mathcal{R}} = e_1$$

i.e $\forall \mathcal{R} \in SO(N)$

$$e_1(x) = e_1\left(\mathcal{R}x\right)$$

Il en résulte que $\forall y \in \mathbb{R}^N$ tel que $||y|| = ||x||$, on a

$$e_1(y) = e_1(x)$$

La conclusion en découle.

$\boxtimes$

<u>Commentaire</u>

— L'application $\mathcal{R} \to u_{\mathcal{R}}$ est appelée une représentation du groupe $SO(N)$ dans l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$. Il est facile de voir que $\forall n$, cette application laisse les ensembles F_{λ_n} invariants (ou stables).
L'étude complète des espaces F_{λ_n}, en présence de symétries est l'objet de la théorie de Peter-Weyl.

— Notons que le théorème précédent ramène l'étude à un problème à une dimension.

Chapitre 5

Calcul différentiel dans les espaces de Banach

5.1 Introduction

La suite du cours est consacrées aux problèmes non linéaires. Un exemple type est l'équation

$$(I) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$). On peut réecrire ce problème sous la forme

$$F(u) = f$$

où $F(u) = -\Delta u - u^3$ est une application entre espaces fonctionnels que nous préciserons. La question est alors de savoir si F est injective, surjective, etc... Ce type de situation peut s'analyser à l'aide des outils du calcul différentiel. L'idée principale est d'analyser localement près d'un point son développement limité au premier ordre, i.e de construire sa dérivée. Deux notions de dérivée sont alors à notre disposition :

1. La dérivée au sens de Gateaux
2. La dérivée au sens de Frechet

la première notion étant la plus faible : le point essentiel est que les deux notions coïncident dans le cas $\mathcal{C}^1$.

5.2 La dérivé au sens de Fréchet

Soit x et Y deux espaces de Banach, $\mathcal{V}$ un ouvert de X.

Défintion

Soit $u \in \mathcal{V}$ et $F : \mathcal{V} \to Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que si on considère pour $h \in X$ petit

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h$$

Alors

$$\frac{R(h)}{||h||} \to 0 \quad \text{lorsque } ||h|| \to 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ ||h||_X \leq \delta \Rightarrow ||R(h)||_Y \leq \varepsilon ||h||_X$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ existe, elle est nécessairement unique. On note alors

$$A = dF(u)$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u, ou encore application linéaire tangente à F en u. En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Frechet.

Exemples

1. $FF(u) = c$. F est Fréchet différentiable et $\forall u,\ dF(u) = 0$
2. Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A(u+h) - A(u) = A.h$ et donc $\forall u,\ dA(u) = A$
3. Si $B : X \times Y \to Z$ est bilinéaire $B(u+h, v+k) = B(u,v) + B(h,v) + B(u,k) + B(h,k)$ et continue $|B(h,k)| \leq C||h||||k||$
$$dB(u)(h,k) = B(h,v) + B(h,k)$$
4. $X = H$ Hilbert, $F(u) = ||u||^2 = \langle u,u \rangle$, $dF(u) = 2\langle u,h \rangle$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

Lemme 5.2.1

Si F est différentiable en u, alors F est continue en u.

⊠

Proposition 5.2.1

i Soit F et G deux applicaitons de $\mathcal{V}$ vers Y. Si F et G sont différentiables en $u \in G$, alors $\forall \lambda, \mu$ réels, $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u)$$

ii Soient X, Y, Z trois espaces de Banach, $\mathcal{V}$ un ouvert de X, V un ouvert de Y. Soit $F : \sqsubseteq \to Y$, $G : V \to Z$, tels que $F(u) \subset V$. Si F est différentiable en u et G en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentaible en u et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u)$$

i.e

$$d(G \circ F)(u)(h) = dGG(v)\,[dF(u)h]$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$

⊠

5.3 Différentiabilité au sens de Gateaux

Commençons par la notion de dérivée directionnelle.

Définition

Soit $F : U \to Y$, $u \in U$. Soit $v \in X$, $v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v, notée $\partial_v F(u)$, la limite, lorsqu'elle existe

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}$$

⊠

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors $\forall v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v$$

En effet $F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv)$ donc

$$\frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = dF(u)v + \frac{R(tv)}{t}$$

Définition

On dit que $F : U \to Y$ est Gateaux différentiable en u (G-différentiable), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y, i.e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que $\forall v \in X$ la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, i.e

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(u)v$$

On vérifie que si cette application existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u)$$

⊠

Proposition 5.3.1

Si F est Fréchet différentiable en u, elle est Gateaux différentiable en u, et

$$d_G F(u) = dF(u)$$

⊠

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie. Rappelons l'exemple $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} F(x, y) = \left[\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right]^2 \text{ si } y \neq 0 \\ \\ F(x, 0) = 0 \end{cases}$$

La G-différentiabilité n'implique pas la continuité ! (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

En revenche, si on sait que F est $\mathcal{C}^1$ au sens d eGateaux, i.e si l'application

$$\begin{array}{ccc} U & \mapsto & \mathcal{L}(X,Y) \\ u & \to & d_G F(u) \end{array}$$

est continue, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notion coïncident.

Théoréme 5.3.1

Soit $F : U \to Y$ une application G-différentiable (U ouvert de x). On suppose que l'application $v \to d_G F(v)$ est continue sur U. Alors F est Fréchet différentiable sur U et

$$\forall v \in U,\ dF(v) = d_G F(v)$$

⊠

Preuve

Soit $u \in U$. Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ ||v||_X \leq \delta \Rightarrow |F(u+v) - F(u) - d_G F(u)(v)| \leq \varepsilon$$

Supposons pour soulager les notations que $u = 0$. L'application

$$v \to d_G F(v)$$

est continue, donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$(*) \quad |v| \leq \delta_1 \Rightarrow |d_G F(v) - d_G F(0)|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$$

Considérons alors la droite $D_v = \{w = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, et le segment

$$[0, v] = \{w \in X,\ w = \lambda v, \lambda \in [0,1]\}$$

Soit f l'application définie sur $[0,1]$ par

$$f(\lambda) = F(\lambda v)$$

On a

$$f'(\lambda) = d_G F(\lambda v)(v)$$

Comme on a supposé $d_G F$ continue, et que v est fixé, il en résulte que f' est continue sur $[0,1]$ et que $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On a alors

$$F(v) - F(0) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(\lambda) d\lambda = \int_0^1 d_G F(\lambda v)(v) d\lambda$$

et donc

$$F(v) - F(0) - dF(0)v = \int_0^1 \left[d_G F(\lambda v) - dF(0)\right](v) d\lambda$$

On déduit alors de $(*)$ que si $||v|| \leq \delta_1$ alors

$$||F(v) - F(0) - dF(0)v||_Y \leq \varepsilon ||v||_X$$

ce qui termine la preuve.

⊠

Commentaire En pratique, il est plus facile de vérifier la différrentiabilité au sens de Gateaux. Si on veut prouver que F est $\mathcal{C}^1$, il suffit de prouver qu'elle est Gateaux-différentiable, puis de vérifier que la différentielle $d_G F$ est continue.

En fait pour vérifier qu'une fonction est $\mathcal{C}^1$ on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 5.3.2

Soit $\tilde{X}$ un sous-espace vectoriel de X, dense dans X. Soit F une application continue de $U \subset X$, ouvert vers Y. On suppose que $\forall u \in \tilde{X} \cap U$ il existe une application linéaire $A(u) \in \mathcal{L}(X,Y)$ telle que

$$\forall v \in \tilde{X}, \ \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = A(u)v$$

Si l'application $u \to A(u)$ est continue sur $\tilde{X} \cap U$, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et

$$dF(u) = A(u)$$

⊠

Preuve

Exercice

⊠

Commentaire Dans les applications que nous avons en vue, les espaces X et Y seront en général des espaces de fonctions (par exemple $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, ou $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$, etc...). Lorsque cela est possible, nous prendrons, selon les cas

$$\tilde{X} = \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$$

$$\tilde{X} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

Pour calculer la différentielle d'une fonction $\mathcal{C}^1$, il suffira donc, au vu du théorème 5.3.2 de savoir calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t}$$

pour u, v fonctions régulières. Cela soulage très souvent les calculs de manière importante.

5.4 Opérateur de Nemitski : continuité et différentiabilité

5.4.1 Cadre

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ (x,t) \to f(x,t)$$

Défintion

On appelle opérateur de Nemitski associé à f, l'application T_f qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction $v = T_f(u)$ définie sur Ω par

$$v(x) = f(x, u(x)), \ \forall x \in \Omega$$

⊠

[dans la suite nous confondrons T_f et f et écrirons $v = f(x, u)$]

Nous supposerons toujours, dans la suite, que f est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire telle que

1. $t \to f(x, t)$ est continue, $\forall x \in \Omega$
2. $x \to f(x, t)$ est mesurable, $\forall t \in \mathbb{R}$

On écrira : f est une C-fonction.

Exemple Si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable sur Ω, alors

$$\begin{cases} f(x,t) = h(x) + t^2 & \text{est une C-fonction} \\ f(x,t) = h(x)t^2 & \text{est une C-fonction} \\ f(x,t) = h(x)|t|^{p-1}t & \text{est une C-fonction } \forall p > 1 \\ f(x,t) = h(x) + |t|^{p-1}t & \text{est une C-fonction } \forall p > 1 \\ f(x,t) = h(x) + \exp t & \text{est une C-fonction} \\ f(x,t) = h(x)q(t) & \text{est une C-fonction } \forall q \text{ continue} \\ f(x,t) = h(x) + g(t) & \text{est une C-fonction } \forall g \text{ continue} \end{cases}$$

On a le résultat de continuité de T_f de L^p vers L^q

Théorème 5.4.1

Soit $p, q \geq 1$, $\alpha = \dfrac{p}{q}$. On suppose que f est une C-fonction sur $\Omega \times \mathbb{R}$ (Ω borné) vérifiant

$$\exists C > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ |f(x,t)| \leq C\left(1 + |t|^{\alpha}\right) \qquad \text{p.p } x \in \Omega$$

Alors l'application $T_f : u \to T_f u = f(x, u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$

⊠

Preuve

On vérifie que si $u \in L^p(\Omega)$, alors pour presque tout $x \in \Omega$,

$$|f(x, u(x))|^q \leq C\left(1 + |u|^{\frac{p}{q}}(x)\right)^q \leq C\left(|u|^p(x) + 1\right)$$

Donc

$$\int_\Omega |f(x, u(x))|^q dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^q \int_\Omega 1\right) < +\infty$$

car Ω est supposé borné. Ainsi T_f est bien définie de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$. Pour établir la continuité, il s'agit de montrer que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$, si

$$u_n \to u, \qquad \text{dans } L^p(\Omega)$$

alors

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{dans } L^q(\Omega)$$

Pour démontrer cette convergence, nous faisons appel aux résultats classiques suivants

Lemme 5.4.1

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$, telle que $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite $(v_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que

$$v_{\sigma(n)}(x) \to v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

$$|v_{\sigma(n)}(x)| \leq h(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

⊠

Lemme 5.4.2

Soit E un espace de Banach, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors

$$u_n \to u \quad \text{dans } E$$

si et seulement si, pour toute sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ qui converge vers u.

⊠

Le lemme 5.3.1 est un résultat central en théorie de l'intégration, et nous renvoyons, pour sa preuve, aux ouvrages spécialisés.

Pour démontrer le lemme 5.3.2, on peut raisonner par l'absurde et supposer que u_n ne converge pas vers u. Il existerait alors une sous-suite $u_{\sigma(n)}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_{\sigma(n)} - u|| \geq \varepsilon$$

Par hypothèse, on peut extraire de $u_{\sigma(n)}$ une nouvelle sous-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ qui converge vers u... ce qui contredit l'inégalité précédente.

On finit alors la preuve du théorème.

Soit $u_{\sigma(n)}$ une sous-suite quelconque de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit, d'après le lemme 5.3.2, de démontrer qu'il existe une nouvelle sous-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ telle que

$$f(x,u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}) \to f(x,u) \quad \text{dans } L^q(\Omega)$$

Or d'après le lemme 5.3.1, il existe justement une sous-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ telle que

$$u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}(x) \to v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

$$|u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}(x)| \leq h(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

où $h \in L^p(\Omega)$.

On a donc, par composition et continuité de f par rapport à la variable u

$$f(x, u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}(x)) \to f(x, u(x)) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

et

$$|f(x, u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}(x))| \leq a + b|h(x)|^\alpha \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f(x, u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}(x)) - f(x, u(x))|^q = 0$$

ce qui donne le résultat.

$\boxtimes$

En guise d'exercices, nous avons également les résultats suivants.

Théorème 5.4.2

i Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une fonction continue de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} T_f : & \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right) & \to & \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right) \\ & u & \mapsto & T_f(u) \equiv f(x,u) \end{array}$$

est continue de $\mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ vers $\mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$

ii Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une foncttion continue de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\exists 0 < \alpha \leq 1,\ \forall M > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x, y \in \overline{\Omega},\ \forall u, v \in \mathbb{R}$,

$$(||u|| \leq M \text{ et } ||v|| \leq M) \Rightarrow |f(x,u) - f(y,v)| \leq C\left(|x-y| + |u-v|^\alpha\right)$$

Alors $T_f : \mathcal{C}^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathcal{C}^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ est continue pour $\gamma = \alpha\beta$ qu'est ce que β ?

$\boxtimes$

Rappel L'espace de Hölder $\mathcal{C}^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ est défini pour $0 < \beta \leq 1$ par

$$\mathcal{C}^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right),\ \exists M \geq 0,\ |u(x) - u(y)| \leq M|x-y|^\beta,\ \forall x, y \in \overline{\Omega}\right\}$$

On munit $\mathcal{C}^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ de la norme

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})} = ||u||_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta}$$

on montre alors que pour cette norme, $\mathcal{C}^{0,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)$ est un espace de Banach (exercice).

5.4.2 Propriétés de différentiabilité de T_f

Nous allons voir dans ce qui suit, que des propriétés de différentiabilité de la fonction f par rapport à la deuxième variable peuvent entraîner des propriétés de différentiabilité de l'opérateur T_f. Nous ferons dans la suite les hypothèses suivantes sur f.

(H1) Pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction d'une variable

$$t \mapsto f(x,t)$$

est dérivable par rapport à t. En d'autres termes, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

existe. Nous supposerons de plus que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est une C-fonction.

(H2) Il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 1$ (inégalité stricte !) telles que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq C\left(1+|t|^{\alpha-1}\right) \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

(H3)

$$\exists C > 0,\ |f(x,0)| \leq C$$

Remarquons que si f vérifie les trois propriétés précédentes, alors par intégration, il résulte de (H2) et (H3) que

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &\leq C + \int_0^t \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| ds \\ &\leq C + C' \int_0^t \left(1+|s|^{\alpha-1}\right) \leq C''\left(1+|t|^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Il résulte donc du théorème 5.4.1 que T_f est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$, pour tout q vérifiant

$$q \leq \frac{p}{\alpha}$$

On a de plus

Théorème 5.4.3

Soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (H1), (H2), (H3). Soit $p \geq 1$, l'application T_f est alors différentiable, de classe $\mathcal{C}^1$ de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ pour tout $q \geq 1$ vérifiant

$$q \leq \frac{p}{\alpha}$$

Sa différentielle sur $L^p(\Omega)$ est donnée par

$$dT_f(u)v = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)v$$

i.e pour presque tout $x \in \Omega$

$$dT_f(u)(v)(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x)$$

$\boxtimes$

Preuve

Soit $u \in L^p(\Omega)$. Considérons l'application linéaire $A(u)$ de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ définie par

$$A(u)v = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)v$$

i.e par

$$A(u)v(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

$1^{ère}$ **étape** Vérfions tout d'abord que $A(u)v \in L^q(\Omega)$. On a

$$|A(u)v(x)|^q = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|^q |v|^q(x)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |A(u)v(x)|^q &\leq \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|^q |v|^q(x)dx \\
&\leq C\int_\Omega \left(1+|u(x)|^{\alpha-1}\right)^q |v|^q(x)dx \\
&\leq C\int_\Omega \left(1+|u(x)|^{p-q}\right)|v|^q(x)dx \\
&\leq C\left[\int_\Omega |v|^q(x)dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-q}|v|^q(x)dx\right]
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v|^q &\leq \left[\int_\Omega (|v|^q)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}} \left[\int_\Omega 1\right]^{1-\frac{q}{p}} \\
&\leq \left[\int_\Omega |v|^p\right]^{\frac{q}{p}} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{p-q}|v|^q &\leq \left[\int_\Omega \left(|u|^{p-q}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]^{1-\frac{q}{p}} \left[\int_\Omega (|v|^q)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{q}{p}} \\
&\leq \left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1-\frac{q}{p}} \left[\int_\Omega |v|^p\right]^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

La concllusion en découle.

$2^{ème}$ **étape** On montre que l'application $u \mapsto A(u)$ est continue de $X = L^p(\Omega)$ vers $Y = \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ telle que

$$u_n \to u \quad \text{dans } X$$

Il faut montrer que

$$A(u_n) \to A(u) \quad \text{dans } Y$$

$$||A(u_n) - A(u)||_Y = \sup_{\substack{v\in X \\ ||v||_X=1}} \left[\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right| |v(x)|\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Or $\forall v \in X$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right| |v(x)|\right)^q &\leq \left[\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right|^{\frac{p}{p-q}}\right]^{1-\frac{q}{p}} \left[\int_\Omega |v|^p\right]^{\frac{q}{p}} \\ &\leq ||v||_X \left[\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right|^{\frac{p}{p-q}}\right]^{1-\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

Comme $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right| \leq C\left(1+|t|^{\alpha-1}\right)$, on voit que pour tout $p \geq 1$, l'application $T_{\frac{\partial f}{\partial t}}$ est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^r(\Omega)$ pour $r \leq \dfrac{p}{\alpha-1}$. Prenons $r = \dfrac{p}{p-q}$. On vérifie que l'on a bien

$$\frac{p}{p-q} \leq \frac{p}{\alpha-1} \quad \text{soit } \alpha - 1 \leq p - q$$

Donc

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right|^r \to 0$$

et la conclusion en découle.

$3^{ème}$ **étape** Posons $\tilde{X} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On a $\forall u, v \in \tilde{X}$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}||f(x,u+sv) - f(x,u) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u)v||_{L^p(\Omega)} = 0$$

i.e

$$\frac{T_f(u+sv) - T_f(u)}{s} \to A(u)v \quad \text{dans } L^p(\Omega)$$

On écrit pour $x \in \Omega$

$$f(x,u(x)+sv(x)) - f(x,u(x)) = \int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,l)dl$$

et de même
$$s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x) = \int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))dl$$
il en résulte que
$$\begin{aligned}\left|f(x,u(x)+sv(x))\right. &- \left. f(x,u(x)) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x)\right| \\ &= \left|\int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(x,l) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right]\right| \\ &\leq s||v||_{L^\infty} \sup_{l\in[u(x),u(x)+sv(x)]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,l) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|\end{aligned}$$
On a donc par intégration
$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\left|\left|f(x,u(x)+sv(x))\right.\right. &- \left.\left. f(x,u(x)) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x)\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\leq s||v||_{L^\infty}\int_\Omega \sup_{l\in[u(x),u(x)+sv(x)]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,l) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|^p \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{par convergence dominée}\end{aligned}$$

$4^{éme}$ **étape** Conclusion.
La conclusion découle directement des étapes précédentes et du théorème 5.3.2.

⊠

Nous laissons la variante du théorème ci-dessus en exercice

Théorème 5.4.4

i Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une fonction continue sur $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$. On suppose de plus que $\forall x\in\Omega$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est une fonction continue sur $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$. Alors T_f est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ vers $\mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et
$$dT_f(u)v(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x)$$

ii On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))$ est hölderienne d'ordre α, alors T_f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ vers $\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

⊠

Exemples

1. $f(x,t) = t^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 2t$. Ici $\alpha = 1$. Donc l'application $u \mapsto f(x,u) = u^2$ est différentiable de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$, $\forall p \geq 2$, $q \leq \dfrac{p}{2}$ la différentielle est

$$dT_f(u)v = 2uv$$

De même $u \mapsto u^2$ est différentiable de $\mathcal{C}^0$ vers $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^k$ vers $\mathcal{C}^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

2. Considérons de même pour $m > 1$

$$f(x,t) = |t|^{m-1}t$$

ici f ne dépend que de t : $f(x,t) = f(t)$ et $f'(t) = m|t|^{m-1}$. Elle vérifie les hypothèses du théorème avec $\alpha = m$. L'application $T_f : u \mapsto f(y) = |u|^{m-1}u$ est donc différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $L^p(\Omega)$ vers $L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$, pour tout $p \geq m$. Sa dérivée est

$$dT_f(u)v = |u|^{m-1}uv$$

3. Enfin soit h une fonction L^∞ sur Ω, mesurable. Si

$$f(x,t) = h(t) + |t|^{m-1}t \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad f(x,t) = h(x)|t|^{m-1}t \quad (2)$$

on vérifie de même que les hypothèses sont vérifiées avec $\alpha = m$, et que T_f est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^{\frac{p}{m}}$, $\forall p \geq m$ et

$$dT_f(u)v = |u|^{m-1}uv \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad dT_f(u)v = h(x)|u|^{m-1}uv \quad (2)$$

Cas limites
— $p = m$, T_f différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $L^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$
— $p = \infty$, T_f différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $L^\infty(\Omega) \to L^1(\Omega)$
— Si h est $\mathcal{C}^0$, T_f différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{C}^0(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$
— Si h est $\mathcal{C}^{0,\alpha}$, T_f différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$

Lien avec les injections de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$$

Donc si $m \leq 2^*$, T_f est différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{m}}(\Omega)$

Chapitre 6

Le théorème d'inversion locale et quelques applications

6.1 Introduction

Nous avons vu dans la première partie de ce cours que de nombreux problèmes d'Équations aux Dérivées Partielles linéaires pouvaient s'écrire sous la forme

$$Lu = f \tag{6.1}$$

où L est une application linéaire continue entre deux espaces de Banach, X et Y. f est une donnée supposée continue, et u est l'application inconnue. Un exemple simple est le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$. La question se ramène alors à l'étude des propriétés de L. En particulier l'existence et l'unicité de solution pour 6.1 est équivalente au fait que L est bijective.

Le but de cette partie est d'étendre partiellement ce type d'idée à des problèmes non-linéaires, du type

$$B(u) = f \tag{6.2}$$

où $B : X \to Y$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de X vers Y, qui n'est a priori pas linéaire. Par exemple le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin u &= f \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.3}$$

est de ce type. On remarque tout d'abord que si $f = 0$, alors $u = 0$ est une solution évidente de 6.3. Une première idée consiste alors à résoudre 6.3 pour des données f petites en "linéarisant" l'équation 6.3. Notons en effet que pour u petit

$$\sin u \simeq u$$

et donc $B(u) = -\Delta u + \sin u \simeq -\Delta u + u = L(u)$, et on peut imaginer que si f est petite, une solution de 6.3 petite doit être proche, en un certain sens, d'une solution de l'équation 6.1 qui est linéaire. C'est cette approche que le théorème d'inversion locale va nous permettre de mettre en oeuvre. Nous verrons également plus tard comment, dans certaines situations, cet outil permet de montrer que B est globalement surjective.

6.2 Premières définitions

Soient X,Y, deux espaces de Banach. On dit qu'une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ telle que

$$\left\{\begin{array}{lll} B \circ A & = & \mathrm{Id}_X \\ A \circ B & = & \mathrm{Id}_Y \end{array}\right. \tag{6.4}$$

L'application B, si elle existe, est unique. On notera $B = A^{-1}$ et

$$\mathrm{Inv}(X,Y) = \{A \in \mathcal{L}(X,Y),\ A \text{ inversible }\}$$

Remarque Rappelons qu'il est nécessaire d'avoir les deux identités dans 6.4. On peut par exemple prendre $X = Y = L = l^2(\mathbb{N})$

$$\begin{array}{lllllll} A & : & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & A(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où} \left\{\begin{array}{lll} v_n & = & u_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \\ v_0 & = & 0 \end{array}\right. \\ B & : & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & A(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

On voit que $B \circ A = \mathrm{Id}_X$ mais que A n'est pas inversible.

En principe au vu des définitions précédentes, il convient de vérifier que :
a A est bijective. Alors A^{-1} existe au sens de la théorie des ensembles.
b A^{-1} est une application linéaire continue.

En fait, en vertu du résultat profond suivant, la deuxième étape **b**, est immédiatement réalisée lorsque la premiere **a** l'est.

Théorème 6.2.1

Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est bijective, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$, i.e est linéaire continue. En particulier

$$A \in \mathrm{Inv}(X,Y)$$

⊠

Pour une preuve, voir [**?**]. Dans une direction différente, le résultat suivant, bien qu'élémentaire, aura également un rôle important.

Théorème 6.2.2

i Soit $A \in \mathrm{Inv}(X, Y)$. Alors pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ vérifiant

$$||T - A|| < \frac{1}{||A^{-1}||} \tag{6.5}$$

T est inversible.

ii $\mathrm{Inv}(X, Y)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{L}(X, Y)$

iii L'application $J : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(X, Y)$ définie par $J(A) = A^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

⊠

Preuve

i Considérons d'abord le cas $X = Y$, et $A = \mathrm{Id}_X$. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, écrivons

$$\mathrm{Id} - T = B$$

Dans ce contexte, l'hypothèse 6.5 devient

$$||B|| < 1$$

Posons alors

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n$$

Comme $||B|| < 1$, la somme est normalement convergeante. De plus on vérifie que

$$U(\mathrm{Id} - B) = (\mathrm{Id} - B)U = \mathrm{Id}$$

On a donc

$$U = (\mathrm{Id} - B)^{-1} = T^{-1}$$

et la propriété est vérifiée dans le cas considéré.

Dans le cas général on se ramène au premier cas en posant

$$\begin{aligned} B &= A - T \\ &= A\left(\mathrm{Id}_X - A^{-1}T\right) \end{aligned}$$

Si

$$||A - T|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$$

Alors

$$||\mathrm{Id}_X - A^{-1}T||_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

et donc $A^{-1}T$ est inversible d'après la première étape. La conclusion en découle.

ii Exercice

iii Exercice

⊠

Exercice Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $||\mathrm{Id} - T^k|| < 1$ alors T est inversible.

Considérons maintenant $\mathcal{U}$ un ouvert de X, V un ouvert de Y et F une application continue de $\mathcal{U}$ vers V.

Définition

On dit que F est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ vers V s'il existe G continue de V vers $\mathcal{U}$ telle que

$$\begin{cases} G(F(u)) & = & u & \forall u \in \mathcal{U} \\ F(G(u)) & = & u & \forall u \in V \end{cases} \tag{6.6}$$

On note alors $F \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, V)$

⊠

Définition

Soit $F \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, V)$ on dit que F est localement inversible en un point $u_* \in x$, si $\exists U_*$ ouvert de X contenant u_*, V_* ouvert de Y contenant $v_* = F(u_*)$ tels que

$$F \in \mathrm{Hom}\,(U_*, V_*)$$

i.e $\exists G \in \mathcal{C}^0(V_*, U_*)$ tel que

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{U_*}, \quad F \circ G = \mathrm{Id}_{V_*}$$

L'application G est appelée "inverse locale de F". On note $G = F^{-1}$. [Il y a abus de langage et de notation car la définition de G dépende de u_*, et il n'y a pas unicité.]

⊠

Remarquons que si F est différentiable en u_*, et G différentiable en $v_* = F(u_*)$, on obtient

$$\begin{cases} dG(v_*) \circ dF(u_*) & = & \mathrm{Id}_X \\ dF(u_*) \circ dG(v_*) & = & \mathrm{Id}_Y \end{cases}$$

de sorte que $dF(u_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$, $dG(v_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$ et

$$dF(u_*)^{-1} = dG(v_*)$$

Une condition nécessaire pour que F soit localement inversible est donc, lorsque F est différentiable en u_*, $dF(u_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$. Si de plus F est $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de u_*, ceci est également une condition suffisante en vertu du théorème d'inversion locale dont voici un énoncé.

6.3 Le Théorème d'inversion locale

Théorème 6.3.1

Soit $F \in \mathcal{C}^1(X, Y)$. On suppose que pour $u_* \in X$

$$dF(u_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y) \tag{6.7}$$

Alors F est localement inversible en u_*, d'inverse $\mathcal{C}^1$. Plus précisément, il existe un voisinage $\mathcal{U}_*$ de u_*, un voisinage V_* de $v_* = F(u_*)$ tels que $\mathcal{U}_*$ et V sont ouverts et

i $F \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_*, V_*)$

ii $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(V_*, X)$ et pour tout $v \in V_*$

$$dF^{-1}(v) = [dF(u)]^{-1}, \quad u = F^{-1}(v)$$

iii Si $F \in \mathcal{C}^k(X,Y)$ alors $F^{-1} \in \mathcal{C}^k(V_*, X)$

$\boxtimes$

La preuve de ce théorème repose sur le théorème du point fixe de Picard, que nous rappelons brièvement.

Théorème 6.3.2

Soit K un espace métrique complet et Φ une application de K dans K. On suppose Φ contractante, i.e qu'il existe $k_0 < 1$ tel que

$$\forall (x,y) \in K^2,\ ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq k_0 ||x-y|| \tag{6.8}$$

Alors Φ possède un unique point fixe x_0, i.e

$$\exists ! x_0 \in K,\ \Phi(x_0) = x_0$$

$\boxtimes$

Preuve du théorème 6.3.2

A Existence du x_0

Soit u_0 un point quelconque de X. On construit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$u_{n+1} = \Phi(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons que cette suite est une suite de Cauchy dans X. On a pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})$$

donc

$$||u_{n+1} - u_n|| \leq k_0 ||u_n - u_{n-1}||$$

En itérant, il résulte que $\forall l \in \mathbb{N}^*$

$$||u_{n+l} - u_{n+l-1}|| \leq k_0^l ||u_{n+1} - u_n||$$

En sommant ces relations on obtient

$$\begin{aligned} ||u_{n+l} - u_n|| &\leq \left(\sum_{p=1}^{l} k_0^p\right) ||u_{n+l} - u_n|| \\ &\leq k_0^{n-1} ||u_1 - u_0|| \left(\sum_{p=1}^{l} k_0^p\right) \\ &\leq \frac{k_0^{n-1}}{1-k_0} ||u_1 - u_0|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

La suite étant de Cauchy, elle possède un limite x_0. En passant à la limite dans la relation $\Phi(u_n) = u_{n+1}$ on obtient $\Phi(x_0) = x_0$

B Unicité

Supposons qu'il existe deux points fixes distincts x_0 et x_1. Alors

$$||x_0 - x_1|| = ||\Phi(x_0) - \Phi(x_1)|| \leq k_0||x_0 - x_1|| < ||x_0 - x_1||$$

Contradiction.

$\boxtimes$

Preuve du théorème 6.3.1

Quitte à transférer les origines de X et Y, on peut toujours supposer, pour simplifier les notation que

$$u_* = 0 \quad v_* = F(u_*) = 0$$

La preuve comporte plusieurs étapes.

$1^{ère}$ **étape** On se ramène au cas $X = Y$, $dF(0) = \mathrm{Id}_X$. Si A est en effet une application linéaire de Y vers X inversible, i.e $A \in \mathrm{Inv}(Y, X)$, on peut considérer

$$\tilde{F} = A \circ F$$

on vérifie que $\tilde{F} \in \mathcal{C}^1(X, Y)$ et

$$d\tilde{F}(0) = A \circ dF(0)$$

En choisissant $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ défini par

$$A = [dF(0)]^{-1} \tag{6.9}$$

On obtient

$$d\tilde{F} = \mathrm{Id}_X$$

Il suffira donc de vérifier la propriété pour $\tilde{F}$

$2^{ème}$ **étape** $\tilde{F}$ est un homéomorphisme local.
Écrivons

$$\tilde{F} = \mathrm{Id}_X + \psi$$

où $\psi \in \mathcal{C}^1(X, Y)$. Comme $d\tilde{F}(0) = \mathrm{Id}_X$, il en résulte

$$d\psi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

Par continuité de $d\psi$, il existe $r > 0$ tel que

$$||d\psi(p)|| \leq \frac{1}{2}, \ \forall p, \ ||p|| < r$$

Par le théorème des accroissements finis, on en déduit donc que $\forall p, q$ dans $\overline{B(r)}$

$$||\psi(p) - \psi(q)|| \leq \frac{1}{2}||p - q|| \tag{6.10}$$

De plus, comme $\psi(0) = 0$ on a

$$||\psi(p)|| \leq \frac{1}{2}||p||, \ \forall p \in B(r) \tag{6.11}$$

donc

$$\psi : \overline{B(r)} \longrightarrow \overline{B\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Pour $v \in X$ posons

$$\Phi_v(p) = v - \psi(p), \ \forall p \in \overline{B(r)}$$

Si $||v|| \leq \dfrac{1}{2}r$, il résulte de 6.11 que

$$||\Phi_v(p)|| \leq ||v|| + ||\psi(p)|| \leq r$$

et donc $\Phi_v : \overline{B(r)} \longrightarrow \overline{B(r)}$. Par ailleurs, par 6.10, Φ_v est contractante de rapport $\dfrac{1}{2}$. On peut donc appliquer le théorème 6.3.1 à $\overline{B(r)}$ et Φ_v pour conclure qu'il existe un unique point fixe $u \in \overline{B(r)}$ de Φ_v, i.e $\exists! u \in \overline{B(r)}$ tel que

$$u = \Phi_v(u) = v - \psi(u)$$

i.e

$$\tilde{F}(u) = u + \psi(u) = v$$

Par conséquent on peut définir un inverse $\tilde{F}^{-1} : \overline{B\left(\frac{r}{2}\right)} \longrightarrow \overline{B(r)}$. Montrons que $\tilde{F}^{-1}$ est continu. Soit v, z dans $B(\frac{r}{2})$, $u = \tilde{F}^{-1}(v)$, $w = \tilde{F}^{-1}(z)$, de sorte que

$$u + \psi(u) = v, \quad w + \psi(w) = z$$

On a

$$||u - w|| \leq ||v - z|| + ||\psi(u) - \psi(w)|| \leq ||v - z|| + \frac{1}{2}||u - w||$$

et donc

$$||\tilde{F}^{-1}(v) - \tilde{F}^{-1}(z)|| \leq 2||v - z||$$

Ceci montre que $\tilde{F}^{-1}$ est lipschitzienne de rapport 2. Si on pose $V = B\left(\frac{r}{2}\right)$, $U = B(r) \cap \tilde{F}^{-1}(V)$, on obtient donc

$$\tilde{F}_{|U} \in \mathrm{Hom}\,(U, V)$$

$3^{\text{ème}}$ **étape** $\tilde{F}^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$

De l'églaité

$$u + \psi(u) = v$$

on déduit

$$\tilde{F}^{-1}(v) = v - \psi\left(\tilde{F}^{-1}(v)\right)$$

Comme $\psi(u) = o(||u||)$ et comme F^{-1} est lipschitz, on en déduit que

$$\tilde{F}^{-1}(v) = v + o(||v||)$$

i.e F^{-1} est différentiable en 0 et

$$dF^{-1}(0) = \mathrm{Id}_x$$

Pour un point quelconque $v \in B\left(\frac{r}{2}\right)$ on raisonne de même, et on déduit

$$d\tilde{F}^{-1}(v) = \left[d\tilde{F}(u)\right]^{-1}, \quad u = \tilde{F}^{-1}$$

$4^{ème}$ **étape** Preuve de **iii** par dérivation et récurrence.

⊠

6.4 Quelques applications du théorème d'inversion locale aux EDP elliptiques non linéaires

6.4.1 Premier exemple

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Reprenons l'exemple de l'introduction. Pour f donnée dans L^2 on cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin u &= f & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Cette équation est bien entendu non linéaire en raison du terme $\sin u$. La première question qu'il faut se poser est de savoir dans quel espace chercher la solution. Au vu de l'opérateur linéarisé $-\Delta u + u$ en 0, et comme $f \in L^2$ oblige à prendre $Y = L^2$, il est naturel d'imposer

$$X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

On vérifie alors que l'application $F : X \longrightarrow Y$ définie par

$$F(u) = -\Delta u + \sin u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ de X vers Y et

$$dF(u)v = -\Delta v + (\cos u)v \tag{6.12}$$

Preuve de 6.12

On peut écrire

$$F(u) = Au + N(u)$$

où A est linéaire, $Au = -\Delta u$ et N désigne la partie non linéaire $N(u) = \sin u$. Comme A est linéaire continue de X vers Y, on a

$$dA(u)v = Av = -\Delta v$$

Pour N on constate que l'on peut écrire

$$N = T_f \circ i$$

où $i : H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ désigne l'injection et $f = \sin t$ i.e $T_f : L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)\,,\ u \mapsto T_f u = \sin u$. Comme

$$f'(t) = \cos t, \quad |f'(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

on déduit des résultats du chapitre 5 que T_f est différentiable de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ et

$$dT_f(u)v = (\cos u)v$$

On obtient donc de même

$$dN(u)v = (\cos u)v, \quad \forall (u,v) \in X^2$$

et 6.12 en découle.

⊠

On a en particulier

$$dF(0)v = -\Delta v + v \equiv Lv$$

On sait que l'opérateur L est un isomorphisme de X sur Y, donc on peut appliquer le théorème 6.3.1 pour conclure.

Proposition 6.4.1

Il exist $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $f \in L^2(\Omega)$ et

$$||f||_{L^2(\Omega)} \leq \delta$$

Alors il existe un unique $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} ||u||_{H^2(\Omega)} & \leq & \alpha & \\ -\Delta u + \sin u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

⊠

Preuve

On sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_*$ de 0 dans X et V_* de 0 dans Y tels que $F_{|\mathcal{U}_*} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_*, V_*)$. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_Y(\delta) = \left\{ f \in L^2(\Omega)\,,\ ||f||_{L^2(\Omega)} \leq \delta \right\} \subset V_*$$

et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$F^{-1}\left(\left\{ f \in L^2(\Omega)\,,\ ||f||_{L^2(\Omega)} \leq \delta \right\} \right) \subset B_X(\alpha)$$

⊠

6.4.2 Deuxième exemple

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Pour f donnée $\left(\text{par exemple } f \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)\right)$, on cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u - u^3 &= f & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Cette équation non-linéaire a un sens dès que l'on sait définir u^3 comme fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$. On suppose donc $u \in L^3_{loc}(\Omega)$. La non-linéarité u^3 apparaît ici plus délicate à traiter, car si on prend comme précédemment $X = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$ il faudra avoir $u \in L^2(\Omega)$. Or

$$H^2 \hookrightarrow L^6(\Omega)$$

uniquement si N est petit. Pour obtenir des injections convenables, on change donc légèrement de point de vue, et on prend

$$\begin{aligned} X_p &= W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \\ Y_p &= L^p(\Omega) \end{aligned}$$

où $p \geq 2$ est à déterminer en fonction des injections de Sobolev. On a

Lemme 6.4.1

Pour tout $p \geq p_0$

$$X = W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{3p}(\Omega)$$

pour $p_0 = \dfrac{N}{3}$, si $N > 3$ et $p_0 = 2$, si $N \leq 3$.

$\boxtimes$

Preuve

On a par injection de Sobolev

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega), \quad \forall q \leq p^* = \frac{Np}{N-p}$$

et

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall r \leq q^* = \frac{Nq}{N-q}$$

i.e

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall r \leq r^* = \frac{Np^*}{N-p^*} = \frac{Np}{N-2p}$$

[De manière générale, on a l'injection $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega)$]

On a donc $3p \leq r^*$ dès que

$$3p \leq \frac{Np}{N-2p}$$

i.e

$$3N - 6p \leq N$$

soit

$$p \geq \frac{N}{3}$$

⊠

Pour $p \geq p_0$ considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} F & : & X_p & \rightarrow & Y_p \\ & & u & \mapsto & F(u) \end{array}$$

avec $F(u) = -\Delta u - u^3 = Au + N(u)$, où $A = -\Delta$ est linéaire et $N(u) = -u^3$ est la partie non linéaire. On vérifie que A est linéaire continue et donc

$$dA(u)v = Av$$

Soit i l'injection de X_p dans $L^{3p}(\Omega)$. On a

$$N(u) = T_f \circ i$$

où

$$T_f \ : \ L^{3p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \equiv Y_p$$

définie par $f(t) = t^3$, i.e

$$Tf_u = u^3, \quad \forall u \in L^{3p}(\Omega)$$

Comme $f'(t) = -3t^2$, T_f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$dT_f(u)v = -3u^2v, \quad \forall (u, v) \in L^{3p}(\Omega)$$

par composition on obtient donc

Lemme 6.4.2

L'application F est de classe $\mathcal{C}^1$ de X_p vers Y_p, pour tout $p \geq p_0$ et

$$dF(u)v = -\Delta v - 3u^2v$$

En particulier

$$dF(0)v = -\Delta v$$

⊠

Par la théorie éllptique, on sait de $dF(0)$ est un isomorphisme de X_p vers Y_p. On en déduit donc comme précédemment

Proposition 6.4.2

Soit $p \geq p_0$. Il existe $\delta_p > 0$ et $\alpha_p > 0$ tels que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $||f||_{L^p(\Omega)} \leq \delta_p$, alors $\exists! u \in X_p$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ccll} ||u||_{W^{2,p}(\Omega)} & \leq & \alpha_p & \\ -\Delta u - u^3 & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

⊠

6.4.3 Autre exemple

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour f donnée, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u - u^3 &= \lambda u + f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce problème est bien entendu assez semblable au précédent. Pour $p \geq p_0$, considérons donc F_λ définie de X_p vers Y_p par

$$F_\lambda(u) = -\Delta u - u^3 - \lambda u$$

D'après ce qui précède, on voit que $F_\lambda \in \mathcal{C}^1(X, Y)$ et que

$$dF_\lambda(u)v = -\Delta v - \lambda v - 3u^2 v, \quad \forall (u,v) \in X_p^2$$

en particulier pour $u = 0$

$$dF_\lambda(0)v = -\Delta v - \lambda v$$

Pour pouvoir utiliser le théorème d'inversion locale dans un voisinage de 0, il convient donc de s'intéresser aux propriétés de l'opérateur

$$L_\lambda(v) = -\Delta v - \lambda v$$

On a

Lemme 6.4.3

Soit $\sigma_p = \{-\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'ensemble des valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec données de Dirichlet au bord. Alors, si $\lambda \notin \sigma_p$, L_λ est un isomorphisme de X_p vers Y_p, pour tout $p \geq p_0$.

⊠

Preuve

On va utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach (théorème 6.2.1). Pour établir que L_λ est un isomorphisme, il suffit de montrer que L_λ est bijectif,i.e

$\alpha)$ Ker $L_\lambda = 0$

$\beta)$ Im $L_\lambda = Y_p$

$\alpha)$ Soit $w \in$ Ker L_λ. On a par définition

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w \quad \text{dans } \partial \\ w &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $w \neq 0$ ceci impliquerait $\lambda \in \sigma_p$ contradiction.

$\beta)$ Il s'agit de montrer que $\forall f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in X_p$ tel que

$$(I) \quad -\Delta u - \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega$$

A cet effet on invoque l'alternative de Fredholm. Soit $T\ :\ Y \longrightarrow X$ défini par $T_p = -\Delta_0^{-1}$, i.e $\forall f \in L^p(\Omega)$ T_f est l'unique solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \partial \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Clairement, T_f est un opérateur linéaire continu. Soit i_p l'injection de X_p dans L^p qui est compacte. En posant

$$\tilde{T} = i \circ T$$

on vérifie que $\tilde{T}$ est compacte. (I) s'écrit alors

$$u = \tilde{T}(\lambda u + f)$$

i.e

$$\left(\mathrm{Id} - \lambda\tilde{T}\right) u = \tilde{T} f$$

On peut alors appliquer l'alternative de Fredholm à $\mathrm{Id} - \lambda\tilde{T}$ pour conclure :

$$\mathrm{Ker}\ \left(\mathrm{Id} - \lambda\tilde{T}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}\ \mathrm{Id} - \lambda\tilde{T} = L^p(\Omega)$$

Or

$$u \in \mathrm{Ker}\ \left(\mathrm{Id} - \lambda\tilde{T}\right)\ \Leftrightarrow\ -\Delta u = \lambda u\ \Leftrightarrow\ u = 0 \text{ ou } \lambda \in \sigma_p$$

D'où le résultat.

$\boxtimes$

On déduit alors comme précédemment de ce Lemme :

Proposition 6.4.3

On suppose que $\lambda \notin \sigma_p$, et $p \geq p_0$. Alors il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ (dépendant de λ et p) tels que, si $||f||_{L^p} \leq \delta$, alors il existe un unique $u \in X_p$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcll} ||u||_{W^{2,p}(\Omega)} & \leq & \alpha & \\ -\Delta u - u^3 & = & \lambda u + f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

$\boxtimes$

6.5 Méthode de continuation, résultats globaux

6.5.1 Préliminaires

Le théorème d'inversion locale peut servir également à démontrer des résultats de nature globale. On a en effet

Théorème 6.5.1

Soit X et Y deux espaces de Banach, et $F \in \mathcal{C}^1(X, Y)$. On suppose de plus

$$\forall u \in X, \ dF(u) \in \text{Inv } (X, Y) \tag{6.13}$$

Alors $F(X)$ est une partie ouverte de Y, non vide.

$\boxtimes$

Preuve

Clairement, $F(X)$ est non vide. Soit $y_0 \in F(X)$. Il existe donc $x_0 \in X$ tel que

$$F(x_0) = y_0$$

Grâce à l'hypothèse 6.13, on peut appliquer le théorème d'inversion locale en x_0. Il existe donc un voisinage $\mathcal{U}_0$ de x_0 et un voisinage V_0 de y_0 tels que

$$F_{|\mathcal{U}_0} \in \text{Hom } (\mathcal{U}_0, V_0)$$

En particulier, $V_0 \subset F(X)$. Donc $F(X)$ est ouvert.

$\boxtimes$

En pratique on utilise le corollaire suivant, qui est un des aspects de ce que l'on appelle la méthode de continuation.

Corollaire 6.5.1

Soit $F \in \mathcal{C}^1 (X, Y)$, vérifiant 6.13. On suppose de plus que

$$F(X) \text{ est fermé} \tag{6.14}$$

Alors F est surjective, i.e $F(X) = Y$

$\boxtimes$

6.5.2 Preuve

Si F vérifie 6.13 et 6.14, $F(X)$ est un ouvert et fermé non vide de Y. Comme $F(X) \neq \emptyset$, on a

$$F(X) = Y$$

$\boxtimes$

Nous allons voir dans ce qui suit une application de cette méthode.

6.5.3 Une application

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) > 0 \tag{6.15}$$

Soit $I = [0,1]$. Pour $f \in \mathcal{C}^0(I)$ on considère le problème :

Trouver $u \in \mathcal{C}^2(I)$ tel que

$$\begin{cases} -u'' + g(u) = f & \text{sur } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On considère alors $X = \{u \in \mathcal{C}^2(I),\ v(0) = v(1) = 0\}$, $Y = \mathcal{C}^2(I)$. On a

Lemme 6.5.1

L'application F de X vers Y définie par

$$F(u) = -u'' + g(u)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\forall u \in X,\ \forall v \in X_p,\ dF(u)v = -v'' + g'(u)v$$

⊠

Nous laissons la preuve de ce lemme en exercice.

Lemme 6.5.2

$$\forall u \in X,\ dF(u) \in \text{Inv }(X,Y)$$

⊠

Preuve

On raisonne comme dans la preuve du lemme 6.4.3. Il suffit, grâce à l'alternative de Fredholm, de montrer que

$$\forall u \in X,\ \text{Ker } dF(u) = \{0\}$$

Or $w \in \text{Ker } dF(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} -w'' + g'(u)w = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

En mutlipliant par w et en intégrant sur U, on trouve

$$\int_0^1 |\dot{w}|^2 + g'(u)w^2 = 0$$

Comme $g' \geq 0$ on en déduit

$$\int_0^1 |\dot{w}|^2 = 0$$

et donc

$$w = 0$$

$\boxtimes$

Lemme 6.5.3

$F(X)$ est fermé dans Y

$\boxtimes$

Preuve

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $F(X)$ telle que $f_n \to f$ dans Y. Il s'agit de montrer que f appartient à $F(X)$, c'est-à-dire qu'il existe $u \in X$ tel que $f = F(u)$. Comme $f_n \in F(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $u_n \in X$ tel que

$$f_n = F(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous allons montrer que pour une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{\sigma(n)}$ converge dans Y vers un élément u. Par continuité de la fonction F, on a alors

$$u_{\sigma(n)} \longrightarrow u \text{ dans } X \Rightarrow f = F(u) \tag{6.16}$$

ce qui terminera la preuve. Pour établir la compacité de (u_n), nous décomposons l'argument en trois étapes.

$1^{ère}$ **étape** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(I)$

En effet, on a pour tout n, $f_n = F(u_n)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -u_n'' + g(u_n) = f_n \\ u_n(0) = u_n(1) = 0 \end{cases}$$

Multiplions l'équation par u_n. Il vient en intégrant par parties

$$\int_0^1 |\dot{u_n}|^2 + g(u_n)u_n = \int_0^1 f_n u_n \leq ||f_n||_{L^2}||u_n||_{L^2} \tag{6.17}$$

Par l'hypothèse 6.15, il existe une constante $\mu > 9$ telle que

$$g(t)t \geq -\mu|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

de sorte que 6.17 donne

$$\int_0^1 |\dot{u_n}|^2 \leq (||f_n||_{L^2} + \mu)\,||u_n||_{L^2}$$

et la conclusion découle du fait que $||f_n||_{L^2}$ est bornée.

$2^{ème}$ **étape** Pour une sous-suite $u_{\sigma(n)} \to u$ dans $\mathcal{C}^0(I)$.

Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'injection

$$H_0^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(I)$$

ici $u \in \mathcal{C}^0(I)$.

$3^{ème}$ **étape** $g(u_{\sigma(n)}) \to g(u)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$

Immédiat.

$4^{ème}$ **étape** $u_{\sigma(n)} \to u$ dans $\mathcal{C}^2(I)$ et $-u'' + g(u) = f$, i.e $f \in F(X)$

En effet, on a

$$-u''_{\sigma(n)} = f_n - g(u_{\sigma(n)})$$

Comme $f_n - g(u_{\sigma(n)}) \to f - g(u)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$, on peut passer à la limite dans l'équation.

6.16 est donc établi

Il résulte de l'étude précédente que $F(X) = Y$, i.e $\forall f \in \mathcal{C}^0(I)$, l'équation

$$\begin{cases} -u'' + g(u) = f & \text{sur } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

possède une solution de classe $\mathcal{C}^2$

Exercice Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g' \geq 0$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 1$, $C > 0$, tels que

$$|g'(t)| \leq C\left(1 + |t|^{\alpha-1}\right)$$

Soit Ω un domaine borné, régulier de $\searrow^N$. On suppose $\alpha + 1 \leq 2^*$

a) Montrer que l'application $F : H_0^1 \hookrightarrow H^{-1}$ définie par

$$F(u) = -\Delta u + g(u)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$

b) Montrer que $\forall u \in H_0^1,\ dF(u) \in \text{Inv}\ \left(H_0^1, H^{-1}\right)$

c) Montrer que $F\left(H_0^1\right)$ est fermé

d) Conclure

6.6 Le Théorème des fonctions implicites

6.6.1 Énoncé

Dans le troisième exemple de la section 4, nous avons vu un problème dépendant d'un paramère λ. Le théorème d'inversion locale nous avais fourni l'existence d'une solution (proche de 0) pour un ensemble ouvert de choix du paramètre. Le théorème des fonctions implicites va nous permettre de préciser la dépendance de la solution en fonction du paramètre.

De manière générale, on considère une application

$$\begin{array}{rccc} F : & \Lambda \times \mathcal{U} & \longrightarrow & V \\ & (\lambda, u) & \longmapsto & F(\lambda, u) \end{array}$$

où

Λ est un ouvert de T espace de Banach
$\mathcal{U}$ est un ouvert de X espace de Banach
Y est un espace de Banach

On supposera dans toute la suite que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $(\lambda_*, \mu_*) \in \Lambda \times \mathcal{U}$ on note $F_u(\lambda_*, \mu_*)$ la dérvivée partielle par rapport à u, i.e $F_u(\lambda_*, \mu_*) \in \mathcal{L}(X, Y)$ et

$$F_u(\lambda_*, \mu_*)v = dF(\lambda_*, \mu_*)(0, v), \quad \forall v \in X$$

de même

$$F_\lambda(\lambda_*, \mu_*)\mu = dF(\lambda_*, \mu_*)(\mu, 0), \quad \forall \mu \in T$$

On s'intéresse à l'équation

$$F(\lambda, u) = 0$$

Le théorème des fonctions implicites décrit l'ensemble des solutions au voisinage d'une solution particulière. On a

Théorème 6.6.1

On suppose que $F \in \mathcal{C}^k(\Lambda \times \mathcal{U}, Y)$. Soit $(\lambda_*, u_*) \in \Lambda \times \mathcal{U}$ tel que

$$F(\lambda_*, u_*) = 0$$

et

$$F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv } (X, Y)$$

Alors il existe un voisinage θ_* de λ_* dans Λ, et un voisinage $\mathcal{U}_*$ de u_* dans $\mathcal{U}$, et une application $g \in \mathcal{C}^k(\theta_*, X)$ tels que

i $F(\lambda, g(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in \theta_*$

ii $\forall (\lambda, u) \in \theta_* \times \mathcal{U}_*,\ F(\lambda, u) = 0 \Rightarrow u = g(\lambda)$

iii $g'(\lambda) = [F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$, où $\lambda \in \theta_*$ et $p = (\lambda, g(\lambda))$

⊠

Preuve

On considère l'application ψ définie de $\Lambda \times \mathcal{U}$ vers $\Lambda \times Y$ par

$$\psi(\lambda, u) = (\lambda, F(\lambda, u))$$

ψ est clairement de classe $\mathcal{C}^k$ et on a

$$\begin{aligned} d\psi(\lambda, u)(\xi, w) &= (\xi, dF(\lambda, u)(\xi, w)) \\ &= (\xi, F_\lambda(\lambda, u)\xi + F_u(\lambda, u)w) \end{aligned}$$

en (λ_*, u_*) on sait que $F_u(\lambda_*, u_*)$ est inversible. Ceci implique que $d\psi(\lambda_*, u_*)$ l'est. En effet soit $(\eta, v) \in T \times Y$. On doit résoudre

$$d\psi(\lambda_*, u_*)(\xi, w) = (\eta, v)$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \xi &= \eta \\ A\xi + Bw &= v \end{cases}$$

où $A = F_\lambda(\lambda_*, u_*) \in \mathcal{L}(T, Y)$, $B = F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv } (X, Y)$. On a donc

$$A\eta + Bw = v \Leftrightarrow Bw = v - A\eta$$

et donc

$$w = B^{-1}(v - A\eta)$$

On a prouvé que

$$d\psi(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv } (T \times X, T \times Y)$$

On applique alors le théorème d'inversion locale en (λ_*, u_*) à ψ. Celle-ci a donc un inverse local Φ défini sur un voisinage $\theta_* \times V$ de $(\lambda_*, F(\lambda_*, u_*)) = (\lambda_*, 0)$. Au vu de la définition de ψ, la première composante de Φ est l'identité ($\mathcal{U}_*$ est un voisinage de u_*)

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & (\theta_* \times V) & \longrightarrow & (\theta_* \times \mathcal{U}_*) \\ & & (\lambda, y) & \longmapsto & (\lambda, \varphi(\lambda, y)) \end{array}$$

Ici, φ désigne une application de $\theta_* \times V$ vers X, de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant

$$F(\lambda, \varphi(\lambda, y)) = y$$

En différenciant la relation on trouve

$$\begin{cases} F_\lambda + F_u \circ \varphi_\lambda &= 0 \\ F_u \circ \varphi_u &= \text{Id} \end{cases}$$

et donc

$$\varphi_\lambda = -[F_u]^{-1} F_\lambda, \quad \varphi_u = [F_u]^{-1}$$

Posons alors

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda, 0)$$

On obtient

$$F(\lambda, g(\lambda)) = 0, \ \forall \lambda \in \theta_*$$

et les autres propriétés se démontrent aisément.

⊠

6.6.2 Exemple

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u + u^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Ici f est fixée, et λ considéré comme un paramètre. L'étude de cette équation a déjà été abordée. Pour $p \geq p_0 = \max\left(\frac{N}{3}, 2\right)$ nous avons introduit les espaces

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} X & = & X_p & = & W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Y & = & Y_p & = & L^p(\Omega) \end{array} \right.$$

et l'espace des paramètres est ici

$$T = \mathbb{R}$$

Introduisons pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in X_p$

$$F(\lambda, u) = -\Delta u - \lambda u - u^3 - f$$

On vérifie de nouveau que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times X$ à valeurs dans Y et que $\forall (\lambda_*, u_*) \in \mathbb{R} \times X$

$$\begin{array}{rcl} F_u(\lambda_*, u_*)v & = & -\Delta v - \lambda_* v - 3u_*^2 v, \ \forall v \in X \\ F_\lambda(\lambda_*, u_*)\eta & = & -u_*\eta, \ \forall \eta \in \mathbb{R} \end{array}$$

L'équation (I) s'écrit alors

$$F(\lambda, u) = 0 \tag{6.18}$$

Soit alors (λ_*, u_*) une solution de 6.18, i.e.

$$F(\lambda_*, u_*) = 0 \tag{6.19}$$

telle que

$$F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv } (X, Y) \tag{6.20}$$

Le théorème d'inversion locale nous avait permis de faire varier f à λ fixé. Le théorème des fonctions implicites ca nous permettre de faire varier λ à f fixé. Plus précisément il affirme qu'il existe $\alpha > 0$, une application

$$g \ : \ \mathcal{C}^\infty\left(]\lambda_* - \alpha, \lambda_* + \alpha[\right) \longrightarrow X$$

tels que

$$F(\lambda, g(\lambda)) = 0$$

i.e. $u = g(\lambda)$ vérifie (I). De plus il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$||u - u_*||_X \leq \varepsilon$$

et u vérifie (I) entraîne

$$u = g(\lambda)$$

On obtient donc des courbes de solutions.

Remarquons que si $f = 0$, alors

$$u = 0$$

est solution évidente de (I) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La courbe $\varphi \;:\; \lambda \longmapsto 0$ est donc une courbe solution. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que si

$$\lambda_* \notin \sigma_p\,(-\Delta_0)$$

alors près de $(\lambda_*, 0)$, la courbe g se confond avec φ.

6.6.3 Prolongement des courbes de solutions

De nouveau, nous considérons le cas $T = \mathbb{R}$, et $F \;:\; \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$ de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. Soit (λ_*, u_*) tel que

$$\begin{cases} F(\lambda_*, u_*) = 0 \\ F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv }(X, Y) \end{cases}$$

Nous avons vu que le théorème des fonctions implicites permettait de construire localement près de (λ_*, u_*) une courbe de solution. En fait, on a le résultat suivant, de nature plus générale.

Proposition 6.6.1

Il existe un intervalle $I = I_{max} =]a_-, a_+[$ contenant λ_*, et une application g de classe $\mathcal{C}^1$ de I_{max} vers X tels que $\forall \lambda \in I$

$$F(\lambda, g(\lambda)) = 0$$
$$F_u(\lambda, g(\lambda)) \in \text{Inv }(X, Y)$$

Si $\lambda \to a_\pm$ alors deux cas seulement peuvent se produire

1. g n'a pas de limite
2. si $g(\lambda) \to u_\pm$ alors nécessairement

$$F_u(a_\pm, u_\pm) \notin \text{Inv }(X, Y)$$

$\boxtimes$

Nous laissons la démonstration en exercice.

Remarquons que, dans de nombreuses situations, des propriétés de compacité de (I) entraînent, dans le premier cas, $||g(\lambda)||_X \to +\infty$.

Chapitre 7

Introduction à la théorie des bifurcations

7.1 Introduction

Soit X et Y deux espaces de Banach. De nouveau nous considérons une équation à un paramètre réel λ.

$$F(\lambda, u) = 0 \tag{7.1}$$

où $F : \mathbb{R} \times X \to Y$. Lorsque F est de classe $\mathcal{C}^1$ nous avons étudié et décrit les solutions de 7.1 au voisinage d'une solution (λ_*, u_*), et montré en particulier que si $F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{ Inv}(X, Y)$ alors ces solutions étaient données par une courbe $\lambda \to g(\lambda)$. Le but de la théorie des bifurcations est d'étudier le cas où la condition

$$F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{ Inv}(X, Y)$$

N'EST PAS VÉRIFIÉE ! Dans une telle situation, de nombreux cas de figure peuvent apparaître, et nous ne discuterons essentiellement que l'un d'entre eux, à savoir l'apparition d'une nouvelle branche de solutions (bifurcation à partir d'une branche connue). Dans toute la suite nous ferons les deux hypothèses suivantes sur F

— $H_0 1$, $F \in \mathcal{C}^2 (\mathbb{R} \times X, Y)$

— $H_0 2$, $f(\lambda, 0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e $u = 0$ est toujours solutions de 7.1.

La droite D du graphe $\mathbb{R} \times X$, définie par

$$D = \{(\lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

sera appelée la branche de solutions évidentes.

On considère également l'ensemble $S \subset \mathbb{R} \times X$

$$S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X,\ u \neq 0,\ F(\lambda, u) = 0\}$$

qui représente l'ensemble des solutions non-évidentes. Le but sera ici de décrire S au voisinage de D.

Afin de développer notre intuition du problème, commençons par décrire une situation simple où F est linéaire par rapport à . Prenons par exemple $X = Y$ et

$$\tilde{F}(\lambda, u) = -Lu + \lambda u = -(\lambda \text{Id } - L)u$$

où L est une application linéaire de X vers X, continue.

L'équation

$$\tilde{F}(\lambda, u) = 0$$

est donc équivalente à

$$u \in \text{Ker } (L - \lambda \text{Id }) = K_\lambda$$

i.e

$$\tilde{S} = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X, \lambda \in \sigma_p(L), u \in \text{Ker } (L - \lambda \text{Id}) \setminus \{0\}\} = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p} \{\lambda\} \times (K_\lambda \setminus \{0\})$$

Chapitre 8

Calcul des Variations. Minimisation

8.1 Introduction

Rappelons brièvement comment, dans le cas symétrique le problème de Lax-Milgram est équivalent à un problème de minimisation. Soit H un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire continue symétrique, i.e

$$a(u, v) = a(v, u), \ \forall (u, v) \in H^2$$

On suppose de plus a elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha ||u||^2, \ \forall u \in H$$

Le théorème de Riesz (ou de Lax-Milgram) affirme alors que pour tout $L \in H^*$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \ \forall v \in H \tag{8.1}$$

Intérprétation variationnelle de 8.1 On introduit la fonction $J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$$

On a $\forall w \in H, \ \forall u \in H$

$$\begin{array}{rcl} J(u+w) & = & \frac{1}{2}a(u, u) + [a(u, w) - L(w)] + \frac{1}{2}a(w, w) - L(u) \\ & = & J(u) + [a(u, w) - L(w)] + \frac{1}{2}a(w, w) \\ & > & J(u) + [a(u, w) - L(w)] \quad \text{si } w \neq 0 \end{array}$$

Il résulte en particulier que $u \in H$ est solution de 8.1 si et seulement si

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v) \tag{8.2}$$

[en écrivant v=u+w]. En d'autres termes, l'unique solution de 8.1 est donc l'unique solution du problème de minimisation 8.2.

Comme nous allons le voir, la condition 8.1 correspond à la condition du 1^{er} ordre pour un point de minimum de J. Il s'avérera que les deux conditions sont équivalentes pour des fonctions convexes, ce qui est le cas pour J. Enfin, l'unicité du point de minimum pourra être analysée comme une conséquence de la stricte convexité de J.

8.2 Problèmes de minimisation : condition du 1^{er} ordre

Soit X un espace de Banach, et F une application de X vers $\mathbb{R}$. Soit $u \in X$. On suppose que

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v) \tag{8.3}$$

c'est-à-dire

$$F(u) \leq F(v) \ \forall v \in X \tag{8.4}$$

On a alors

Proposition 8.2.1

Soit $u \in X$ vérifiant 8.4. Alors, si F est Gateaux-différentiable en u, on a

$$d_G F(u) = 0$$

⊠

Preuve

On a en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $w \in X$

$$F(u + tw) \geq F(u)$$

i.e

$$F(u + tw) - F(u) \geq 0$$

En particulier

$$\begin{cases} \text{si } t > 0 & \dfrac{F(u+tw) - F(u)}{t} \geq 0 \\ \\ \text{si } t < 0 & \dfrac{F(u+tw) - F(u)}{t} \leq 0 \end{cases}$$

Comme on a supposé F Gateaux-différentiable, on a

$$\frac{F(u+tw)-F(u)}{t} \longrightarrow d_G F(u)w$$

Il résulte donc de ce qui précède que cette limite et positive et négative donc nulle.

⊠

L'argument précédent s'étend aisément au cas de minima locaux.

Définition 8.2.1

Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour F s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) \leq F(v) \ \forall v \in B(u_0, \delta)$$

On dit que u_0 est un minimum local strict s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) < F(v) \ \forall v \in B(u_0, \delta) \backslash \{u\}$$

⊠

On a alors

Proposition 8.2.2

Soit $u_0 \in X$ un minimum local de F. Alors si F est Gateaux-différentiable en u_0, on a

$$d_G F(u_0) = 0$$

⊠

Preuve

Exercice

⊠

<u>Commentaire</u>

1. Les propositions précédentes montrent que la notions la plus faible de différentiabilité, i.e la Gateaux-différentiabilité est suffisante pour établir la condition du 1^{er} ordre.

2. Rappelons également que si F est de classe $\mathcal{C}^2$, et si u_0 est un minimum local de F, alors

$$d^2 F(u_0)(w,w) \geq 0, \ \forall w \in X \tag{8.5}$$

   i.e, la forme bilinéaire symétrique $d^2 F(u_0) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie positive. L'inégalité 8.5 est appelée <u>condition du 2^{eme} ordre</u>

3. Bien entendu, les propositions 8.2.1 et 8.2.2 n'affirment rien en ce qui concerne l'existence de minima ou maxima locaux. Cette question est le point essentiel des sections qui suivent.

8.3 Minimisation et semi-continuité inférieure

Dans tout ce qui suivra, X désigne un espace de Banach réflexif, i.e

$$X^{**} = X$$

Commençons par rappeler la définition.

Définition 8.3.1

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction sur X. On dit que F est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (et on écrit s.c.i. faible séquentiellement), si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X vérifiant

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{faiblement}$$

on a

$$F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$$

⊠

Remarque On dit aussi semi-continue inférieurement pour la convergence faible, en bref s.c.i pour la convergence faible.

Nous verrons plus loins des exemples de fonction s.c.i pour la convergence faible.

Défintion 8.3.2

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que F est coercive si et seulement si

$$F(u) \longrightarrow +\infty \ \text{ lorsque } \ ||u|| \longrightarrow +\infty$$

i.e

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ ||u|| \geq B \Rightarrow F(u) \geq A$$

⊠

Exemples

1. $F(u) = ||u||$, $F_\alpha(u) = ||u||^\alpha$ pour $\alpha > 0$,
   $F(u) = P(||u||)$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients positifs : $P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ avec $\forall 0 \leq i \leq k,\ a_i > 0$

2. Si $X = H$ Hilbert, et $L \in H^*$, a elliptique, $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u)$ ou $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$ sont coercives.

L'intérêt des définitions précédentes apparaît au vu du résultat suivant.

Théorème 8.3.1

Soit C un ensemble convexe fermé de X, Banach réflexif. Soit $F : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose
i F coercive et $F \neq +\infty$
ii F s.c.i pour la convergence faible

Alors il existe $u \in C$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in C} F(v) \quad (< +\infty) \tag{8.6}$$

⊠

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour le problème, i.e telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in C$ et

$$F(u_n) \longrightarrow \alpha = \inf_{v \in C} F(v) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Nous allons montrer qu'il existe $u \in C$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans C. La première étape consiste à montrer que la suite u_n est bornée. Cette étape utilise uniquement la coercivite de F.

1^{ere} **étape** (u_n) est bornée.

Comme $F(u_n) \to \alpha$, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$F(u_n) \leq \alpha + 1$$

Comme F est coercive, il existe $B > 0$ tel que

$$\forall ||u|| > B,\ F(u) > \alpha + 2$$

On en déduit en particulier que pour $n \geq n_0$, $||u_n|| \leq B$. La suite (u_n) est donc bornée.

2^{eme} **étape** $\exists u \in C$ et une suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$u_{\sigma(n)} \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} u \tag{8.7}$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et que X est réflexif, on peut extraire une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans X vers un élément $u \in X$. Le fait que $u \in C$ résulte du lemme de Mazur, qui affirme que les convexes fermés faibles sont les convexes fermés fort. (voir l'énoncé après cette preuve).

3^{eme} **étape** $F(u) = \alpha = \inf_{v \in C} F(v)$.

En effet, par l'hypothèse **ii**, F est s.c.i pour la convergence faible et donc

$$u_{\sigma(n)} \to u \Longrightarrow \alpha = \lim_{n \to +\infty} F(u_n) = \liminf_{n \to +\infty} F(u_n) \geq F(u)$$

Comme $u \in C$ on a aussi

$$F(u) \geq \inf_{v \in C} F(v) = \alpha$$

et la conclusion en découle.

⊠

Dans la 2^{eme} étape nous avons utilisé le lemme de Mazur, qui jouera un rôle important dans la suite. En voici un énoncé :

Proposition 8.3.1

Soit X un espace de Banach reflexif. Soit C un ensemble convexe. Alors C est fermé (pour la convergence forte) si et seulement si C est fermé pour la convergence faible.

En particulier, si $C \subset X$ est un convexe fermé, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C, s'il existe $u \in X$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans X}$$

Alors

$$u \in C$$

⊠

Commentaire On dit d'un sous-ensemble Λ de X qu'il est fermé pour la convergence faible si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de Λ, i.e $u_n \in \Lambda,\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X entraîne $u \in \Lambda$.

On a toujours (comme on le vérifie aisément)

$$\Lambda \text{ fermé pour la convergence faible } \Rightarrow \Lambda \text{ fermé (fort)} \tag{8.8}$$

La réciproque est fausse en général. On peut prendre par exemple $X = H$ espace de Hilbert séparable, et $\Lambda = S$, où

$$S = \{u \in H,\ ||u|| = 1\}$$

Il est clair que S est fermé au sens fort. En revenche, S n'est pas fermé pour la convegence faible. On peut prendre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H : $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n \in S$ et $e_n \rightharpoonup 0$, lorsque $n \to +\infty$. Or $0 \notin S$.

Le lemme de Mazur assure que la réciproque de 8.8 est vraie si on suppose de plus que Λ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \Lambda^2$, $[x, y] \subset \Lambda$. Pour une preuve voir [**?**].

Un exemple important de fonctions s.c.i pour la convergence faible est fourni par les fonctions convexes s.c.i. Elles font l'objet du prochain aragraphe.

8.4 Fonctions convexes

8.4.1 Rappels

Défintion 8.4.1

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que F est convexe si et seulement si, $\forall (u, v) \in X^2,\ \forall \theta \in [0, 1]$

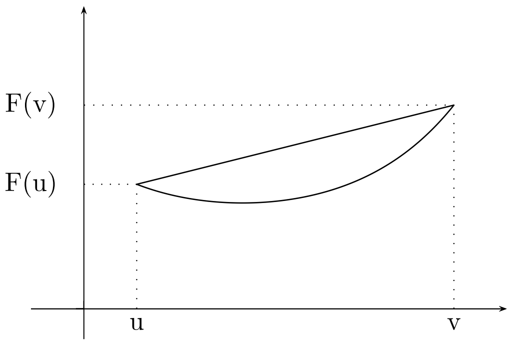
$$F(\theta u + (1 - \theta v) \leq \theta F(u) + (1 - \theta)F(v) \tag{8.9}$$

On dit que F est strictement convexe si et seulement si, $\forall (u, v) \in X^2,\ u \neq v\ \forall \theta \in]0, 1[$

$$F(\theta u + (1 - \theta v) < \theta F(u) + (1 - \theta)F(v) \tag{8.10}$$

⊠

Lorsque $X = \mathbb{R}$ l'inégalité 8.9 signifie que dans le graphe, l'image par F de $[u, v]$ est situé en-dessous de la corde :



Donnons quelques exemples simples de fonctions convexes.

1. $F(u) = L(u)$ où $L \in X^*$, forme linéaire continue.

2. Pour $X = H$ Hilbert, $F(u) = \dfrac{1}{2}a(u,u)$, pour a bilinéaire symétrique elliptique.

3. Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $\exists p > 1,\ |g(t)| \leq C\,(1 + |t|^p)$ alors pour $X = L^p\,(\Omega)$, la fonction W définie sur X par
$$W(u) = \int_\Omega g(u)$$
est convexe. De manière générale, si g est une fonction vérifiant
$$|g(x,t)| \leq C\,(1 + |t|^p)$$
et $\forall x \in \Omega$, $g(x, .)$ est convexe, alors
$$W(u) = \int_\Omega g(x, u(x))dx$$
est convexe sur $X = L^p\,(\Omega)$

Rappelons brièvement quelques propriétés classiques des fonctions convexes.

Proposition 8.4.1

a Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si la fonction de deux variables
$$G(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$
définie pour $(x, y) \in I^2$ tels que $x \neq y$, est croissante par rapport à chacune des deux variables x et y.

b En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(I)$, f est convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$
$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(x - y) \tag{8.11}$$

c Si $f \in \mathcal{C}^2(I)$, alors f est convexe si et seulement si

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I$$

$\boxtimes$

Preuve

a Pour $0 < \theta < 1$ et $x < y$ dans I, on pose $z = \theta y + (1-\theta)x$. On a

$$\frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta y + (1-\theta)x - x} = \frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta(y-x)}$$

Si f est convexe, on a donc $G(z,x) \leq G(y,x)$ dès que $z \in [x,y]$ et de même $G(z,y) \leq G(x,y)$. La réciproque se montre de même.

b On a

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \lim_{z \to x} G(x,z)$$

Si f est convexe, et $y \geq x$, on a par **a**

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = G(x,y)$$

et la conclusion en découle.

Réciproquement, supposons que f vérifie 8.11. Alors pour $\theta \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)[(\theta y + (1-\theta)x) - y] \\ f(x) &\geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)[(\theta y + (1-\theta)x) - x] \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)(1-\theta)(x-y) \\ f(x) &\geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)\theta(y-x) \end{aligned}$$

En multipliant la première relation par θ et la deuxième par $(1-\theta)$, et en additionnant on trouve

$$\theta f(y) + (1-\theta)f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x)$$

et donc f est convexe.

c Si $f \in \mathcal{C}^2$ vérifie $f''(x) \geq 0$ alors on a par développement de Taylor, $\forall (x,y),\ \exists c \in [x,y]$,

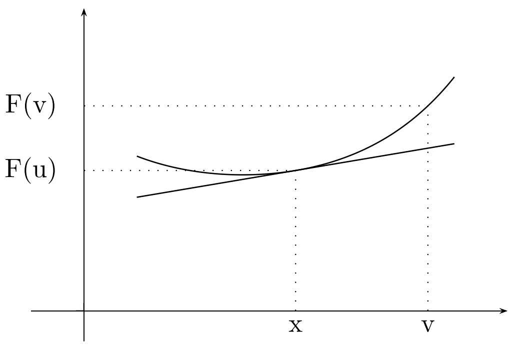
$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(c) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

donc f vérifie 8.11. Par la partie **b** on en déduit que f est convexe.

Réciproquement, si f est convexe et $\mathcal{C}^2$ on déduit de **a** que f' est croissnate et donc que $f'' \geq 0$

⊠

Remarque L'inégalité 8.11 s'appelle l'inégalité de la tangente, et exprime le fait que le graphe de f est au-dessus de la tangeante en tout point.



Les parties **b** et **c** se généralisent aisément au cas de fonctions $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, X esapce de Banach. On a

Proposition 8.4.2

Soit X un espace de Banach et $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a Alors F est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in X^2,\ F(y) \geq F(x) + dF(x)(y-x) \tag{8.12}$$

b Si de plus $F \in \mathcal{C}^2$, alors F est convexe si et seulement si

$$\forall (x,w) \in X^2,\ d^2F(x)(w,w) \geq 0 \tag{8.13}$$

i.e $d^2F(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

⊠

8.4.2 Convexité et semi-continuité inférieure

Le résultat suivant jouera un rôle essentiel dans toute la suite.

Théorème 8.4.1

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose de plus que F est s.c.i pour la topologie forte :

$$\forall u \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ ||u-v|| \leq \delta \Rightarrow F(v) \geq F(u) - \varepsilon$$

Alors F est s.c.i pour la topologie faible.

$$u_n \rightharpoonup u \tag{8.14}$$

entraîne

$$F(u) \leq \liminf F(u_n) \tag{8.15}$$

⊠

Preuve

Posons $\alpha = \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)$. Par définition α est une valeur d'adhérence de la suite $(F(u_n))$ (c'est même la plus petite valeur d'adhérence). Il existe donc une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$F\left(u_{\sigma(n)}\right) \longrightarrow \alpha$$

Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ F(u) \leq \alpha + \varepsilon \tag{8.16}$$

A cet effet on considère l'ensemble de niveau

$$C^{\varepsilon} = \{v \in X,\ F(v) \leq \alpha + \varepsilon\}$$

Comme F est s.c.i, C^{ε} est fermé. Par ailleurs, comme F est convexe, C^{ε} l'est aussi. Le lemme de Mazur affirme donc que C^{ε} est fermé pour la convergence faible. Comme $F\left(u_{\sigma(n)}\right) \longrightarrow \alpha$, on dipose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait

$$F\left(u_{\sigma(n)}\right) \leq \alpha + \varepsilon$$

i.e

$$u_{\sigma(n)} \in C^{\varepsilon}$$

Comme $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ et C^{ε} est fermé pour la convergence faible, on en déduit

$$u \in C^{\varepsilon}$$

ce qui établit 8.16

⊠

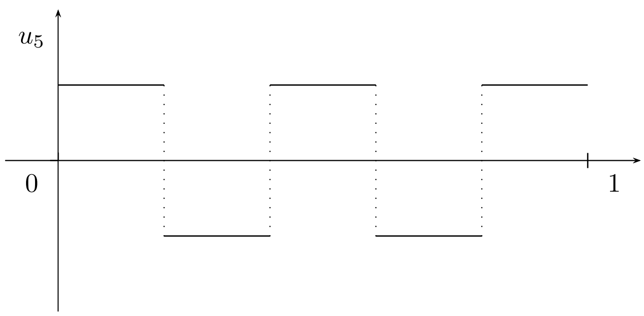
<u>Commentaire</u> Si F est continue, alors F est s.c.i. Le théorème 8.4.1 montre donc qu'une fonction continue convexe est s.c.i pour la convergence faible. L'hypothèse F convexe est tout à fait essentielle en dimension infinie. Voici un contre-exemple.

Soit $X = L^4([0,1])$ et pour $u \in X$

$$W(u) = \int_0^1 \left(1 - |u(x)|^2\right)^2 dx \tag{8.17}$$

On vérifie aisément que $W \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. Montrons que W n'est pas s.c.i pour la convergence faible. Pour $n \in \mathbb{N}$ consiérons la fonction u_n définie par

$$u_n(x) = (-1)^k \quad \text{sur} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\ k \in \{0, \cdots, n-1\}$$



On vérifie que $u_n \in L^4[0,1]$, $||u_n||_{L^4} = 1$, (en fait $|u(x)| = 1$ pour tout x), et $W(u_n) = 0$ et $u_n \rightharpoonup 0$. Or $W(0) = 1 \geq \lim_{n\to+\infty} W(u_n) = 0$. Bien entendu, W n'est pas convexe.

En combinant le théorème 8.4.1 et le théorème 8.3.1 on obtient le résultat suivant.

Théorème 8.4.2

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose

a F est coercive

b F est convexe

c F est s.c.i (pour la topologie forte)

Alors il existe $u \in X$ tel que

$$F(u) \leq F(v),\ \forall v \in X,\ \text{i.e } F(u) = \inf_{v\in X} F(v) \tag{8.18}$$

Si de plus F est strictement convexe, alors le minimum u est unique.

⊠

Preuve

8.18 résulte directement des théorème 8.3.1 et 8.4.1. Le seul point à expliciter est donc le dernier. Supposons F strictement convexe et soit u_1, u_2 deux points de minima supposés distincts. On aurait par stricte convexité

$$\inf_{v\in X} F(v) \leq F\left[\frac{1}{2}(u_1+u_2)\right] < \frac{1}{2}\left[F(u_1)+F(u_2)\right] = \inf_{v\in X} F(v)$$

ce qui est contradictoire.

⊠

Pour a forme bilinéaire continue symétrique et L fomre linéaire, on retrouve le fait que $J = \frac{1}{2}a(.,.) - L(.)$ atteint son minimum en un point unique : elle est en effet coercive, continue strictement convexe.

8.4.3 Points critiques et convexité

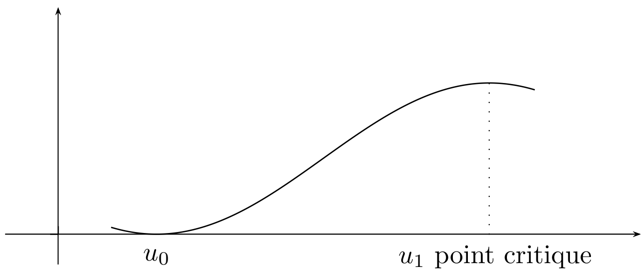
Soit F une fonction différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit critique pour F si et seulement si

$$dF(u) = 0 \tag{8.19}$$

Nous avons vu que les minima de F, lorsqu'ils existent sont des points critiques pour F, i.e

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v) \longleftrightarrow u \text{ point critique}$$

La réciproque est en général fausse, comme le montre le dessin suivant



u_0 et u_1 sont des points critiques (i.e $f'(u_i) = 0$) mais u_1 n'est pas un minimum. Dans le cas des fonctions convexes, néanmoins les deux notions coïncident.

Théorème 8.4.3

Soit $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ convexe. Alors $u \in X$ est un minimum de F si et seulement si u est un point critique de F, c'est-à-dire

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v) \Leftrightarrow dF(u) = 0$$

⊠

Preuve

Il faut montrer que si $dF(u) = 0$ alors $F(u) \leq F(v),\ \forall v \in X$. Or d'après la proposition 8.4.2 on a $F(v) \geq F(u) + dF(u)(v - u) = F(u)$

⊠

Remarque En particulier, si F est strictement convexe, il y a au plus un point critique.

8.4.4 Exemples, applications

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $g; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante. On suppose de plus que

$$|g(t)| \leq C\left(1 + |t|^{2^*-1}\right), \quad \text{où } 2^* = \frac{2N}{N-2} \tag{8.20}$$

Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$ on cherche u solution de

$$I \quad \begin{cases} -\Delta u + g(u) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On a le résultat :

Proposition 8.4.3

Le problème (I) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$

$\boxtimes$

Preuve

On vérifie tout d'abord que le problème a une forme variationnelle, c'est-à-dire qu'il existe $F; H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow d_G F(u) = 0$$

1^{ere} **étape** Mise sous forme variationnelle

Introduisons la primitive G de g définie par

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

En utilisant 8.20 on vérifie aisément que

$$|G(t)| \leq C\left(1 + |t|^{2^*}\right) \tag{8.21}$$

Par ailleurs comme $G' = g$ qui est supposée croissante, on a

$$G \text{ convexe sur } \mathbb{R} \tag{8.22}$$

Introduisons alors la fonction F définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega G(v) - \int_\Omega fv$$

Vérifions tout d'abord que $F \in \mathcal{C}^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ et que

$$dF(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - g(u)v - fv$$

de sorte que

$$dF(u) = -\Delta u - g(u) - f \tag{8.23}$$

En effet

$$F = E + W - L$$

ou

$$\begin{aligned}
E(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 = ||u||^2_{H_0^1(\Omega)} \\
W(v) &= \int_\Omega G(v(x))dx \\
L(v) &= \int_\Omega fv
\end{aligned}$$

E est une forme bilinéaire symétrique sur $H = H_0^1(\Omega)$, donc est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$dE(u)v = \int_\Omega \nabla u.\nabla v, \quad \text{i.e } dE(u) = -\Delta u$$

La forme L est linéaire continue, donc est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$dL(u)v = Lv = \int_\Omega fv, \quad \text{i.e } dL = f$$

Enfin on a

$$W = \mathcal{L} \circ T_G \circ i$$

où

$$i \text{ est l'injection de } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$$

T_G est l'opérateur de Nemitskii :

$$\begin{array}{rccc} T_G : & L^{2^*}(\Omega) & \longrightarrow & L^1(\Omega) \\ & v & \longmapsto & G(v) \end{array}$$

$\mathcal{L}$ est la forme linéaire sur $L^1(\Omega)$ définie par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega w$$

$\mathcal{L}$ et i sont linéaires continues donc $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit que T_G est $\mathcal{C}^1$ et

$$T_G vw = g(v)w$$

Ainsi

$$dW(u)v = \int_\Omega g(u)v, \quad \text{i.e } dW(u) = g(u)$$

En conclusion

$$dF(u)v = \langle -\Delta u + g(u) - f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

i.e

$$-\Delta u + g(u) = f, \ u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow dF(u) = 0$$

2^{eme} **étape** Recherche de solutions

Nous avons vu que les solutions dans $H_0^1(\Omega)$ de (I) étaient les points critiques de $F \in \mathcal{C}^1(H;\mathbb{R})$. Vérifions que F est convexe strictement, coercive, de sorte que le résultat sera établi en vertu des théorèmes 8.4.2 et 8.4.3.

α F est strictement convexe.

En effet, F est la somme de trois fonctions convexes, E,W, et -L donc F est convexe. E est strictement convexe, donc F est strictement convexe.

β F est coercive.

Comme g est croissante, on vérifie aisément qu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$G(t) \geq -\Lambda, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Il en résulte que

$$\forall v \in H,\ F(v) \geq E(v) - L(v) - |\Omega|\,\Lambda$$

La coercivité de F résulte alors de celle de $E - L$. On a

$$\begin{aligned} E(v) - L(v) &= \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv \\ &\geq ||v||^2_{H_0^1} - c||f||_{H^{-1}} + ||v||^2_{H_0^1} \quad \text{par Poincaré} \\ &\geq P(||v||) \end{aligned}$$

où $P(X) = X^2 - c||f||_{H^{-1}}X$. Comme $P(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$, le résultat en découle.

2^{eme} **étape** Conclusion

Comme F est continue, convexe, coercie, par le théorème 8.4.2

$$\exists! u \in H_0^1(\Omega)\,,\ F(u) = \inf_{v \in H_0^1} F(v)$$

de plus, $dF(u) = 0$, i.e u est solution de (I). Par le théorème 8.4.3 u est l'unique solution du problème.

⊠

8.5 Au-delà de la convexité

Nous avons vu qu'une fonction W pouvait très bien être continue et pas s.c.i pour la convergence [bien entendu, cela suppose que $\dim X = +\infty$, car sinon les deux notions de convergence coïncident] si W n'est pas convexe.

Nous allons commencer par analyser d'autres exemples en rapport avec les EDP.

8.5.1 Exemples

A Soit $I = [0,1]$. Pour $X = W_0^{1,4}[0,1]$, on considère la fonction

$$F(v) = \int_0^1 \left(1 - \dot{v}^2(x)\right)^2,\ v \in X$$

Clairement, F est positive, i.e

$$F(v) \geq 0,\ \forall v \in X$$

Considérons la fonction u_0 définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= x && \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ u_0 &= 1 - x && \text{sinon} \end{aligned}$$

de sorte que $u_0 \in X$ et $|\dot{u}_0| = 1$. Il en résulte que

$$F(u_0) = 0 = \inf_{v \in X} F(v)$$

et le inf est atteint, bien que F ne soit pas s.c.i pour la convergence faible. Notons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on note u_n la fonction définie par

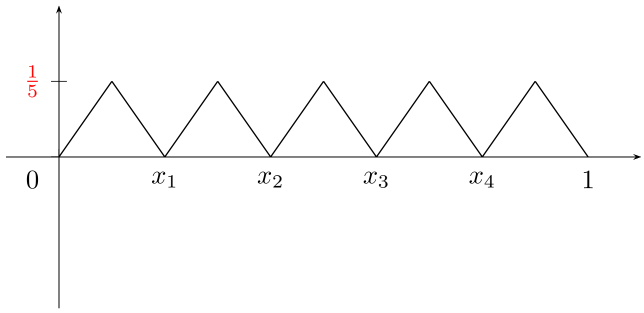
$$u_n(x) = \frac{1}{n} u_0(n(x - x_k)), \quad \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}]\,,\ x_i = \frac{i}{n},\ i \in \{0, \cdots, n\}$$

Alors

$$F(u_n) = 0$$

F a donc une infinité de minima. En fait

$$F(u) = 0 \Leftrightarrow |\dot{u}| = 1$$



B Dans le même contexte, considérons la fonctionnelle

$$G(v) = \int_0^1 \left[\left(1 - \dot{v}^2(x)\right)^2 + v^2(x) \right] dx$$

De nouveau on vérifie

$$G(v) \geq 0$$

Par ailleurs

$$G(u_n) = \int_0^1 |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{n^2}$$

D'où il résulte que $G(u_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On en déduit que

$$\inf_{v \in V} G(v) = 0$$

En revenche, sur cet ensemble, l'inf n'est pas atteint. En effet

$$\begin{aligned} G(v) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int v^2 = 0 \text{ et } |\dot{v}| = 1 \\ &\Rightarrow \quad v = 0 \text{ et } |\dot{v}| = 1 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

La conclusion que l'on peut tirer de ces exemples est que, lorsque le terme portant sur la dérivée d'ordre le plus élevé est non convexe (ici $(1 - \dot{v}^2)^2$) alors de nombreux types de situations peuvent arriver. En revenche, lorsque celui-ci est convexe, on peut utiliser une partie de notre ananlyse précédente. C'est l'objet du prochain paragraphe.

8.5.2 Perturbations compactes de fonctions convexes

Revenons à une situation plus abstraite. Soit X un espace de Banach, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que F peut se décomposer de la façon suivante.

$$F = F_0 + W \tag{8.24}$$

où

$$F_0 \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ convexe} \tag{8.25}$$

$$W \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ compacte} \tag{8.26}$$

Cette dernière notion signifie :

Définition 8.5.1

Soit X et Y deux espaces de Banach. On suppose X réflexif. On dit que $\Phi : X \longrightarrow Y$ est compace si et seulement si

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } X$$

entraîne

$$\Phi(u_n) \longrightarrow \Phi(u) \quad \text{fort dans } Y$$

⊠

Dans le cas qui nous intéresse, W compacte signifie en fait W continue pour la convergence faible, i.e

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } X \Longrightarrow W(u_n) \longrightarrow W(u)$$

Il en résulte en particulier :

Proposition 8.5.1

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant 8.24, 8.25, 8.26. Alors F est s.c.i pour la convergence faible.

⊠

Preuve

Exercice

⊠

Proposition 8.5.2

Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant 8.24, 8.25, 8.26. On suppose de plus F coercive. Alors, il existe $u \in X$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$$

⊠

Preuve

Exercice

⊠

Remarque Bien entendu, dans une telle situation, on ne peut espérer l'unicité.

8.5.3 Applications

A Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}$. On condidère une application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t)t \geq 0 \tag{8.27}$$

$\exists\ 1 \leq p < 2^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |g(t)| \geq C\left(1 + |t|^{p-1}\right) \tag{8.28}$$

On a alors

Proposition 8.5.3

Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ccll} -\Delta u + g(u) & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

⊠

Remarque

a Les hypothèses faites sur g sont différentes de celles de la proposition 8.4.3 : ici on ne suppose pas que g est croissante. En revenche, il faut que g soit sous-critique (cf 8.28), alors que dans la proposition 8.4.3 g pouvait être critique.

b Il n'y a pas forcément unicité de la solution.

Preuve

Avec les mêmes notations que dans la proposition 8.4.3 on vérifie que $u \in H_0^1$ est solution de (II) si et seulement si

$$dF(u) = 0$$

où $F = E - L + W$. On cherche donc $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in H} F(v) \tag{8.29}$$

A cet effet on applique la proposition 8.5.1. On pose

$$\tilde{E} = E - L \quad W = \int_{\Omega} G(v(x))dx \quad \text{où } G(t) = \int_0^t g(s)ds$$

de sorte que $\tilde{E}$ est coercive convexe. Par ailleurs 8.27 entraîne

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \geq 0$$

et donc

$$W \geq 0$$

Il en résulte que $F \geq \tilde{E}$ est coercive. Montrons pour conclure que W est compacte. Comme l'application $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte et que l'application $T_G : L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ est continue on a $T_G \circ i$ compacte. Comme $W = \mathcal{L}(T_G \circ i)$, le résultat en découle.

$\boxtimes$

B Traitons pour conclure un cas à paramètre. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le problème

$$(III) \quad \begin{cases} -\Delta u + u^3 & = & \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On vérifie maintenant que les solutions de (III) dans $H_0^1(\Omega)$ sont exactement les points critiques de la fonction F_λ définie de $H = H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \frac{|u|^4}{4} - \lambda \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{2}$$

Commençons par une remarque évidente.

Lemme 8.5.1

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u = 0$ est solution de (III).

$\boxtimes$

[On a donc la branche de solutions évidentes.]

Lemme 8.5.2

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, F_λ est coercive.

$\boxtimes$

Preuve

On a par Cauchy-Schwarz.

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \left[\int_\Omega |u|^4\right]^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$F_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left[\int_\Omega |u|^4\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}\left[\int_\Omega |u|^4\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\right]$$

Il en résulte que le deuxième terle est positif dès que

$$\int_\Omega |u|^4 \geq 4\lambda^2|\Omega|$$

et donc si

$$||u||^4_{L^2(\Omega)} \geq 4\lambda^2|\Omega|$$

on a

$$F_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2$$

On vérifie que la norme $N(u) = ||u||_{L^4} + ||\nabla u||_{L^2}$ est équivalente à la norme H^1_0. On obtient donc $\exists A_\lambda > 0$ tel que si $N(u) \geq A_\lambda$ alors $\exists c > 0$ tel que

$$F_\lambda(u) \geq cN(u)^2, \ \forall u \in H, \ ||u|| \geq A_\lambda$$

donc F_λ est coercive.

$\boxtimes$

Lemme 8.5.3

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, F_λ est s.c.i pour la convergence faible.

$\boxtimes$

Preuve

Exercice

$\boxtimes$

Lemme 8.5.4

La fonction F_λ est convexe si et seulement si $\lambda \leq \lambda_1$. Dans ce cas elle est alors strictement convexe.

$\boxtimes$

Preuve

a Démontrons d'abord que si $\lambda \leq \lambda_1$ F est strictement convexe.

On a $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Il en résulte que si $\lambda \leq \lambda_1$ la forme bilinéaire a_λ définie par

$$a_\lambda(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \lambda \int_\Omega uv$$

est positive et strictement convexe. Comme

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} a_\lambda(u,u) + W(u)$$

où

$$W(u) = \int_\Omega \frac{u^4}{4}$$

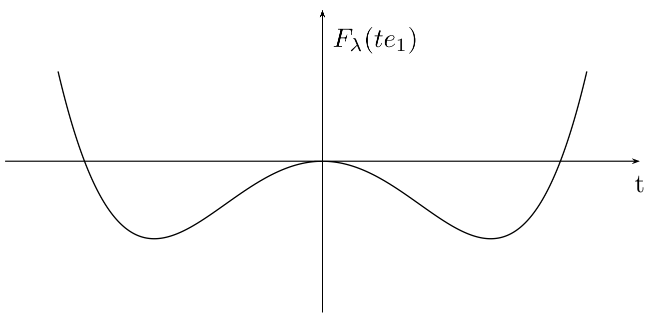
est strictement convexe, on obtient le résultat.

b Pour $\lambda > \lambda_1$ F n'est pas convexe.

Soit e_1 la fonction propre positive associée à λ_1 telle que $||e_1||_{L^2} = 1$. Montrons que la restriction à $V = \mathbb{R}e_1$ n'est pas convexe. On a

$$\begin{aligned} F_\lambda(te_1) &= t^2 \left[\int_\Omega |\nabla e_1|^2 - \lambda \int_\Omega e_1^2 \right] + \frac{t^2}{4} \int_\Omega |e_1|^4 \\ &= t^2(\lambda_1 - \lambda) + \frac{t^2}{4} \int_\Omega |e_1|^4 \end{aligned}$$

Pour $\lambda > \lambda_1$, $(\lambda_1 - \lambda) < 0$ et cette fonction n'est pas convexe.



$\boxtimes$

On a alors

Proposition 8.5.4

a Pour $\lambda \leq \lambda_1$, F_λ est convexe strictement, coercive. $u = 0$ est donc l'unique solution de (III) et

$$0 = F_\lambda(0) = \inf_{v \in H} F_\lambda(v)$$

b Pour $\lambda > \lambda_1$ on a

$$\inf_{v \in H} F_\lambda(v) < 0 = F(0) \tag{8.30}$$

et F_λ possède alors deux solutions distinctes opposées $(u_\lambda, -u_\lambda)$ tels que

$$u_\lambda > 0 \text{ sur } \Omega$$

et tel que

$$F(u_\lambda) = F(-u_\lambda) = \inf_{v \in H} F_\lambda(u)$$

⊠

Preuve

a évident

b On a vu que

$$F(te_1) = -(\lambda - \lambda_1)t^2 + \alpha t^4 \quad \text{où } \alpha = \int_\Omega e_1^4 > 0$$

et donc si t est petit

$$F(te_1) < 0$$

8.30 en résulte.

Nous laissons les autres affirmations en exercice.

⊠

Chapitre 9

Théorie Variationnelle

9.1 Introduction

Commme nous l'avons vu au chapitre précédent, les équations que nous considérons ici peuvent se mettre sous la forme variationnelle

$$dF(u) = 0 \tag{9.1}$$

où F est une fonctionnelle définie sur un espace de fonctions adéquat. Autrement dit, les solutions sont les points critiques de F.

Comme il a été vu dans le cours de J.P Bourguignon, l'étude des points critiques d'une fonctionnelle peut fournir des informations intéressantes, même en dimension finie (de nature topologique par exemple, lorsqu'on regarde des fonctionnelles sur des variétés).

Le point de vue qui est provilégié ici est celui des *valeurs critiques*

Définition 9.1.1

On appelle valeur critique de la fonctionnelle F, de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur E, un nombre $\beta \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in E$ tel que

$$F(u) = \beta, \quad dF(u) = 0$$

⊠

Bien entendu, si on est capable de déterminer une valeur critique, on aura, ipso facto prouvé l'existence d'un point critique, et si on est capable de trouver k valeurs critiques distinctes, on aura k points critiques distincts (au moins).

Remarque Il existe un point de vue sensiblement différent sur la théorie variationnelle, c'est celui du complexe de Thom-Smale (voir cours de F. Laudenbach). Ce point de vue a permis de résoudre récemment des problèmes difficiles en géométrie symplectique, grâce notamment aux travaux de A. Floers.

Afin de trouver des valeurs critiques, on considère les ensembles de niveaux de F déterminés par

$$F^a = \{u \in E,\ F(u) < a\}$$

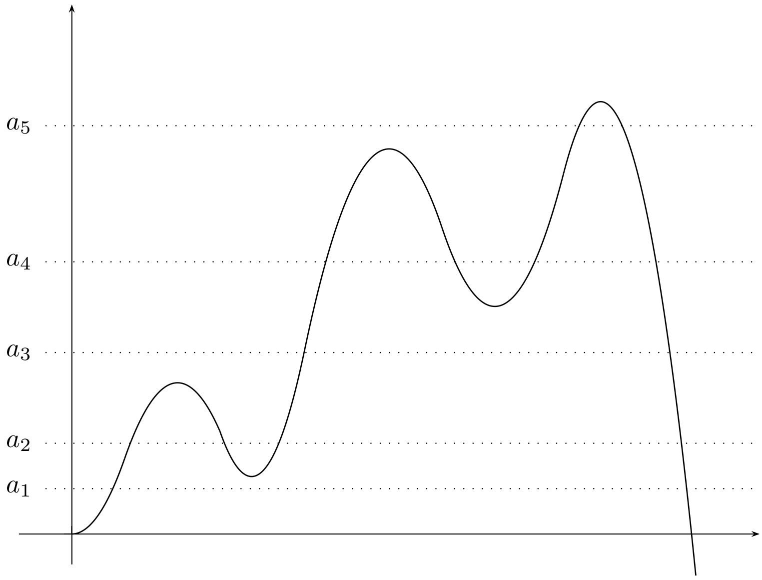
L'idée de la théorie de Morse est la suivante :

Pour $a < b$, on compare les ensembles de niveaux F^a et F^b ($F^a \subset F^b$). Si F^a et F^b n'ont pas la même "topologie", et si F satisfait certaines propriétés de compacité, on montre alors qu'il existe une valeur critique $c \in [a, b]$.

Bien entendu, l'énoncé précédent est très vague. Il faut en effet préciser ce que l'on entend par même "topologie" : nous donnerons des définitions plus précises lorsque nous parlerons du lemme de déformation qui est l'outil essentiel de cette démarche. Commençons par l'illustrer sur un dessin.

Exemple 9.1.1

$F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$



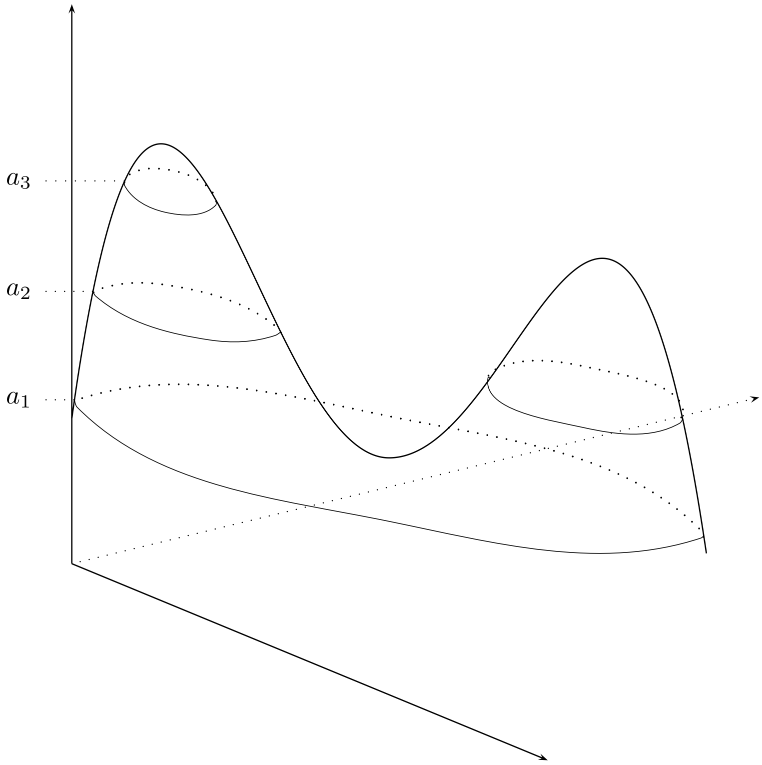
On vérifie sur ce dessin que

F^{a_1}	est composé de 2 intervalles connexes disjoints
F^{a_2}	est composé de 3 intervalles connexes disjoints
F^{a_3}	est composé de 2 intervalles connexes disjoints
F^{a_4}	est composé de 3 composantes connexes
F^{a_5}	est composé de 3 composantes connexes
F^b	est vide pour b grand

On peut imaginer que pour des sous-ensembles "raisonnables" de $[0, 1]$ le nombre de composantes connexes est le même pour des ensembles qui ont la "même" topologie. On doit donc trouver une valeur critique dans $[a_1, a_2]$, une autre dans $[a_2, a_4]$, une autre dans $[a_3, a_4]$, une autre entre a_4 et a_5, et finalement une dans $[a_5, +\infty[$. En tout 5 valeurs critiques pour F. C'est bien ce que l'on vérifie sur le dessin.

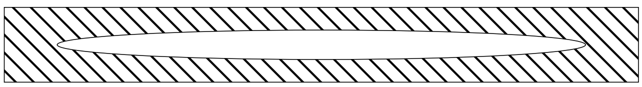
Exemple 9.1.2

$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

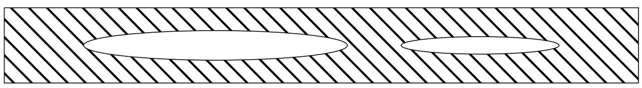


Dessinons les lignes de niveaux

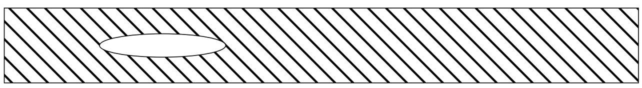
F^{a_1}



F^{a_2}



F^{a_3}



Il est clair sur cet exemple que les trois ensembles sont connexes et nous ne pouvons utiliser la caractérisation précédente. En revenche nous voyons apparaître une autre caractéristique importante : le nombre de trous qui doit être le même pour des ensembles de topologie équivalentes.

Ainsi

$$\begin{array}{cl} F^{a_1} & \text{a 1 trou} \\ F^{a_2} & \text{a 2 trous} \\ F^{a_3} & \text{a 1 trou} \\ F^{b} & \text{est vide pour b grand} \end{array}$$

On doit donc s'attendre à trouver une valeur critique entre a_1 et a_2, une autre entre a_2 et a_3, enfin une dernière au-dessus de a_3. C'est ce que l'on constate sur le dessin : on voit qu'il y a deux maxima et un col.

9.2 Un peu de topologie

9.2.1 Homotopie

Introduisons un minimum de vocabulaire pour préciser la notion de "topologies" équivalentes et aussi pour avoir des critères simples permettant de déceler des topologies dissemblables (pour des exemples élémentaires).

Considérons deux espaces topologiques (c'est-à-dire munis d'une famille d'ouverts) X et Y, et l'ensemble $\mathcal{C}^0(X,Y)$ des applications continues de X vers Y.

Définition 9.2.1

Soit f_1 et f_2 deux applications continues de X vers Y. On dit que f_1 est "homotope" à f_2 si et seulement s'il existe une application continue F de $X \times [0,1]$ vers Y telle que

$$\begin{array}{rcll} F(x,0) & = & f_1(x) & \forall x \in X \\ F(x,1) & = & f_2(x) & \forall x \in X \end{array}$$

F est donc un chemin continu de $\mathcal{C}^0(X,Y)$ d'application de f_1 vers f_2. On dit que F est une "déformation" de f_1.

⊠

Propriétés de l'homotopie

Il est facile de voir que la relation "être homotope à" est une relation d'équivalence. On dira donc (en raison de la symétrie) que f_1 et f_2 sont homotopes. On appelle classes d'homotopie les classes d'équivalence pour la relation "être homotope à".

Exemple 9.2.1

Si Y est un espace vectoriel, toute application est homotope à l'application nulle. Il suffit de prendre

$$F(x,t) = tf(x),\ \forall x \in X$$

Exemple 9.2.2

$X = Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Alors l'application identité de S^1 n'est pas homotope à une application constante.

Lorsque X et Y sont des variétés compactes de dimension finie, on montre que toute application continue est homotope à une application $\mathcal{C}^0$. [On commence par plonger Y dans un espace euclidien E de dimension finie : ensuite à l'aide des théorèmes de localisation et de régularisation on approche uniformément une application f donnée X vers Y par des application f_n de $\mathcal{C}^\infty(X, E)$; on peut ensuite reprojeter ces applications sur Y]. On montre de même si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut choisir la déformation F de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 9.2.1

En utilisant la remarque précédente montrer que pour $m > k$, toute application continue de S^k vers S^m est homotope à une application constante.

9.2.2 Type d'homotopie

Nous avons vu que la relation "être homotope à" est une relation dont les éléments sont des applications entre espaces topologiques. L'équivalence homotopique (le "type d'homotopie") s'applique aux espaces eux-mêmes.

Définition 9.2.2

Soit X et Y deux espaces topologiques. On dit que X et Y ont le même type d'homotopie, s'il existe une application f continue de X vers Y, et une application g continue de Y vers X, telles que

$$\begin{array}{c} f \circ g \text{ est homotope à } Id_X \\ g \circ f \text{ est homotope à } Id_Y \end{array}$$

⊠

En d'autres termes, cette notion couvre (à peu près) la notion de "même topologie" que nous avions employée dans l'introduction. Donnons quelques exemples.

Exemple 9.2.3

Tout espace vectoriel normé a le même type d'homotopie qu'un singleton. Soit E un tel espace. On définit

$$\begin{array}{lclll} f : E & \longrightarrow & \{0\} & , \text{par} & f(x) = \{0\} \\ g : \{0\} & \longrightarrow & E & , \text{par} & g(0) = 0 \end{array}$$

On a donc

$$f \circ g(x) = 0,\ \forall x \in E$$

et

$$g \circ f(x) = 0 = Id_{\{0\}}(0)$$

La propriété vient donc du fait que Id_E est homotope à l'application nulle.

De manière plus générale, si X est un ensemble convexe de E (espace vectoriel), X a le type d'homotopie d'un singleton. C'est bien entendu le type d'homotopie le plus simple.

Définition 9.2.3

On dit qu'un espace X est contractible s'il a le type d'homotopie d'un singleton, c'est-à-dire si l'application identité de X est homotope à une application constante.

⊠

Il résulte de l'exemple 2 de la section 1 que S^1 n'est pas contractible.

Remarquons que si Y est un espace contractible alors pour tout espace X, toute application de X vers Y est homotope à une application constante, et il n'y a donc qu'une seule classe d'homotopie dans $\mathcal{C}^0(X,Y)$.

Exemple 9.2.4

Soit X un espace topologique et E un espace vectoriel normé. Alors $X \times E$ a le type d'homotopie de X. Prendre

$$\begin{cases} f : X \times E \to X & (x,v) \mapsto x & \forall (x,v) \in X \times E \\ g : X \to X \times E & x \mapsto (x,0) & \forall x \in E \end{cases}$$

Exercice 9.2.2

On considère l'anneau $C = D^2 \backslash D^2\left(\frac{1}{2}\right)$. Montrer que C a le type d'homotopie de S^1. Montrer de même que $\mathbb{R}^2 \backslash D^2$ a le type d'homotopie de S^1, ou encore que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ a le type d'homotopie de S^1.

9.2.3 Invariants

On parle d'invariants homotopiques pour des propriétés qui sont conservées lorsque deux espaces ont le même type d'homotopie. Par exemple le nombre de composantes connexes est un tel invariant, c'est-à-dire que deux espaces topologiques qui ont le même type d'homotopie ont le même nombre de composantes connexes. De même si X et Y ont le même type d'homotopie, $\forall Z$ (espace topologique), $\mathcal{C}^0(Z,X)$ et $\mathcal{C}^0(Z,Y)$ ont le même nombre de classes d'homotopie. Les invariants homotopiques sont bien entendu importants pour déceler si deux espaces topologiques ont des types différents.

9.2.4 Rétractions

Dans cette partie, on suppose $A \subset X$, et que A est muni de la topologie induite par celle de X.

Défintion 9.2.4

On dit que X se rétracte par déformation sur A s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que

$$F(x,0) = x \quad \forall x \in X \tag{9.2}$$
$$F(x,1) \in A \quad \forall x \in X \tag{9.3}$$
$$F(x,t) = x \quad \forall x \in A,\ \forall t \in [0,1] \tag{9.4}$$

⊠

Remarque Dans la littérature, la définition que nous avons adoptée est appelée déformation par rétraction forte. Il existe en effet une notion faible de déformation par rétraction.

Proposition 9.2.1

Si X se rétracte par déformation sur A, alors X et A one le même type d'homotopie.

⊠

Preuve

Considérons les applications

$$\begin{cases} f_1 = F(\cdot,1) : X \to A & x \mapsto F(x,1) & \forall x \in X \\ i : A \to X & x \mapsto x & \forall x \in A \end{cases}$$

On a donc

$$f_1 \circ i = Id_A$$
$$i \circ f_1(x) = F(x,1),\ \forall x \in X$$

Il résulte donc de la définition que $i \circ f_1$ est homotope à Id_X ce qui prouve la proposition.

⊠

La notion de rétraction par déformation est celle qui va apparaître naturellement lorsque nous parlerons du lemme de déformation.

Exemple 9.2.5

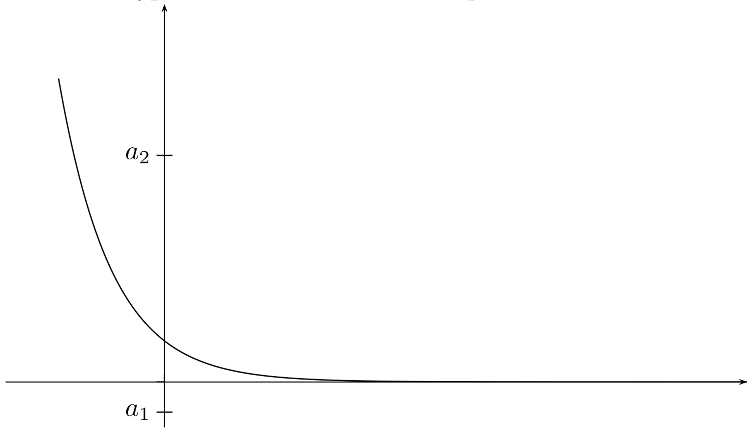
$\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ se rétracte par déformation sur S^n (sphère de dimension n). Prendre

$$F(x,t) = (1-t)x + \frac{tx}{||x||},\ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, t \in [0,1]$$

.

9.3 Problèmes de compacité

Nous avons indiqué dans l'introduction qu'une différence de topologie entre les ensembles de niveaux signifiait la présence de points critiques. En fait une telle conclusion est valide uniquement si on fait des hypothèses suffisantes de compacité. Considérons à cet effet l'exemple suivant :



Considérons $E = \mathbb{R}$, et la fonction f définie par

$$f(t) = e^{-t}$$

On a $f'(t) = -e^{-t}$, et donc f n'a pas de point critique. Si $a_1 < 0$, alors $f^{a_1} = \emptyset$, alors que pour $a_2 > 0$ on a $f^{a_2} =]-\log a_2, +\infty[$, donc a le type d'homotopie d'un point. On voit que f^{a_1} et f^{a_2} n'ont pas le même type d'homotopie.

Que s'est-il passé ? En fait, on constate que

$$\lim_{m \to +\infty} f'(m) = 0 \tag{9.5}$$

et donc tout se comporte comme si le point critique qui devrait être induit par la différence de topologie était "rejeté à l'infini". De manière plus générale, on peut considérer des suites de points qui se comportent de façon similaire à 9.5. On introduit donc la définition suivante :

Définition 9.3.1

(Suites de Palais-Smale). Soit F une fonctionnelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un espace de Banach. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Palais-Smale pour la fonctionnelle F si

$$|F(u_n)| \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ où } C \in \mathbb{R}^+ \tag{9.6}$$

$$\lim_{n \to +\infty} ||dF(u_n)||_{E^*} = 0 \tag{9.7}$$

[La notion de Palais-Smale est, bien entendu, toujours relative à une fonctionnelle.]

Les techniques du calcul des variations aboutissent bien souvent (comme dans l'exemple que nous avons donné en début de paragraphe) non pas directement à l'existence de points critiques mais plutôt à l'existence de suites de Palais-Smale [on peut comparer également avec les problèmes de minimisation, où on obtient des suites minimisantes]. Afin de conclure à l'existence d'un vrai point critique, il faut une condition supplémentaire de compacité [de même que pour trouver un minimum pour un problème de minimisation on doit pouvoir en général extraire une sous-suite convergente d'une suite minimisante]. Il est alors utile d'introduire la définition suivante :

Définition 9.3.2

(Condition de Palais-Smale). On dit qu'une fonctionnelle F définie sur un espace de Banach E vérifie la condition de Palais-Smale si de toute suite de Palais-Smale on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans F (la limite est alors un point critique).

En d'autres termes, F vérifie (P.S) (écriture abrégée pour : F vérifie la condition de Palais-Smale) si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, telle que

$$\begin{array}{l} |F(u_n)| \leq C \\ |dF(u_n)| \to 0 \text{ dans } E^* \end{array}$$

on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans E.

Dans certaines conditions, il est utile d'introduire la définition suivante.

Définition 9.3.3

(Condition $(P.S)_\beta$). Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la condition de Palais-Smale au niveau β, (et on écrit en abréé F vérifie (ou satisfait) la condition $(P.S)_\beta$) si pour toute suite u_n telle que

$$\begin{array}{l} F(u_n) \to \beta \\ dF(u_n) \to 0 \text{ dans } E^* \end{array}$$

on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

Remarque Il se peut évidemment qu'une telle sous-unité u_n n'existe pas, auquel cas F vérifie $(P.S)_\beta$ par convention.

Exemples 9.3.1

— Si $F = 0$, F ne satisfait pas (P.S) sur E.

— sur $\mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t}$ ne vérifie pas la condition de Palais-Smale.

— Si F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$ et si pour tout $a \in \mathbb{R}$, F^a est compact, alors F vérifie (P.S).

Une dernière définition nous sera utile.

Définition 9.3.4

On appelle valeur critique généralisée β de F (fonctionnelle $\mathcal{C}^1$ sur E Banach), un nombre $\beta \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans E telle que

$$\begin{cases} F(u_n) \to \beta \\ \lim_{n\to+\infty} dF(u_n) = 0 \text{ dans } E^* \end{cases}$$

Autrement dit, dans la définition des valeurs critiques généralisées, on autorise celles que correspondent aux "points critiques à l'infini".

Le lien entre cette définition et la condition de Palais-Smale est le suivant.

Proposition 9.3.1

Si F vérifie la condition de Palais-Smale, toute valeur critique généralisée est une valeur critique.

$\boxtimes$

Il est bien sûr évident que l'inverse est vrai également, c'est-à-dire que (même si F ne vérifie pas P.S) toute valeur critique est une valeur critique généralisée.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter des outils fondamentaux de la théorie variationnelle.

9.4 Le Lemme de déformation

Théorème 9.4.1

(lemme de déformation sans point critique). Soit F une fonctionnelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un espace de Banach E. Soit $a < b$. On suppose que F n'a pas de valeur critique généralisée dans l'intervalle $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$ (petit). Il existe alors une rétraction de F^b sur F^a, c'est-à-dire une fonction $\phi : F^b \times [0,1] \to F^b$, continue telle que

$$\begin{array}{ll} \phi(v,0) = v & \forall v \in F^b \\ \phi(v,1) \in F^a & \forall v \in F^b \\ \phi(v,t) = v & \forall v \in F^b \end{array}$$

$\boxtimes$

Ainsi F^b se rétracte par déformation sur F^a s'il n'y a pas de valeur critique généralisée entre a et b, et donc F^b et F^a ont le même type d'homotopie. Dans la pratique, le résultat précédent permet de trouver des valeurs critiques généralisées lorsqu'on arrive à prouver que deux ensembles de niveaux ont des topologies différentes. C'est ainsi que l'on prouve la plupart des résultats Min, Max (voir paragraphe suivant).

L'idée de la démonstration du théorème, lorsque $E = H$ est un espace de Hilbert, est de "pousser" l'ensemble F^b le long des lignes de flot associées au gradient de F (qui représente, rappelons-le, la direction de plus forte pente). En intégrant le champ de gradient on arrive donc à déformer F^b sur F^a, sauf si celui-ci a tendance à s'annuler : cette éventualité sera exclue grâce à l'hypothèse F n'a pas de valeur critique généralisée dans [a,b].

Afin de mettre en forme ces idées, nous allons commencer par traiter le cas $E = H$ est un espace de Hilbert, et F est plus régulière. Le cas général sera entrevu plus tard : nous introduirons en particulier la notion de "pseudo-gradient" (qui remplace le gradient pour un Banach).

Preuve

On prouve le résultat dans le cas où H est un espace de Hilbert, F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\left|\nabla^2 F\right|$ borné.

a Utilisation de la notion de gradient

Dans le cas d'un Hilbert H, nous pouvons identifier H et H^* : le gradient de F, au point u sera alors l'élément de H associé à $dF(u)$, élément de H^* par

$$(X, \nabla F(u)) = \langle dF(u), X \rangle \ \ \forall X \in H$$

où les parenthèses représentent le produit scalaire pour H et les crochets expriment la dualité entre H et H^*. On a par ailleurs

$$|\nabla F|_H = ||dF(u)||_{H^*} \tag{9.8}$$

comme on vérifie aisément.

Rappelons que le gradient est porté par la direction de plus forte variation de F. Remarquons enfin que la définition du gradient dépend du choix du produit scalaire (et donc la direction de plus forte descente également).

Comme nous avons supposé (dans cette partie) que F est de classe $\mathcal{C}^2$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \nabla F \ : & H & \longrightarrow & H \\ & v & \longmapsto & \nabla F(v) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons alors l'équation du flot associée au gradient de F (ou plutôt à son opposé).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}M(t) & = & \nabla F(M(t)) \\ \\ M(u) & = & v \end{array} \right. \tag{9.9}$$

où v est fixé dans F^b.

Comme le champ de vecteur ∇F est lipschitzien, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz qui nous montre que 9.9 à une solution sur un petit intervalle $[0, \delta[$, où $\delta > 0$. On vérifie alors que pour tout $t \in [0, \delta[$

$$\frac{d}{dt}F(M(t)) = -\nabla F(M(t)).\frac{d}{dt}M(t) = -\left|\nabla F(M(t))\right|^2 \tag{9.10}$$

On vérifie ainsi que

$$\frac{d}{dt}F(M(t)) \leq 0$$

F décroît donc le long des trajectoires.

b L'intervalle d'existence de la solution est $[0, +\infty[$. (pour les temps positifs).

On suppose en effet qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\left|\nabla^2 F(u)\right|\right| < C, \ \forall u \in H \tag{9.11}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'intervalle maximal d'existence est $[0, \delta_0[$ ($\delta_0 > 0$). On a alors, en vertu de 9.11, pour tout $t \in [0, \delta_0[$

$$||\nabla F(M(t))|| \leq ||\nabla F(M(0))|| + C\,||M(t) - M(0)||$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\,||M(t) - M(0)|| \leq \left|\left|\frac{d}{dt}M(t)\right|\right| \leq C_0 + C\,||M(t) - M(0)||$$

On en déduit (lemme de Gronwall)

$$||M(t) - M(0)|| \leq \frac{C_0}{C}\exp Ct \leq \frac{C_0}{C}\exp C\delta_0, \ \forall t \in [0, \delta_0[$$

et donc $M(t)$ reste borné sur $[0, \delta_0[$, indépendamment de t. On voit alors, en revenant à 9.9 que $M(t)$ converge vers une limite lorsque $t \to \delta_0$. Grâce au théorème de Cauchy-Lipshitz on peut alors prolonger la solution en δ_0. L'intervalle maximal d'existence est alors $[0, \delta_0 + \mu[$, ($\mu > 0$), ce qui contredit l'hypothèse de départ.

c Il existe t_0 tel que pour tout $v \in F^b$, $F(M(t_0)) < a$. A cet effet, montrons qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$|\nabla F(v)| \geq \eta_0, \ \nabla v \in F^b \backslash F^{a-\varepsilon} \tag{9.12}$$

Supposons que 9.12 ne soit pas vrai. Alors il existerait une suite $v_n \in H$ telle que

$$F(v_n) \in [b, a - \varepsilon] \tag{9.13}$$

$$||\nabla F(v_n)|| \to 0 \tag{9.14}$$

Quitte à extraire une sous-suite on peut toujours supposer qu'il existe $\beta \in [b, a - \varepsilon]$ tel que

$$F(v_n) \to \beta$$

β serait alors une valeur critique généralisée, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En retournant à 9.14, on obtient à partir de 9.12,

$$\frac{d}{dt}F(M(t)) = -\left|\nabla F(M(t))\right|^2 \leq -\eta_0$$

Donc

$$F(M(t)) \leq F(M(0)) + \eta_0^2 t \leq b - \eta_0^2 t$$

et

$$F(M(t)) \leq a - \varepsilon$$

dès que $t \geq t_0 = \dfrac{b-a+\varepsilon}{\eta_0^2}$

d Construction de la rétraction ϕ.

Considérons tout d'abord le "flot" $\tilde{\phi}$ associé au champ de vecteurs $-\nabla F$. Celui-ci associe à $v \in F^b$, pris compte tenu de la donnée initiale au temps zéro, la solution $M(t)$ de 9.9, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(v,t) = M(t), \ \forall v \in F^b, \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ M(0) = v \end{cases}$$

Le théorème de Caucy-Lipschitz nous enseigne alors que l'application $\tilde{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $F^b \times \mathbb{R}^+$. De plus il résulte de **c** que $\forall v \in F^b$

$$\tilde{\phi}(v,t) \in F^a, \quad \text{si } t \geq t_0$$

Pour v donné dans F^b considérons le temps d'entrée dans F^a

$$\tilde{t_0}(v) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+, \ \tilde{\phi}(v,t) \in F^a \right\}$$

de sorte que

$$\tilde{t_0}(v) = 0, \quad \text{si } v \in F^a$$

On vérifie ensuite que l'application

$$v \mapsto \tilde{t_0}(v)$$

est continue (en vertu de 9.12 et du théorème d'inversion locale). Posons alors

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(v,t) &= \tilde{\phi}(v,t) && \text{si } t < \tilde{t_0}(v) \\ &= \tilde{\phi}(v,\tilde{t_0}(v)) && \text{sinon} \end{aligned}$$

Il est alors clair que $\tilde{\phi}$ est continue (composée de fonctions continues). Nous sommes maintenant en mesure de définir ϕ par

$$\phi(v,t) = \tilde{\phi}\left(v, \frac{t}{t_1}\right)$$

où

$$t_1 = \sup \left\{ \tilde{t_0}(v, \ v \in F^b \right\} < +\infty \text{ (cf partie b)}$$

On vérifie que ϕ a les propriétés annoncées :
— ϕ est continue de $F^b \times [0,1] \to F^a$
— $\forall v \in F^b$, $\phi(v,1) \in F^a$
— $\forall v \in F^a$, $\phi(v,t) = v$

Cela termine donc la preuve du théorème dans le cas considéré.

⊠

Voyons maintenant comment adapter la preuve précédente dans le cas où F est (seulement) $\mathcal{C}^1$ et E est un espace de Banach. Il est clair que dans ce cas, on ne peut plus définir la notion de gradient qui repose sur l'identification de H et H^* par l'intermédiaire du produit scalaire. On remplace alors cette notion par celle de pseudo-gradient.

Définition 9.4.1

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur E, espace de Banach. On dit qu'un champ de vecteurs $X(\cdot)$ est un pseudo-gradient pour F sur E si et seulement si

$$\text{L'application } u \to X(u) \text{ est continue de E vers E, localement Lipschitz} \tag{9.15}$$

$$||X(u)|| \leq 2 \min \{||dF(u)||_{E^*}, 1\} \tag{9.16}$$

$$\langle dF(u), X(u) \rangle \geq \min \{||dF(u)||_{E^*}, 1\} \, ||dF(u)||_{E^*} \tag{9.17}$$

Remarque La notion de pseudoo-gradient est bien sûr toujours relative à une fonctionnelle.

Nous démontrerons plus loin le résultat suivant. :

Proposition 9.4.1

On peut construire un pseudo-gradient pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un espace de Banach E séparable.

⊠

Preuve du théorème : Cas général

Soit X un pseudo-gradient pour F. On remplace l'équation 9.9 par l'équation suivante pour $v \in F^b$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}M(t) & = & \nabla F(M(t)) \\ M(u) & = & v \end{cases} \tag{9.18}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution de 9.18 existe sur un petit intervalle $[0, \delta_0[$. En fait, d'après 9.16, X est uniformément borné

$$||X(u)|| \leq 2 \tag{9.19}$$

et en raisonnant par l'absurde, comme précédemment, on montre que l'intervalle maximal d'existence est $[0, +\infty[$. Par ailleurs, F décroît bien le long des courbes intégrales de X. En effet

$$\frac{d}{dt}F(M(t)) = - \langle dF(M(t)), X(M(t)) \rangle \leq - \min \left\{ ||X(M(t))||^2, 1 \right\} \leq 0 \tag{9.20}$$

(on a utilisé 9.17)

Le reste de la démonstration est ensuite pratiquement identique.

⊠

Donnons maintenant les principales idées de la preuve de la proposition 9.4.1 que nous avons laissé en suspens.

Preuve

Pour vérifier 9.17, il est clair que l'on doit avoir $X(u) = 0$ lorsque $dF(u) = 0$. Considérons l'ensemble

$$K_c = \{u \in F,\ dF(u) = 0\}$$

des points critiques de F, et son complémentaire

$$\tilde{E} = E \backslash K_c = \{u \in F,\ dF(u) \neq 0\}$$

Afin de mettre en lumière les idées de la preuve, considérons tout d'abord le cas simple suivant :

a Le cas $\dim E < +\infty$ et $K_c = 0$.

On a alors $\tilde{E} = E$. Pour $u \in E$, considérons l'ensemble $\Lambda(u)$ des vecteurs $Y \in E$ tels que

$$||Y|| \leq 2 \min\{||dF(u)||\,, 1\} \tag{9.21}$$

$$\langle dF(u), Y\rangle \geq \min\{||dF(u)||\,, 1\}\, ||dF(u)||_{E^*} \tag{9.22}$$

On vérifie aisément que l'ensemble $\Lambda(u)$ est non vide et ouvert. Pour chaque u donné, choisissons un élément dans $\Lambda(u)$, que nous noterons Y_u. Comme $dF(u)$ est une application continue, on voit qu'il existe un voisinage $W(u)$ de u dans E, tel que $Y_u \in \Lambda(v)$ pour tout $v \in W(u)$ (c'est-à-dire que Y_u vérifie 9.21 et 9.22 avec u remplacé par v).

Considérons alors le recouvrement $\bigcup\limits_{u \in E} W(u)$. En appliquant le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire un recouvrement dénombrable $W(u_i)$ ($i = 1$ à $+\infty$) tel que

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} W(u_i) = E$$

Pour tou compact K de $\tilde{E}$, K ne contient qu'un nombre fini de u_i.

La connaissance des points u_i et donc de Y_{u_i} va alors nous permettre de construire le champ $X(u)$ grâce à une partition de l'unité relative aux ouverts $W(u_i)$. Il existe des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^{+\infty}(W(u_i))$ telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(u) \equiv 1 \quad \text{sur } E$$

Posons alors

$$X(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(u) Y_{u_i}$$

On vérifie, comme les relations 9.21 et 9.22 peuvent être superposées par linéarité, que $X(\cdot)$ cérifie bien 9.16 et 9.17. Par ailleurs, il est clair que $X \in \mathcal{C}^\infty$, et nous avons donc construit un pseudo-gradient $\mathcal{C}^\infty$.

b Le cas général.

On définit comme précédemment Y_u pour $u \in \tilde{E}$ (ce qui est possible). On a alors le recouvrement

$$\tilde{E} = \bigcup_{u \in \tilde{E}} W(u) \tag{9.23}$$

On ne peut évidemment pas invoquer le théorème de Borel-Lebesgue. En revenche, on peut montrer le résultat suivant :

Lemme 9.4.1

Soit V un espace métrique séparable. On peut extraire de tout recouvrement ouvert de V, (i.e $V = \bigcup_{j \in J} W_j$ où $\forall j \in J, W_j$ est un ouvert) un recouvrement localement fini $V = \bigcup_{i \in I} W_i$, $I \subset J$ c'est-à-dire tel que, pour tout élément $v \in V$ il existe un voisinage U de v tel que U n'intersecte qu'un nombre fini des W_i (i.e Card $\{i \in I,\ U \cap W_i \neq \emptyset\} < +\infty$)

$\boxtimes$

Admettons ce résultat. Considérons alors un recouvrement localement fini de $\tilde{E}$ extrait du recouvrement localement fini de $\tilde{E}$ extrait de 9.23

$$\tilde{E} = \bigcup_{i \in I} W(u_i)$$

Il nous reste maintenant à construire une partition de l'unité subordonnée au recouvrement précédent. Considérons pour $i \in I$ la fonction ρ_i définie par

$$\rho_i(u) = \operatorname{dist}(u, E \backslash W(u_i)) \tag{9.24}$$
$$ = \inf \{\|u - v\|,\ v \in E \backslash W(u_i)\} \tag{9.25}$$

On vérifie que ρ_i est lipschitzienne, de constante de Lipschitz inférieure à 1. Par ailleurs pour u donné, il n'existe qu'un nombre fini d'indices i tels que $\rho_i(u) \neq 0$. Posons alors

$$\varphi_i(u) = \frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)}$$

le dénominateur n'étant qu'une somme finie). On vérifie que

$$\begin{array}{ll} \sum \varphi_i(u) = 1 & \forall u \in \tilde{E} \\ 0 < \varphi_i \leq 1 & \\ \varphi_i \equiv 0 & \text{en dehors de } W(u_i) \end{array}$$

Comme le recouvrement est localement fini, pour tout $u \in \tilde{E}$, il existe un voisinage U de u tel que

$$\text{Card } \{j \in I,\ \rho_j(v) \neq 0,\ v \in U\} = N = \mathrm{C}^{\text{te}}$$

et donc φ_i est localement Lipshitzienne. On introduit ensuite

$$X(u) = \sum_{i\in I} \varphi_i(u) Y_{u_i}$$

et on vérifie que X convient, comme dans la partie **a**

⊠

COMPLÉMENT : Déformation globale

Au cours du paragraphe précédent nous avons construit une déformation $\phi : [0,1] \times F^b \to F^b$.

Il est parfois souhaitable de construire une déformation globale. On montre alors la variante ci-dessous du lemme de déformation.

Théorème 9.4.2

Supposons que F n'ait pas de valeur critique généralisée dans $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Alors il existe un déformation $\phi : E \times [0,1] \to E$ telle que

$$\begin{array}{ll} \phi(\cdot,0) = Id_E & \\ \phi(F^b,t) \subset F^b & \forall t \in [0,1] \\ \phi(F^b,1) \subset F^a & \\ \phi(u,t) = u & \forall u \in F^a \forall t \in [0,1] \end{array}$$

⊠

Preuve

Elle est tout à fait similaire à celle du théorème 9.4.1. Il suffit de modifier la définition du champ de vecteurs. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ telle que

$$\begin{array}{ll} \varphi(t) = 1 & \text{si } t \le b \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } t \ge b+1 \end{array}$$

on considère alors le flot associé au champ de vecteurs $\varphi(F(u))\, X(M(t))$ que l'on intègre. On résoud donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{d}{dt} M(t) & = & \varphi(F(u))\, X(M(t)) \\ M(u) & = & v \end{array} \right.$$

et cela fournit la déformation voulue.

⊠

9.5 Lemme de déformation et condition de Palais-Smale

Comme nous l'avons déjà remarqué, lorsque F^a et F^b n'ont pas le même type d'homotopie, le théorème 9.4.1 nous fournit l'existence d'une valeur critique généralisée $\beta \in [a,b]$. Bien évidemment, nous sommes en fait intéressés par les valeurs critiques (puisque nous cherchons des points critiques). Lorsque F satisfait la condition (P.S) nous avons vu que {valeurs critiques} =

{valeurs critiques généralisées} et le théorème 9.4.1 s'exprime alors par :

"Si F vérifie (P.S) et si F^a et F^b n'ont pas le même type d'homotopie, alors il existe une valeur critique $\beta \in [a, b]$"

Ainsi lorsqu'on traite un tel problème, il est essentiel de vérifier si F satisfait (P.S), pour pouvoir appliquer le principe précédent.

Néanmoins, si F ne satisfait pas (P.S) la partie n'est pas perdue pour autant. Dans ce cas, on doit étudier les suites de Palais-Smale et comprendre par quels mécanismes la perte de compacité se produit : bien souvent cette perte de compacité est due à des symétries internes du problème. Cela se produit lorsque la fonctionnelle est laissée invariante par l'action de certains groupes sur l'espace fonctionnel, et si l'orbite d'un point par le groupe est non compacte (au sens de la topologie forte de l'espace).

Une telle analyse permet parfois de déterminer les niveaux β tels que $(P.S)_\beta$ ne soit pas vérifiée. De manière plus délicate, elle peut permettre de connaître la contribution topologique aux ensembles de niveau des suites de Palais-Smale.

9.6 Applications : méthodes de Min-Max

Parmi les multiples fçons d'utiliser le lemme de déformation l'une des plus utilisées et des plus faciles à mettre en oeuvre est la méthode de Min-Max. Néanmoins, un exemple très simple d'une telle méthode est fourni par le lemme de Col, que nous étudierons au chapitre suivant.

9.7 Exercices

Exercice 1

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit V une fonction de $\Omega \times \Omega \backslash \Delta \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ où $\Delta = \{(x, y) \in \Omega^2,\ x = y\}$. On suppose que

$$\begin{array}{ll} V(x,y) \to +\infty & \text{lorsque } (x,y) \to \Delta \\ V(x,y) \to +\infty & \text{lorsque } x \to \partial\Omega,\ y \to \partial\Omega \end{array}$$

1. Montrer que $\inf_{(x,y)\in\Omega^2\backslash\Delta} V(x,y)$ est atteint.
2. On suppose que $\theta \in \Omega$, et $B_r(0) \subset \Omega$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} S^1 & \longrightarrow & \Omega \times \Omega\backslash\Delta \\ \exp i\theta & \longmapsto & (0, r\exp i\theta) \end{array}$$

n'est pas homotope à une application constante de $S^1 \longrightarrow \Omega \times \Omega\backslash\Delta$. En déduire que V a au moins deux points critiques sur $\Omega \times \Omega\backslash\Delta$.

Exercice 2

(Lemme de déformation avec point critique). Soit H un espace de Hilbert, et F une fonctionnelle $\mathcal{C}^1$ sur H. On suppose que F vérifie la condition de Palais-Smale sur H. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ On considère l'ensemble

$$K_\beta = \{x \in H,\ F(x) = \beta,\ dF(x) = 0\}$$

A 1. Montrer que K_β est compact.

2. Pour $\delta > 0$, on considère l'ensemble

$$N_\delta = \{x \in H,\ |F(x) - \beta| \leq \delta,\ \|dF(x)\| \leq \delta\}$$

Montrer que si $\delta_1 < \delta_2$, $N_{\delta_1} \subset N_{\delta_2}$ et

$$\bigcap_{\delta>0} N_\delta = K_\beta$$

3. Pour $\delta > 0$ on considère

$$U_\delta = \{x \in H,\ \mathrm{dist}(x, K_\beta) \leq \delta\}$$

Montrer que $\forall \delta > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$U_{\delta_1} \subset N_\delta$$

(On utilisera le fait que K_β est compact et on pourra raisonner par l'absurde).

4. Montrer que $\forall \delta > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$N_{\delta_0} \subset U_\delta$$

(On pourra raisonner par l'absurde).

5. Déduire de **3** et **4** que pour tout $\delta > 0$, il existe δ_0 et $\delta > 0$ tels que

$$N_{\delta_0} \subset U_\delta \subset U_{2\delta} \subset N_\delta$$

6. Construire une fonction η continue et lipschitzienne sur H, $\delta_1 < \delta_0$ tels que

$$\begin{array}{ll} \eta \equiv 1 & \text{sur } H \backslash N_{\delta_0} \\ \eta \equiv 0 & \text{sur } N_{\delta_1} \end{array}$$

et $0 \leq \eta \leq 1$ sur H.

B On suppose ici que F est $\mathcal{C}^2$, que $\left|\nabla^2 F\right|$ est borné. Pour $u_0 \in H$, δ, δ_0, δ_1 et δ comme en **A** (question 5), et η construite comme en A6), on considère l'équation sur H,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{d}{dt}M(t) & = & -\eta M(t)\dfrac{\nabla F(M(t))}{\|\nabla F(M(t))\| + 1} \\ M(0) & = & v_0 \end{array} \right. \tag{9.26}$$

1. Montrer que l'intervalle d'existence pour 9.26 est $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Montrer que

$$\frac{d}{dt}F(M(t)) = -\eta M(t)\frac{\|\nabla F(M(t))\|^2}{\|\nabla F(M(t))\|+1} \leq 0$$

3. On suppose que $v_0 \notin N_{\delta_0}$. Montrer que

$$\text{mes } \left\{t \in \mathbb{N}^+, \ M(t) \notin N_{\delta_0}\right\} \geq \rho$$

(On utilisera le fait que $\left\|\frac{d}{dt}M(t)\right\| \leq 1$, et la question A5).

4. En déduire que, si $v_0 \notin N_\delta$

$$\begin{aligned} E(M(1)) &\leq E(v_0) - \text{mes } \left\{t \in \mathbb{R}^+, \ M(t) \notin N_{\delta_0}\right\} - \frac{\delta_0^2}{\delta_0+1} \\ &\leq E(v_0) - \frac{\rho\delta_0^2}{\delta_0+1} \end{aligned}$$

C 1. On pose $\phi(t, v_0) = M(t)$, solution de 9.26 avec pour donnée initiale v_0. Montrer que $\forall\varepsilon > 0$, ϕ est continue de $[0,1] \times F^{\beta+\varepsilon} \to F^{\beta+\varepsilon}$ et que, si on choisit ε suffisamment petit, alors

$$\begin{array}{ll} \phi(1,u) \in F^{\beta-\varepsilon} & \forall u \in F^{\beta+\varepsilon}\backslash N_\delta \\ \phi(1,u) \in F^{\beta-\varepsilon} \subset N_\delta & \forall u \in F^{\beta+\varepsilon} \end{array}$$

2. De manière plus générale, soit N un voisinage quelconque de K_{beta}. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $N_\delta \subset N$, et en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$, ϕ application continue de $[0,1] \times F^{\beta+\varepsilon} \to F^{\beta+\varepsilon}$ telle que

$$\begin{array}{ll} \phi(0,u) = u & \forall u \in F^{\beta+\varepsilon} \\ F(\phi(t,u)) & \text{est une fonction décroissante} \\ \phi(1,u) \in F^{\beta-\varepsilon} & \forall u \in F^{\beta+\varepsilon}\backslash N_\delta \\ \phi(1,u) \in F^{\beta-\varepsilon} \subset N_\delta & \forall u \in F^{\beta+\varepsilon} \end{array}$$

D Généraliser au cas où F est seulement $\mathcal{C}^1$, en utilisant un pseudo-gradient.

Chapitre 10

Le Lemme du Col

10.1 Énoncé

Le lemme du Col est un exemple très simple de méthode de Min-Max. Il permet souvent de trouver un nouveau point critique lorsqu'on connaît un minimum local (parfois une solution évidente) et si la fonctionnelle n'est pas minorée. Son domaine d'applications est cependant plus vaste. Donnons tout de suite un énoncé.

Théorème 10.1.1

Soit F une fonctionnelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un espace de Banach E. On fait les hypothèses suivantes sur F :

1. Il existe $u_0 \in E$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que

$$\text{si } \|u - u_0\| = \rho \text{ alors } F(u) > F(u_0) + \alpha \tag{10.1}$$

2. Il existe un point $u_1 \in E$ tel que

$$\|u - u_1\| > \rho \text{ et } F(u) < F(u_0) + \alpha \tag{10.2}$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des chemins reliant u_0 à u_1, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \left\{p \in \mathcal{C}^0\left([0,1], E\right),\ p(0) = u_0,\ p(1) = u_1\right\}$$

Soit

$$\beta = \inf_{p \in \mathcal{P}} \sup_{s \in [0,1]} F(p(s))$$

Alors

$$\beta \leq F(u_0) + \alpha$$

et β est une valeur critique généralisée de F. Si F vérifie (P.S), β est donc une valeur critique de F.

$\boxtimes$

<u>Commentaires</u>

1. Le point u_0 correspond à une "cuvette" pour F. Si F correspond à une hauteur (cf figure 1), pour descendre à un niveau plus bas que $F(u_0)$, il faut en partant de u_0, et en pratiquant un chemin continu, monter à une altitude de $F(u_0)+\alpha$ au moins. Dans la pratique, u_0 correspond très souvent à un minimum local, une solution évidente. Pour vérifier la condition 10.1 il suffit alors de regarder la forme Hessienne au point u_0 et de montre qu'elle est positive et elliptique.

2. Le point bas u_1 est facile à trouver lorsque la fonctionnelle n'est pas bornée inférieurement.

3. L'appellation lemme de Col see justifie par l'idée intuitive que si on veut sortir de la cuvette autour de u_0 et rejoindre la vallée où se trouve u_1, on va chercher le chemin qui sera celui qui monte le moins haut (comparer avec la définition de β). En principe en un tel point deux lignes se coupent (en tout cas si $\dim E = 2$, situation de la vie courante) : la ligne de crête, et la ligne du chemin qui mène au col. Le point de passage du col correspond à un minimum d'altitude sur la ligne de cheminement. Cette image est très similaire à celle que l'on peut avoir d'un point-selle en programmation linéaire.

4. La situation est décrite sur la figure ci-dessous.

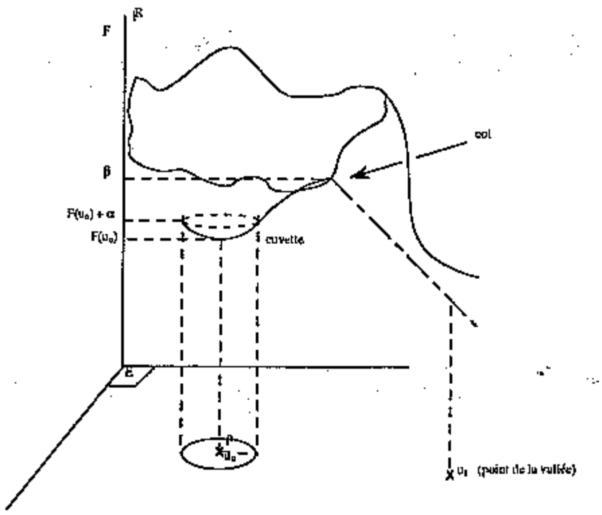


FIGURE 10.1 – Graphe de F dans $E \times \mathbb{R}$.

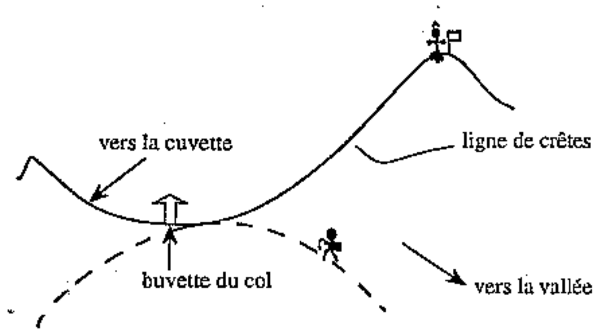


FIGURE 10.2 – Le col à la rencontre de la ligne de crête et de la ligne de cheminement.

Il est parfois utile, et souvent plus facile de représenter les lignes de niveau (comme sur les cartes IGN) plutôt que le graphe : le graphe vit dans $E \times \mathbb{R}$ alors que les lignes de niveau sont tracées sur E.

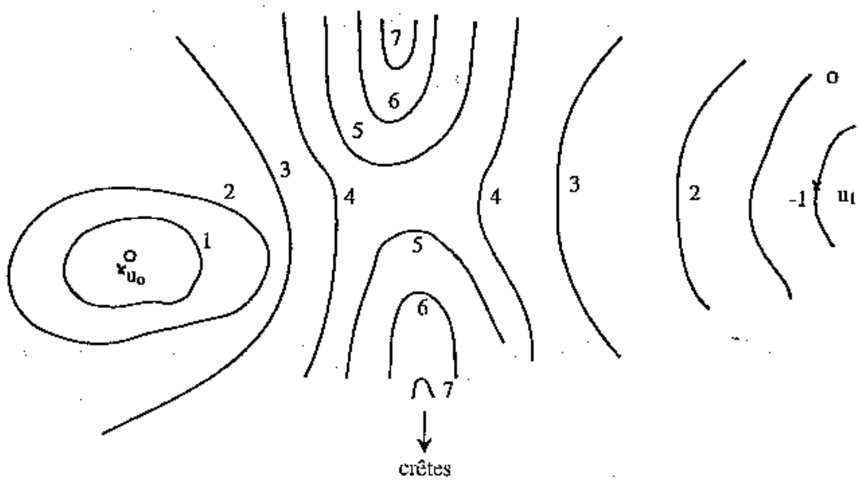


FIGURE 10.3 – Sur chaque ligne de niveau nous avons indiqué la valeur de la fonction F.

Avant de donner la preuve du théorème, commençons par un résultat préliminaire.

Proposition 10.1.1

L'ensemble $\tilde{K}_c$ des valeurs critiques généralisées de F est fermé (dans $\mathbb{R}$). De même, l'ensemble K_c des valeurs critiques est fermé.

⊠

Preuve

Soit β_n une suite de valeurs critiques généralisées de F telle que

$$\beta_n \to \beta \quad \text{dans } \mathbb{R} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

Il faut montrer que β est une valeur critique généralisée de F. Par définition de β_n, pour n fixé, il existe une suite $(v_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{lll} F(v_k^n) & \to \beta_n & k \to +\infty \\ |dF\,(v_k^n)| & \to 0 & k \to +\infty \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{array}{lll} |F(v_k^n) - \beta_n| & \leq & \dfrac{1}{n} \\ |dF\,(v_k^n)| & \leq & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Posons alors $u_n = v_{k(n)}^n$. On vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \beta$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} dF(u_n) = 0 \quad \text{dans } E^*$$

et donc β est une valeur critique généralisée de F.

La deuxième assertion résulte du fait que l'application $u \mapsto dF(u)$ est continue.

⊠

10.2 Démonstration du Lemme du Col

Quitte à changer d'origine, et à soustraire une constante à F, on peut toujours supposer que

$$u_0 = 0 \quad \text{et } F(u_0) = F(0) = 0$$

(ceci soulagera les notations). Montrons tout d'abord que

$$\beta \geq F(u_0) + \alpha = \alpha \tag{10.3}$$

Rappelons que

$$\beta = \inf_{p\in mathcalP} \sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) \tag{10.4}$$

Considérons un chemin $p \in \mathcal{P}$. Comme $p(0) = u_0$ et $p(1) = u_1$ et comme p est continue, la fonction $\varphi(s) = \|p(s) - p(0)\|$ est continue et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) > \rho$; il existe donc par le théorème des valeurs intermédiaires $s_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\varphi(s_0) = \|p(s_0) - u_0\| = \rho$$

et donc d'après la propriété 10.2

$$F(p(s_0)) \geq \alpha$$

Il en résulte que, pour tout chemin $p \in \mathcal{P}$

$$\sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) \geq \alpha$$

et **??** en résulte.

Afin de montrer que β est une valeur critique généralisée, on raisonne par l'absurde, et on suppose que β n'est pas une valeur critique généralisée, i.e n'appartient pas à $\tilde{K_c}$. Par la proposition 10.0.1, comme $\tilde{K_c}$ est fermé, son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert : il existe donc, si $\beta \notin \tilde{K_c}$ un nombre $\varepsilon > 0$ tel que

$$F \text{ n'a pas de valeur critique généralisée dans } [\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon] \tag{10.5}$$

Montrons à l'aide du lemme de déformation que l'on aboutit à une contradiction. D'après le lemme de déformation, pour $a = \beta - \varepsilon$, $b = \beta + \varepsilon$, il eisterait grâce à **??** une rétraction de F^b sur F^a, c'est-à-dire une application continue ϕ de $F^{\beta+\varepsilon} \times [0,1]$ vers $F^{\beta+\varepsilon}$ telle que

$$\begin{cases} \phi(v,0) = v & \forall v \in F^{\beta+\varepsilon} \\ \phi(v,1) \in F^{\beta-\varepsilon} & \\ \phi(v,0) = v & \forall v \in F^{\beta-\varepsilon} \end{cases} \tag{10.6}$$

On remarque en particulier que si on choisit ε suffisamment petit (ce qui est toujours possible, quitte à le diminuer), on peut le choisir de sorte que

$$\beta - \varepsilon > F(u_1) \quad \text{(grâce à 10.2)} \tag{10.7}$$

et

$$\beta - \varepsilon > 0 \quad \text{(grâce à 10.3)} \tag{10.8}$$

Pour ce choix de ε, on voit que les extrémités des chemins de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire u_0 et u_1 ne bougent pas au cours de la rétraction car

$$F(u_0) = 0 < \beta - \varepsilon, \quad F(u_1) < \beta - \varepsilon$$

ce qui entraîne $u_0 \in F^{\beta-\varepsilon}$, $u_1 \in F^{\beta-\varepsilon}$, et donc par **??**

$$\phi(u_0, 1) = u_0, \quad \phi(u_1, 1) = u_1 \tag{10.9}$$

Considérons un chemin $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) < \beta + \varepsilon \tag{10.10}$$

(il est toujours possible de trouver un tel chemin en raison de la définition même de β). 10.9 signifie que $\forall s \in [0,1],\ p(s) \in F^{\beta+\varepsilon}$ et donc p est un chemin qui relie u_0 à u_1 dans $F^{\beta+\varepsilon}$. A l'aide de la déformation ϕ nous allons pousser ce chemin sur $F^{\beta-\varepsilon}$: comme ni u_0 ni u_1 ne bougent au cours de cette déformation, nous obtiendrons un nouveau chemin reliant u_0 à u_1, mais cette fois dans $F^{\beta-\varepsilon}$. Un tel chemin contrdirait la définition de β, et cela terminera notre raisonnement par l'absurde.

Plus précisément, considérons le chemin

$$\tilde{p} : [0,1] \to F^{\beta-\varepsilon}$$

défini par

$$\tilde{p}(s) = \phi(p(s), 1)$$

On a bien

$$\begin{array}{c} \tilde{p}(0) = \phi(p(0), 1) = \phi(u_0, 1) = u_0 \\ \tilde{p}(1) = \phi(p(1), 1) = \phi(u_1, 1) = u_1 \end{array}$$

On vérifie aisément que $\tilde{p}$ est continue (composée de fonctions continues), et donc $\tilde{p} \in \mathcal{P}$. On a, en outre $\forall s \in [0,1],\ \tilde{p}(s) \in F^{\beta-\varepsilon}$, et donc

$$\sup_{s \in [0,1]} F(p(s)) < \beta - \varepsilon$$

Cela est évidemment contradictoire avec la définition de β, et termine donc la preuve du théorème 10.1.1.

⊠

Remarques

1. Ce résultat remarquable est dû à Ambrosetti et Rabinowitz (sous la forme que nous avons énoncée), (J. Funt. Anal. 14(1973)). Il avait été introduit pour traiter des problèmes liés aux systèmes hamiltoniens. En dimension finie néanmoins, la méthode était connue bien avant.

2. Il existe de nombreuses variantes de ce théorème (voir [Struwe]).

3. Il convient d'attirer l'attention sur le fait que, dans la preuve qui a été donnée, on n'essaye pas de montrer que β est atteint par un chemin optimal (ce qui aurait pu être une première idée pour démontrer le théorème). Dans toutes les méthodes de Min-Max que nous verrons, cette remarque s'appliquera.

10.3 Une application du Lemme du Col

Voyons maintenant effectivement comment le résultat précédent permet de démontrer l'existence de solutions pour des problèmes non-linéaires.

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(u) & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{10.11}$$

Bien entendu, afin de trouver des solutions, il faut faire des hypothèses raisonnables sur la non-linéarité ; Au chapitre 3, en étudiant un problème de minimisation sous-contrainte, nous avions trouvé une solution positive lorsque la non-linéarité a la forme

$$g(t) = |t|^{p-2}t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{10.12}$$

lorsque $p < 2^*$. La situation que nous étudions ici peut être considérée comme une extension de ce résultat, à des non-linéarités g qui ressemblent beaucoup à 10.3 (mais qui ne possèdent pas ses propriétés d'homogénéité).

Nous ferons les hypothèses suivantes sur g

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} = 0 \tag{10.13}$$

En particulier $g(0) = 0$ et g dérivable en 0 de dérivée nulle.

— Il existe $2 < p \leq 2^*$ tel que

$$|g(t)| \leq \left(1 + |t|^{p-1}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{10.14}$$

où $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

— Soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Il existe $q > 2$, et $R_0 > 0$ tels que

$$0 < qG(t) < g(t)t \quad \text{si } |t| \geq R_0 \tag{10.15}$$

L'hypothèse 10.14 exprime le fait qu'à l'infini, g ne croît pas plus vite qu'une fonction de type 10.12. L'hypothèse 10.15 en revenche montre (d'une certaine façon) que g croît au moins aussi vite qu'une fonction de la forme

$$t \to C|t|^{q-2}t, \quad C \text{ constante et } 2 < q < 2^*$$

Le fait que $q > 2$ exclut en particulier le cas "linéaire" ;

$$g(t) = \lambda t$$

[dans ce cas 10.10 deviendrait un problème de fonctions propres et n'aurait donc de solutions que pour un ensemble discret de valeurs de λ]. Rappelons :

Proposition 10.3.1

Les solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ sont les points critiques de la fonctionnelle F, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u|^2 - \int_\Omega G(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$\boxtimes$

Afin de pouvoir appliquer les théorèmes du calcul des variations, il est tout d'abord important de se demander comment se comportent les suites de Palais-Smale de F.

Proposition 10.3.2

Les suites de Palais-Smale de F sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$.

$\boxtimes$

Preuve

Soit u_n une suite de Palais-Smale de F, i.e telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$|F(u_n)| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{10.16}$$
$$|dF(u_n)| \to 0 \qquad \text{dans } H^{-1},\ \text{lorsque } n \to +\infty \tag{10.17}$$

La relation 10.17 signifie que

$$\Delta u_n + g(u_n) \to 0,\ \text{dans } H^{-1}(\Omega) \tag{10.18}$$

En multipliant par u_n et en intégrant on trouve

$$\begin{aligned} \langle dF(u_n), u_n \rangle &= \langle -\Delta u_n - g(u_n), u_n \rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega g(u_n) u_n \end{aligned}$$

Par 10.17

$$\langle dF(u_n), u_n \rangle = o(1)\|u_n\|_{H_0^1}, \quad \text{où } \lim_{n\to+\infty} o(1) = 0$$

et par 10.15

$$\int_\Omega g(u_n)u_n \geq q \int_\Omega G(u_n)$$

On a donc

$$-\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + q \int_\Omega G(u_n) \leq o(1)\|u_n\|_{H_0^1}$$

Par ailleurs par 10.16 on a

$$\left| \frac{q}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - q \int_\Omega G(u_n) \right| \leq C_q$$

En ajoutant ces deux dernières relations, le terme $q \int_\Omega G(u_n)$ disparaît et on obtient

$$\left(\frac{q}{2} - 1\right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq C_q + o(1)\|u_n\|_{H_0^1}$$

Comme $q > 2$, $\left(\frac{q}{2} - 1\right) > 0$, et il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\|u_n\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

reste borné lorsque $n \to +\infty$.

⊠

Nous sommes maintenant prêts pour étudier la condition de Palais-Smale.

Théorème 10.3.1

Si $p < 2^*$ alors F vérifie la condition de Palais-Smale.

⊠

Preuve

Soit u_n une suite de Palais-Smale. D'après la proposition 10.3.2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire une suite qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers un élément $u\imath H_0^1(\Omega)$, i.e

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ (pour une sous-suite, encore notée } u_n)$$

Afin de prouver le théorème, montrons que si $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $p < 2^*$, alors

$$g(u_n)u_n \longrightarrow g(u)u \quad \text{fortement dans } L^1\Omega \tag{10.19}$$

En effet par injection compacte de Sobolev

$$u_n \longrightarrow u \qquad \text{fort dans } L^p(\Omega) \;\; (p < 2^*)$$

On peut alors appliquer la proposition 3 du chapitre III QU'EST CE QUE C'EST ? ? ? à la fonction $t \to g(t)t$ pour prouver 10.19.

Par ailleurs, $\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ on a par 10.17

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega g(u_n)\cdot\varphi + o(1)\|\varphi\|_{H_0^1} \tag{10.20}$$

On peut passer à la limite dans 10.20 pour conclure que

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega g(u)\varphi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega) \tag{10.21}$$

et donc

$$-\Delta u = g(u) \qquad \text{dans } \Omega \tag{10.22}$$

En fait, on peut prendre $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ dans 10.20 et 10.21. En prenant $\varphi = u_n$ (res. $\varphi = u$) dans 10.20 (resp. 10.21), on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega g(u_n)u_n + o(1)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega g(u)u$$

Par 10.19 il vient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2$$

et donc $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

⊠

Remarque Dans l'énoncé du théorème 10.3.1, le cas $p = 2^*$ est exclu. C'est l'assertion 10.19 qui n'est plus valable, car l'injection $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ n'est pas compacte.

En fait, dans le cas où

$$g(t) = |t|^{2^*-2}t$$

nous montrerons que la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite (chapitre IX). Nous ferons en particulier une étude détaillée du mécanisme de perte de compacité dans ce cas-là.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat d'existence.

Théorme 10.3.2

Si g vérifie 10.13, 10.13 pour $p < 2^*$ et 10.15 alors il existe une solution positive u^+, non nulle, dans $H_0^1(\Omega)$ à l'équation 10.11.

⊠

Preuve

Nous allons appliquer le lemme du col (théorème 10.1.1) à la fonctionnelle F. Il s'agit alors de trouver une "cuvette", et un point bas.

$1^{ère}$ **étape** Existence d'une cuvette.

Il est clair, comme $g(0) = 0$, que la fonction nulle $u = 0$ est solution de l'équation et donc point critique. Afin de voir s'il y a une cuvette autour de 0, nous étudions le développement à l'ordre 2 autour de 0, de la fonctionnelle F (en fonction de la norme $\|\|_{H_0^1}$).

Comme $\frac{g(t)}{t} \to 0$ lorsque $t \to 0$, on vérifie par 10.13 et 10.14 que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$|g(t)| \leq \varepsilon|t| + C(\varepsilon)|t|^{p-1}$$

d'où il résulte que

$$|G(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + \frac{C(\varepsilon)}{p}|t|^p$$

On a donc

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p}C(\varepsilon)\|u\|_{L^p}^p$$

Comme $2 < p < 2^*$, on a par injection de Sobolev

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p\|u\|_{H_0^1}$$

et par inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq C_2\|u\|_{L^2}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}C_2\varepsilon\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p}C_pC(\varepsilon)\|u\|_{H_0^1}^p \\ &\geq \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}C_2\varepsilon\right) - \frac{1}{p}C_pC(\varepsilon)\|u\|_{H_0^1}^{p-2}\right]\|u\|_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir ε tel que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}C_2\varepsilon = \frac{1}{4}$$

Comme $p > 2$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que si $\|u\| < \rho_0$, alors

$$\frac{1}{p}C_pC(\varepsilon)\|u\|_{H_0^1}^{p-2} \leq \frac{1}{S}$$

Ainsi

$$F(u) \geq \frac{1}{S}\|u\|^2_{H^1_0}, \quad \text{si } \|u\| \leq \rho_0$$

En particulier, si $\|u\| = \rho_0$,

$$F(u) \geq \frac{1}{S}\rho_0^2 = \alpha$$

Cela établit le point **1** du lemme du col.

$2^{ème}$ **étape** Existence du point bas.

Nous allons établir que F n'est pas minorée, ce qui fournit automatiquement le point bas u_1.

Montrons tout d'abord que G croît au moins aussi vite que $|t|^q$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|G(t)| \geq C|t|^q \tag{10.23}$$

Cela résulte en fait de l'hypothèse 10.15. En effet

$$0 < qG(t) \leq G(t)t \quad \text{si } |t| \geq R_0$$

qui implique

$$\frac{d}{dt}\left(|t|^{-q}G(t)\right) \geq 0, \quad \text{si } |t| \geq R_0$$

10.23 en découle aisément.

On peut alors utiliser un argument d'homogénéité. On a, pour $u \in H^1_0$,

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(\lambda v) \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda|^q \int_\Omega |u|^q \quad \text{par 10.23} \end{aligned}$$

Comme $q < 2$, si $v \neq 0$, on voit que

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} F(\lambda v) = -\infty$$

Il suffit alors de choisir un vecteur v non nul, quelconque, et de poser $u_1 = \lambda v$, pour λ assez grand.

$3^{ème}$ **étape** Application du lemme du col.

Par le théorème 10.3.1, F satisfait (P.S). Nous venons de vérifier que les hypothèses **1**, **2** du théorème 10.1.1 sont satisfaites. On peut donc appliquer ce résultat, qui nous dit que $\beta \geq \alpha > 0$ définie par 10.3 est une valeur critique. Nous avons donc obtenu une solution non triviale de l'équation 10.11.

Si on désire une solution non triviale positive, on remplace la fonction g par la fonction g^+ définie par

$$g^+ = \max(g, 0)$$

et G par

$$G^+ = \int_0^t g^+(s)ds$$

et F par F^+ définie par

$$F^+(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G^+(v)$$

On vérifie que F^+ satisfait (P.S), et qu'il y a une "cuvette", comme précédemment autour de la fonction nulle. Par ailleurs comme $G^+ \leq G$, on a

$$F(v) \geq F^+(v)$$

et donc $\lim_{\lambda \to +\infty} F^+(\lambda v) = -\infty$ pour $v \neq 0$. L'existence du point bas s'en déduit donc comme précédemment. En appliquant le lemme du col, on obtient l'existence d'une solution non nulle u^+ de

$$\begin{cases} -\Delta u^+ &= g^+(u^+) & \text{sur } \Omega \\ u^+ &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Comme $g^+ \geq 0$, il résulte du principe du maximum que

$$u^+ \geq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Or par 10.15, $g(t)t \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ donc

$$g(t) \geq 0, \quad \text{si } t \geq 0$$

Ainsi $g^+(t) = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}^+$, et donc $g^+(u^+) = g(u^+)$, u^+ est donc la solution recherchée.

10.4 Exercices

Exercice 1

On considère l'espace de Hilbert $H_0^1([0,1])$. On rappelle que $H_0^1([0,1]) \hookrightarrow \mathcal{C}^0$ avec injection compacte. Soit ρ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que

$$1 \leq \rho(x) \leq 2, \quad \forall x \in [0,1]$$

1. On cherche $u \in H_0^1([0,1])$ solution de l'équation

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{d}{dx}u\right) &= \exp u^2 - 1 & \text{sur } [0,1] \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{cases} \tag{10.24}$$

Montrer qu'il y a une solution évidente.

2. Montrer que les solutions de 10.24 correspondent aux points critiques d'une fonctionnelle que l'on précisera.

3. Montrer en utilisant le lemme du col que 10.24 a une solution dans $H_0^1([0,1])$ non triviale, positive.

Exercice 2

1. On considère pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (paramètre) l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{d}{dx}u\right) & = & \lambda\,(\exp u - 1) & \text{sur } [0,1] \\ u(0) & = & u(1) = 0 & \end{array} \right. \tag{10.25}$$

   [ρ comme dans l'exercice 1].

   Montrer que 10.25 a une solution non triviale si $\lambda > 0$ est assez petit.

2. Même question pour l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{d}{dx}u\right) & = & \lambda\exp u & \text{sur } [0,1] \\ u(0) & = & u(1) = 0 & \end{array} \right. \tag{10.26}$$

Exercice 3

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On note λ_1 la première valeur propre du laplacien sur Ω. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{ll} \dfrac{g(t)}{t} \to a & \text{lorsque } t \to 0 \\ \dfrac{g(t)}{t} \to b & \text{lorsque } |t| \to +\infty \end{array}$$

On suppose que $a < \lambda_1 < b$ (et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose de plus $b < \lambda_2$ (deuxième valeur propre).

1. Montrer que l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(u) & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{10.27}$$

   a une solution.

2. (Réflexion). Que peut-on dire si $a = \lambda_1$?
   Soit F une fonctionnelle sur un espace de Banach E. Montrer que si F a deux minima locaux, alors F a au moins trois points critiques.

Exercice 4

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} F(x+1,y) & = & F(x,y) \\ F(x,y+1) & = & F(x,y) \end{array}$$

Montrer que F a au moins trois points critiques dans le carré $[0,1]^2$.