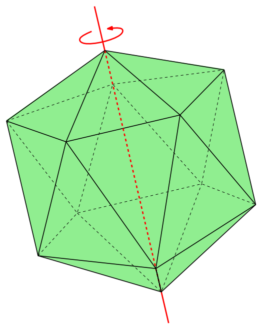
Faites tourner les triangles

L. Gerin, N. Jacquet, F. Petit

Niveau : Terminale
Difficulté : ★ (au début), ★★★ (à partir de l'exercice 4)
Durée : 3h (plusieurs exercices indépendants et progressifs)
Rubrique(s) : Algèbre (structures, initiation aux groupes), Géométrie (géométrie plane) .

Dans cet atelier, à l'aide de transformations du plans (symétries, translation, rotations) vous allez aborder une notion essentielle de l'algèbre. C'est une notion qui vous servira dans les classes du supérieur et qui se généralise à des objets que vous connaissez dèja : les nombres, les fonctions, etc.

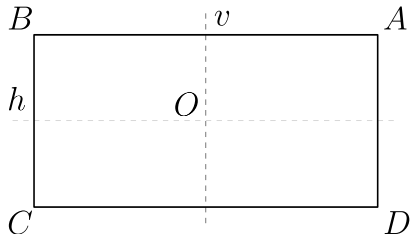
La petite histoire...
Au XIX^{e} siècle (et même avant en réalité), on s'est rendu compte que plutôt que d'étudier directement certaines figures géométriques, comme par exemple celle-ci :



il pouvait être intéressant d'étudier les transformations qui laissent cette figure inchangée. Plus concrètement, il s'agit de déterminer de combien de façons on peut la tourner ou la réfléchir dans un miroir si on veut retomber exactement sur la même figure. Cela n'a l'air de rien, mais cette idée a donné naissance à un domaine entier des mathématiques que l'on a appelé la *théorie des groupes*, et qui a maintenant de nombreuses applications : en cryptographie, en chimie, etc.

Monsieur et Madame,
Deudeuaire ont une fille...

Exercice 1 (Isométries du rectangle).
Pour commencer, on va considérer le rectangle $\mathcal{R}$ suivant, de sommets A, B, C, D et de centre O :



Les isométries sont les transformations du plan qui préservent les distances : les rotations, symétries axiales et symétries centrales sont des isométries. Il y a quatre isométries qui laissent inchangé le rectangle $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{Id}, R_{O,\pi}, S_h, S_v,$$

où

- Id est la transformation "Identité", c'est-à-dire celle qui ne modifie rien,
- $R_{P,\theta}$ la rotation de centre P et d'angle θ (les angles sont comptés positivement dans le sens "trigonométrique" : dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).
- S_Δ la symétrie axiale d'axe Δ.

On rappelle qu'une rotation d'angle π est aussi une symétrie centrale.
Par ailleurs, si l'on a deux isométries F et G, on note $G \circ F$ l'isométrie obtenue en appliquant **d'abord** F puis G. On dit que l'on *compose* F et G.

1. Qu'obtient-on en faisant $S_h \circ S_h$? En faisant $S_h \circ S_v$? (Ne pas hésiter à faire des dessins.)

2. Remplir le tableau suivant :

	$R_{O,\pi}$	S_h	S_v
$R_{O,\pi}$	$R_{O,\pi} \circ R_{O,\pi} =$	$R_{O,\pi} \circ S_h =$	$R_{O,\pi} \circ S_v =$
S_h			
S_v			

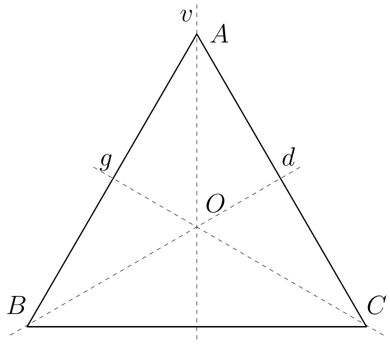
Commentaires sur l'Exercice 1

Remarque. On retrouve dans d'autres contextes en mathématiques cet ensemble de quatre objets, avec cette règle de calcul.

On appelle cet ensemble le *groupe de Klein*, en référence au mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925), l'un des fondateurs de la géométrie moderne.

Exercice 2 (Isométries du triangle équilatéral).

On considère maintenant le triangle équilatéral ABC de centre de gravité O ci-dessous :



1. Donner la liste des isométries qui laissent le triangle inchangé. Comme dans l'exercice précédent, les angles sont comptés positivement en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2.a. Que donne $S_v \circ S_d$? Que donne $S_d \circ S_v$? Vous êtes sûr(e) ?

b. Que donne $S_v \circ R_{O,2\pi/3}$?

c. Quelle est l'isométrie obtenue en faisant

$$\overbrace{S_v \circ S_v \cdots \circ S_v}^{44 \text{ fois}} \circ \overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \cdots \circ R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}}$$

(on compose 37 fois de suite $R_{O,2\pi/3}$ puis 44 fois de suite S_v) ?

d. Quelle est l'isométrie obtenue en faisant

$$S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g \circ S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g \circ \ldots S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g$$

(on compose 127 fois de suite la séquence $S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g$) ?

3. On note F^{-1} l'isométrie *inverse* de F, c'est-à-dire l'isométrie telle que

$$F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}.$$

Quelle est l'inverse de S_v ? L'inverse de $R_{O,2\pi/3}$?

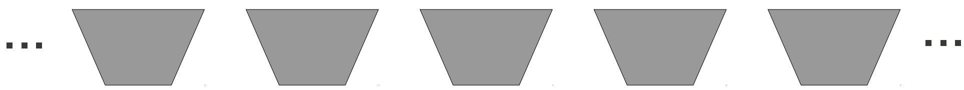
Commentaires sur l'Exercice 2

Remarque. Sur cet exemple, on voit qu'il est finalement plus simple d'utiliser de façon automatique les règles de calcul sur les éléments du groupe, plutôt que de toujours revenir à la figure (notamment pour 127 séquences de $S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g$!). On imagine aussi que ce genre de calcul est plus facile à automatiser avec l'aide d'un ordinateur, plutôt que de lui faire retourner l'image, puis tourner de 120 degrés, puis retourner, puis retourner, puis tourner de 120 degrés, puis retourner, puis...

En s'inspirant de l'exercice du triangle, vous pouvez maintenant essayer de trouver toutes les isométries qui laissent inchangé le polygone régulier à n côtés (on peut commencer par regarder ce qui se passe pour le carré ou l'hexagone régulier). Vous devriez en trouver $2n$...

Exercice 3 (Isométries d'une frise).

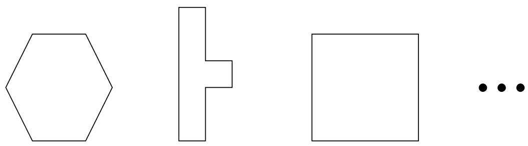
On considère la frise suivante, constituée d'une infinité de trapèzes disposés à intervalles réguliers :



Déterminer le groupe des isométries qui laissent cette frise inchangée.

Commentaires sur l'Exercice 3

Conclusion. Vous pourriez maintenant facilement déterminer pour chacune des figures suivantes



le *groupe* des isométries qui la laisse inchangée. Vous pourriez composer chacune de ces isométries, chercher leurs inverses, etc. Vous venez de faire de la **théorie des groupes**. En trois dimensions, c'est aussi possible (mais un peu plus compliqué à dessiner...) et c'est très utile notamment en chimie. Connaître les isométries qui laissent inchangée une molécule permet de deviner comment elle va se comporter en spectroscopie : on bombarde un matériau pour savoir de quoi il est composé (voir par exemple `http://fr.wikipedia.org/wiki/Spectroscopie_infrarouge` pour plus de détails).

Nous allons maintenant voir les groupes sous un autre point de vue : non plus comme un ensemble d'isométries mais comme un ensemble abstrait d'éléments que l'on peut "combiner" entre eux.

Définition. Un groupe est un ensemble G (fini ou infini) muni d'une *loi de composition interne* $*$, c'est-à-dire une application $G\times G \to G$ (on note $a*b$ le résultat de cette application prise en (a, b) qui doit appartenir à G, on dit que G est stable par la loi $*$), et vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tous éléments a, b, c de G, $a*(b*c) = (a*b)*c$ (c'est la propriété d'associativité) ;
- il existe un élément neutre, c'est-à-dire un élément e de G tel que, pour tout a dans G, $a * e = e * a = a$.
- tout élément a de G a un inverse, c'est-à-dire un élément b de G tel que $a*b = b*a = e$; cet inverse b est noté alors a^{-1}.

Nous avons ainsi vu que l'ensemble des isométries du triangle, muni de la loi $\circ$, est un groupe. Si, pour tous éléments a, b du groupe, on a $a * b = b * a$, on dit que le groupe est commutatif. *Le groupe de Klein, présenté à l'exercice 1 est commutatif, alors que que le groupe du triangle ne l'est pas nous avons vu que $S_v \circ S_d \neq S_d \circ S_v$).*

Exercice 4 (Être ou ne pas être un groupe ?).

1. Compléter le tableau suivant par oui ou par non. Lorsqu'un élément neutre existe, le préciser et lorsque tout élément x a inverse, le préciser.

G	loi $*$	stabilité	élément neutre	inverse	associativité
$\mathbb{R}$	$+$				
$\mathbb{N}$	$+$				
$\mathbb{Z}$	$+$				
$\mathbb{Q}$	$+$				
$\mathbb{R}^*$	$+$				
$\mathbb{R}$	$\times$				
$\mathbb{Z}^*$	$\times$				
$\mathbb{Q}^*$	$\times$				
$\mathbb{R}^*$	$\times$				

Quels sont les groupes dans ce tableau ?

2. Les groupes du tableau ont un point commun, lequel ?

3. Pourquoi $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ munis de la loi « $-$ »ne sont pas des groupes ? Même question pour $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{Q}^*$ munis de la loi " $\div$ ".

Exercice 5 (Groupe sur 10 doigts).

On note $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$ (on surligne chaque élément pour signaler que l'on n'applique pas exactement la même règle de calcul que d'habitude).

On munit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ d'une opération $+$ définie de la façon suivante : pour $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\overline{x}+\overline{y}$ est le chiffre des unités de $x+y$. Par exemple on a $\overline{1}+\overline{3}=\overline{4}$ et $\overline{9}+\overline{6}=\overline{5}$ (car on a $6+9=15$ et le chiffre des unités de 15 est 5).
Montrer que $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ muni de cette opération $+$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Exercice 6 (Groupe et plus si affinités).
Soit G l'ensemble des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ayant un coefficient directeur non nul.
Ainsi pour tout f de G, il existe a dans $\mathbb{R}^*$ et b dans $\mathbb{R}$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$

1. Soient $f : x \mapsto ax+b$ et $g : x \mapsto cx+d$ deux éléments de G (a et c sont donc des réels non nuls et b et d sont des réels quelconques). Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. En déduire deux remarques pour la loi $\circ$ sur G.

2. Montrer que G admet un unique élément neutre.

3. Soit $f : x \mapsto ax+b$ un élément de G. L'application f admet-elle un inverse ? Si oui, le déterminer.

4. Déduire des questions précédentes que G est un groupe. Est-il commutatif ?

5. Montrer que si f, g et h sont dans G, alors, pour tout nombre réel x, on a

$$[(f \circ g) \circ h](x) = [f \circ (g \circ h)](x).$$

En déduire que G muni de la loi $\circ$ est un groupe. Est-il commutatif ?

Indications

Indications sur l'Exercice 1

1. Pour commencer, on peut calculer $S_h(A)$ puis $S_h\left(S_h(A)\right)$. On verra ainsi où est "envoyé" A.

2. On applique la même stratégie : on prend n'importe lequel des quatre points et on regarde où il est envoyé, par exemple par $R_{O,\pi}$ puis par S_h.

Indications sur l'Exercice 2

1. Il y a des symétries axiales et des rotations.

2.a. On peut commencer par déterminer $S_d(A)$, puis $S_v \circ S_d(A)$ pour voir où est « envoyé » A. Puis on fait la même chose pour B et C.

2.c. Que se passe-t-il quand on fait 37 fois un tiers de tour ? Que se passe-t-il si ensuite on applique 44 fois un retournement de la figure ?

3. Il faut chercher une transformation (très simple !) qui "annule" S_v. Pour $R_{O,2\pi/3}$, qu'est-ce qui peut bien annuler deux tiers de tours dans le sens trigonométrique ?

Indications sur l'Exercice 3

Il y a des symétries axiales et des translations.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. On commence par regarder ce qu'il se passe pour le point A : on lui applique la symétrie S_h, il se retrouve donc envoyé sur $S_h(A) = D$. Ensuite on applique à nouveau S_h qui envoie D sur A. Au final :

$$A \overset{S_h}{\mapsto} D \overset{S_h}{\mapsto} A$$

et donc $S_h \circ S_h(A) = A$. On peut vérifier qu'il en est de même pour tous les points, qui reviennent tous au point de départ. Donc $S_h \circ S_h = \mathrm{Id}$.
On utilise ensuite la même stratégie pour $S_h \circ S_v$:

$$A \overset{S_v}{\mapsto} B \overset{S_h}{\mapsto} C$$

Pour B cela donne

$$B \overset{S_v}{\mapsto} A \overset{S_h}{\mapsto} D$$

Pour C :

$$C \overset{S_v}{\mapsto} D \overset{S_h}{\mapsto} A$$

Pour D :

$$D \overset{S_v}{\mapsto} C \overset{S_h}{\mapsto} B$$

Finalement, tous les points se sont retrouvés sur le sommet opposé et on a effectué la symétrie centrale de centre O, qui est aussi la rotation de centre O et d'angle π. Finalement [1], on a obtenu que $S_h \circ S_v = R_{0,\pi}$.

2. Avec la stratégie des questions précédentes, on trouve les valeurs suivantes :

	$R_{O,\pi}$	S_h	S_v
$R_{O,\pi}$	Id	S_v	S_h
S_h	S_v	Id	$R_{O,\pi}$
S_v	S_h	$R_{O,\pi}$	Id

□

Correction de l'Exercice 2

1. Le triangle a trois axes de symétries (les trois hauteurs), on trouve donc trois symétries qui le laissent inchangé. On peut aussi le faire tourner d'un tiers de tour dans le sens trigonométrique (soit $2\pi/3$) ou de deux tiers de tour (soit $4\pi/3$). On remarque qu'on pourrait le faire tourner d'un tiers de tour dans le sens anti-trigonométrique (sens des aiguilles d'une montre !), mais cela revient à faire une rotation de $4\pi/3$ dans le sens trigonométrique. On trouve donc, en plus de l'identité, 3 symétries et 2 rotations :

$$\mathrm{Id}, S_v, S_d, S_g, R_{O,2\pi/3}, R_{O,4\pi/3}.$$

Vous avez déterminé ce qui s'appelle le **groupe du triangle**, il a 6 éléments.

1. Ne pas oublier que $G \circ F$ signifie que l'on a commencé par F !

2.

a. Pour A, on obtient

$$A \overset{S_d}{\mapsto} C \overset{S_v}{\mapsto} B.$$

Pour B on obtient

$$B \overset{S_d}{\mapsto} B \overset{S_v}{\mapsto} C.$$

Et pour C :

$$C \overset{S_d}{\mapsto} A \overset{S_v}{\mapsto} A.$$

On a tourné le triangle d'un tiers de tour (dans le sens trigonométrique), soit $S_v \circ S_d = R_{O,2\pi/3}$. Pour $S_d \circ S_v$, le même raisonnement donne $2/3$ de tour : $S_d \circ S_v = R_{O,4\pi/3}$.

b. Pour A, on obtient

$$A \overset{R_{O,2\pi/3}}{\mapsto} B \overset{S_v}{\mapsto} C.$$

Pour B, on obtient

$$B \overset{R_{O,2\pi/3}}{\mapsto} C \overset{S_v}{\mapsto} B.$$

Et pour C :

$$C \overset{R_{O,2\pi/3}}{\mapsto} A \overset{S_v}{\mapsto} A.$$

Finalement : A et C sont permutés entre eux alors que B est envoyé sur lui-même, c'est la symétrie d'axe OB. Donc $S_v \circ R_{O,2\pi/3} = S_d$.

c. On commence par composer 37 fois de suite $R_{O,2\pi/3}$, c'est-à-dire que l'on fait faire 37 fois un tiers de tour au triangle, soit 12 tours complets et un tiers de tour, cela revient à un seul tiers de tour :

$$\overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \dots R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}} = R_{O,2\pi/3}.$$

Ensuite on fait 44 fois de suite la symétrie S_v, mais on a vu que $S_v \circ S_v = \mathrm{Id}$. Donc ces 44 symétries s'annulent deux à deux :

$$\overbrace{S_v \circ S_v \dots S_v}^{44 \text{ fois}} = \mathrm{Id}.$$

Finalement,

$$\overbrace{S_v \circ S_v \dots S_v}^{44 \text{ fois}} \circ \overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \dots R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}} = \mathrm{Id} \circ R_{O,2\pi/3} = R_{O,2\pi/3}.$$

d. On vérifie que $S_v \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_g = R_{O,2\pi/3}$. Puisque l'on effectue 127 fois cette séquence, on fait 42 tours et un tiers de tour. Finalement, on obtient $R_{O,2\pi/3}$.

3. On cherche une isométrie F qui "annule" S_v, c'est-à-dire $F \circ S_v = \mathrm{Id}$. Or on sait que si on compose deux fois S_v, on obtient l'identité : $S_v \circ S_v = \mathrm{Id}$. On a donc $S_v^{-1} = S_v$, elle est sa propre inverse.

Pour "annuler" $R_{O,2\pi/3}$ qui représente un tiers de tour, il faut faire ensuite deux tiers de tour : $R_{O,4\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} = \mathrm{Id}$. On a donc $R_{O,2\pi/3}^{-1} = R_{O,4\pi/3}$. □

Correction de l'Exercice 3

1.

G	loi $*$	stablilité	élément neutre	inverse	associativité
$\mathbb{R}$	$+$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$\mathbb{N}$	$+$	oui	oui 0	non	oui
$\mathbb{Z}$	$+$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$\mathbb{Q}$	$+$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$\mathbb{R}^*$	$;+$	non	non	non	oui
$\mathbb{R}$	$\times$	oui	oui 1	non	oui
$\mathbb{Z}^*$	$\times$	oui	oui 1	non	oui
$\mathbb{Q}^*$	$\times$	oui	oui 1	oui $1/x$	oui
$\mathbb{R}^*$	$\times$	oui	oui 1	oui $1/x$	oui

Stabilité par opération. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas stable par $+$, car $4+(-4)$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^*$ bien que 4 et -4 soient des éléments de $\mathbb{R}^*$.

Inverse. Tout élément x non nul de $\mathbb{N}$ n'a pas d'inverse car $-x$ n'est pas dans $\mathbb{N}$.
Tous les élements de $\mathbb{R}$ ne sont pas inversibles pour $\times$. Par exemple 0 : il n'existe pas de réel x tel que $x \times 0 = 0 \times x = 1$. Zéro est d'ailleurs le seul élément non inversible de $\mathbb{R}$ muni de la multiplication, mais c'est suffisant pour contredire le fait que tout élément de $\mathbb{R}$ muni de la multiplication est inversible.
Tout élément de $\mathbb{Z}^*$ muni de la multiplication n'est pas inversible. Par exemple 2 n'a pas d'inverse car $1/2$ n'est pas dans $\mathbb{Z}$. D'ailleurs les seuls éléments inversibles sont 1 et -1.

Loi associative. Les opérations $+$ et $\times$ sont associatives.

On a un groupe lorsqu'il n'y a que des « oui »sur toute la ligne. Ainsi, les groupes du tableau sont :
$\mathbb{R}$ muni de l'addition ;
$\mathbb{Z}$ muni de l'addition ;
$\mathbb{Q}$ muni de l'addition ;
$\mathbb{Q}^*$ muni de la multiplication ;
$\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication.

2. Tous ces groupes sont commutatifs.

3. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ sont bien stables par " $-$ ", 0 est l'élément neutre et chaque élément est son propre inverse, mais " $-$ " n'est pas associative. Par exemple $1-(5-7)=3$ qui est différent de $(1-5)-7=-11$. De même la loi " $\div$ " n'est pas associative, car par exemple $(48 \div 6) \div 2 = 8 \div 2 = 4$ qui est différent de $48 \div (6 \div 2) = 48 \div 3 = 16$. $\square$

Correction de l'Exercice 4

La loi $+$ est associative, car faire $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}$ ou faire $\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ revient à calculer $x+y+z$ puis à regarder le chiffre des unités de ce résultat.

La loi $+$ laisse $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ laisse stable par construction car après addition, on récupère un nombre entre 0 et 9.

$\overline{0}$ est élément neutre.

Pour $\overline{x}$ quelconque de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, posons $y = 10-x$. On a $x+y=10$, donc $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}=\overline{0}$, donc x possède un inverse pour la loi $+$, à savoir $\overline{10-x}$.

Ainsi $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ muni de l'opération $+$ est un groupe qui est même commutatif, car l'addition toute simple sur $\mathbb{R}$ l'est. $\square$

Correction de l'Exercice 6

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(cx+d) = a(cx+d)+b = acx+ad+b$$

et

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(ax+b) = c(ax+b)+d = acx+cb+d.$$

Nous voyons que G est stable par la loi $\circ$, car $g \circ f$ est bien une fonction affine, de coefficient directeur ac (qui est bien différent de zéro car a et c le sont).
Si $ad+b \neq cb+d$, alors $f \circ g$ est différent de $g \circ f$. Ceci montre que la loi $\circ$ n'est pas commutative sur G.

2. Cherchons une fonction $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ vérifiant pour toute fonction $f : x \mapsto ax+b$ de G la propriété $f \circ h = f$. Grâce à la question précédente on doit avoir $a\alpha = a$ et $a\beta + b = b$. Ainsi si h est un élément neutre alors $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire que h est l'application Id. Vérifions maintenant que Id est bien un élément neutre et que nous ne sommes pas tomber sur une contradiction. D'une part la fonction $Id : x \mapsto x$ est dans G et d'autre part pour toute fonction $f : x \mapsto ax+b$ de G, on a $f \circ Id = Id \circ f = f$. Donc G possède un élément neutre à savoir la fonction $Id : x \mapsto x$.

3. Cherchons $g : x \mapsto cx+d$ vérifiant $g \circ f = f \circ g = Id$. Si on trouve g alors celui-ci sera f^{-1}. Cherchons c et d pour avoir $f \circ g = Id$, ce qui s'écrit grâce à la première question : $\forall x \in \mathbb{R}, acx+ad+b = x$.
Comme a est non nul, on peut choisir $c = 1/a$ et pour avoir $ad+b=0$, on pose $d = -b/a$. Ainsi $g : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ semble être un bon candidat. Celui-ci nous permet déjà d'avoir $f \circ g = Id$. En utilisant de nouveau la première question on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{a}f(x) - \frac{b}{a} = \frac{1}{a}(ax+b) - \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \times ax + \frac{1}{a}b - \frac{b}{a} = x.$$

On a bien $g \circ f = Id$. Ainsi, f admet un inverse noté f^{-1}. Cette application f^{-1} est définie par $x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

4. Pour que G soit un groupe, il reste à vérifier que la loi $\circ$ est bien associative. Écrivons donc, pour tous f, g, h dans G, et x réel,

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = [f \circ (g \circ h)](x).$$

D'après la question 1, ce n'est pas un groupe commutatif. $\square$

