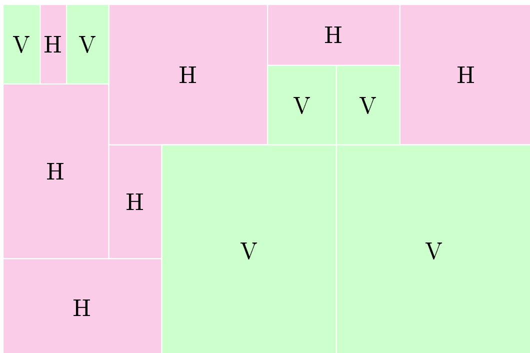
Les tablettes de chocolat d'Ambroise

B. Meyer

Niveau : Terminale
Difficulté : ★ ★ (demande une connaissance étendue de divers domaines.)
Durée : 2h, les exercices sont indépendants
Rubrique(s) : Algèbre (polynômes), Analyse (intégration), Combinatoire (dénombrement, graphes), Modélisation.

Il s'agit dans cet atelier d'utiliser vos connaissances pour résoudre un problème avec différentes méthodes que vous avez étudiées dans le secondaire : les fonctions polynômiales, l'intégration ; ou que vous étudierez dans le supérieur : les graphes, le dénombrement.

La petite histoire...
Ambroise a deux faiblesses dans la vie ; sa première est pour le chocolat. En dégustant sa tablette de chocolat préférée, il observe que chaque carreau de chocolat possède un couple de côtés opposés de longueur entière, ce que nous notons par V ou H dans l'exemple ci-dessous, selon qu'il s'agit du côté vertical ou horizontal qui est entier.



Il remarque qu'il en va de même de toute la tablette : l'un des couples de côtés opposés est de longueur entière.
La seconde des faiblesses d'Ambroise est son inclination imodérée pour les raisonnements mathématiques. Il se prend à démontrer cette observation, et maniaque comme seul peut l'être un logicien, il parvient aux solutions décrites ci-dessous en exercice.
Vous aussi, vous aimez le chocolat et les mathématiques ? Alors essayez de trouver votre propre démonstration du résultat.

Monsieur et Madame
Métrie ont un fils.

NOTATIONS : dans toute la feuille d'exercices, on note R le rectangle plein du plan qu'occupe la tablette de chocolat. On fixe un système de coordonnées $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel R est le rectangle d'abscisses comprises entre 0 et x_R et d'ordonnées comprises entre 0 et y_R.
On suppose que le rectangle R est pavé par un ensemble de tuiles $(T_i)_{i \in I}$, qui sont des rectangles d'intérieurs disjoints, dont une paire des côtés au moins est entière. On dira qu'une tuile est de type V s'il s'agit des côtés verticaux et de type H s'il s'agit des côtés horizontaux. Si les deux côtés sont entiers, on fixe le type arbitrairement.

Exercice 1 (Par les damiers).
Après une nuit d'insomnie, Ambroise imagine qu'un damier (noir et blanc) formé de carrés de côté $1/2$ a été ajouté sur le pavage. Pour chaque tuile T, il compare l'aire coloriée en noir avec l'aire non coloriée et note $\Delta(T)$ la différence des aires.

1. Montrer que si une tuile T possède un côté entier, alors $\Delta(T) = 0$.

2. En déduire que $\Delta(R) = 0$

3. Conclure

Commentaires sur l'Exercice 1

Avant d'aller plus loin, définissons une notation que nous allons utiliser dans la suite. Si x est un réel on appelle sa partie entière par défaut $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ (appelée aussi *floor*, plancher) et partie entière par excès $\lceil x \rceil$ l'unique entier tel que $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$ (appelée aussi *ceiling*, plafond).
Il s'agit peu ou prou de la même preuve que la précédente en remplaçant l'application $(x, y) \mapsto \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ par l'application $(x, y) \mapsto (-1)^{\lfloor 2x \rfloor}(-1)^{\lfloor 2y \rfloor}$.

Exercice 2 (Par les degrés de polynômes).
Ambroise décide construire un nouveau pavage $(T'_i)_{i \in I}$ à partir du pavage initial $(T_i)_{i \in I}$ comme suit. Il fixe un nombre $\epsilon > 0$ très petit. Si la tuile T_i est délimitée par les abscisses x_0 et x_1 et les ordonnées y_0 et y_1, il définit la tuile T'_i par les abscisses :

- $x'_0 = x_0$ si x_0 est entier, $x'_0 = x_0 + \epsilon$ si x_0 n'est pas entier ;
- $x'_1 = x_1$ si x_1 est entier, $x'_1 = x_1 + \epsilon$ si x_1 n'est pas entier ;
- $y'_0 = y_0$ si y_0 est entier, $y'_0 = y_1 + \epsilon$ si y_0 n'est pas entier ;
- $y'_1 = y_1$ si y_1 est entier, $y'_1 = y_1 + \epsilon$ si y_1 n'est pas entier.

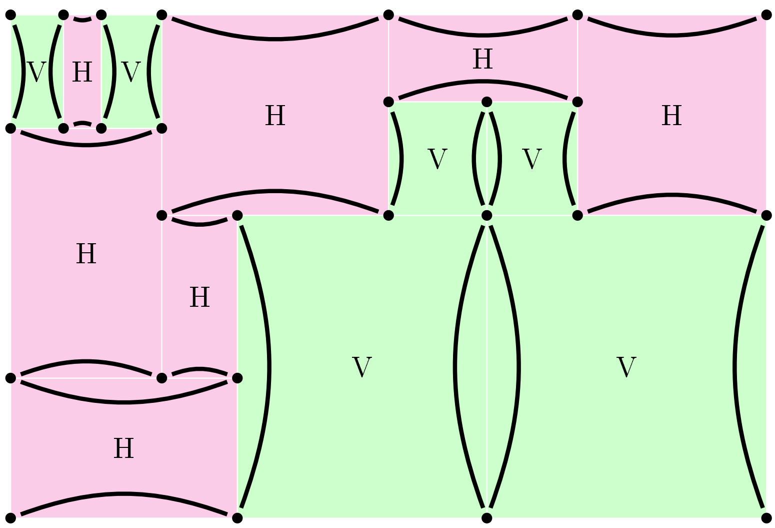
On admettra que pour ϵ suffisamment petit, $(T'_i)_{i\in I}$ forme encore un pavage d'un nouveau rectangle R' avec $x'_R = x_R$ si x_R est entier, $x'_R = x_R + \epsilon$ sinon, $y'_R = y_R$ si y_R est entier, $y'_R = y_R + \epsilon$ sinon.
On considère dans la suite toutes les valeurs x_i ou y_i comme des constantes et ϵ comme une variable.

1. Pour $i \in I$, justifier que l'aire de la tuile T'_i est un polynôme en ϵ. Quel est son degré maximal ?

2. En déduire que l'aire de R' est un polynôme de degré inférieur à 1.

3. Conclure.

Exercice 3 (Par les chemins Eulériens).
On appelle *multi-graphe* un couple G formé d'un ensemble d'éléments, appelés sommets de G, et d'une suite de paires non-ordonnées $\{u, v\}$ de sommets u et v, appelées arêtes de G. La même arête peut être répétée plusieurs fois. Le *degré* d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidentes à v.
Ambroise décide de construire un multi-graphe G dont les sommets sont les sommets des tuiles. Il place, pour chaque tuile du pavage, deux arêtes entre les sommets de côté de longueur entière.

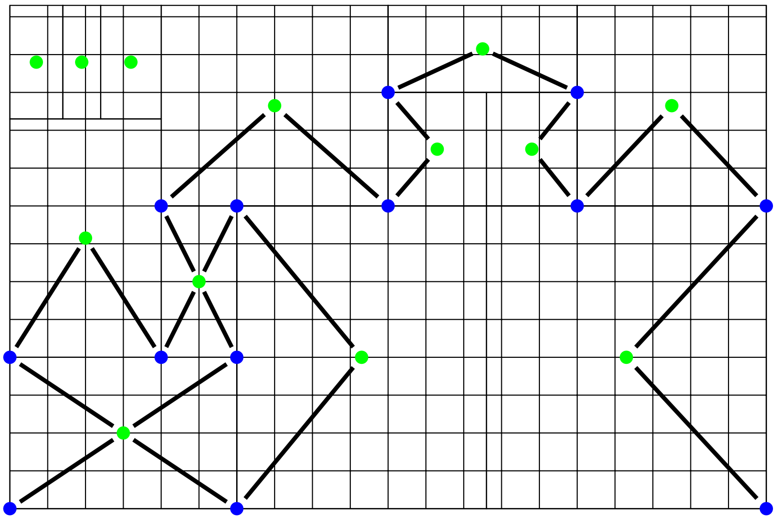


1. Quel est le degré d'un sommet de G en fonction de sa position dans le rectangle R ?

2. Montrer qu'il existe un chemin entre le sommet O et un autre sommet du rectangle R.

3. Conclure.

Exercice 4 (Par les graphes bipartis).
Ambroise construit un second graphe. Il considère deux types de sommets : les sommets gris foncés qui sont les centres de chaque tuile du pavage et les sommets gris clairs qui sont les sommets à coordonnées entières de chaque tuile. Il relie par une arête tout sommet bleu au centre (vert) des tuiles dont il est un sommet. On dit que le graphe est bi-parti, car ses sommets sont divisés en deux couleurs et qu'une arête relie toujours deux sommets de couleurs différentes.



1. Montrer qu'il y un nombre pair d'arêtes dans le graphe.

2. Quel est le degré d'un sommet bleu en fonction de sa position dans R ?

3. On appelle composante connexe de O l'ensemble des sommets reliés à O par une suite d'arête. Montrer que dans la composante connexe G_O de O, il existe un sommet bleu de degré impair distinct de O.

4. Conclure.

Dans l'exercice suivant, on va pouvoir utiliser des doubles intégrales : tous les coups sont permis ici, en mimant les règles que vous connaissez pour les intégrales. Vous verrez plus tard comment tout cela fonctionne...

Exercice 5 (Par l'intégrale du sinus).

1. Soient a et b deux réels. Montrer que pour que

$$\int_a^b \sin(2\pi x)\mathrm{d}x = 0,$$

il faut et il suffit que $a - b$ ou $a + b$ soit entier.

2.a. Montrer que pour toute tuile T du pavage, comprise entre les abscisses x_0 et x_1 et les ordonnées y_0 et y_1, l'intégrale suivante est nulle

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

b. En déduire que

$$\int_{0}^{y_R}\int_{0}^{x_R} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

3. Conclure.

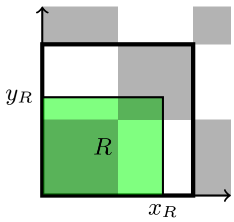
Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Supposons que la tuile T soit d'abscisses comprises entre x_0 et x_1 et d'ordonnées comprises entre y_0 et y_1. Si la tuile T est de type H, on a $\lceil x_0 \rceil - x_0 = \lceil x_1 \rceil - x_1$. On peut toujours, quitte à découper une bande verticale entre x_0 et $\lceil x_0 \rceil$ et la recoller à la fin de la tuile entre x_1 et $x_1 + \lceil x_0 \rceil - x_0 = \lceil x_1 \rceil$, supposer que l'une des lignes verticales du damier coïncide avec le début de la tuile, à savoir la droite $x = x_0$. Mais alors chaque bande horizontale rencontre autant de zone noire que blanche, donc $\Delta(T) = 0$. Le même raisonnement tient avec une tuile V en changeant les orientations.

2. Par additivité des aires, $\Delta(R) = \sum_{i \in I} \Delta(T_i) = 0$.

3. Comme le rectangle R démarre en O, l'intersection de R avec la bande verticale comprise entre 0 et $\lfloor x_R \rfloor$ contribue de zéro à $\Delta(T)$. On peut donc supposer que $x_R < 1$. De même, on peut supposer sans perte de généralité que $y_R < 1$.



On étudie séparément les cas 4 cas selon que $x_R \leq \frac{1}{2}$ ou $x_R > \frac{1}{2}$ et $y_R \leq \frac{1}{2}$ ou $y_R > \frac{1}{2}$ pour conclure qu'aucun n'est possible. Ainsi $x_R = 0$ ou $y_R = 0$. Donc R possède un côté entier.

□

Correction de l'Exercice 2

1. Les côtés de T' mesurent selon le cas $x_1 - x_0$, $x_1 + \epsilon - x_0$ ou $x_1 - x_0 - \epsilon$ pour le côté horizontal et $y_1 - y_0$, $y_1 + \epsilon - y_0$ ou $y_1 - y_0 - \epsilon$ pour le côté vertical, qui sont chacun des polynômes de degré 0 ou 1. Leur produit est donc un polynôme de degré *a priori* 2 au plus. Cependant, si T est de type H, x_0 et x_0 sont simultanément entiers ou non entier, donc $x'_1 - x'_0 = x_1 - x_2$. Dans ce cas, le côté horizontal est un polynôme de degré 0. De même si T est de type V, $y'_1 - y'_0 = y_1 - y_2$ qui est le polynôme constant. Donc pour une tuile du pavage, le degré du polynôme exprimant son aire est inférieur à 1.

2. Par additivité des aires, l'aire de R' est la somme de polynômes de degré ≤ 1, donc est un polynôme de degré ≤ 1.

3. Si R ne possède pas de côté entier, l'aire de R' est alors $(x_R + \epsilon)(y_R + \epsilon)$ qui est un polynôme de degré 2. Par contraposition, R possède un côté entier. □

Correction de l'Exercice 3

1. Quand un sommet de G est un sommet de R, il n'est le sommet que d'une seule tuile : il est donc de degré 1. Quand un sommet de G est appartient à un côté de R, il est le sommet que de deux tuiles exactement : il est donc de degré 2. Quand un sommet de G appartient à l'intérieur de R, il est le sommet que de deux ou de quatre tuiles : il est donc de degré 2 ou 4.

2. Soit $\mathcal{C}$ un chemin eulérien (i.e. qui ne passe qu'une fois au plus par une même arète) de longueur maximal dans G et qui passe par l'origine O. Si B est un sommet du graphe de degré pair, alors, à chaque fois que $\mathcal{C}$ arrive en B, il a la possibilité d'en repartir (sinon, B serait de degré impair). Comme $\mathcal{C}$ est de longueur maximale, $\mathcal{C}$ ne peut que se terminer en un sommet de degré impair. Il s'agit forcément de l'origine et d'un autre sommet A du rectangle R, comme voulu.

3. Notons que lors du parcours du chemin obtenu à la question précédente, on passe d'un point à coordonnées entières à un point à coordonnées entières car les arêtes traversées induisent un déplacement selon un vecteur entier. Donc l'extrémité A est à coordonnées entières, ce qui prouve que l'un des côtés de R au moins est entier. $\square$

Correction de l'Exercice 4

1. Dans chaque tuile, on place un nombre pair d'arêtes. En effet, pour tout sommet entier, en suivant la direction du côté entier, on obtient un autre sommet entier. Il y a donc 0, 2 ou 4 sommets entiers par tuile ce qui fournit autant d'arêtes distinctes.

2. Un sommet bleu est de degré 1 s'il se trouve dans un coin de R ; de degré 2 s'il est sur un côté de R et 2 ou 4 s'il est à l'intérieur de R.

3. La somme des degrés des sommets bleus de G_O égale le nombre d'arêtes : elle est paire. Comme le degré en O est 1, au moins un autre sommet bleu de G_O est de degré impair.

4. Ce sommet est donc de degré 1 (seule valeur impaire possible d'après la question précédente) et est un sommet de R (seul position possible). On en déduit que R possède un côté entier. $\square$

Correction de l'Exercice 5

1. On a
$$J = \int_a^b \sin(2\pi x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_a^b = \frac{\cos(2\pi a)}{2\pi} - \frac{\cos(2\pi b)}{2\pi}.$$
Or $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ équivaut à $\theta \equiv \pm\theta' \mod 2\pi$. Donc $J = 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi a = \pm 2\pi b + 2k\pi$, soit encore si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \pm b = k$, cqfd.

2.a. Si la tuile est de type H, alors $x_1 - x_0$ est entier. Donc
$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y_1} \sin(2\pi y)\left(\int_{x_0}^{x_1}\sin(2\pi x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y_1} 0\mathrm{d}y = 0.$$
Si la tuile est de type V, alors $y_1 - y_0$ est entier. On commence par échanger l'ordre d'intégration
$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
et l'on raisonne de même.

b. Par additivité de l'intégrale double, comme l'ensemble des tuiles forme un pavage de R, on a
$$\int_0^{y_R}\int_0^{x_R} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

3. L'intégrale peut se calculer directement comme

$$\begin{aligned}\int_0^{y_R}\int_0^{x_R} \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{y_R} \sin(2\pi y)\left(\int_0^{x_R} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_0^{x_R} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{y_R} \sin(2\pi y)\mathrm{d}y\right).\end{aligned}$$

Comme elle est nulle, ceci implique que soit $\pm x_R$, soit $\pm y_R$ est entier. Autrement dit, l'un des côtés est entier. □

