Équations de degré deux, trois et quatre

N. Jacquet

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★
Durée : 4 heures
Rubrique(s) : Algèbre (polynômes, nombres complexes) .

Encore des équations de degré 3 ou 4 avec une méthode de résolution cette fois-ci dans $\mathbb{C}$. Les fiches de fondamentaux « Applications polynômes du second degré » et « Identités remarquables et factorisations » pourront peut-être vous apporter un peu d' aisance dans les calculs ().

La petite histoire...
Le but de ce problème est la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Nous allons étudier dans un premier temps celles du type $x^3+px+q=0$. Vers 1515, Scipione del Ferro (1465-1526) résout les cas $x^3 = px+q$, $x^3+q = px$ et $x^3+q = px$, avec p et q dans $\mathbb{R}_+^*$ (les nombres négatifs n'ayant pas encore été inventés). Cependant il ne publie rien. Au XVI^{e}, les mathématiciens se lançaient des défis pour résoudre des équations du troisième degré. Nicolo Fontana dit Tartaglia (1499-1557), trouva une méthode de résolution en 1535, qui lui permit de résoudre tous ces défis. Il ne publia rien afin de remporter encore des défis. Ceci intrigua Girolamo Cardano (1505-1576) (en français Cardan) qui rendit visite à Tartaglia en 1539, pour qu'il lui revèle sa méthode. Après plusieurs refus, il lui révéla enfin celle-ci contre des faveurs et en lui faisant jurer de garder le secret.
Cardano et un de ses élèves, Lodovico Ferrari (1522-1565), essayèrent de généraliser la méthode de Tartaglia dans le cas ou p et q ne sont pas positifs. Mais ils se heurtèrent au problème de la racine carrée d'un nombre négatif. En 1545, Cardano publie un ouvrage intitulé *Ars Magna* qui contient la méthode de del Ferro (après avoir retrouvé un carnet de celui-ci). Cette méthode étant identique à celle de Tartaglia, Cardano, considéra que son pacte avec Tartaglia n'avait plus lieu d'être, ce qui engendra des conflits avec ce dernier en ce qui concerne la paternité de la méthode. D'ailleurs les formules obtenues sont injustement appelée formules de Cardan (celles-ci sont obtenues aux questions 2.d) et e)). D'autre part, Ferrari réussit à résoudre l'équation du 4^{e} degré et exposa sa découverte dans un chapitre de l'Ars Magna de son maître. Nous présenterons aussi sa méthode.
En 1572, Raffaele Bombelli (1526-1576) surmonta la difficulté de la racine carrée d'un nombre négatif en acceptant l'existence de règles de calcul avec $\sqrt{-1}$ et en les utilisant comme si de rien n'était. C'est ainsi que sont nés les nombres imaginaires que vous verrez en Terminale. Une question légitime demeure : étant si bien parti, peut-on ainsi résoudre toutes les équation pour tous les degrés ? La réponse est de façon surprenante négative. En effet, on dispose de formules donnant les solutions d'une équation de degré inférieur ou égal à 4 en fonction de leurs coefficients. Abel (1802-1829) a montré qu'il n'est pas possible de trouver de telles formules générales (n'utilisant que les quatre opérations usuelles et les racines) pour les équations de degré 5 ou plus. La théorie de Galois (1811-1832) permet de prouver ceci, mais cela dépasse largement le cadre du lycée...

Monsieur et Madame,
Yapasderacinévidentequetufédelta ont une fille...

Exercice 1 (Équation de degré 2).
Nous cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du type $az^2+bz+c=0$, avec a, b et c des nombres complexes avec a non nul.

1. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$. Nous allons d'abord résoudre l'équation $z^2 = \zeta$. On écrit $\zeta = \alpha + i\beta$, avec α, β dans $\mathbb{R}$.

a. Traiter le cas $\beta = 0$.

Dans la suite de cette question on suppose β non nul.

b. On écrit $z = a + ib$. Montrer que $z^2 = \zeta$ est équivalent au système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ 2ab & = & \beta \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

c. En déduire a et b et donc z.

d. *Exemple :* déterminer les racines carrées de $1+i$.

2. Revenons au cas général.

a. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2+bz+c = a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

b. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ que l'on appelle le discriminant. On sait, grâce à la question **1**), que Δ admet deux racines racines carrées δ et $-\delta$ (qui peuvent être confondues si on a $\Delta = 0$). Exprimer les solutions de $az^2+bz+c=0$ en fonction de a, b, c et δ.

c. Montrer que si l'on a $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes et que si on a $\Delta = 0$, alors elle admet une unique solution que l'on appelle solution double.

d. *Exemple :* résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (2i+3)z + 1 - i = 0$.

Ainsi une équation du type $az^2+bz+c=0$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$. Elles sont confondues si et seulement si on a $\Delta = 0$.

Réponse : Cécile

Creative Commons :

3.a. Montrer que pour (S,P) dans $\mathbb{C}^2$, z_1 et z_2 sont les deux solutions (éventuellement confondues) de $z^2 - Sz + P = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}.$$

b. En déduire que si z_1 et z_2 sont les racines d'une équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, alors on a

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

c. Déterminer, sans calcul, les solutions de $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec θ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Équation de degré 3).
Soit $p \in \mathbb{C}^\star$ et $q \in \mathbb{C}$. On se propose dans un premier temps de résoudre l'équation d'inconnue z dans $\mathbb{C}$

$$(E) \quad z^3 + pz + q = 0.$$

Le cas général des équations de degré 3 sera traité à la question 7).
Pour cela on introduit le système auxiliaire (S) d'inconnue (u,v) dans $\mathbb{C}^2$ et l'équation du second degré (E') :

$$(S) \begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad \text{et} \quad (E') \ z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

1. Commençons par résoudre l'équation $z^3 = 1$.

a. Trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'on ait $(a+ib)^3 = 1$.

b. Écrire les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sous forme exponentielle.

c. On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Écrire les solutions en fonction de $1, j$ et j^2.

d. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'équation $z^3 = w$ admet une solution. Soit z_0 une telle solution. Exprimer toutes les solutions de l'équation $z^3 = w$ en fonction de z_0 et j. Ces solutions sont appelées *racines cubiques de w*.

2.a. Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ solution de (S). Montrer que $z = u + v$ est solution de (E).

b. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E).

- Établir qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{cases} u + v = z \\ 3uv = -p \end{cases}.$$

 Creative Commons :

- Montrer qu'alors (u, v) est solution de (S).

3. Montrer que si (u, v) est solution de (S) alors u^3 et v^3 sont les solutions de (E').

4. Réciproquement, soient U et V les racines (éventuellement confondues) de (E') et soient u_0 et v_0 des racines cubiques arbitraires de U et V.

a. Que vaut $u_0^3 + v_0^3$? Montrer que : $3u_0v_0 \in \{-p, -jp, -j^2p\}$.

b. Donner, en fonction de u_0 et v_0, toutes les racines cubiques de U et V.

c. Montrer que l'on peut choisir u et v parmi les racines cubiques de U et V de telle sorte que (u, v) soit solution de (S). Combien y a-t-il de tels choix ? Donner toutes les solutions de (S) à l'aide de u et v.

5. Résolution de (E) : on calcule les racines (complexes) U et V de (E') ; ensuite, d'après **4.c.**, on peut choisir des racines cubiques u et v de U et V telles que $3uv = -p$. Montrer que les racines de (E) sont alors $u + v$, $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$.

6. *Exemple* : résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 6z + 6$ en appliquant la méthode de **5)**.

7. Nous allons maintenant donner quelques clés pour résoudre une équation générale du troisième degré du type : $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad (E_1)$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3$.

a. Montrer que l'on peut supposer que a vaut 1. On supposera ceci dans la suite.

b. Montrer que (E_1) est équivalente à une équation de la forme :

$$(z + \alpha)^3 + p\,(z + \alpha) + q = 0 \quad (E_1').$$

On déterminera α, p et q.

c. Expliquer ainsi comment on peut déterminer les solutions de (E_1).

d. *Exemple* : résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^3 + 6z^2 - 6z - 22 = 0$.

Exercice 3 (Équations de degré 4).

Nous allons maintenant résoudre les équations de degré 4, c'est-à-dire de la forme

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0,$$

avec a, b, c, d et e des nombres complexes et a non nul.

1. Choisir judicieusement α de telle sorte qu'en effectuant le changement d'inconnue $Z = z + \alpha$, on se ramène à la résolution d'une équation de la forme

$$Z^4 + pZ^2 + qZ + r = 0,$$

 Creative Commons :

avec p, q et r dans $\mathbb{C}$.
Nous allons maintenant donner la méthode de résolution d'une équation de la forme $Z^4 + pZ^2 + qZ + r = 0$.

2.a. Montrer que pour tout y dans $\mathbb{C}$, on a :

$$Z^4 + pZ^2 + qZ + r = (Z^2 + y)^2 - (2y - p)Z^2 + qZ - y^2 + r.$$

b. Nous voulons trouver y dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout Z dans $\mathbb{C}$, $(2y-p)Z^2 - qZ + y^2 - r$ s'écrive sous la forme d'un carré $(AZ + B)^2$. Autrement dit il faut trouver y tel qu'il existe deux nombres complexes A et B, tels que : $\forall Z \in \mathbb{C},\ (2y - p)Z^2 - qZ + y^2 - r = (AZ + B)^2$.
Montrer que ceci est équivalent à avoir $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$.

c. Donner une méthode de résolution de l'équation : $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$.
On appelle y_0 une solution de cette équation et on note A et B les deux complexes vérifiant : $\forall Z \in \mathbb{C},\ (2y_0 - p)Z^2 - qZ + y_0^2 - r = (AZ + B)^2$.

d. Montrer ainsi que l'équation $Z^4 + pZ^2 + qZ + r = 0$ est équivalente à $Z^2 - AZ + y_0 - B = 0$ ou $Z^2 + AZ + y_0 + B = 0$.

e. Comment obtenir les solutions de l'équation initiale $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$?

3. *Exemple :* résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 4iz^3 - 13z^2 - (24 + 18i)z - 7 - 24i = 0$.

Creative Commons :

Indications

Indications sur l'Exercice 2

1.d. Écrire w sous forme exponentielle pour pouvoir ensuite exprimer z_0 sous forme exponentielle. Montrer que $z^3 = w$ est équivalent à $(z/z_0)^3 = 1$.

2.b. Pour le deuxième point, montrer que : $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3u^2v - 3uv^2$.

3. Utiliser l'exercice 1.

4.a. Pour le deuxième point, montrer que : $(-3u_0v_0/p)^3 = 1$.

4.b. Se rappeler que $j^3 = 1$.

7.b. Reconnaître $z^3 + bz^2$ comme un début de produit remarquable faisant intervenir une puissance 3, à savoir $(z+\alpha)^3 = z^3 + bz^2 + \ldots$. Ceci donne déjà α.

7.c. Former une équation de X où l'on a $X = z + b/3$ et reconnaître un type d'équation déjà étudié.

Indications sur l'Exercice 3

1. Commencer par développer $(x+y)^4$ et raisonner comme dans la question **7)b)** de l'exercice 3.

 Creative Commons :

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.a. On doit résoudre $z^2 = \alpha$, avec α réel.

- Si on a $\alpha = 0$. Il n'y a qu'une solution, à savoir 0.
- Si on a $\alpha > 0$, on a deux solutions distinctes qui sont réelles, $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$.
- Si on a $\alpha < 0$, on a deux solutions distinctes qui sont imaginaires pures, $i\sqrt{-\alpha}$ et $-i\sqrt{-\alpha}$.

b. Montrer d'abord l'équivalence : $z^2 = \zeta \Leftrightarrow [z^2 = \zeta \text{ et } |z|^2 = |\zeta|]$.
Raisonnons par double implication. Montrons l'implication $z^2 = \zeta \Rightarrow [z^2 = \zeta \text{ et } |z|^2 = |\zeta|]$.
On suppose que l'on a : $z^2 = \zeta$. Alors en passant aux modules on a aussi $|z^2| = |\zeta|$ soit $|z|^2 = |\zeta|$. En rajoutant l'égalité $z^2 = \zeta$ que l'on a supposée, on a cette implication.
L'implication réciproque est immédiate, car on suppose déjà dans les conditions que l'on a $z^2 = \zeta$.
On a donc les équivalences :

$$z^2 = \zeta \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 &= \zeta \\ |z|^2 &= |\zeta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2iab - b^2 &= \alpha + i\beta \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} .$$

On conclut en séparant partie réelle et imaginaire dans la première ligne de ce dernier système.

c. On a

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= \alpha \\ 2ab &= \beta \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 &= \alpha \\ 2ab &= \beta \\ 2a^2 &= \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 &= a^2 - \alpha \\ 2ab &= \beta \\ a^2 &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \\ 2ab &= \beta \\ a^2 &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \end{cases}$$

On a l'expression de a^2 et b^2, mais il nous faut a et b. Donc à priori on a

$$a = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} \quad \text{et} \quad b = \pm\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}.$$

Mais il ne faut pas oublier la condition $2ab = \beta$. Ainsi ab est du signe de β. Ainsi deux cas se présentent :

- Si on a $\beta > 0$, alors a et b sont de même signe et on a
$$(a,b) = (\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}) \quad \text{ou} \quad (a,b) = (-\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}, -\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}).$$
- Si on a $\beta < 0$, alors a et b sont de signes contraires et on a
$$(a,b) = (\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}, -\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}) \quad \text{ou} \quad (a,b) = (-\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}).$$

On en déduit z car on a $z = a + ib$.

Creative Commons :

d. $z = a + ib$ une racine carrée de $1 + i$, si et seulement si on a :

$$a^2 = \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad b^2 = \tfrac{-1+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad 2ab = 1.$$

Ainsi, les racines carrées de z sont

$$\sqrt{\tfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\tfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\tfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}.$$

2.a. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \tfrac{b}{a}z + \tfrac{c}{a}\right) = a\left((z + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right) = a\left((z + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

b. En reprenant la relation de la question précédente, en sachant que l'on a $\delta^2 = \Delta$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a\left((z + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \tfrac{b}{2a} - \tfrac{\delta}{2a}\right)\left(z + \tfrac{b}{2a} + \tfrac{\delta}{2a}\right).$$

Ainsi les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$, qui peuvent être confondues.

c. Grâce à l'expression précédente, les deux solutions sont égales si et seulement si on a $\delta = -\delta$ soit $\delta = 0$ soit $\Delta = 0$.

d. On calcule le discriminant Δ. On a : $\Delta = (2i+3)^2 - 4\cdot(1-i) = -4+9+12i-4+4i = 1 + 16i$.
Si $\delta = a + ib$ est une racine de Δ, on a

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 1, \\ ab & = & 8, \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{257}. \end{cases}$$

On en déduit qu'une racine du discriminant Δ est donnée par le nombre complexe

$$\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{257}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{257}-1}{2}}.$$

On en déduit les deux racines de l'équation,

$$-i - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{257}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{257}-1}{2}}\right).$$

3.a. Montrons ceci par double implication.
Commençons par montrer : z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$ implique

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}.$$

Supposons que z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$. Les solutions de cette équations sont $z_1 = \frac{S+\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{S-\delta}{2}$ où δ est une racine carrée du discriminant. On a donc $z_1 + z_2 = S$ et
$z_1 z_2 = \frac{S^2-\delta^2}{4} = \frac{S^2-\Delta}{4} = \frac{S^2-(S^2-4P)}{4} = P$.
Montrons l'autre implication : $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$ implique que z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$.

 Creative Commons :

On suppose que l'on a $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=S \\ z_1z_2=P \end{array}\right.$. On a donc les équivalences :
$z^2-Sz+P=0 \Leftrightarrow z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z-z_1)(z-z_2)=0 \Leftrightarrow z=z_1$ ou $z=z_2$.
Nous avons donc montré l'équivalence voulue.

b. z_1 et z_2 sont solution de $az^2+bz+c=0$ si et seulement si ils sont solutions de $z^2+(b/a)z+(c/a)=0$. Grâce à la question précédente, on a $-b/a=z_1+z_2$ et $c/a=z_1z_2$. Ainsi on a pour tout $z\in\mathbb{C}$: $z^2+(b/a)z+(c/a)=z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=(z-z_1)(z-z_2)$ et donc en multipliant tout par a, on obtient la relation voulue.

c. Cette équation est équivalente à $z^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+e^{i\theta}e^{-i\theta}=0$. Grâce à la question **3)a)**, les solutions de notre équation sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$., qui sont confondues si $\theta=k\pi$, avec k dans $\mathbb{Z}$. □

Correction de l'Exercice 2

1.a. Nous avons

$$(a+ib)^3=1 \Leftrightarrow a^3-ib^3+3ia^2b-3ab^2=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^3-3ab^2=1 \\ -b^3+3a^2b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^3-3ab^2=1 \\ b(-b^2+3a^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^3-3ab^2=1 \\ b=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a^3-3ab^2=1 \\ b^2=3a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^3=1 \\ b=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a^3-9a^3=1 \\ b^2=3a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^3=1 \\ b=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a^3=-1/8 \\ b=\sqrt{3}a \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a^3=-1/8 \\ b=-\sqrt{3}a \end{array}\right. .$$

Comme la fonction cube est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors les équations $a^3=1$ et $a^3=-1/8$ n'ont qu'une solution à savoir respectivement $a=1$ et $a=-1/2$. On a donc :

$$(a+ib)^3=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a=-1/2 \\ b=\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} a=-1/2 \\ b=-\sqrt{3}/2 \end{array}\right. .$$

b. Les solutions de $z^3=1$ sont 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

c. Les solutions sont $1, j$ et $j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

d. Écrivons w_0 sous forme exponentielle. Il existe $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel que l'on ait : $w=re^{i\theta}$. On pose $z_0=r^{1/3}e^{i\theta/3}$ On a $z_0^3=r(e^{i\theta/3})^3=re^{3i\theta/3}=w$. Donc l'équation $z^3=w$ admet une solution.
Cherchons toutes les solutions. Comme z_0 est non nul, on a les équivalences :

$$z^3=w \Leftrightarrow z^3=z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3=1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0}\in\{1,j,j^2\} \Leftrightarrow z\in\{z_0,jz_0,j^2z_0\}.$$

Les solutions sont donc z_0, jz_0 et j^2z_0.

2.a. Puisque $u^3+v^3=-q$ et $3uv=-p$:

$$\begin{array}{rcl} z^3+pz+q &=& (u+v)^3+p(u+v)+q \\ &=& u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q \\ &=& u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q \\ &=& \underbrace{(u^3+v^3+q)}_{=0}+\underbrace{(3uv+p)}_{=0}(u+v)=0 \end{array}$$

 Creative Commons :

donc $u+v$ est solution de (E).

b. On sait que le trinôme du second degré $X^2 - zX - \frac{p}{3}$ possède deux racines complexes (éventuellement confondues) que nous notons u et v. D'après l'exercice 1, on a $u+v=z$ et $uv = -\frac{p}{3}$. On a alors $u^3+v^3 = (u+v)^3 - 3u^2v - 3uv^2 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3+pz = -q$ car z est solution de l'équation (E). Ainsi (u,v) est solution de (S).

3. Soit (u,v) solution de (S). Alors $u^3+v^3 = -q$ (somme) et $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ (produit). L'exercice 1 nous donne immédiatement que u^3 et v^3 sont les racines de (E').

4.a. $u_0^3+v_0^3 = U+V = -q$, c'est la somme des racines de (E').
De plus : $\left(-\frac{3u_0v_0}{p}\right)^3 = -\frac{27UV}{p^3} = 1$ (produit des racines de (E')). Or les solutions de $z^3=1$ sont 1, j et j^2 (grâce à la question 1.c), donc on a : $-\frac{3u_0v_0}{p} \in \{1;j;j^2\}$.

b. u_0 est une racine cubique de U ; donc les racines cubiques de U sont : u_0, ju_0 et j^2u_0, grâce à la question **1.d)** De même les racines cubiques de V sont : v_0, jv_0 et j^2v_0.

c. Prenons $u=u_0$. Suivant que $3u_0v_0=-p$, $3u_0v_0=-jp$ ou $3u_0v_0=-j^2p$, comme on a $j^3=1$, on pose respectivement $v=v_0$, $v=j^2v_0$ ou $v=jv_0$. Ainsi on aura $3uv=-p$. Comme on a $j^3=1$, dans tous les cas, on a $u^3=u_0^3$ et $v^3=v_0^3$ et donc la question 4.a) donne : $u^3+v^3=-q$. Avec u et v ainsi choisis : (u,v) est solution de (S). Remarquons qu'une fois une racine cubique u de U choisie, il n'y a qu'une seule racine cubique v de V qui satisfasse $3uv=-p$. Il y a donc trois choix possibles pour (u,v). Plus précisément (S) a trois solutions. Si (u,v) est une solution, les deux autres sont (ju,j^2v) et (j^2u,jv).

5. La question **2)** montre que les solutions z de (E) s'écrivent
$z=u+v$ avec (u,v) solution de (S). La question **4)** montre que si u et v sont des racines cubiques de U et V telles que $3uv=-p$ alors les solutions de (S) sont (u,v), (ju,j^2v) et (j^2u,jv). Effectivement, les solutions de (E) sont $u+v$, $ju+j^2v$ et j^2u+jv.

6. L'équation (E') est $z^2-6z+8=0$ dont les racines sont $U=4$ et $V=2$. Comme racines cubiques de U et V on choisit $u=\sqrt[3]{4}$ et $v=\sqrt[3]{2}$ de sorte que $3uv=6$. La question **5.** donne alors les trois racines (complexes) de (E) : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, $j\sqrt[3]{2}+j^2\sqrt[3]{4}$ et $j^2\sqrt[3]{2}+j\sqrt[3]{4}$.

7.a. Comme a est non nul, on a l'équivalence : $az^3+bz^2+cz+d=0 \Leftrightarrow z^3+\frac{b}{a}z^2+\frac{c}{a}z+\frac{d}{a}=0$. Ceci revient à résoudre une équation du troisième degré s'écrivant $z^3+b'z^2+c'z+d'=0$ avec
$b'=b/a$, $c'=c/a$ et $d'=d/a$.
On peut donc supposer que a vaut 1 et résoudre l'équation du troisième degré
$z^3+b'z^2+c'z+d'=0$.

b. Notre équation est $z^3+bz^2+cz+d=0$. Il faut reconnaître z^3+bz^2 comme un début de produit remarquable faisant intervenir une puissance 3. Par exemple on a

$$\left(z+\frac{b}{3}\right)^3 = z^3+bz^2+\frac{b^2}{3}z+\frac{b^3}{27}.$$

Mais il faut compenser les termes $\frac{b^2}{3}z+\frac{b^3}{27}$ qui se sont rajoutés. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} z^3+bz^2+cz+d &= \left(z+\frac{b}{3}\right)^3 - \frac{b^2}{3}z - \frac{b^3}{27} + cz + d = \left(z+\frac{b}{3}\right)^3 + \left(c-\frac{b^2}{3}\right)z - \frac{b^3}{27} + d \\ &= \left(z+\frac{b}{3}\right)^3 + \left(c-\frac{b^2}{3}\right)\left(z+\frac{b}{3}\right) + \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d. \end{aligned}$$

(E_1) est donc équivalente à une équation de la forme :

$$(z+\alpha)^3 + p\,(z+\alpha) + q = 0 \quad (E_1'),$$

 Creative Commons :

avec
$$\alpha = \frac{b}{3}, \quad p = c - \frac{b^2}{3} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d.$$

c. Grâce à la question précédente, on remarque qu'en posant $X = z + \alpha$, résoudre (E_1') (ce qui équivalent à résoudre (E_1)), revient à résoudre l'équation $X^3 + pX + q = 0$. Ainsi pour avoir les solutions de (E_1') ou de (E_1), il suffit de connaître les solutions de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ que l'on sait résoudre. On trouve ainsi les X convenables, puis les z solutions de (E_1).

d. Divisons d'abord l'équation par 2. Notre équation est donc équivalente à
$z^3 + 3z - 3z - 11 = 0$. On pose $X = z + \frac{3}{3} = z + 1$. On doit donc résoudre l'équation
$$X^3 + \left(-3 - \frac{3^2}{3}\right) + \frac{2 \times 3^3}{3^3} + \frac{9}{3} - 11 = 0,$$
soit $X^3 - 6X - 6 = 0$. On a déjà vu que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $j\sqrt[3]{2} + j^2\sqrt[3]{4}$ et $j^2\sqrt[3]{2} + j\sqrt[3]{4}$ sont les solutions de cette dernière équation. Ainsi $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1$, $j\sqrt[3]{2} + j^2\sqrt[3]{4} - 1$ et $j^2\sqrt[3]{2} + j\sqrt[3]{4} - 1$ sont les solutions de notre équation de départ. □

Correction de l'Exercice 3

1.a. En divisant l'équation $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ par a, on peut se ramener à une équation de la forme $z^4 + b'z^3 + c'z^2 + d'z + e' = 0$. Ensuite comme pour tout nombre complexe x et y en développant on a : $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$, alors la nouvelle équation se reécrit
$(z + \frac{b'}{4})^4 - \frac{3b'^2}{8}z^2 - \frac{b'^3}{16}z - \frac{b'^4}{256} + c'z^2 + d'z + e' = 0$. En effectuant le changement de variable $Z = z + \frac{b'}{4}$, c'est-à-dire que l'on remplace z par $Z - \frac{b'}{4}$, on obtient dans cette dernière équation : $Z^4 + \left[\text{un polynôme de degré au plus 2 en } Z\right] = 0$.

2.a. Il suffit de développer le membre de droite.

b. On a : $\forall Z \in \mathbb{C}$, $(2y-p)Z^2 - qZ + y^2 - r = (AZ+B)^2$ si et seulement si l'équation $(2y-p)Z^2 - qZ + y^2 - r = 0$ admet une racine double. Ceci est équivalent à avoir un discriminant nul pour cette dernière équation soit $q^2 - 4(2y-p)(y^2-r) = 0$. En multipliant tout par -1 et en développant, on obtient : $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$.

c. Utiliser la méthode de résolution de l'exercice 2 pour trouver les solutions de cette équation de degré 3.

d. En utilisant la relation de la question **2)a)**, on a pour $y = y_0$: $Z^4 + pZ^2 + qZ + r = 0$ est équivalente à $(Z^2 + y_0 - AZ - B)(Z^2 + y_0 + AZ + B) = 0$ ce qui équivaut à $Z^2 - AZ + y_0 - B = 0$ ou $Z^2 + AZ + y_0 + B = 0$.

e. Nous divisons d'abord cette équation par a pour obtenir une équation de la forme $z^4 + b'z^3 + c'z^2 + d'z + e' = 0$, puis nous effectuons le changement de variable $Z = z + \frac{b'}{4}$ pour se ramener à une équation du type $Z^4 + pZ^2 + qZ + r = 0$. On cherche une solution y_0 de $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$ à l'aide de l'exercice 3. On détermine pour ce y_0 les complexes A et B qui permettent d'avoir : $\forall Z \in \mathbb{C}$, $(2y-p)Z^2 - qZ + y^2 - r = (AZ+B)^2$. Enfin on résout les deux équations du second degré $Z^2 - AZ + y_0 - B = 0$ et $Z^2 + AZ + y_0 + B = 0$. On obtient quatre nombres complexes. En retranchant $\frac{b'}{4}$ à ces quatre nombres complexes on obtient toutes les solutions de l'équation de départ.

3. On a un coefficient $4i$ devant z^3 donc on pose $Z = z + i$. On obtient ainsi :
$(Z-i)^4 + 4i(Z-i)^3 - 13(Z-i)^2 - (24+18i)(Z-i) - 7 - 24i = 0$.

 Creative Commons : BY NC SA

En développant , on trouve : $Z^4 - 7Z^2 - 24Z - 15 = 0$.
On a donc $p = -7, q = -24$ et $r = -15$. On doit donc trouver y_0 en donnant une solution de : $8y^3 + 28y^2 + 120y - 156 = 0$, comme l'indique la question **2.b)**. On remarque que 1 est une solution particulière de cette équation. On prend donc $y_0 = 1$. Cherchons A et B comme dans la question **2)c)**. On a : $(2y_0 - p)Z^2 - qZ + y_0^2 - r = 9Z^2 + 24Z + 16 = (3Z + 4)^2$. On peut prendre $A = 3$ et $B = 4$. Grâce à la question **2)d)**, on doit résoudre $Z^2 - 3Z - 3 = 0$ et $Z^2 + 3Z + 5 = 0$. Pour la première équation on trouve $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$ et pour la deuxième équation on trouve $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$ et $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}$. Ainsi les solutions de l'équation de départ sont : $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} - i$, $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} - i$, $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2} - i$ et $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} - i$. $\square$

Creative Commons :