Sous-groupes de $\mathbb{R}$

V. Bansaye

Niveau : TERMINALE
Difficulté : ★★★
Durée : 2h, voire plus
Rubrique(s) : Algèbre (groupes), Topologie (infimum, densité).

Depuis le collège, vous manipulez des nombres réels comme des outils numériques. Dans cet atelier, on va étudier quelques propriétés de l'ensemble des réels. Vous les retrouverez dans le supérieur.

La petite histoire...
Le but de cet atelier est de s'intéresser aux ensembles de nombres réels qui sont stables par addition ou différence. C'est-à-dire que l'on cherche les sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ tels que la somme et la différence de deux éléments de A est forcément dans A.
Une idée du résultat ?
Vous pouvez commencer à chercher de tels ensembles et vous pourrez voir qu'ils se rangent naturellement en deux « catégories » : les « discrets », où les points apparaissent successivement, et les « désorganisés »...

Monsieur et Madame
Bertienne ont un fils.

Exercice 1.

1. Soient a et b deux nombres réels positifs tels que $a > 0$ et $b > a$.
Un animal se déplace en ligne droite en faisant des bonds de longueur a (systématiquement). Il y a sur son chemin un trou de longueur b.

a. Expliquer pourquoi l'animal tombera forcément dans le trou.

b. Expliquer pourquoi le résultat précédent peut s'énoncer avec des quantificateurs (pour tout : $\forall$, il existe : $\exists$) de la manière suivante :

$$\forall x \geq 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } na \in]x, x+b[.$$

c. Prouver la proposition précédente.

Réponse : Basile

2. On cherche ici à définir la notion de « plus petit élément d'un ensemble ». Le plus petit élément de $[0,1]$, c'est 0. Mais le plus petit élément de $]0,1]$... il n'y en a pas. En effet, il n'existe pas de « plus petit élément » qui appartienne à $]0,1]$, puisque dès que l'on prend un élément $x \in]0,1]$, il existe un autre élément de $]0,1]$ qui lui est strictement inférieur, par exemple $x/2$.
La seule réponse qui ait un sens est 0, c'est en fait le plus grand des minorants et on parle de *borne inférieure*. On en donne ici une définition, utile pour l'exercice de cette feuille.
Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^+$ et $A \neq \varnothing$, où $\varnothing$ représente l'ensemble vide. C'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe au moins un élément dans A. La borne inférieure de A, notée $\inf A$, est l'unique nombre réel positif tel que

$$\begin{cases} \forall x \in A, x \geq \inf A, \\ \forall y > \inf A,\ \exists x \in A,\ x < y. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une telle borne inférieure ne seront pas discutées ici.
a. Dans les deux conditions de l'accolade ci-dessus, que signifie la première ? la deuxième ?
b. Prouver avec cette définition que $\inf\,]0,1] = 0$ et $\inf \mathbb{Q}_+^* = 0$.
Théorème (admis). Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que A est minoré, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel m tel que :

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

Alors, A admet une unique borne inférieure ; on la note $\inf A$.
Remarquons que si A est un sous-ensemble non vide de nombres réels positifs ou nuls, il est automatiquement minoré de sorte qu'il admet une borne inférieure d'après le théorème ci-dessus.
3. Soit $G \subset \mathbb{R}$. On dit que G est un groupe si

$$\begin{cases} 0 \in G, \\ \forall x \in G,\ -x \in G,\ (\textit{stabilité par passage à l'opposé}) \\ \forall x \in G,\ \forall y \in G,\ x + y \in G\ (\textit{stabilité par addition}). \end{cases}$$

En gros, un groupe est un ensemble non vide dans lequel on peut faire des additions (et des différences).
a. Soit G est un groupe. Montre que si $x \in G$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n.x \in G$.
b. Pour tout nombre réel r, on note
$r\mathbb{Z} := \{nr\,;\, n \in \mathbb{Z}\} = \{0,\ r,\ -r,\ 2r,\ -2r,\ 3r,\ -3r, ...,\ nr,\ -nr, ...\}$.

Indiquer, en le justifiant, quels ensembles sont des groupes parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$\{0\},\ \mathbb{N},\ \ \mathbb{Z},\ \ \mathbb{Q},\ \ [0,1],\ \ ]-1,1[,\ \ \mathbb{R},\ \ 3\mathbb{Z}.$$

Pour ceux qui sont des groupes, trouver la borne inférieure de leur partie strictement positive, c'est-à-dire déterminer la borne inférieure de l'ensemble $G\cap]0,+\infty[=\{x\in G\ ;\ x>0\}$, lorsque celui-ci est non vide. Distinguer alors "deux catégories" de groupes.

c. Montrer que pour tout $r\geq 0$, $r\mathbb{Z}$ est un groupe.

4. Nous allons montrer que si G est un groupe inclus dans $\mathbb{R}$, alors

- soit c'est un « réseau », c'est-à-dire $G=r\mathbb{Z}$ pour un certain $r\geq 0$,
- soit c'est un ensemble « présent partout » ou « dense »dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient (au moins) un élément de G.

On suppose que $G\neq\{0\}$. En s'inspirant de la question précédente, on note r la borne inférieure de $G\cap]0,+\infty[$:

$$r=\inf G\cap]0,+\infty[=\inf\{x\in G; x>0\}.$$

a. On suppose ici que $r>0$. Montrer que si $x\in G$ et $x>r$, alors $x\geq 2r$. En déduire que $r\in G$ puis que $G=r\mathbb{Z}$.

b. On suppose maintenant que $r=0$. Montrer en utilisant la question 1) que

$$\forall\epsilon>0,\ \forall x\geq 0,\ \exists g\in G \text{ tel que } g\in]x,x+\epsilon[.$$

En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

c. Conclure.

5. Application. Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]=\{n+m\alpha : n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

b. [Hors programme] En déduire que $\{e^{i2\pi\alpha m}; m\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\{z\in\mathbb{C}; |z|=1\}$.
On commencera par préciser une notion de densité sur $\{z\in\mathbb{C}; |z|=1\}$.

Commentaires sur l'Exercice 1

Plus généralement, on peut définir la borne inférieure de tout ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré, ou la borne supérieure de tout ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré. Nous ne détaillons pas ici ce qui fait l'existence et l'unicité de la borne inférieure. Cela vient de la construction même de $\mathbb{R}$ et de la structure d'ordre dessus. La preuve de l'unicité est un bon petit exercice.

Ici, nous parlons de groupes pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ stables par addition (et différence). Mais la définition de groupe que vous aborderez plus tard ne se limitera pas à des ensembles de nombres réels, munis de l'addition usuelle. Un groupe pourra être un ensemble plus compliqué muni d'une opération moins sympathique que l'addition que nous connaissons dans $\mathbb{R}$ (par exemple par forcément commutative, c'est-à-dire que les éléments notés $x + y$ et $y + x$ pourront être différents).

Indications

Indications sur l'Exercice 1

3.a. Faire une récurrence.

3.b. Lorsque l'on prend un élément x de ces ensembles, son opposé $-x$ est-il aussi dans l'ensemble ? Et lorsque l'on en prend deux x et y, la somme $x+y$ de ces deux éléments reste-t-elle dans l'ensemble ?
La catégorie dépend de la valeur de $\inf G \cap]0,+\infty[$, plusieurs groupes donnent une borne inférieure de leur partie strictement positive égale à 0.
Pour réfléchir à des exemples plus compliqués, on pourra considérer aussi les ensembles $\mathbb{Z}[\alpha]=\{n+m\alpha; n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}\}$ pour $\alpha\in\mathbb{Q}$ ou $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

4.a. Pour montrer la première assertion, raisonner par l'absurde.

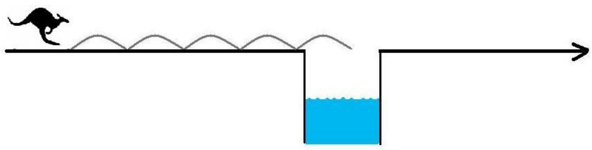
4.b. Utiliser 1.c).

5. Vérifier que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un groupe, puis que ce n'est pas un réseau. En déduire que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est dense dans$\mathbb{R}$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.a. L'animal se déplace avec des bonds de taille a, donc il ne peut pas sauter au-dessus d'un trou de longueur supérieure. Même s'il rebondit juste avant le trou, il tombe...



1.b. Le résultat précédent stipule que quelle que soit la position du début du trou, l'animal tombera dans le trou, c'est-à-dire que l'un des points où il va atterrir sera dans le trou :

$$\begin{aligned}
\text{quelle que soit la position du début du trou} &= \forall x \geq 0, \\
\text{emplacement du trou} &=]x, x+b[\\
\text{ensemble des positions où l'animal devrait rebondir} &= \{n.a; n \in \mathbb{N}\} \\
\text{une des positions où il devrait rebondir est dans le trou} &= \exists n \in \mathbb{N}; n.a \in]x, x+b[
\end{aligned}$$

Donc la phrase

« l'animal tombe quel que soit l'endroit où le trou se situe" »,

qui se réécrit plus précisément comme

« quelle que soit la position du début du trou,

il existe une position où l'animal est supposé rebondir qui se situe dans le trou »

et devient avec des quantificateurs

$$\forall x \geq 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n.a \in]x, x+b[.$$

L'intérêt des quantificateurs ici est de donner une formulation précise et compacte.
1.c) Ici le résultat est assez clair. Mais pour être rigoureux et pour s'entraîner pour des situations plus complexes où les preuves seront indispensables, nous allons le prouver.
Brouillon. Pour prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na \in]x, x+b[$, nous allons exhiber un tel n, en fait le premier, c'est-à-dire déterminer au bout de combien de sauts l'animal tombe. Que vérifie ce n ? Et bien c'est un entier naturel tel que

$$x < na < x + b,$$

c'est-à-dire, puisque $a > 0$,

$$\frac{x}{a} < n < \frac{x}{a} + \frac{b}{a}.$$

Bref, le n que l'on cherche est le premier entier strictement supérieur à x/a. Nous pouvons maintenant passer à la preuve.
Soit $x \geq 0$. Nous définissons n **comme le plus petit entier strictement supérieur à**

x/a. Par définition, $n > x/a$ tandis que $n-1$ est un entier strictement inférieur à n et ne peut donc pas être strictement supérieur à x/a. Donc $n-1 \leq x/a$. Or $b > a$ assure que $b/a > 1$. On en déduit que $n \leq x/a + 1 < x/a + b/a$ et

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} < \quad & n & < \frac{x}{a} + \frac{b}{a}, \qquad \text{et donc, puisque } a > 0, \\ x < \quad & na & < x + b. \end{aligned}$$

Finalement, $na \in]x, x+b[$. La preuve est complète et « apparaît en rouge ».

2.a. La première condition assure que $\inf A$ est un minorant de A, c'est-à-dire qu'il est plus petit que tous les éléments de A. La deuxième condition assure que c'est le plus grand minorant de A possible puisque tout nombre strictement supérieur à $\inf A$ est strictement plus grand qu'un élément de A (au moins).

2.b. Tout d'abord : $\forall x \in]0,1[,\ x \geq 0$.
L'intervalle $]0,1[$ est un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$. D'après le théorème, il admet une borne inférieure. Montrons que celle-ci vaut 0 en montrant que $b = 0$ satisfait aux conditions $i)$ et $ii)$ de la définition.
On a déjà vu que $\forall x \in]0,1[,\ x \geq 0$, de sorte que la condition $i)$ est satisfaite.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > 0$. On pose

$$x = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right),$$

c'est-à-dire que si $y \geq 1$, on pose $x = \frac{1}{2}$, et que si $y \leq 1$, on pose $x = \frac{y}{2}$.
On a donc $x > 0$, $x \leq \frac{1}{2}$ et $x \leq \frac{y}{2}$.
Alors $x \in]0, 1/2]$ donc $x \in]0,1[$. De plus $x \leq y/2 < y$.
Conclusion (avec les parties en rouge) : $\forall y > 0,\ \exists x \in]0,1[,\ x < y$.
Ce qui montre que la condition $ii)$ de la définition est satisfaite.
Conclusion de par la définition de la borne inférieure) : $\inf A = 0$.
De même, l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs est non vide et minoré (par 0). D'après le théorème, il admet une borne inférieure. Montrons que celle-ci vaut 0.
On a déjà : $\forall x \in \mathbb{Q}_+^*,\ x \geq 0$. Ce qui prouve que la condition $i)$ est satisfaite avec $b = 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > 0$. Posons

$$n \text{ égal au plus petit entier naturel supérieur à } \frac{1}{y}.$$

Remarquons que $n > \frac{1}{y} > 0$ entraîne $n \geq 1$ puisque n est un entier. Alors $n \geq 1/y$, donc $ny \geq 1$ puisque $n > 0$. Posons

$$x = \frac{\lfloor ny \rfloor}{n+1} = \frac{\text{plus grand entier inférieur ou égal à } ny}{n+1},$$

dont le numérateur est un entier plus grand ou égal à 1.
Comme x est le quotient de deux entiers naturels non nuls, $x \in \mathbb{Q}_*^+$.
De plus : $x \leq ny/(n+1) < y$.
La propriété $ii)$ est donc satisfaite, et par suite, $\inf \mathbb{Q}_+^* = 0$.

3.a. Pour tout entier naturel n, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $n.x \in G$.
Montrons par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation : $0.x = 0$ et $0 \in G$; la propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité. Supposons que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire que $n.x \in G$. Or $x \in G$ et la somme de deux éléments de G appartient à G car G est

un groupe. Donc $n.x + x \in G$, d'où $(n+1)x \in G$. La propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est donc vraie.
Étant héréditaire et vraie au rang initial, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Soit maintenant p un entier relatif négatif. Alors $n = -p$ est un entier naturel de sorte que $nx \in G$. Comme G est un groupe, la deuxième propriété des groupes entraîne $-(nx) \in G$, c'est-à-dire, puisque $-(nx) = (-n)x = px$, que $px \in G$.
On a donc montré : $\forall m \in \mathbb{Z}$, $mx \in G$.
3.b. Seuls

$$\{0\},\ \mathbb{Z} = \{0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, ...\},\ \mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\},\ \mathbb{R},\ 3\mathbb{Z}$$

sont des groupes. Montrons par exemple que $\{0\}$ et $\mathbb{Q}$ sont des groupes mais que $\mathbb{N}$ et $]-1,1[$ n'en sont pas.
En effet,

- $0 \in \{0\}$,
- Soit $x \in \{0\}$. Alors $x = 0$ donc $-x = 0$ de sorte que $-x \in \{0\}$,
- Soient $x \in \{0\}$ et $y \in \{0\}$. Alors $x = 0$ et $y = 0$, donc $x + y \in \{0\}$.

Ceci prouve que $\{0\}$ *est un groupe.*
De même

- $0 \in \mathbb{Q}$
- Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = a/b$. Donc
  $$-x = \frac{-a}{b}, \quad \text{et } -a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*,$$
  donc $-x \in \mathbb{Q}$.
- Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = a/b$ et il existe $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = a'/b'$. Donc
  $$x + y = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'} \quad \text{et } ab' + a'b \in \mathbb{Z},\ bb' \in \mathbb{N}^*,$$
  ce qui implique que $x + y \in \mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{Q}$ *est un groupe.*
Par contre $3 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ donc $\mathbb{N}$ *n'est pas un groupe* (car il ne vérifie pas la deuxième propriété, la stabilité par passage à l'opposé).
Par ailleurs $3/4 \in]-1,1[$ mais $3/4 + 3/4 = 6/4 = 3/2$ et $3/2 \notin]-1,1[$, donc $]-1,1[$ *n'est pas un groupe* (il ne vérifie pas la troisième propriété, la stabilité par addition).
Passons à la borne inférieure de la partie positive :

$G = \{0\}$	$\Rightarrow$	$G \cap]0,+\infty[= \varnothing$	on ne peut définir la borne inférieure
		d'un ensemble vide	
$G = \mathbb{Z}$	$\Rightarrow$	$G \cap]0,+\infty[= \{1,2,3,4,5,....\}$	donc $\inf G \cap]0,+\infty[= 1$
$G = \mathbb{Q}$	$\Rightarrow$	$G \cap]0,+\infty[= \{a/b : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*\}$	donc $\inf G \cap]0,+\infty[= 0$ grâce à 3.b).
$G = \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$G \cap]0,+\infty[=]0,+\infty[$	donc $\inf G \cap]0,+\infty[= 0$
$G = r\mathbb{Z}$	$\Rightarrow$	$G \cap]0,+\infty[= \{r,\ 2r,\ 3r,\ 4r,\ ...\}$	donc $\inf G \cap]0,+\infty[= r$

Nous avons envie de regrouper les groupes G en fonction du fait que, si elle existe, la borne inférieure de la partie positive est nulle ou non ($\inf G \cap]0,+\infty[= 0$ ou $\inf G \cap]0,+\infty[> 0$).

Dans le premier cas, on peut remarquer que le groupe est « discret » (éparpillé dans $\mathbb{R}$) et que dans le second cas il est « dense » (présent partout dans $\mathbb{R}$).

3.c. Soit $r \geq 0$. Nous devons vérifier que $r\mathbb{Z} = \{rn : n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie les 3 propriétés souhaitées :

- $0 = r.0$, de sorte $0 \in r\mathbb{Z}$.
- Si $x \in r\mathbb{Z}$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = rn$. Donc $-x = r.(-n)$. Or $-n \in \mathbb{Z}$, donc $-x \in r\mathbb{Z}$.
- Si $x \in r\mathbb{Z}$ et $y \in r\mathbb{Z}$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = rn$ et il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = rm$. Donc $x + y = r(n + m)$. Or $n + m \in \mathbb{Z}$, donc $x + y \in r\mathbb{Z}$.

Donc $r\mathbb{Z}$ est un groupe.

4.a. *Commentaire : si r est la borne inférieure de $G \cap]0, \infty[$ et si $r > 0$, nous allons montrer que $r \in G$, c'est-à-dire que la borne inférieure est « atteinte ». Ce n'est pas toujours le cas, comme on l'a vu pour $]0, 1[$. Pour cela nous allons prouver qu'il n'y a pas de points de G dans l'intervalle $]r, 2r[$.*

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $y \in G$ tel que $y \in]r, 2r[$. Nous allons faire apparaître un point de G trop petit, c'est-à-dire dans $]0, r[$. On peut s'appuyer sur un dessin et déjà placer $0, r, 2r$. Comme $y > r$, la deuxième partie de la définition de la borne inférieure de $G \cap]0, +\infty[$ assure qu'il existe $x \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $x < y$. En particulier, $x \in G \cap]0, +\infty[$ implique $x \geq r$ grâce à la première partie de la définition de la borne inférieure, puis $-x \leq -r$. Donc

$$0 < y - x < 2r - r = r \quad (*)$$

Enfin $x \in G$, donc $-x \in G$ (grâce à la deuxième propriété satisfaite par le groupe G). De plus, $y \in G$ donc $y + (-x) \in G$ (grâce à la troisième propriété vérifiée par le groupe G). On en déduit que $y - x \in G \cap]0, +\infty[$. Par la première propriété la condition $i)$ de la borne inférieure,

$$y - x \geq r \quad (**).$$

Mais nous avons une contradiction entre $(*)$ et $(**)$, ce qui est absurde.

Nous en déduisons qu'il n'existe pas $y \in G$ tel que $y \in]r, 2r[$, c'est-à-dire que

$$\forall y \in G, \; y \notin]r, 2r[. \tag{1}$$

Ce que l'on a prouvé ici est qu'il n'y a pas d'éléments de G compris strictement entre r et $2r$.

Mais où sont donc les éléments de $G \cap]0, +\infty[$? Cet ensemble est non vide car $G \neq \{0\}$ et G est stable par passage à l'opposé. Maintenant, il y a forcément des éléments de $G \cap]0, +\infty[$ près de sa borne inférieure : plus précisement, comme $3r/2 > r$ la deuxième propriété de la borne inférieure entraîne qu'il existe $x \in G \cap]0, +\infty[$ tel que $x < 3r/2$. Par ailleurs, $x \geq r$ par la première propriété de la borne inférieure. Donc $x \in [r, 2r[$ et $x \in G$. D'après (1), $x = r$ donc $r \in G$.

D'après la question 3.a), $r \in G$ implique que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $nr \in G$. Donc $r\mathbb{Z} \subset G$.

Passons à l'inclusion inverse. Soit $x \in G$.

Forcément, comme $x \in \mathbb{R}$ et que $r > 0$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [nr, (n+1)r[$. On peut faire un dessin pour s'en convaincre et on voit qu'on utilise le fait que les intervalles $[nr, (n+1)r[$ recouvrent toute la droite réelle :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nr, (n+1)r[.$$

On peut faire une preuve explicite en remarquant que n est la partie entière de x/r. Faisons-la. Nous posons

$$n = \left\lfloor \frac{x}{r} \right\rfloor = \text{plus grand nombre entier inférieur ou égal à } \frac{x}{r}.$$

Alors, comme $r > 0$,

$$n \leq \frac{x}{r} < n+1 \Rightarrow x \in [nr, (n+1)r[.$$

Nous pouvons maintenant en déduire que $x = nr$. On a besoin de généraliser (1) de 2 à n quelconque. C'est vraiment la même chose et on raisonne à nouveau par l'absurde. Supposons que $x \in]nr, (n+1)r[$. On sait que $x \in G$ et nous avons prouvé que $nr \in G$. Donc $-nr \in G$, puis $x - nr \in G$ en utilisant que G est un groupe. Or $0 < x - nr < r$ et c'est en contradiction avec le fait que $r = \inf G \cap]0, +\infty[$. Donc $x = nr$ et $x \in r\mathbb{Z}$. On conclut que $G \subset r\mathbb{Z}$.
Finalement, les deux parties rouges nous donnent que $G = r\mathbb{Z}$.
4.b. Il faut utiliser le kangourou, c'est-à-dire la question 1).
Commençons par une preuve... légère. Si un kangourou fait des bonds de taille a et que $a \in G$, alors tous les endroits où le kangourou rebondit sont dans G (car G est un groupe, les points où le kangourou atterrit sont donnés par $na \in \mathbb{N}$ et on utilise la question 3.a)).
Ajoutons maintenant un trou de taille $\epsilon > 0$, qui peut être très petit, à la position $x \geq 0$. Comme $\inf G \cap]0, +\infty[= 0$, il existe des éléments strictement positifs dans G qui sont aussi petits qu'on veut et on peut trouver $a \in G$ tel que $0 < a < \epsilon$.
Or, d'après la première question le kangourou qui fait des bonds de taille a tombe forcément à un moment dans un trou de taille ϵ, quelle que soit la position de ce trou. Ce point de chute est un élément de G et appartient au trou, c'est-à-dire $]x, x+\epsilon[$. On prouve ainsi qu'il existe un élément de G dans $]x, x+\epsilon[$, c'est-à-dire la première assertion.
On peut traiter $x \leq 0$ de manière symétrique avec la propriété de stabilité de G par passage à l'opposé.
La preuve de la densité de G est alors complète. On va donner maintenant une preuve rigoureuse, en suivant cette idée.
Soit $\epsilon > 0$ et $x \geq 0$. Comme $\inf G \cap]0, +\infty[= 0$, il existe $a \in G$ tel que $a < \epsilon$ d'après la deuxième partie la condition $ii)$ de la définition de la borne inférieure.
D'après la question 1.c), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n.a \in]x, x+\epsilon[$. Or $a \in G$, donc $na \in G$ grâce à la question 3.1).
On peut donc conclure que

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \geq 0,\ \exists g \in G \ / \ g \in]x, x+\epsilon[. \qquad (***)$$

Soit $\epsilon > 0$, mais cette fois $x < 0$.
- Si $0 \in]x, x+\epsilon[$, alors on prend $g = 0$.
- Si $0 \notin G$, alors $x + \epsilon \leq 0$ et on considère l'intervalle $]-x-\epsilon, -x[\subset]0, +\infty[$. Comme $-x-\epsilon \geq 0$, on peut appliquer $(***)$ à $-x-\epsilon$ et donc il existe $g \in G$ tel que $g \in]-x-\epsilon, -x[$. Or $g \in G$ implique $-g \in G$ car G est un groupe. Donc $-g \in G$ et $-g \in]x, x+\epsilon[$.

4.c. Soit G un groupe. Trois cas sont possibles :

- ou bien $G = \{0\}$. Alors $G = r\mathbb{Z}$ avec $r = 0$;
- ou bien $G \neq \{0\}$ et $r > 0$. Alors d'après 4.a), il existe $r > 0$ tel que $G = r\mathbb{Z}$;
- ou bien $G \neq \{0\}$ et $r = 0$. Alors tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de G d'après la question 4.b).

En conclusion, soit $G = r\mathbb{Z}$ avec $r \geq 0$ (on dit que G forme un réseau), ou bien tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de G (on dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).

5.a. Montrons tout d'abord que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un groupe.

- $0 = 0 + 0.\alpha$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $0 \in \mathbb{Z}[\alpha]$.
- Soit $x \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Alors il existe n et m dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = n + m\alpha$. Du coup, $-x = (-n) + (-m)\alpha$ et $-n \in \mathbb{Z}$, $-m \in \mathbb{Z}$. Au final, $-x \in \mathbb{Z}[\alpha]$.
- Soient $x \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $y \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Alors il existe des eniters relatifs n, m, n', m' tels que $x = n + m\alpha$ et $y = n' + m'\alpha$. Donc $x + y = n + n' + (m + m').\alpha$ et $n + n' \in \mathbb{Z}$, $m + m' \in \mathbb{Z}$. Donc $x + y \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

$\mathbb{Z}[\alpha]$ vérifie donc les trois propriétés qui font de lui un groupe. Grâce à la question 4), on sait alors que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est soit un réseau, soit un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.
Supposons que $\mathbb{Z}[\alpha]$ soit un réseau, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{Z}[\alpha] = r\mathbb{Z}$.
Or $1 \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ donc il existe des entiers relatifs n et n' tels que

$$1 = rn, \quad \alpha = rn'.$$

Donc

$$\alpha = \frac{n'}{n} \text{ et par suite } \alpha \in \mathbb{Q}$$

ce qui est en **contradiction avec l'hypothèse**. Donc, en raisonnant par l'absurde, on obtient que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas un réseau et la question 4) entraîne alors que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5.b. La preuve de cette dernière partie sort un peu du programme. Nous n'en donnons que les idées principales.
Pour montrer que $\{e^{i2\pi\alpha m} : m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ & & \alpha & \longrightarrow & e^{i2\pi\alpha x}. \end{array}$$

L'image par f de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est égale à $\{e^{i2\pi\alpha m} : m \in \mathbb{Z}\}$ et l'application f étant continue, elle transforme la densité de $\mathbb{Z}[\alpha]$ dans $\mathbb{R}$ en la densité de $\{e^{i2\pi\alpha m} : m \in \mathbb{Z}\}$ dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Plus précisément, pour approcher un élément z du cercle unité par des éléments de $\{e^{i2\pi\alpha m} : m \in \mathbb{Z}\}$, on écrit tout d'abord z sous forme exponentielle : il existe $x \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \exp(2\pi i x)$. On a prouvé que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est dense dans $\mathbb{R}$ et on approche ensuite x par des éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$. On conclut alors en utilisant que

$$|\exp(i2\pi x) - \exp(i2\pi y)| \leq 2\pi|x - y|,$$

ce qui achève la preuve. □

