Coefficients binomiaux

M. Bouvel, V. Féray et S. Léocard

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★ (exercices 1 à 3) ★★★ (exercices 4 à 6)
Durée : Environ 4 heures
Rubrique(s) : Combinatoire, Logique (Récurrence)

En classe de Première, vous avez découvert les coefficients binomiaux en étudiant les probabilités. Ils correspondent au nombre de chemins ayant un certain nombre de succès dans un arbre qui représente une répétition d'épreuves de Bernoulli. En voici un autre point de vue qui est celui du supérieur. Mais au fait ces définitions sont-elles équivalentes ?

La petite histoire...
Dans cet atelier, on s'intéresse aux coefficients binomiaux, c'est-à-dire au nombre de façons de choisir k éléments parmi n. Cela vous permettra de répondre aux questions suivantes :

- C'est le grand tournoi de l'année au lycée. L'équipe de football des Terminales s'est entrainée toute l'année et les 22 joueurs de l'équipe sont prêts. L'entraineur doit choisir les titulaires. Combien d'équipes de 11 titulaires choisis parmi les 22 joueurs peut-il constituer ?
- Combien de murs peut-on former avec n briques ?
- De combien de manières peut-on colorier 17 cases en 8 cases rouges, 7 vertes et 2 bleues.

Monsieur et Madame
Rèmedelucas ont un fils...

Différentes interprétations de $\binom{n}{k}$: vous avez vu en classe de Première que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins qui contiennent k succès sur un arbre représentant n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. On rappelle qu'une épreuve de Bernoulli est un jeu ayant deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité $1-p$. Par exemple le jeu du pile ou face est une épreuve de Bernoulli avec $p = 1/2$ (si la pièce est bien équilibrée).

Réponse : ⊥ɥǝ́o

C'est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments. En effet, on peut numéroter les n épreuves de Bernoulli successives. Un chemin de l'arbre avec k succès peut alors être modélisé par k nombres entiers compris entre 1 et n indiquant à quelles expériences nous avons obtenu un succès. Ces k nombres forment une partie à k éléments de $\{1, ..., n\}$. Ainsi $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de parties à k éléments de $\{1, ..., n\}$ (qui est un ensemble comportant n éléments).[1]

En d'autre termes, $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts (dans l'exemple précédent, les objets sont les nombres entre 1 et n) dans le cas de tirages *sans remise* (on ne peut pas prendre deux fois le même objet) et *simultanés* (on ne tient pas compte de l'ordre).

Le nombre $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de rangements possibles de k objets identiques dans n cases (ou tiroirs) avec au plus un objet par case. Cela revient en effet à choisir k cases parmi les n possibles.

Le premier exercice illustre la définition combinatoire des coefficients binomiaux.

Exercice 1 (Être ou ne pas être un coefficient binomial ?).
Parmi les situations suivantes, dans quels cas le nombre de possibilités correspond-il au coefficient binomial $\binom{n}{k}$?

1. Il y a n salles dans un établissement, on a besoin de k salles.

2. J'ai n grands sacs et k petits objets identiques à mettre dedans.

3. On veut répartir n personnes en k groupes.

4. On veut colorier en rouge k lettres d'un mot de n lettres.

Il est possible, uniquement à partir de la définition combinatoire des coefficients binomiaux, d'établir de nombreuses identités. L'exercice suivant en présente quelques-unes.

Exercice 2 (Manipulations combinatoires).

1. À l'aide de la définition comme nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments, déterminer les nombres $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$.

2. Soit $0 \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3. Soit $1 \leq k \leq n-1$. Imaginons que vous voulez choisir $k+1$ joueurs parmi $n+1$ candidats pour constituer une équipe. En distinguant les cas où le premier

1. Par convention, il y a 1 manière (et non 0) de choisir 0 éléments parmi n. Cela peut surprendre, mais 0 manière signifierait que c'est impossible, or c'est possible : il suffit de ne rien prendre. Cela correspond aussi au chemin de l'arbre ne comportant que des échecs.

candidat est choisi ou non, montrer que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $k = 0$.

4. Soit $1 \leq k \leq n$. Avec le même type d'arguments qu'à la question précédente, montrer que

$$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}.$$

Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $k = 0$.

5. Avec le même type d'arguments qu'à la question précédente, montrer que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Commentaires sur l'Exercice 2

Rappels de dénombrement :

- lorsque l'on divise un choix en deux cas *disjoints* et que l'on connaît le nombre de choix dans chacun de ces deux cas, le nombre total de choix est leur *somme* ;
- lorsqu'un choix se fait en deux *étapes*, et que l'on connaît le nombre de choix à chaque étape, le nombre total de choix est leur *produit*.

Dans l'exercice suivant, nous allons maintenant établir une expression explicite pour $\binom{n}{k}$.

Exercice 3 (Formule avec des factorielles).

Si n est un entier strictement positif, on définit $n!$ (« lire factorielle n ») par :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Par convention, $0! = 1$.

L'objectif de cet exercice est de démontrer et d'utiliser la propriété suivante pour tout $n \geq 0$:

$$\text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n\},\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (\star)$$

1. Montrer que, pour tous entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. Commencer par vérifier la propriété $(\star)$ pour $n = 0$, 1, 2 et 3.

3. *(difficile)* Prenons $k \geq 1$. Le but de cette question est de trouver une preuve *combinatoire* de la propriété $(\star)$. Rappelons que $\binom{n}{k}$ est par définition le nombre de manières de former une équipe de k joueurs parmi n candidats.
Nous allons choisir d'abord le joueur qui portera le maillot n°1, puis celui qui portera le maillot n°2... Après avoir choisi le joueur avec le maillot n°k, on aura obtenu une équipe de k joueurs *et la répartition des maillots*.

a. Combien y a-t-il de choix pour le joueur avec le maillot n°1 ? Une fois ce joueur choisi, combien y a-t-il de choix pour le joueur avec le maillot n°2 ? Combien y a-t-il donc de choix pour l'équipe de k joueurs et la répartition des maillots ?

b. Pour une équipe de k joueurs donnée, combien y a-t-il de manières possibles de répartir les k maillots ?

c. Conclure.

4. Montrer la propriété $(\star)$ par récurrence en utilisant la question **3)** de l'**Exercice 2**.

5. Retrouver les résultats des questions **2)** et **3)** de l'Exercice **2**.

Exercice 4 (Formule du binôme de Newton).
Rappel : la notation somme $\sum$ a la signification suivante,

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule du binôme de Newton :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

et d'utiliser cette formule pour démontrer d'autres identités.

1. Vérifier la formule du binôme de Newton pour $n = 0, 1$ et 2.

2. Prouver la formule du binôme de Newton de deux manières : par récurrence puis en utilisant la définition combinatoire des coefficients binomiaux.

3. En remarquant que $(x+1)^n = (1+x)^n$, retrouver le résultat de la deuxième question de l'Exercice **2**.

4. En adaptant cette méthode, retrouver le résultat de la question **4)** de l'Exercice **2**.

5. Retrouver le résultat de la dernière question de l'Exercice **2** toujours à partir de la formule du binôme de Newton.

6. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ (en fonction de n) ?

Exercice 5 (Trinomiaux).
Montrer
$$\sum_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0\\ k\geq 0\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n$$
en comptant le nombre de coloriages possibles de n cases en 3 couleurs.

Commentaires sur l'Exercice 5

Combien de manières y a-t-il de colorier n cases en trois couleurs (disons rouge, vert et bleu) de sorte qu'il y ait i cases rouges, j cases vertes et k cases bleues (on suppose que $i + j + k = n$) ? Ce nombre est parfois appelé *trinomial*.

Pour répondre à cette question, commencer par dénombrer les manières de colorier ces n cases avec i cases rouges et $j + k$ cases jaunes. Regarder ensuite le nombre de manières de recolorier ces cases jaunes en j cases vertes et k cases bleues.

Exercice 6 (Maçonnerie et compositions d'entiers).
Un maçon, après avoir terminé la construction d'une maison, s'aperçoit qu'il lui reste n briques ($n \in \mathbb{N}^*$) non utilisées. Il décide alors de construire un mur décoratif au fond du jardin avec ces briques restantes.
Le mur doit respecter les conditions suivantes :

- les n briques doivent être utilisées ;
- le mur doit être droit (autrement dit, il peut être représenté en deux dimensions) ;
- le mur doit être en un seul morceau ;
- les briques doivent être alignées ;
- les briques sont posées les unes sur les autres : il ne peut y avoir un emplacement sans brique sous une brique.

Il n'y a aucune restriction de hauteur, ni de largeur. Des exemples et contre-exemples de murs sont dessinés sur la figure 1.
Deux murs symétriques, comme ceux de la figure 2, sont considérés différents.
Notons u_n le nombre de murs que l'on peut construire avec n briques.

1. Combien de murs différents le maçon peut-il ainsi construire lorsque $n = 1$? lorsque $n = 2$? lorsque $n = 3$? lorsque $n = 4$?

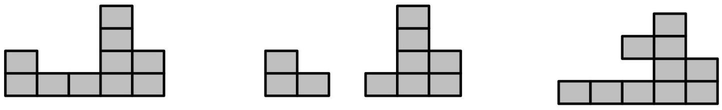


FIGURE 1 – Exemple avec $n = 10$: le mur de gauche convient ; celui du milieu ne convient pas car il est en deux morceaux ; celui de droite ne convient pas non plus car une des briques est au-dessus d'un emplacement vide.

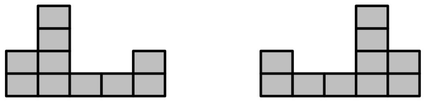


FIGURE 2 – Deux murs symétriques, considérés différents.

Peut-on deviner une expression pour u_n en fonction de n ?

2. Combien de murs différents le maçon peut-il ainsi construire lorsque n est un entier naturel non nul quelconque ?

3. Combien de murs différents avec exactement n briques et k colonnes notre maçon peut-il construire (quand $k \leq n$) ?

4. Retrouver alors l'égalité

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m.$$

Indications

Indications sur l'Exercice 2

3. Les cas où le premier candidat est choisi ou non sont deux cas disjoints.

4. Vous souhaitez maintenant former une équipe de $k+1$ joueurs parmi $n+1$ candidats, avec un capitaine (qui fait partie de l'équipe, bien entendu !). Pour cela, vous pouvez soit commencer par choisir tous les joueurs de l'équipe, soit commencer par choisir le capitaine.

5. Vous cherchez maintenant à faire une équipe de n joueurs parmi $2n$ candidats, n hommes et n femmes. Vous pouvez soit faire directement votre choix sans faire de différences entre hommes et femmes, soit choisir d'abord le nombre k d'hommes dans l'équipe.

Indications sur l'Exercice 3

3. Ici, il faut bien comprendre la différence entre choisir une équipe de k joueurs (le nombre de façons de le faire est compté par les coefficients binomiaux) et choisir un joueur n°1, puis un joueur n°2...
Dans le second cas, cela revient à choisir une équipe, *et aussi* une répartition des maillots entre les joueurs de l'équipe.

3.b. On raisonne de la même manière qu'en **3.a)**. Une fois l'équipe choisie, combien y a-t-il de choix pour le joueur portant le maillot n°1 ? Puis pour le joueur portant le maillot n°2 ?...

4. D'après la définition on a : $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$.

Indications sur l'Exercice 4

4. Il est opportun de dériver la formule du binôme de Newton pour $(x+1)^{n+1}$.

5. On pourra écrire la formule du binôme de Newton d'une part pour $(x+1)^{2n}$ et d'autre part pour les facteurs de $(x+1)^n.(x+1)^n$.

6. Il faut choisir les "bonnes" valeurs pour a et b.

Comme aux questions **3)**, **4)** et **5)**, on pourrait utiliser la formule du binôme de Newton pour retrouver le résultat de la question **3)** de l'Exercice **2**. Cependant, comme on utilise le résultat de cette question dans la démonstration par récurrence de la formule du binôme de Newton, ce serait très discutable du point de vue logique !

Indications sur l'Exercice 6

1. Faire des dessins. Les nombres obtenus vous rappellent-ils une suite connue ? Il ne s'agit pas de démontrer la formule que vous proposerez dans cette question, c'est l'objectif de la question suivante.

2. On pourra imaginer que l'on construit le mur de gauche à droite. On commence par empiler les briques pour obtenir la première colonne, puis on passe à la deuxième colonne et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les briques aient été utilisées.
Deux méthodes permettent alors de résoudre le problème.

- Une fois construite la première colonne (notons h sa hauteur), de combien de manières le maçon peut-il finir son mur ? Faites ensuite une preuve par récurrence.

- Remarquez, que pour chaque brique, le maçon peut décider de continuer la colonne en cours de construction ou d'en commencer une nouvelle.

3. Utiliser la deuxième méthode de la question précédente. Pour obtenir k colonnes, combien de fois doit-on choisir de commencer une nouvelle colonne ?

Sous le nom de *compositions de l'entier n*, les *murs à n briques* sont des objets étudiés en combinatoire. Si l'on demande en plus que la hauteur des colonnes soit décroissante, on appelle cela des *partitions de l'entier n*. Ces objets sont encore plus étudiés, mais personne ne sait les compter...

Corrections

Correction de l'Exercice 1

Seuls les premier et dernier exemples sont comptés à l'aide des coefficients binomiaux.

- Dans le deuxième cas, on peut mettre plusieurs objets dans un même sac, cela ne correspond donc pas à choisir k sacs parmi les n.
- Dans la troisième situation, pour chaque personne, il faut choisir un groupe, on ne choisit pas k personnes parmi les n.

$\square$

Correction de l'Exercice 2

1. Rappelons que, par définition, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble E qui en comporte n. Ainsi, le nombre $\binom{n}{0}$, correspond au nombre de parties à 0 éléments. Il n'y en a qu'une seule, à savoir l'ensemble vide, donc on a $\binom{n}{0} = 1$. Il n'y a qu'une partie de E possèdant n éléments, c'est E lui-même, donc $\binom{n}{n} = 1$. Le nombre $\binom{n}{1}$ est le nombre de parties à un élément de E, c'est donc le nombre d'éléments de E et donc $\binom{n}{1} = n$. Le nombre $\binom{n}{n-1}$ est le nombre de parties à $n-1$ éléments. Choisir une telle partie de E revient à mettre un élément de E de côté. Il y a n façons de choisir l'élément à exclure et on a donc $\binom{n}{n-1} = n$.

2. Choisir $n-k$ personnes parmi n revient à en choisir k : considérez simplement l'équipe des personnes que vous n'avez pas choisies.

3. Si le premier candidat est choisi, il vous reste à choisir k autres personnes parmi les n autres candidats. Il y a, par définition, $\binom{n}{k}$ manières de faire ce choix. S'il n'est pas choisi par contre, il faut que vous choisissiez $k+1$ personnes parmi les n autres candidats, soit $\binom{n}{k+1}$ possibilités.
Il y a donc en tout $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ manières de choisir $k+1$ personnes parmi $n+1$ candidats. Par définition, ce nombre est donc égal à $\binom{n+1}{k+1}$.
Comme d'après la question 1), $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n+1}{1} = n+1$, l'égalité proposée est vraie aussi pour $k = 0$.

4. Vous souhaitez maintenant former une équipe de $k+1$ joueurs parmi $n+1$ candidats, avec un capitaine.

- Vous pouvez commencer par choisir les $k+1$ joueurs : il y a $\binom{n+1}{k+1}$ manières de faire ce choix. Il faut ensuite choisir un capitaine parmi les $k+1$ joueurs de l'équipe, soit $k+1$ choix. Cela fait en tout $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$ choix.
- Une autre approche consiste à choisir d'abord le capitaine, $n+1$ choix. Vous choisissez ensuite les k autres joueurs parmi les n autres candidats, ce qui peut se faire de $\binom{n}{k}$ manières. Cela fait donc $(n+1)\binom{n}{k}$ choix pour l'équipe avec son capitaine.

Les deux approches comptent la même chose, d'où l'égalité demandée.
Pour $k = 0$, d'après la question 1), on a : $\binom{n+1}{1} = n+1$ et (n+1)$\binom{n}{0} = (n+1).1$, d'où l'égalité demandée.

5. Prenons $n \geq 1$. Vous cherchez maintenant à faire une équipe de n joueurs parmi $2n$ candidats, n hommes et n femmes.

- Première approche : le fait qu'il y ait des hommes et des femmes ne change rien, il y a $\binom{2n}{n}$ façons de faire ce choix.

- Deuxième approche : regardons le nombre d'équipes que l'on peut former avec exactement k hommes (k est ici n'importe quel entier entre 0 et n). Il faut choisir k hommes parmi les n hommes ($\binom{n}{k}$ choix) et $n-k$ femmes parmi les n femmes ($\binom{n}{n-k}$ choix). Finalement, le nombre d'équipes avec exactement k hommes est

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2.$$

L'égalité ci-dessus vient de la question 2). Comme une équipe contient soit exactement 0 homme, soit exactement 1 homme, etc., le nombre total d'équipes possibles est :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Les deux approches ci-dessus comptant les mêmes objets, on obtient l'égalité demandée.

Pour $n = 0$, le membre de droite a un seul terme et vaut $\binom{0}{0}^2 = 1^2 = 1$; le membre de gauche vaut $\binom{0}{0} = 1$, d'où l'égalité demandée. □

Correction de l'Exercice 3

1. Soient n et k des entiers tels que $1 \leq k \leq n$. On utilise la définition de $n!$. Comme k est compris entre 1 et n, on a :

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k(k-1) \cdots 1}.\end{aligned}$$

2. En utilisant la description combinatoire (question **1)** de l'Exercice **2**), on a :

$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}$;

$\binom{1}{0} = 1 = \frac{1!}{0!1!}$; $\binom{1}{1} = 1 = \frac{1!}{1!0!}$;

$\binom{2}{0} = 1 = \frac{2!}{0!2!}$; $\binom{2}{1} = 2 = \frac{2!}{1!1!}$; $\binom{2}{2} = 1 = \frac{2!}{2!0!}$;

$\binom{3}{0} = 1 = \frac{3!}{0!3!}$; $\binom{3}{1} = 3 = \frac{3!}{1!2!}$; $\binom{3}{2} = 3 = \frac{3!}{2!1!}$; $\binom{3}{3} = 1 = \frac{3!}{3!0!}$.

3.a. Pour le joueur portant le maillot n°1, on peut choisir n'importe lequel des n candidats. Il y a donc n choix. Une fois ce joueur choisi, on peut choisir n'importe quel *autre* joueur pour porter le maillot n°2. Il y a $n-1$ choix. On aura ensuite $n-2$ choix pour le joueur avec le maillot n°3, $n-3$ choix pour le joueur avec le maillot n°4, ..., et enfin $n-k+1$ choix pour le joueur avec le maillot n°k. Cela donne donc $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ choix pour l'équipe de k joueurs et la répartition des maillots.

3.b. Si l'équipe est déjà choisie, on ne peut choisir le joueur portant le maillot n°1 que parmi les k joueurs de l'équipe. On a donc seulement k choix pour le joueur portant le maillot n°1 dans ce cas. Le joueur portant le maillot n°2 doit ensuite être choisi parmi les $k-1$ joueurs restants de l'équipe (ce ne peut pas être le joueur portant le maillot n°1 !), on a donc $k-1$ choix. Il y a ensuite $k-2$ choix pour le joueur portant le maillot n°3, $k-3$ choix pour celui portant le n°4, ..., et enfin 1 seul choix pour le joueur portant le maillot n°k. Finalement, pour une équipe donnée de k joueurs, il y a $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$ manières de répartir les maillots.

3.c. On a montré qu'il y a $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ choix pour l'équipe de k joueurs et la répartition des maillots. Mais pour une équipe donnée, nous savons qu'il y a $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1$ manières de répartir les maillots. Le nombre d'équipes est donc

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1},$$

c'est-à-dire, d'après la question 1), $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Or, par définition, ce nombre est $\binom{n}{k}$. Il reste à vérifier que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ lorsque $k = 0$ (et $n \geq 0$), ce qui est vrai d'après la question **1)** de l'Exercice **2**. Cela prouve de manière combinatoire la formule de l'exercice.

4. Pour tout entier naturel n, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :

$$\text{pour tout } k \in \{0, ..., n\}, \text{ on a } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Montrons par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vraie comme cela a été vérifié dans la question **2)**. (En fait, on a même montré que les propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ sont aussi vraies).
- Soit $n \geq 0$. Supposons que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie au rabg n. Montrons que la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Soit k un entier positif tel que $k \leq n+1$. Alors, si $k \geq 1$, d'après la question **4)** de l'Exercice **2**,

  $$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

  Par hypothèse de récurrence, puisque $0 \leq k-1 \leq n$, on a :

  $$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\big(n-(k-1)\big)!}.$$

  En mettant les deux expressions ensemble, on obtient, si $k \geq 1$

  $$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!\big(n-(k-1)\big)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{k \cdot (k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!},$$

  qui est la formule que nous souhaitions démontrer.
  Il reste à vérifier qu'elle est aussi vraie pour $k = 0$:

  $$\binom{n+1}{0} = 1 \text{ et } \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1.$$

  Cela achève la démonstration de la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$.

Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

5. Pour la question **2)** de l'Exercice **2**, c'est facile. Soit $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Le résultat de la question **3)** est plus difficile à retrouver. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot \big(n-(k+1)\big)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(n-k) \cdot (k+1)} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Lorsque $k = n$, le membre de droite vaut $\binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n} + 0 = 1$, et celui de gauche est égal à $\binom{n+1}{n+1} = 1$, d'où l'égalité. $\square$

Correction de l'Exercice 4

1. Pour $n = 0$: pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$, donc la formule est vraie.

Pour $n = 1$: pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$,
$(a+b)^1 = a+b$ et $\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = b+a$, donc la formule est vraie.

Pour $n = 2$: pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$,
$\sum\limits_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k} = \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2} = b^2 + 2ab + a^2$.
La formule est donc une identité remarquable bien connue !

2. *Démonstration par récurrence.*
Pour tout $n \geq 0$, définissons la propriété (Q_n) par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Montrons par récurrence que la propriété (Q_n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

- La propriété (Q_0) a été démontrée à la question 1) de l'exercice.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que (Q_n) est vraie à l'ordre n et démontrons que (Q_{n+1}) est vraie. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0
\end{aligned}$$

d'après la question **3)** de l'exercice 2.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Ainsi, la propriété (Q_{n+1}) est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que la propriété (Q_n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

Démonstration par la définition combinatoire.

Soit n un entier naturel non nul. $(a+b)^n$ est une forme factorisée. Le membre de droite dans l'égalité du binôme de Newton est une forme développée. On cherche donc comment expliquer qu'en développant $(a+b)^n$ on va aboutir à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut expliciter l'écriture de $(a+b)^n$ en

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Un terme du développement de cette expression est obtenu en prenant a ou b dans chaque facteur et en les multipliant. Chaque terme est donc de la forme $a^k b^j$, où k est le nombre de facteurs $(a+b)$ où on a pris a et j est le nombre de facteurs $(a+b)$ où on a pris b. Cela implique que $j = n-k$, et ainsi tous les termes du développement de $(a+b)^n$ sont de la forme $a^k b^{n-k}$ pour des valeurs de k allant de 0 à n.

Fixons une telle valeur de k. Reste à savoir combien de fois le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît dans le développement de $(a+b)^n$. Il s'agit en fait du nombre de manières de choisir exactement k facteurs $(a+b)$ dans lesquels on prend a (implicitement, ceci impose de prendre b dans les

$n-k$ facteurs $(a+b)$ restants). C'est précisément la définition de $\binom{n}{k}$, donc le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît $\binom{n}{k}$ fois dans le développement de $(a+b)^n$. Ainsi, on a bien

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Il est aussi possible de comprendre ce raisonnement avec le point de vue de la définition du programme.
On peut modéliser le développement des n facteurs $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$ par n épreuves de Bernoulli successives et indépendantes. Pour chaque facteur $(a+b)$, on a le choix de le développer en effectuant la multiplication par a ou par b, ce qui constitue une expérience de Bernoulli. On considérera que l'on a un succès lorsque l'on choisit a et un échec lorsque l'on choisit b. Ce procédé sera répété n fois. Ainsi le nombre de termes $a^k b^{n-k}$ correspond à k choix de a et donc au nombre de n expériences successives donnant k succès à savoir $\binom{n}{k}$.

3. On applique la formule du binôme de Newton deux fois, à $(x+1)^n$ puis à $(1+x)^n$:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k.$$

On déduit donc de $(x+1)^n = (1+x)^n$ que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$. Par identification des coefficients de ces applications polynomiales sous forme canonique, on conclut que pour tout k compris entre 0 et n, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4. On écrit la formule du binôme de Newton pour $(x+1)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k 1^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{0} x^0 \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k + 1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1} x^{j+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} + 1.\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x, on obtient donc :

$$(n+1) \cdot (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k.$$

En écrivant enfin la formule du binôme de Newton pour $(x+1)^n$, on aboutit à :

$$(n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \cdot (k+1) \cdot x^k$$
$$\text{c'est-à-dire } \sum_{k=0}^{n} (n+1) \cdot \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \binom{n+1}{k+1} x^k.$$

Par identification des coefficients de ces fonctions polynomiales sous forme canonique, on conclut que

$$\text{pour tout } k \text{ compris entre 0 et } n,\ (n+1) \cdot \binom{n}{k} = (k+1) \cdot \binom{n+1}{k+1}.$$

5. On écrit la formule du binôme de Newton pour $(x+1)^{2n}$:

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Le coefficient de x^n dans cette somme est donc $\binom{2n}{n}$.
D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^k x^j = \sum_{\substack{0\le j\le n\\ 0\le k\le n}} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j}.\end{aligned}$$

Le coefficient de x^n dans cette somme est donc

$$\sum_{\substack{0\le j\le n\\ 0\le k\le n\\ j+k=n}} \binom{n}{k}\binom{n}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

On conclut que $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, ce qui est exactement l'expression recherchée.

6. Il suffit d'écrire la formule du binôme de Newton pour $a=b=1$. On obtient alors : $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

Correction de l'Exercice 5

Soit $n \geq 0$. Le nombre de coloriages possibles de n cases en 3 couleurs est 3^n : il y a 3 choix pour la première, puis 3 choix pour la seconde, ...et 3 choix pour la dernière. Ces choix se font *successivement*, il faut donc faire le produit $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^n$.
Choisissons des entiers positifs i, j et k tels que $i+j+k=n$. Colorier n cases avec i cases rouges et $j+k$ cases jaunes revient à choisir les i cases rouges parmi n cases. Il y a donc par définition $\binom{n}{i}$ manières de le faire.
Pour chacune de ces manières, le même argument explique qu'il y a $\binom{j+k}{j}$ façons de colorier les $j+k$ cases jaunes en j cases vertes et k cases bleues.
Ces choix se faisant successivement, il y a donc

$$\binom{n}{i} \cdot \binom{j+k}{j}$$

manières de colorier n cases en i cases rouges, j cases vertes et k cases bleues.
Or, en utilisant l'écriture des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles (cf. Exercice 3), on peut réécrire, puisque $j+k=n-i$,

$$\binom{n}{i} \cdot \binom{j+k}{j} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(j+k)!}{j!\big((j+k)-j\big)!} = \frac{n! \cdot (j+k)!}{i! \cdot (j+k)! \cdot j! \cdot k!} = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

Finalement, le nombre de manières de colorier n cases en i cases rouges, j cases vertes et k cases bleues est $\frac{n!}{i!j!k!}$.

En sommant sur toutes les valeurs de i, j et k possibles, on obtient le nombre total de manières de colorier n cases en 3 couleurs, c'est-à-dire

$$\sum_{\substack{i\geq 0\\ j\geq 0\\ k\geq 0\\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n.$$

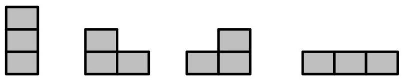
□

Correction de l'Exercice 6

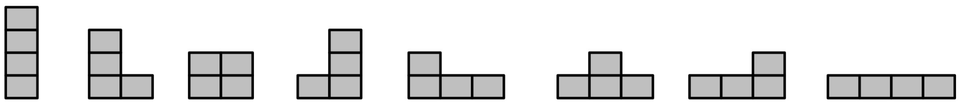
1. Lorsque $n = 1$, il y a 1 possibilité :

Lorsque $n = 2$, il y a 2 possibilités :

Lorsque $n = 3$, il y a 4 possibilités :



Lorsque $n = 4$, il y a 8 possibilités :



Essayons maintenant de deviner l'expression de u_n en fonction de n.
L'énumération ci-dessus nous donne les premières valeurs de u_n : $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8$. On reconnaît la suite des puissances de 2 et on *conjecture* donc :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}.$$

2. Donnons deux méthodes différentes pour démontrer cette conjecture.
Première méthode.
Nous allons dans un premier temps exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, ..., u_2 et u_1.
Supposons que l'on construit le mur de gauche à droite. Soit h le nombre de briques utilisées pour la colonne la plus à gauche (dans l'exemple valide de la Figure 1, $h = 2$). On a $1 \leq h \leq n$.
Si $h = n$, toutes les briques ont été utilisées ; la construction du mur s'arrête là (le mur est constitué d'une seule colonne).
Si $h < n$, il reste alors $n - h$ briques à utiliser pour construire les colonnes suivantes. Il y a donc u_{n-h} façons de continuer le mur (à partir de la deuxième colonne).
On a ainsi $u_n = 1 + \sum_{h=1}^{n-1} u_{n-h} = 1 + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_1$.
Pour tout entier naturel non nul n, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :

$$u_n = 2^{n-1}.$$

Montrons maintenant par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 1), $u_1 = 1$ et $2^0 = 1$; donc la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, ... , $(\mathcal{P}_n)$ sont vraies. Montrons que la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2^n$.
  D'après la formule obtenue ci-dessus,
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + u_n + u_{n-1} + ... + u_2 + u_1 \\ &= 1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^1 + 2^0), \end{aligned}$$
  puisque les propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, ... , $(\mathcal{P}_n)$ sont vraies. On trouve donc
  $$u_{n+1} = 1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2},$$
  en utilisant la somme des termes successifs d'une suite géométrique de raison 2. Et enfin
  $$u_{n+1} = 1 - (1 - 2^n) = 2^n.$$
  La propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est donc vraie.

Grâce au principe de récurrence, la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, le maçon peut construire 2^{n-1} murs différents à l'aide de n briques.

Remarque 1 : attention, dans la preuve de l'hérédité de notre propriété $(\mathcal{P}_n)$, nous avons dû supposer que $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, ... , $(\mathcal{P}_n)$ étaient vraies. Il n'aurait pas été suffisant de supposer que seule $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Cela s'appelle parfois *récurrence forte.*

Remarque 2 : On aurait pu éviter la récurrence en remarquant que $u_n = 1 + u_{n-1} + (u_{n-1} - 1) = 2u_{n-1}$. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison 2.
Deuxième méthode.
Supposons que l'on construit le mur de la gauche vers la droite. Ainsi, on commence par empiler les briques pour obtenir la première colonne, puis on passe à la deuxième colonne et ainsi de suite. On commence par placer la première brique dans la première colonne.
Pour chacune des $n - 1$ briques restantes, deux possibilités s'offrent à nous :

- soit on pose la brique sur la colonne que l'on est en train de construire ;
- soit on pose la brique à droite de cette colonne, démarrant ainsi la construction d'une nouvelle colonne.

Pour chacune de ces $n - 1$ briques à placer, on a donc deux choix possibles, ce qui fait $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^{n-1}$ manières de construire le mur.

3. On raisonne comme dans la question précédente (deuxième méthode). Pour construire un mur, le maçon doit choisir, pour chaque brique après la première, s'il continue la colonne en cours ou s'il en commence une nouvelle. Pour que le mur ait k colonnes, il faut qu'il choisisse de commencer une nouvelle colonne pour exactement $k - 1$ briques. Un mur de n briques à k colonnes correspond donc au choix de $k - 1$ briques parmi $n - 1$ (rappelons que, pour la première brique, il n'y aucun choix à faire). Par définition des coefficients binomiaux, le nombre de ces choix est $\binom{n-1}{k-1}$. Le nombre de murs différents de n briques à k colonnes est donc $\binom{n-1}{k-1}$.

4. Nous avons déterminé à la deuxième question que le nombre de murs possibles est 2^{n-1}. Ce nombre de murs est aussi égal à la somme du nombre de murs possibles à k colonnes, pour k allant de 1 à n. Donc, grâce à la question précédente, il vaut aussi $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$ et

$$2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}.$$

En écrivant cette égalité pour $n = m + 1$, on obtient le résultat attendu. $\square$

