Logique

S. Léocard, V. Bansaye, M. Bouvel

Niveau : Terminale, Bac+1.
Difficulté : ★★
Durée : 2 heures
Rubrique(s) : Logique.

La petite histoire...
Raisonner logiquement est essentiel en mathématiques. Cette fiche propose de manipuler certains concepts fondamentaux de la logique. Ce formalisme logique est probablement nouveau pour des élèves du lycée, mais les concepts sous-jacents devraient (pour partie au moins) être familiers. Et les étudier formellement aide certainement à mieux les comprendre !

Considérons des affirmations P et Q. Par exemple,

P : « Je sais jouer de la guitare », et
Q : « Je sais jouer d'un instrument de musique ».

On dit que « P implique Q » pour signifier que si P est vraie, alors Q est vraie. Autrement dit, il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie. Ou encore, dès que P est vraie, Q est vraie aussi. Lorsque c'est le cas, on écrit : $P \Rightarrow Q$.
Dans l'exemple précédent, on a « P implique Q » : si je sais jouer de la guitare, alors je sais jouer d'un instrument de musique.

L'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$. Attention, l'implication $P \Rightarrow Q$ peut être vraie, mais pas sa réciproque ! Par exemple, si je sais jouer d'un instrument de musique, je ne sais pas forcément jouer de la guitare...

Lorsque les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont toutes les deux vraies, on dit que les affirmations P et Q sont équivalentes et on note $P \Leftrightarrow Q$.
Par exemple : si P est « Le triangle ABC est équilatéral » et Q est « Le triangle ABC a ses trois côtés égaux », alors $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 1 (Implication, équivalence).

Pour chaque couple d'affirmations, indique si $P \Rightarrow Q$, ou $Q \Rightarrow P$, ou $P \Leftrightarrow Q$. Ci-dessous a, b et c désignent des nombres réels et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. P : « Je suis né en 1998 ».
Q : « Je fête mes 17 ans en 2015 ».

2. P : « J'aime toutes les matières scientifiques ».
Q : « J'aime les mathématiques ».

3. P : « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».
Q : « $f(0) \leq f(1)$ ».

4. P : « $b^2 - 4ac < 0$ ».
Q : « L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle ».

5. P : « $a^2 > 1$ ».
Q : « $a > 1$ ».

6. P : « Je suis un garçon ».
Q : « J'aime les mathématiques ».

Nier une affimation signifie « dire le contraire ». Plus précisément, la négation d'une affirmation décrit tous les cas où cette affirmation est fausse.
Par exemple, nier « Je suis majeur(e) », c'est dire « Je suis mineur(e) ».
Autre exemple : la négation de l'affirmation « le point M est sur le cercle de centre O et de rayon R », est « le point M n'est pas sur le cercle de centre O et de rayon R », autrement dit « $OM \neq R$ ».

Exercice 2 (Négation).
Nie les affirmations suivantes. Attention aux pièges...

1. « Je suis une fille ».

2. « J'ai au moins 18 ans ».

3. « Je n'ai ni frère, ni sœur ».

4. « La fonction est paire ».

5. « Le discriminant du trinôme est strictement positif ».

6. « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

7. « Il existe $x \in [0; +\infty[$ tel que $f(x) \geq 3$ ».

8. « Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2x + 1$ ».

9. « La fonction f est négative sur $[0; +\infty[$ ».

10. « La fonction f s'annule exactement une fois sur l'intervalle $[0; 2]$ ».

Il existe des symboles mathématiques permettant de traduire des phrases en français (ou en toute autre langue naturelle) sous forme mathématique. Deux symboles sont très utiles pour cela ; ils sont appelés quantificateurs.

Le symbole $\forall$ est le quantificateur universel. Il se lit « quel que soit », ou « pour tout ».
Par exemple, dire que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[a; b]$ signifie que pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) > 0$. L'affirmation « f est strictement positive sur l'intervalle $[a; b]$ » s'écrit donc :

$$\forall x \in [a; b],\ f(x) > 0.$$

Le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel. Il se lit « il existe ».

Par exemple, dire que l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une solution sur* $\mathbb{R}$ *signifie qu'il existe un (c'est-à-dire au moins un) nombre réel* x *tel que* $f(x) = 0$.
L'affirmation « l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une solution sur* $\mathbb{R}$ *» s'écrit donc :*

$$\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

Attention ! Il ne faut pas utiliser les symboles vus ci-dessus dans une phrase rédigée en français. Ce ne sont pas des abréviations.
Ainsi, n'écris pas : « montrons que $\exists x$ *positif tel que* $f(x) = 0$ *». Il faut tout écrire en français, ou tout écrire en langage mathématique ! Tu as donc le choix entre « montrons qu'il existe* x *positif tel que* $f(x) = 0$ *», et « montrons :* $\exists\, x \geq 0,\ f(x) = 0$ *».*

Exercice 3 (Les quantificateurs).
Réécris les phrases suivantes en langage mathématique quantifié (c'est-à-dire en utilisant les symboles $\forall$ et $\exists$). Il ne doit rester aucun mot en français ! Ci-dessous, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. « La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative ».

2. « L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[-1; 1]$ ».

3. « La fonction g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ ».

4. « La fonction g n'est pas constante égale à zéro sur l'intervalle $[0; 1]$ ».

5. « La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ».

6. « La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante ».

7. « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang ».

Commentaires sur l'Exercice 3

On rencontre parfois un troisième symbole, $\exists!$, qui se lit « il existe un unique ».
Par exemple, dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0; 1]$ signifie qu'il existe un unique $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = 0$.
L'affirmation « l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0; 1]$ » s'écrit donc :

$$\exists!\, x \in [0; 1],\ f(x) = 0.$$

Pour t'exercer, essaye d'écrire la phrase suivante en langage mathématique : « la fonction g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ ».

Remarque : la suite de ce commentaire est plus avancé, et peut sans problème être sauté.
Attention, le symbole $\exists!$ n'est pas un quantificateur. En fait, il est même possible de démontrer la proposition suivante : tout énoncé contenant le symbole $\exists!$ peut être transformé en un énoncé équivalent qui ne le contient pas (on utilise alors aussi les symboles logiques $\wedge$, qui signifie « et », et $\Longrightarrow$ vu dans l'Exercice 1). Dans le cadre de cette fiche introductive, il n'est pas question de démontrer cette proposition. L'illustrer sur un exemple n'est même pas si facile. Essayons tout de même. Par exemple, l'affirmation « $\exists!\, x \in [0; 1],\ f(x) = 0$ » vue ci-dessus s'écrirait :

$$\exists\, x \in [0; 1],\ \big[(f(x) = 0) \wedge (\forall\, y \in [0; 1],\ f(y) = 0 \implies y = x)\big].$$

Exercice 4 (Énigmes).
Vous êtes devant deux cellules dont les portes sont fermées. Vous savez que derrière chacune de ces portes se cache soit une princesse sympathique soit un tigre affamé. Mais vous ne savez pas s'il y a 0, 1 ou 2 tigres (de même pour les princesses, du coup...). Sur chacune des portes, une pancarte donne une information.

1. Vous savez que soit les deux pancartes mentent, soit elles disent toutes les deux la vérité. Les informations données par les pancartes sont les suivantes.
Sur la porte 1 : au moins une des deux cellules contient une princesse ;
sur la porte 2 : il y a un tigre dans l'autre cellule.
Que contiennent les cellules ?

2. Vous savez que l'une des pancartes dit la vérité, et que l'autre ment. Les informations données par les pancartes sont les suivantes.
Sur la porte 1 : il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre ;
sur la porte 2 : il y a une princesse dans une cellule et un tigre dans une cellule.
Que contiennent les cellules ?

3. Vous savez que la pancarte de la cellule 1 dit vrai si une princesse s'y trouve et ment si un tigre s'y trouve alors que pour la pancarte de la cellule 2, c'est le contraire ! Les informations données par les pancartes sont les suivantes.
Sur la porte 1 : les deux cellules contiennent des princesses ;
sur la porte 2 : les deux cellules contiennent des princesses.
Que contiennent les cellules ?

4. Cette fois, il y a trois cellules...
On sait qu'il y a une princesse dans l'une d'elles, et un tigre dans chacune des deux autres. On sait de plus qu'une seule des pancartes dit vrai. Les informations données par les pancartes sont les suivantes.
Sur la porte 1 : il y a un tigre ici ;
sur la porte 2 : cette cellule contient une princesse ;
sur la porte 3 : il y a un tigre dans la cellule 2.
Que contiennent les cellules ?

Exercice 5 (Raisonnements bizarres...).

1. Tout ce qui est rare est cher.
Un diamant de 2 kilos vendu à 1 euro, c'est rare.
Donc un diamant de 2 kilos vendu à 1 euro, c'est cher.
Est-ce vrai ?

2. Soit n un entier naturel. On va « prouver » que $n = n + 1$.
On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$,
Donc $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$,
Donc $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$,
Donc $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$,
Donc $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2$,
Donc $[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)]^2 = [n - \frac{1}{2}(2n+1)]^2$,
Donc $(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1)$,
Donc $n + 1 - n - \frac{1}{2} = n - n - \frac{1}{2}$,
Donc $n + 1 = n$.
Y a-t-il une erreur ?

Corrections

Correction de l'Exercice 1

	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1)	oui	oui	oui
2)	oui	non	non
3)	oui	non	non
4)	oui	oui	oui
5)	non	oui	non
6)	non	non	non

□

Correction de l'Exercice 2

1. Je suis un garçon.

2. J'ai au plus 17 ans.

3. J'ai (au moins) un frère ou une sœur.

4. La fonction n'est pas paire. *(Attention, cela ne veut pas dire qu'elle est impaire !)*

5. Le discriminant du trinôme est négatif ou nul.

6. La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. *(Attention, cela ne veut pas dire qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}$!)*

7. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) < 3$.

8. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 2x + 1$.

9. Il existe $x \in [0; +\infty[$ tel que $f(x) > 0$. *(Attention, la réponse « La fonction f est positive sur $[0; +\infty[$ » n'est pas correcte !)*

10. Sur l'intervalle $[0; 2]$, la fonction f ne s'annule jamais ou s'annule au moins deux fois.

□

Correction de l'Exercice 3

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$.

2. $\forall x \in [-1; 1], f(x) \neq 0$.

3. $\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$.

4. $\exists x \in [0; 1], g(x) \neq 0$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.

6. $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.

7. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n > 0$. Parfois, on peut trouver l'abréviation suivante pour cette phrase mathématique : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n > 0$.

Solution de la question supplémentaire proposée dans le commentaire : $\exists! x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$. Remarquez la différence avec la question 4. □

Correction de l'Exercice 4

1. Si les deux pancartes mentent, cela signifie que :

- la porte 1 nous indique qu'il n'y a de princesse dans aucune des cellules ;

- la porte 2 nous indique qu'il n'y a pas de tigre dans la cellule 1, et qu'il y a donc une princesse dans cette cellule.

Les deux affirmations sont contradictoires, donc l'hypothèse (que les deux pancartes mentent) était mauvaise. Les deux pancartes disent donc la vérité. Il y a donc un tigre dans la cellule 1 et une princesse dans la cellule 2.

2. Supposons que la porte 1 dit la vérité et que la porte 2 ment. Alors,

- la porte 1 indique qu'il y a une princesse dans la cellule 1 et un tigre dans la cellule 2 ;
- la porte 2 indique que les deux portes cachent soit toutes les deux des princesses, soit toutes les deux des tigres.

Les deux affirmations sont contradictoires, donc l'hypothèse était mauvaise. Ainsi, on conclut que la porte 2 dit la vérité et que la porte 1 ment. Donc il y a un tigre dans la cellule 1 et une princesse dans la cellule 2.

3. Considérons les quatre possibilités.

a. Supposons que les deux cellules contiennent des princesses.
Alors la pancarte 1 dit vrai et la pancarte 2 ment. Ainsi, la porte 1 indique que les deux cellules contiennent des princesses et la porte 2 indique le contraire. Ces affirmations étant contradictoires, l'hypothèse (que les deux cellules contiennent des princesses) est mauvaise.

b. Supposons que la cellule 1 contient une princesse et la cellule 2 un tigre.
Dans ce cas, les deux portes disent la vérité. La cellule 2 contiendrait donc (selon ce qu'annonce la pancarte) une princesse. Ceci contredit l'hypothèse, qui est donc mauvaise.

c. Supposons que la cellule 1 contient un tigre et la cellule 2 une princesse.
Alors les deux pancartes mentent, et ainsi au moins une cellule contient un tigre. Cette situation n'aboutit pas à une contradiction. Il est donc possible que la cellule 1 contienne un tigre et la cellule 2 une princesse. Reste à vérifier que c'est le seul cas possible, en vérifiant que la quatrième possibilité est une situation impossible.

d. Supposons que les deux cellules contiennent des tigres.
Dans ce cas, la porte 1 ment et la porte 2 dit la vérité. D'après la pancarte 1, il y aurait au moins un tigre derrière l'une des portes, et d'après la pancarte 2, les deux cellules contiendraient des princesses. Il y a donc une contradiction, et cette situation est impossible.
En conclusion, la seule situation possible est que la cellule 1 contienne un tigre et la cellule 2 une princesse.

4. On sait que les trois portes cachent une princesse et deux tigres. On sait aussi qu'une pancarte dit vrai alors que les deux autres mentent. Distinguons trois cas, selon la pancarte qui dit vrai.

a. Supposons que c'est la pancarte 1 qui dit vrai. Alors,

- la pancarte 2 (qui ment) indique que la cellule 2 contient un tigre ;
- la pancarte 3 (qui ment) indique que la cellule 2 contient une princesse ;

et cette situation est donc impossible.

b. Supposons que c'est la pancarte 2 qui dit vrai. Alors,

- la pancarte 1 (qui ment) indique que la cellule 1 contient une princesse ;
- la pancarte 2 (qui dit vrai) indique que la cellule 2 contient une princesse.

Or l'énoncé impose qu'il y a une seule princesse. Cette situation est donc impossible.

c. Vérifions qu'il n'y a pas de contradiction si la pancarte 3 dit vrai. Dans ce dernier cas,

- la pancarte 1 (qui ment) indique que la cellule 1 contient une princesse ;

- la pancarte 2 (qui ment) indique que la cellule 2 contient un tigre ;
- la pancarte 3 (qui dit vrai) indique qu'il y a un tigre dans la cellule 2.

C'est une situation qui satisfait à toutes les contraintes imposées par l'énoncé.

En conclusion, la seule situation possible est que les cellules 1, 2 et 3 contiennent respectivement une princesse et deux tigres. □

Correction de l'Exercice 5

1. Une situation rare et un objet rare, ce n'est pas la même chose... mais cela n'est pas vraiment des mathématiques !

2. Il y a une erreur entre les lignes

$$[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)]^2 = [n - \frac{1}{2}(2n+1)]^2 \text{ et}$$
$$(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1)$$

du raisonnement. En effet, à la première ligne, on peut simplifier les expressions entre crochets, en développant le facteur $\frac{1}{2}$. Par exemple pour le membre gauche de l'égalité, on a :

$$(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1) = n + 1 - n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

En développant de même dans le membre droit, on constate que l'égalité de la première ligne revient à écrire que $(\frac{1}{2})^2 = (-\frac{1}{2})^2$. C'est bien le cas, mais on **ne** peut **pas** prendre la racine carrée pour en conclure que $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (ce qui est évidemment faux) ! □

