Inégalités de Hölder et Minkowski

N. Jacquet

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★
Durée : 1h30-2h
Rubrique(s) : Analyse (étude de fonctions, inégalités, intégration).

Souvent dans le secondaire, on vous demande de démontrer des égalités mais il faut comprendre qu'il est bien plus difficile d'obtenir des inégalités en analyse et de savoir si ces inégalités sont optimales. Dans cet atelier vous verrez que cela demande quelquefois beaucoup de travail ...

La petite histoire...
Les inégalités de Hölder et Minkowski sont fondamentales en analyse moderne notamment dans l'étude numérique de systèmes physiques (évaluer des incertitudes par exemple).
Si Otto Ludwig Hölder (1859-1937) a vraiment travaillé sur la démonstration de ce type d'inégalité et l'étude de la norme et des espaces vectoriels associés, l'inégalité de Minkowski a été ainsi nommée en l'honneur de Hermann Minkowski (1864-1909) sans que celui-ci n'ait pris part à son établissement. Quant aux travaux de Minkowski, ils ont été utiles pour le développement de la théorie de la relativité générale d'un certain Albert Einstein (1879-1955) qui fut l'un de ses élèves à Zurich.

Monsieur et Madame
Tédeholderetminkowski ont deux filles...

Exercice 1.
Voici quelques rappels sur la fonction puissance. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note x^α le réel $e^{\alpha \ln(x)}$. On appelle fonction puissance α, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^\alpha$. Cette fonction est continue, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.
De plus pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, et pour tout x, $y \in \mathbb{R}_+^\star$. On a

(i) $1/x^\alpha = x^{-\alpha}$.

(ii) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

(iii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

(iv) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

(v) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Pour α strictement positif, cette fonction est strictement croissante. On a par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$. D'autre part, on peut prolonger cette fonction par continuité en zéro en lui attribuant la valeur zéro (autrement dit $0^\alpha = 0$).

Toutes ces propriétés se retrouvent en repassant à chaque fois par l'expression $e^{\alpha \ln(x)}$.

1. Montrer par un calcul simple, que pour tous nombres réels positifs x et y, on a :

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2. Nous allons généraliser la relation précédente à d'autres puissances. Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a. Montrer que : $p > 1$.

b. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $xy \leq \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q$.

3. Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels, où n est un entier naturel non nul.

a. Montrer que pour tous nombres réels $t_1, \dots, t_n$, on a : $|t_1 + \dots + t_n| \leq |t_1| + \dots + |t_n|$.

b. Montrer que

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \frac{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}{p} + \frac{|y_1|^q + \dots + |y_n|^q}{q}.$$

c. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ |x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \lambda^p \frac{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q} \frac{|y_1|^q + \dots + |y_n|^q}{q}.$$

d. Choisir judicieusement λ pour avoir

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(|y_1|^q + \dots |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette dernière inégalité est appelée inégalité de Hölder.

4. Soient $x_1, \dots, x_n\,, y_1, \dots, y_n$ des réels, où n est dans $\mathbb{N}^*$ et soit p dans $]1, +\infty[$.

a. Montrer que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, on a :

$$|x_k + y_k|^p \leq |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}.$$

b. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p+\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

c. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$(|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p+...+|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

5. Soit $p \in]1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $\mathbb{R}$, on note

$$\|(x_1,...,x_n)\|_p = (|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et $\|(x_1,...,x_n)\|_\infty$ la plus grande valeur parmi les réels $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|$.

a. Montrer que

$$\forall p \in]1,+\infty[,\ \|(x_1,...,x_n)\|_\infty \leq \|(x_1,...,x_n)\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|(x_1,...,x_n)\|_\infty.$$

b. En déduire

$$\lim_{p\to+\infty} \|(x_1,...,x_n)\|_p.$$

6. Soient $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $1/p+1/q=1$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a<b$. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a;b]$ continues.

a. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\int_a^b |fg| \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b |f|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_a^b |g|^q.$

b. Montrer que si on a $\displaystyle\int_a^b |f|^p = 0$ ou $\displaystyle\int_a^b |g|^q = 0$, alors on a $\displaystyle\int_a^b |fg| = 0.$

c. En déduire pour λ bien choisi l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

d. Montrer que :

$$\int_a^b |f||f+g|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

et

$$\int_a^b |g||f+g|^{p-1} \leq \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

.

e. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Indications

Indications sur l'Exercice 1

1. Utiliser $(x-y)^2 \geq 0$.

2.b. Fixer y et étudier la fonction $x \mapsto \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q - xy$ sur $\mathbb{R}_+$.

3.a. Montrer ceci par récurrence.

3.c. Remplacer dans l'inégalité précédente les x_i par λx_i et les y_i par $\frac{1}{\lambda} y_i$.

3.d. Faire en sorte d'avoir $\lambda^p(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p) = \frac{1}{\lambda^q}(|y_1|^q + \ldots + |y_n|^q)$.

4.a. Remarquer que $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k|$.

4.b. Pour la première inégalité, utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p-1}$ et les réels $|x_1|, \ldots, |x_n|$ et $|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1}$.

5.a. Pour l'inégalité de droite majorer tous les $|x_i|$ par $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty$.

6.a. Utiliser 2)b), avec $(\lambda f, \frac{1}{\lambda} g)$.

6.b. Reprendre l'inégalité précédente et faire tendre λ vers $+\infty$ ou 0^+.

6.c. Choisir λ tel que l'on ait $\lambda^p \int_a^b |f|^p = \lambda^{-q} \int_a^b |g|^q$.

6.d. Utiliser l'inégalité de Hölder.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. On a $(x-y)^2 \geq 0$, i.e. $x^2+y^2-2xy \geq 0$, soit encore $2xy \leq x^2+y^2$, d'où $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2.a. On a $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Comme q est strictement positif, ceci implique que $\frac{1}{p}<1$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient bien $p>1$.

b. On fixe $y \in \mathbb{R}_+$ quelconque et on étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q-xy$ sur $\mathbb{R}_+$. Si y est nul, cette fonction est toujours positive. Supposons que y soit dans $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x)=x^{p-1}-y,$$

y étant considéré comme une constante.
Puisque $p>1$, la fonction $x \mapsto x^{p-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f' est aussi strictement croissante sur ce même intervalle. f' s'annulant en $y^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$y^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{y^q}{q}$	$\searrow$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$, donc $q=\frac{p}{p-1}$. Par conséquent
$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)=\frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{\frac{1}{p-1}}y=\frac{y^q}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{\frac{1}{p-1}+1}=y^q-y^{\frac{p}{p-1}}=y^q-y^q=0.$
Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f admet un minimum qui vaut zéro, ce qui assure que f est positive sur $\mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $\frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q-xy \geq 0$, soit encore $\frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q \geq xy$.

3.a. Montrons ceci par récurrence.
Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : pour tous nombres réels $t_1,\dots,t_n$, on a $|t_1+\dots+t_n| \leq |t_1|+\dots+|t_n|$.
$\mathcal{P}(1)$ est évidente.
Nous n'avons pas besoin de montrer que $\mathcal{P}(2)$ est vraie pour initialiser la récurrence puisque nous avons montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Cependant, au cours de la démonstration de l'hérédité, nous aurons besoin d'utiliser le résultat pour $\mathcal{P}(2)$. Aussi faisons-nous la preuve dès maintenant.
Montrons $\mathcal{P}(2)$. Soient t_1,t_2 deux nombres réels. On a $t_1t_2 \leq |t_1t_2|=|t_1||t_2|$. Par conséquent, $t_1^2+t_2^2+2t_1t_2 \leq t_1^2+t_2^2+2|t_1||t_2|=|t_1|^2+|t_2|^2+2|t_1||t_2|$.
On a donc prouvé que $(t_1+t_2)^2 \leq (|t_1|+|t_2|)^2$. Par la croissance de la fonction racine, ceci nous donne l'inégalité $\sqrt{(t_1+t_2)^2} \leq \sqrt{(|t_1|+|t_2|)^2}$ et donc $|t_1+t_2| \leq ||t_1|+|t_2||=|t_1|+|t_2|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient $t_1,\dots,t_{n+1}$ des nombres réels.
On pose $u=t_1+\dots+t_n$. On a $|t_1+\dots+t_n+t_{n+1}|=|u+t_{n+1}| \leq |u|+|t_{n+1}|$, grâce à $\mathcal{P}(2)$. Grâce à $\mathcal{P}(n)$, on a $|u| \leq |t_1|+\dots+|t_n|$. On arrive ainsi à $|t_1+\dots+t_n+t_{n+1}| \leq |t_1|+\dots+|t_n|+|t_{n+1}|$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

b. On sait que $|x_1y_1+\dots+x_ny_n| \leq |x_1y_1|+\dots+|x_ny_n|=|x_1||y_1|+\dots+|x_n||y_n|$. Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $|x_k||y_k| \leq \dfrac{|x_k|^p}{p}+\dfrac{|y_k|^q}{q}$.

On obtient donc $|x_1||y_1| + ... + |x_n||y_n| \leq \dfrac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \dfrac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}$, d'où le résultat.

c. En remplaçant dans l'inégalité précédente les x_i par λx_i et les y_i par $\frac{1}{\lambda} y_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 + ... + x_n y_n| &= \left|(\lambda x_1)\left(\frac{1}{\lambda}y_1\right) + ... + (\lambda x_n)\left(\frac{1}{\lambda}y_n\right)\right| \\ &\leq \frac{|\lambda x_1|^p + ... + |\lambda x_n|^p}{p} + \frac{\left|\frac{1}{\lambda}y_1\right|^q + ... + \left|\frac{1}{\lambda}y_n\right|^q}{q} \\ &= \lambda^p \frac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q}\frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$|x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq \lambda^p \frac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q}\frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}.$$

d. Si tous les x_i ou tous les y_i sont nuls, alors l'inégalité de Hölder est immédiate. Supposons que tous les x_i ne sont pas nuls et que tous les y_i ne sont pas nuls.
Pour transformer la somme des deux termes $\lambda^p \frac{|x_1|^p+...+|x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q}\frac{|y_1|^q+...+|y_n|^q}{q}$ en un seul terme, nous allons utiliser la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mais pour pouvoir utiliser ceci, nous allons choisir λ de sorte que $\lambda^p(|x_1|^p + ... + |x_n|^p) = \frac{1}{\lambda^q}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)$. Autrement dit, on pose

$$\lambda^{p+q} = \frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}, \text{ i.e. } \lambda = \frac{(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{1}{p+q}}}{(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p+q}}}.$$

Vu que l'on a supposé que tous les x_i ne sont pas nuls et que tous les y_i ne sont pas nuls, alors $|x_1|^p + ... + |x_n|^p$ et $|y_1|^p + ... + |y_n|^p$ sont strictement positifs et λ est bien défini et strictement positif. En remplaçant dans l'inégalité, on arrive à

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq \frac{1}{p}&(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{p}{p+q}}(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1-\frac{p}{p+q}} \\ &+ \frac{1}{q}(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{q}{p+q}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{1-\frac{q}{p+q}}. \end{aligned}$$

Mais nous savons que $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq}\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} = \frac{1}{q}$. De même, on montre facilement que $\frac{q}{p+q} = \frac{1}{p}$. Enfin, on a $1 - \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} = \frac{1}{q}$ et de même $1 - \frac{p}{p+q} = \frac{1}{p}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 + ... x_n y_n| &\leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

4.a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k| \leq |x_k + y_k|^{p-1}(|x_k| + |y_k|)$.

b. Soit $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ce qui revient à poser $q = \frac{p}{p-1}$. Grâce à l'inégalité de Hölder appliquée à $|x_1|, ..., |x_n|$ et $|x_1 + y_1|^{p-1}, ..., |x_n + y_n|^{p-1}$, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p +\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or, $(p-1)q = p$ et $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, ce qui nous donne la première inégalité. La deuxième s'obtient de la même manière en échangeant les rôles des x_i et des y_i.

c. En sommant les deux inégalités précédentes et en utilisant la question **4.a)**, on arrive à

$$\begin{aligned}|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p &\leq (|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\left(|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\\ &\quad+(|y_1|^p+...+|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\left(|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p &\leq \left(|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}\\ &\quad\times\left((|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(|y_1|^p+...+|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

Si $|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p=0$, alors l'inégalité voulue est immédiate. Sinon, on peut diviser l'inégalité précédente par $\left(|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ pour obtenir l'inégalité de Minkowski.

5.a. Soit $p\in]1;+\infty[$. Comme $\|(x_1,...,x_n)\|_\infty$ est la plus grande valeur parmi les réels $|x_1|,|x_2|,...,|x_n|$, on a alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ l'inégalité $|x_i|\leq\|(x_1,...,x_n)\|_\infty$. Ainsi on a

$$|x_1|^p+...+|x_n|^p\leq\underbrace{\|(x_1,...,x_n)\|_\infty^p+\|(x_1,...,x_n)\|_\infty^p+...+\|(x_1,...,x_n)\|_\infty^p}_{n\text{ fois}}=n\|(x_1,...,x_n)\|_\infty^p.$$

On a donc : $\|(x_1,...,x_n)\|_p\leq n^{\frac{1}{p}}\|(x_1,...,x_n)\|_\infty$.
D'autre part soit i_0 l'indice correspondant au réel le plus grand parmi $|x_1|,|x_2|,...,|x_n|$. Comme tous ces réels sont positifs, on a :

$$|x_1|^p+...+|x_n|^p\geq|x_{i_0}|^p=\|(x_1,...,x_n)\|_\infty^p.$$

On obtient donc : $\|(x_1,...,x_n)\|_\infty\leq\|(x_1,...,x_n)\|_p$.

b. Pour tout p dans $]1;+\infty[$, on a $n^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}\ln(n)}$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty}n^{\frac{1}{p}}=e^0=1$. Par encadrement on obtient donc : $\lim\limits_{p\to+\infty}\|(x_1,...,x_n)\|_p=\|(x_1,...,x_n)\|_\infty$.

6.a. Pour x quelconque de $[a,b]$, on a grâce à la question **2.b)** appliquée à $(\lambda|f(x)|,\frac{1}{\lambda}|g(x)|)$ la relation

$$|f(x)g(x)|\leq\frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p+\frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

On obtient le résultat voulu en passant aux intégrales dans cette dernière inégalité.

b. Si on a $\int_a^b|f|^p=0$, alors on a : $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$, $0\leq\int_a^b|fg|\leq\frac{\lambda^{-q}}{q}\int_a^b|g|^q$. Or on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-q}=0$. Ainsi par encadrement on a $\int_a^b|fg|=0$. Si on a $\int_a^b|g|^q=0$, alors on utilise le même raisonnement, mais en faisant tendre λ vers 0 par valeurs supérieures.

c. Si on a $\int_a^b|f|^p=0$ alors on a $\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}=0$ et grâce à la question précédente, on a $\int_a^b|fg|=0$, d'où l'ingalité de Hölder. On a la même chose si on a $\int_a^b|g|^q=0$. Supposons que l'on ait $\int_a^b|f|^p\neq0$ et $\int_a^b|g|^q\neq0$. Choisissons λ pour avoir

$$\lambda^p\int_a^b|f|^p=\lambda^{-q}\int_a^b|g|^q.$$

Ceci revient à avoir

$$\lambda^{p+q}=\frac{\int_a^b|g|^q}{\int_a^b|f|^p},\qquad\text{d'où : }\lambda=\left(\frac{\int_a^b|g|^q}{\int_a^b|f|^p}\right)^{\frac{1}{p+q}},$$

qui est strictement positif. En remplaçant dans la relation de la question précédente, on a :

$$\int_a^b |fg| \le \frac{1}{p}\left(\int_a^b |f|^p\right)\left(\frac{\int_a^b |g|^q}{\int_a^b |f|^p}\right)^{\frac{p}{p+q}} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g|^q\right)\left(\frac{\int_a^b |g|^q}{\int_a^b |f|^p}\right)^{\frac{-q}{p+q}}.$$

Or on a $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{q}$. De même on a $\frac{q}{p+q} = \frac{1}{p}$. Par conséquent l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned}\int_a^b |fg| &\le \frac{1}{p}\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

d. Soit q vérifiant $1/p+1/q=1$ soit $q=p/(p-1)$. Grâce à l'inégalité de Hölder pour les fonction $|f|$ et $|f+g|^{p-1}$, on a

$$\int_a^b |f||f+g|^{p-1} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (|f+g|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

soit :

$$\int_a^b |f||f+g|^{p-1} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

L'autre inégalité se montre de la même manière en échangeant le rôle de f et g.

e. On a :

$$\int_a^b |f+g|^p = \int_a^b |f+g||f+g|^{p-1} \le \int_a^b (|f|+|g||f+g|^{p-1}) = \int_a^b |f||f+g|^{p-1} + \int_a^b |g||f+g|^{p-1}.$$

Grâce à la question précédente, on a

$$\int_a^b |f+g|^p \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\int_a^b |f+g|^p \le \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

On a donc

$$\int_a^b |f+g|^p \le \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Si $\int_a^b |f+g|^p$ est nul, l'inégalité de Minkowski est immédiate car

$$\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est positif, sinon en divisant par $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ les deux membres de l'inégalité précédente, on obtient de nouveau l'inégalité de Minkowski. $\square$

