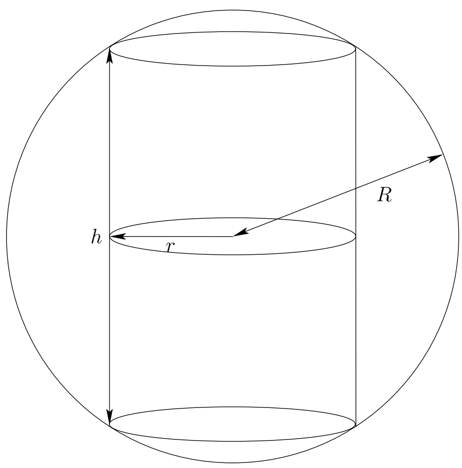
Optimisation dans l'espace

R. Danflous

Niveau : Terminale
Difficulté : moyenne mais technique
Durée : 1h à 1h30
Rubrique(s) : Analyse (fonctions, dérivation).

La petite histoire...
Robert, chaudronnier à Dunkerque a reçu une commande d'un copain agriculteur dans la campagne flamande pour une cuve en acier de 5000L. Robert va commander l'acier chez Arcelor-Mittal mais l'entreprise a encore augmenté ses prix. Comment construire la cuve la moins chère possible ?
Le premier exercice répond à cette question. C'est une version simplifiée, des problèmes que se posent les industriels, par exemple lorsqu'ils cherchent à fabriquer un contenant de volume fixé dont la surface est minimale, de façon à utiliser le moins de matériau possible (c'est-à-dire en minimisant la quantité de papier, carton, métal, etc.).
L'exercice 1 propose de trouver *le meilleur cylindre* que l'on peut faire avec un volume donné.
Les deux exercices suivants sont à voir comme un tout, l'exercice 2 se contentant de l'étude fonctionnelle (qui est assez technique, et subtile, par endroits), tandis que l'exercice 3 est à proprement parler un exercice d'optimisation.



Exercice 1.

On considère un cylindre de hauteur h, dont la base a pour rayon r (r et h sont non nuls).

On fixe le volume V de ce cylindre.

On va chercher à minimiser la surface S de ce cylindre sous cette condition (volume fixe).

1. Exprimer le volume V en fonction de r et de h.

2. En déduire l'expression de h en fonction de r et de V.

3. Exprimer S en fonction de V et de r.

4. Pour quelle valeur de r la surface S est-elle minimale ? Que vaut alors h ?

Exercice 2.

Dans toute cette partie, R est un nombre réel strictement positif.

1. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,(R^2 - x^2).$$

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie pour tout x de $[0; R]$ par

$$g(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - x^2.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; R[$,

$$g'(x) = 2\frac{R^2 - 2x^2 - x\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

b. En déduire que si $g'(x) = 0$ alors $5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 = 0$.

c. Résoudre l'équation $5t^2 - 5R^2t + R^4 = 0$ et en déduire que l'unique solution de $g'(x) = 0$ sur $[0; R[$ est $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}R$.

d. Utiliser le résultat précédent pour déterminer le signe de g'.

Étudier les variations de g.

Exercice 3.

On considère une sphère de rayon R dans laquelle on inscrit un cylindre de rayon r et de hauteur H.

L'objectif est de déterminer pour quelles valeurs du rayon r et de la hauteur H le volume V (respectivement la surface S) du cylindre est maximal (resp. maximale).

On note $h = H/2$ la demi-hauteur du cylindre.

1. Exprimer r en fonction de h et de R.

2. En déduire l'expression de V, puis celle de S en fonction de h et de R.

3. Conclure à l'aide de l'exercice 2.

Indications

Indications sur l'Exercice 3

1. Faire un dessin dans un plan de coupe contenant l'axe du cylindre.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Le volume est égal à la surface de la base πr^2 multipliée par la hauteur h du cylindre. Donc

$$V = \pi r^2 h.$$

2. On a donc, comme $r \neq 0$,

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

3. La surface du cylindre est donnée par la somme des surfaces des deux disques formant les bases plus la surface du rectangle qui les entoure. D'où,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

et donc, d'après la question précédente,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}.$$

Autrement dit, on a

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

4. S est une fonction de la variable r (on rappelle que le volume V est fixé, donc il ne varie pas). Pour rechercher le minimum de cette fonction, on va donc étudier ses variations après avoir calculé sa dérivée.
Pour tout $r > 0$, la fonction S est dérivable en r et

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Donc,

$$\begin{array}{rclcrcll} S'(r) & > & 0 & \text{ssi} & 4\pi r - \frac{2V}{r^2} & > & 0 & \\ & & & \text{ssi} & 4\pi r & > & \frac{2V}{r^2} & \\ & & & \text{ssi} & 4\pi r^3 & > & 2V & [\text{car } r > 0] \\ & & & \text{ssi} & r^3 & > & \frac{V}{2\pi} & \\ & & & \text{ssi} & r & > & \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, & \end{array}$$

la fonction $x \mapsto x^3$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On remarque que le dernier argument est assez subtil : c'est la croissance globale sur $\mathbb{R}$ de la fonction cube qui permet de conclure qu'aucun nombre inférieur à $\sqrt[3]{V/2\pi}$ n'a un cube plus grand que $V/2\pi$ *et* que tout nombre supérieur à $\sqrt[3]{V/2\pi}$ donne, une fois élevé au cube, un résultat supérieur à $V/2\pi$. C'est de cet argument dont on a besoin pour justifier la présence du « si et seulement si », qui signale une équivalence entre les deux inégalités. À méditer...
S est donc d'abord décroissante puis croissante.
Donc S est minimale pour

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Calculons maintenant h :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{V}{\pi r^2} \\
&= \frac{V}{\pi} \times \left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{\sqrt[3]{V}} \right)^2 \\
&= \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} \times \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} \\
&= \frac{V \times \sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V^2} \times \sqrt[3]{V}} \times \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2} \times \sqrt[3]{2\pi}}{\pi \times \sqrt[3]{2\pi}} \\
&= \sqrt[3]{V} \times \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} \\
&= 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \\
&= 2r.
\end{aligned}$$

Il est ainsi remarquable que, à volume fixé, la surface est minimale lorsque la hauteur est égale au diamètre de la base. □

Correction de l'Exercice 2

1. f est une fonction polynomiale définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= R^2 - x^2 + x(-2x) \\
&= R^2 - 3x^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\text{ ssi } R^2 - 3x^2 = 0 \\
&\text{ ssi } x = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{R}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On a donc

x	$-\infty$		$-\frac{R}{\sqrt{3}}$		$\frac{R}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}R^3$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}R^3$	$\searrow$	$-\infty$

2.a. g est définie sur $[0; R]$ et dérivable sur $[0; R[$ comme somme, produit et composée de fonctions polynomiales et racine carrée, racine carrée qui s'annule pour $x = R$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} - 2x \\ g'(x) &= \frac{2(R^2 - x^2) - 2x^2 - 2x\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ g'(x) &= 2\frac{R^2 - 2x^2 - x\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in [0; R[$.

b. On cherche les zéros de la fonction g'. Soit $x \in [0; R[$.

$$\begin{array}{ccrcl} g'(x) = 0 & \text{ssi} & R^2 - 2x^2 - x\sqrt{R^2 - x^2} & = & 0 \\ & \text{ssi} & R^2 - 2x^2 & = & x\sqrt{R^2 - x^2} \\ & \text{donc} & (R^2 - 2x^2)^2 & = & x^2(R^2 - x^2) \\ & \text{c'est-à-dire} & 5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 & = & 0. \end{array}$$

Donc, si $g'(x) = 0$, alors $5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 = 0$.

c. Pour résoudre l'équation $5t^2 - 5R^2t + R^4 = 0$, on calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-5R^2)^2 - 4R^4 \times 5 \\ &= 5R^4 > 0 \text{ : il y a donc 2 solutions à cette équation ;} \\ \sqrt{\Delta} &= \sqrt{5}R^2. \end{aligned}$$

Les deux solutions de cette équation sont donc

$$t_1 = \frac{5R^2 - \sqrt{5}R^2}{10} \text{ et } t_2 = \frac{5R^2 + \sqrt{5}R^2}{10}.$$

L'équation $5x^4 - 5R^2x^2 + R^4 = 0$ a donc les quatre solutions suivantes :

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5R^2 - \sqrt{5}R^2}{10}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{5R^2 + \sqrt{5}R^2}{10}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{5R^2 - \sqrt{5}R^2}{10}} \text{ et } x_4 = \sqrt{\frac{5R^2 + \sqrt{5}R^2}{10}}.$$

x_1 et x_2 sont strictement négatives, donc ne nous intéressent pas.
De plus, après quelques calculs, on remarque $g'(x_3) = 0$, puis que $R^2 - 2x_4^2 < 0$ et $x_4\sqrt{R^2 - x_4^2} > 0$, donc $g'(x_4) < 0$.

Donc l'unique solution de $g'(x) = 0$ sur $[0; R[$ est $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}R$.

d. $g'(0) = 2R > 0$.

On a donc

x	0		x_3		R
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	R^2	$\nearrow$	$g(x_3)$	$\searrow$	0

□

Correction de l'Exercice 3

1. D'après le théorème de Pythagore, on a $r^2 + h^2 = R^2$, donc

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

2. On a donc $V = \pi r^2 H$, d'où

$$V = 2\pi h\,(R^2 - h^2).$$

Par ailleurs, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r H$ donc

$$S = 2\pi(R^2 - h^2) + 4\pi h\sqrt{R^2 - h^2}.$$

3. On a $V = 2\pi\, f(h)$ et $S = 2\pi\, g(h)$.
On déduit de l'exercice 2 que V est maximal lorsque

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

et que S est maximale lorsque

$$h = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R.$$

On remarque que si on peut encore voir une vague forme de *symétrie cubique* dans le résultat concernant le volume (et encore, c'est loin d'être évident), le résultat concernant la surface est plus déconcertant et difficilement prévisible. □

