De la loi géométrique au problème du collectionneur

B. Meyer

Niveau : Bac+1
Difficulté : ★★
Durée : 3h30
Rubrique(s) : Analyse (suites, limites), Probabilités (loi géométrique) .

Au lycée, vous avez étudié en probabilité différentes lois dont notamment la loi binomiale. Dans cet atelier est introduite une autre loi appelée la loi géométrique et étudiée dans le supérieur. En particulier grâce à cette loi de probabilité, vous pourrez résoudre le problème de nombreux collectionneurs...

La petite histoire...
Chaque jour, on achète un œuf en chocolat qui contient un jouet à l'intérieur. Celui-ci est donc inconnu avant la dégustation de ce chocolat. Ce jouet appartient à une collection d'un nombre fixé de jouets. Une question naturelle est de savoir combien d'œufs il faut acheter pour terminer la collection ? Ce nombre est aléatoire alors on peut se poser une meilleure question : après combien d'achats peut-on espérer avoir fini la collection ?

Monsieur et Madame
Nedujoueur ont un fils portugais...[1]

On pourra aussi penser à des autocollants sportifs ou à des cartes à jouer (attrapez les tous !).

Par la suite, nous allons supposer que les jouets sont répartis uniformément dans les œufs. C'est-à-dire que si on ouvrait tous les œufs d'un coup, on aurait autant de jouets de chaque sorte. Nous supposerons aussi qu'il y a indépendance entre les achats. C'est-à-dire que si l'on trouve un certain jouet dans un œuf, cela ne présage en rien le jouet qui se trouvera dans le prochain œuf que je dégusterai. Nous allons voir que même avec cette hypothèse le temps pour finir ma collection est assez long. Pour répondre à notre question les exercices sont structurés comme suit. Les exercices 1 et 2 traitent le cas où il n'y aurait que 2 jouets à collectionner. L'exercice 3 donne une formule pour calculer le temps moyen pour finir la collection dans le cas d'un nombre général de jouets à

Réponse : Bu¡

collectionner. Cette exercice nécessite des résultats techniques sur les suites et les limites dont la démonstration peut être effectuée à l'aide des exercices 6 et 7 qui peuvent être omis en première lecture. Enfin les exercices 4 et 5 donnent deux autres applications à cette étude : la première est « combien faut-il d'amis pour fêter un anniversaire tous les jours »et « comment optimiser le coût de la collection complète si j'achète directement les jouets qu'il me manque (sachant que le prix sera plus élevé que les œufs) ».
Commençons donc par traiter le cas le plus simple ; c'est-à-dire le cas où la collection ne contient que 2 jouets. La question qui nous intéresse est : combien d'achats faut-il effectuer pour avoir de bonnes chances de terminer la collection. Ce nombre est aléatoire. Faisons donc quelques rappels de probabilités. On considère E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé que l'on munit d'une probabilité P. Une variable aléatoire (réelle) X est simplement une application qui à tout événement élémentaire de l'univers associe un nombre réel. Autrement dit, X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Par la suite X sera toujours à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. La loi de X est simplement la donnée des $P(X = k)$ pour tout entier k. Ces quantités vérifient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \lim_{n\to+\infty} P(X \in \{1, \ldots, n\}) = P(X \in \mathbb{N}^*) = 1.$$

Notre question devient : quelle est la loi de la variable aléatoire T qui correspond au temps où ma collection est finie ?
On peut voir que la question qui nous intéresse est proche de la suivante. On lance plusieurs fois une pièce de façon indépendante. À quel moment obtient-on notre premier pile ?
En effet, si on appelle nos deux jouets pile et face, un œuf peut cacher un pile ou un face avec la même probabilité, ce que l'on peut rapprocher du jeu de lancer de pièce. Ainsi si j'ai d'abord le jouet face par exemple, le nombre de chocolats que je dois acheter pour avoir un nouveau jouet (ici pile) correspond au nombre de lancers à effectuer avec une pièce pour obtenir pile.
Rappelons finalement que deux évènements A et B sont dits indépendants si

$$P(A \text{ et } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exercice 1 (Loi géométrique, cas $p = 1/2$).
Supposons que l'on lance plusieurs fois une pièce équilibrée de manière indépendante. On note G le premier lancer où la pièce donne pile. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de G.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne « pile » au n^e lancer ? face ?

2. Que signifie l'événement « $G = 1$ » en terme d'issue du premier lancer ? En déduire $P(G = 1)$.

3. Que signifie l'événement « $G = 2$ » en terme d'issues des deux premiers lancers ? En déduire $P(G = 2)$.

4. Plus généralement, calculer $P(G = n)$ pour tout $n \geq 1$.

5. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des faces ? Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire G ?

Exercice 2 (Loi géométrique, cas général).
On considère un jeu avec plusieurs manches. À chaque manche, il n'y a que deux issues : on gagne ou on perd ; de plus, la probabilité de gagner est $p \in]0, 1[$. Les manches sont indépendantes. On va déterminer la loi du nombre G de manches qu'il faut attendre pour voir arriver une première victoire.

1. Donner la loi de G lorsque $p = 1/2$.

2. Supposons maintenant que p soit quelconque.

a. Quelle est la probabilité de perdre une manche ?

b. Quelles valeurs peut prendre G ?

c. Soit $n \geq 1$. Interpréter l'événement « $G = n$ » en terme de victoires et défaites aux n premières manches.

d. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$P(G = n) = (1 - p)^{n-1}p.$$

Commentaires sur l'Exercice 2

Si une variable aléatoire G vérifie

$$\forall n \geq 1,\ P(G = n) = (1 - p)^{n-1} \times p,$$

pour un certain $p \in]0, 1[$ alors on dit qu'elle suit une loi géométrique de paramètre p. On donne cette appellation car la suite des probabilités $(P(G = n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique. Avant de revenir au problème de notre collection, rappelons et étendons la définition de l'espérance d'une variable aléatoire.

Si une variable aléatoire X à valeurs entières ne dépasse pas un entier n alors son espérance est donnée par

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\ P(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + \cdots + nP(X = n).$$

C'est une moyenne pondérée. Le terme "espérance" provient de l'étude des jeux de hasard. C'est aux XVI^e et XVII^e siècles que Cardan, Fermat et Pascal posent les bases de ce qu'on

va appeler les probabilités. Et l'une des questions prépondérantes était comment partager les gains d'un jeu lorsque la partie est interrompue à un moment quelconque. C'est ainsi que fut introduite l'espérance mathématique qui correspond au gain que l'on aurait pu *espérer* avoir.
Lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors son espérance est définie par

$$E[X] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\ P(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + \cdots + nP(X = n) + \ldots$$

En particulier l'espérance peut valoir $+\infty$. Attention cette dernière notion dépasse le programme mathématique de lycée (et même des premières années du supérieur). Pour des variables aléatoires X_1 et X_2, on a

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2].$$

Cela se démontre en utilisant que la limite d'une somme est la somme des limites. On admettra pour l'instant que si G est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p alors

$$E[G] = \frac{1}{p}. \qquad (*)$$

Cette affirmation sera démontrée avec les exercices 6 et 7. Cette dernière égalité est naturelle lorsque l'on pense à l'interprétation du jeu. En effet, $E[G] = \frac{1}{p}$ signifie qu'il faudra en moyenne $1/p$ parties pour espérer gagner. Par ailleurs on peut voir que plus j'ai de chances de gagner une manche (c'est-à dire plus p est grand), plus ma victoire sera rapide (c'est-à-dire plus $E[G] = \frac{1}{p}$ sera petit) et vice versa.

Exercice 3 (Collection).
On revient à notre problème initial. On achète des œufs en chocolat contenant un jouet inconnu appartenant à une collection de N jouets différents. On veut estimer le nombre moyen d'œufs qu'il faut acheter pour terminer la collection. On note T le nombre d'achats (aléatoire) qu'il faut pour terminer la collection. Le problème pour estimer ce nombre est que l'on accumule des exemplaires de jouets qu'on possède déjà.
On a

$$T = T_0 + T_1 + \cdots + T_{N-1},$$

où T_k, pour $k \in \{0, \ldots N-1\}$, correspond au nombre d'achats qu'il faut effectuer pour avoir un jouet que nous ne possédons pas déjà, alors que l'on en a déjà k différents en notre possession.

1. Calculer T_0.

2. Montrer que T_1 suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

3. Généraliser l'argument précédent pour décrire la loi de T_k pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

4. En déduire que

$$E[T] = N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

Que représente ce nombre ?

Commentaires sur l'Exercice 3

Dans l'exercice précédent, on a démontré que s'il y a $N \geq 2$ objets à collectionner alors il faut effectuer en moyenne

$$E(T) = N\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N}\right) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

achats. Malheureusement, il n'existe pas de formule plus simple pour calculer cette quantité (on peut néanmoins la relier à la notion de logarithme). La complexité de cette formule vient du fait que le nombre de termes augmente. Voici quelques valeurs approchées de $E(T)$:

N	8	10	12	365	640
$E(T)$	21,74	29,28...	37,23...	2364.64...	2505,26..

À titre d'exemple, sachez que les collections de jouets dans les œufs en chocolat comptent souvent 8 jouets distincts et lors de la coupe du monde 2014, on pouvait collectionner quelques 640 autocollants différents représentant les joueurs, stades...

Exercice 4 (Amis et Anniversaires).
Combien d'amis faut-il en moyenne pour avoir un anniversaire à fêter tous les jours ?

Commentaires sur l'Exercice 4

Supposer que les naissances sont réparties uniformément sur l'année et trouver une correspondance avec le problème du collectionneur.

Exercice 5 (Collection : comment faire des économies ?).
Pour terminer notre collection, on suppose que l'on peut acheter des jouets directement mais plus chers chez un professionnel (c'est-à-dire en choisissant son jouet mais sans le chocolat). Il y a N (disons 12) jouets différents. Il y a deux possibilités pour obtenir un nouveau jouet : acheter un œuf en chocolat au coût c_1 (de l'ordre de 50 centimes), soit l'acheter chez un professionnel et le choisir pour le coût de c_2 (de l'ordre de 1 euro). On supposera toujours $c_2 > c_1$. Au début, il semble évident qu'il est plus rentable d'acheter des œufs en chocolat mais lorsque notre collection est presque finie il semble alors plus

rentable d'effectuer ses achats chez le professionnel. Le but de cet exercice est de confirmer cette intuition et de la quantifier. Dans ce qui suit le « coût moyen » désigne l'espérance d'un coût aléatoire.

1. Combien coûte en moyenne une collection si tous les jouets ont été trouvés dans un œuf en chocolat (en fonction de N, c_1 et c_2) ? De même, si tous les jouets ont été achetés directement chez le professionnel ? Comparer ces valeurs lorsque $N = 12$, $c_1 = 0,5$ et $c_2 = 1$.

2. Supposons que l'on possède déjà k jouets différents et qu'on continue d'acheter des œufs en chocolat. Soit T_k le nombre d'achats (aléatoires) nécessaires pour obtenir un nouveau jouet. Donnez la loi de T_k. En déduire le nombre moyen d'achats nécessaires pour avoir un nouveau jouet (en fonction de N, c_1 et c_2). Ici par "nouveau" on entend un jouet différent des jouets déjà en notre possession.

3. Calculer à partir de quand il est plus rentable (en terme de coût moyen) d'acheter ses jouets chez le professionnel. Explicitez cette valeur lorsque $N = 12$, $c_1 = 0,5$ et $c_2 = 1$.

4. Donner des formules pour le coût moyen lorsque l'on change de stratégie d'achat (pour diminuer les coûts) au moment calculé dans la question précédente. Comparer cette valeur avec celles obtenues en 1) pour l'exemple numérique $N = 12$, $c_1 = 0,5$ et $c_2 = 1$.

On va maintenant démontrer que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est égale à $\frac{1}{p}$.
Rappelons qu'une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1 tend vers 0, et que si une suite à termes positifs est majorée à partir d'un certain rang par une suite qui tend vers zéro alors elle tend aussi vers 0.

Exercice 6 (Un problème de limites).
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général défini par

$$\forall n \geq 1,\ u_n = nq^n,$$

pour un certain $q \in]0,1[$. Nous allons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Autrement dit, nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0. Pour cela, on pose

$$\forall n \geq 1, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. Exprimer les termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ en fonction de n.

2. En déduire qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$v_n \leq \frac{q+1}{2} < 1.$$

3. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$v_{n_0} \times v_{n_0+1} \times \cdots \times v_{n_0+k} = \frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0}}.$$

En déduire que

$$\forall k \geq 0, \frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0}} \leq \left(\frac{q+1}{2}\right)^{k+1}.$$

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par une suite géométrique à partir d'un certain rang. En déduire sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Commentaires sur l'Exercice 6

Pour finir les rappels, une petite blague : un nombre infini de matheux entrent dans un café. Le premier demande un thé. Le deuxième la moitié d'un, le troisième le quart. Le serveur les arrête, sert deux thés et dit "vous n'êtes qu'une bande d'idiots !". Pour ceux qui n'ont pas compris, on rappelle que si $q \in]0,1[$ alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

La blague utilise donc "$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$". On prend ici $q = \frac{1}{2}$ et on fait tendre n vers $+\infty$.

Exercice 7 (Espérance et loi géométrique).

Fixons $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire G suit la loi géométrique de paramètre p si

$$P(G = k) = p(1-p)^{k-1}$$

1. Montrer que l'on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(G = k) = 1.$$

Ainsi si G prenait une autre valeur en dehors de $\mathbb{N}^*$, la probabilité que celle-ci soit atteinte est nulle. Ainsi il est légitime de considérer G à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

2. Le but des questions qui suivent est de calculer l'espérance de G. Pour cela on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} kP(G = k)$$

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = p + \sum_{k=2}^{n} kp(1-p)^{k-1}.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n - S_{n-1} = np(1-p)^{n-1}$$

et $\lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

b. En posant $k' = k - 1$, montrer que

$$S_n = p + \sum_{k'=1}^{n-1} k'p(1-p)^{k'} + \sum_{k'=1}^{n-1} p(1-p)^{k'}.$$

c. En déduire que

$$S_n = p + (1-p)S_{n-1} + p(1-p)\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)}.$$

Et que donc, on a

$$pS_n = p + (1-p)(S_{n-1} - S_n) + (1-p)(1-(1-p)^{n-1}).$$

d. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $1/p$. On a finalement $E[G] = 1/p$.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

5. Si on note A l'évènement « je n'obtiens que des faces »et $\overline{A}$: « j'ai obtenu au moins une fois pile », on pourra remarquer qu'avec les notations de l'exercice on a, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}(G = k) \subset \overline{A}$.

Indications sur l'Exercice 3

2. On peut imaginer la succession des achats comme les manches d'un jeu où l'on gagne si on a un nouveau jouet. On appliquera donc les résultats de l'exercice précédent.

4. Utiliser les "rappels" et commentaires précédant l'exercice.

Indications sur l'Exercice 5

1. On peut utiliser l'exercice 3.

2. On pourra utiliser les questions intermédiaires de l'exercice 3.

Indications sur l'Exercice 7

2.a. Pour la limite, utiliser l'exercice précédent.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. On note $X_n \in \{0,1\}$ le résultat du n-ième lancer, avec la correspondance suivante : $X_n = 0$ si le résultat est pile et $X_n = 1$ si le résultat est face. Ainsi, on a

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

2. On a $G = 1$ si et seulement si on obtient pile au premier lancer, c'est-à-dire $X_1 = 0$. On a donc

$$P(G = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

3. On a $G = 2$ si et seulement si on obtient face au premier lancer et pile au deuxième, c'est-à-dire $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$. En utilisant le fait que les deux lancers sont indépendants, on trouve

$$P(G = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

4. Soit $n \geq 1$. On généralise l'argument précédent, l'affirmation "$G = n$" signifie que l'on obtient face aux $n-1$ premiers lancers et pile au dernier. On a donc

$$\begin{aligned} P(G = n) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\ldots P(X_{n-1} = 1)P(X_n = 0) \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

5. L'évènement contraire de A : « je n'obtiens que des faces »est $\overline{A}$: « j'ai obtenu au moins une fois pile ». Or avec les notations précédentes, on a quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \{G = k\} \subset \overline{A}$. Les évènements $(\{G = n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont incompatibles donc

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{G = k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(G = k)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} P(G = k) \leq P(\overline{A}).$$

On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{n} P(G = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq P(\overline{A}) \leq 1,$$

soit, $\forall n \geq 1, 1 - 1/2^n \leq P(\overline{A}) \leq 1$, donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $P(\overline{A}) = 1$. On en déduit que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0$. La probabilité de n'obtenir que des faces est donc nulle. Cela justifie le fait que l'on considère que G ne prendra jamais la valeurs $+\infty$ et donc G prendra ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. □

Correction de l'Exercice 2

1. En se servant de l'exercice précédent, on voit que G peut être interprété comme le premier temps d'apparition d'un pile dans un jeu de lancer de pièce. On a donc

$$\forall n \geq 1, P(G = n) = \frac{1}{2^n}.$$

2.a. À chaque manche, on ne peut que gagner ou perdre donc la somme des probabilités de ces événements vaut 1. De plus, la probabilité de gagner est p. On en conclut que la probabilité de perdre est $1-p$.

b. Comme dans l'exercice 1, la variable aléatoire G prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers naturels non-nuls $\mathbb{N}^*$.

c. On a $G = n$ si et seulement si on perd aux $(n-1)$ premières manches et gagne la dernière.

d. Pour $n \geq 1$, on a, par l'indépendance des lancers, l'égalité suivante

$$P(G=n) = \underbrace{(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{n-1 \text{ défaites}} \times \underbrace{p}_{\text{une victoire}} = (1-p)^{n-1}p.$$

$\square$

Correction de l'Exercice 3

1. La variable aléatoire T_0 correspond au nombre d'achats qu'il faut effectuer pour avoir un nouveau jouet sachant que l'on en a pas. On a donc que $T_0 = 1$. En effet, il suffit d'acheter un jouet pour en obtenir un nouveau, étant donné qu'au départ je n'en avais pas.

2. Contrairement à T_0, la variable aléatoire T_1 n'est pas déterministe. En effet, il est possible que j'obtienne le même objet que précédemment. Si on considère la succession d'achats comme un jeu avec un enchaînement de parties à deux issues (comme dans le modèle de l'exercice 2) alors la probabilité de gagner à chaque manche est

$$p = \frac{\text{nombre de jouets manquants à ma collection}}{\text{nombre de jouets total}} = \frac{N-1}{N}.$$

L'instant où j'obtiens un nouveau jouet correspond donc à ma première victoire et suit alors une loi géométrique de paramètre $p = \frac{N-1}{N}$ car les jouets sont équidistribués.

3. Si on possède déjà k jouets différents, on peut encore voir nos achats comme un jeu avec enchaînement de parties à deux issues où la probabilité de gagner à chaque achat est maintenant

$$p = \frac{\text{nombre de jouets manquants à ma collection}}{\text{nombre de jouets total}} = \frac{N-k}{N}.$$

C'est vrai pour $k = 0$. En effet, on a :

$$P(G=1) = 1,$$

c'est-à-dire que G vaut 1 avec probabilité 1. On en déduit donc que T_k suit une loi géométrique de paramètre $(N-k)/N$, $k \in \{1, \dots N\}$.

4. En se servant des rappels précédant l'exercice, on a

$$E[T] = E[T_0] + \cdots + E[T_{N-1}] = \sum_{k=0}^{N-1} E[T_k].$$

Maintenant, comme pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, T_n suit une loi géométrique de paramètre $\frac{N-k}{N}$, on a d'après la formule $(*)$ admise juste avant l'exercice,

$$E[T_k] = \frac{N}{N-k} \quad \text{et} \quad E[T_0] = 1 = \frac{N}{N-0}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} E[T] = E[T_0] + \dots E[T_{N-1}] &= \frac{N}{N-0} + \dots + \frac{N}{N-(N-1)} \\ &= N\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{1}\right) \\ &= N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}\right) \\ &= N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Cette quantité représente le nombre moyen d'œufs en chocolat qu'il faut acheter (et manger) pour finir la collection de N jouets (attention à l'hyperglycémie !). □

Correction de l'Exercice 4

On peut se ramener au problème du collectionneur ainsi. Les jours de l'année correspondent aux jouets et je regarde mes amis les uns après les autres. Mes amis sont donc l'analogue des œufs en chocolat. Leurs dates d'anniversaire me sont inconnues avant de les connaître et sont réparties uniformément sur les jours de l'année. Ainsi, on peut les voir comme un jouet dans un œuf choisi au hasard. Via l'exercice précédent, il faut donc approximativement 2365 amis, en moyenne, pour espérer fêter un anniversaire tous les jours. □

Correction de l'Exercice 5

1. Si on achète les jouets uniquement chez le professionnel le coût total C est $C = c_2 \times N$ et est donc 12 euros avec les valeurs données en exemple. Si on obtient les jouets uniquement en achetant des œufs alors le coût moyen C est

$$C = c_1 N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Pour notre exemple numérique ça vaut environ 18 euros ; c'est-à-dire qu'il est dans ce cas plus avantageux que de tout acheter chez le professionnel.

2. D'après la question 3) de l'exercice 3., on sait que T_k suit une loi géométrique de paramètre $\frac{N-k}{N}$ et d'après la question 4) du même exercice on sait que quelque soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $E[T_k] = \frac{N}{N-k}$.

3. Si on possède déjà k jouets différents, un nouveau jouet dans notre collection va nous coûter c_2 euros si on l'achète directement chez le professionnel et en moyenne

$$c_1 \times E(T_k) = c_1 \frac{N}{N-k},$$

si on l'obtient en achetant que des œufs en chocolat. Le professionnel est donc plus rentable dès que

$$c_2 \leq c_1 \frac{N}{(N-k)} \Leftrightarrow k \geq N\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right).$$

En particulier si $c_2 \geq c_1 N$, il n'est jamais rentable d'aller chez le professionnel. Pour notre exemple, on atteint le cas limite lorsque l'on a 6 jouets (pour $k = 6$ les coûts sont identiques).

4. On pose
$$k_c = N\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right);$$
supposons pour simplifier que c'est un entier (sinon, il faut avoir recours à la partie entière) ; le c signifie critique. La stratégie consiste à aller chez le collectionneur après avoir obtenu les k_c premiers jouets en les achetant cachés dans les œufs en chocolat. Le coût moyen C de cette méthode est
$$C = c_1 N \sum_{k=1}^{k_c} \frac{1}{N-(k-1)} + c_2(N - k_c + 1).$$
En particulier pour notre exemple, on obtient approximativement 9 qui est plus petit que 12 et 18. □

Correction de l'Exercice 6

1. Pour $n \geq 1$, on a
$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = \frac{n+1}{n}q.$$
2. Premièrement comme $0 < q < 1$, on a $\frac{q}{2} < \frac{1}{2}$ et $\frac{q}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Maintenant pour l'inégalité de gauche, on part de la fin. On a $v_n = \frac{n+1}{n}q = (1 + \frac{1}{n})q \leq \frac{q+1}{2}$ si et seulement si
$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q} \times \frac{q+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}$$
car $q > 0$ donc on ne change pas le sens des inégalités. C'est-à-dire
$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2q} - 1 = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2} = \frac{1-q}{2q}.$$
Or $\frac{1}{n}$ et $\frac{1-p}{2q}$ sont strictement positifs et puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a bien :
$$n \geq \frac{2q}{1-q}.$$
On a montré que $v_n \leq \frac{q+1}{2}$ si $n \geq \frac{2q}{1-q}$. Il suffit donc de prendre la partie entière de $\frac{2q}{1-q}$ plus 1 pour n_0 (si vous connaissez pas la partie entière, il suffit de choisir un entier n_0 supérieur à $\frac{1-q}{2q}$). On a bien $n_0 \geq 1$.

3. On a
$$\begin{aligned} v_{n_0} \times v_{n_0+1} \times \cdots \times v_{n_0+k} &= \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \times \frac{u_{n_0+3}}{u_{n_0+2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0+k}} \\ &= \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \times \frac{u_{n_0+3}}{u_{n_0+2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0+k}} \\ &= \frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0}}. \end{aligned}$$
Pour le passage de la première ligne à la deuxième, on simplifie les fractions car on constate que le numérateur d'un facteur est égal au dénominateur du facteur suivant Maintenant, on sait que si $n \geq n_0$ alors $v_n \leq \frac{q+1}{2}$ et donc
$$\frac{u_{n_0+k+1}}{u_{n_0}} = v_{n_0} \times v_{n_0+1} \times \cdots \times v_{n_0+k} \leq \frac{q+1}{2} \times \frac{q+1}{2} \times \cdots \times \frac{q+1}{2} = \left(\frac{q+1}{2}\right)^{k+1}.$$

4. On a montré que pour tout $k \geq 0$, on a

$$u_{n_0+k} \leq \left(\frac{q+1}{2}\right)^k u_{n_0}.$$

Cela signifie que pour tout $n \geq n_0$ (en posant $n = n_0 + k$),

$$u_n \leq \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \times \left(\frac{q+1}{2}\right)^{-n_0} u_{n_0}.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc majorée par une suite géométrique de raison $\frac{q+1}{2} < 1$ (et de premier terme $\left(\frac{q+1}{2}\right)^{-n_0} u_{n_0}$) à partir du rang n_0. Elle tend donc vers zéro lorsque n tend vers l'infini. □

Correction de l'Exercice 7

1. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P\left(G = k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = \lim_{n\to+\infty} p \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j \\ &= \lim_{n\to+\infty} p\, \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \lim_{n\to+\infty} p\, \frac{1}{p} = 1.\end{aligned}$$

Dans les calculs précédents on a posé $j = k - 1$.

2.a. Comme $P(G = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} kP(G = k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p \\ &= 1 \times (1-p)^{1-1}p + \sum_{k=2}^{n} k(1-p)^{k-1}p = p + \sum_{k=2}^{n} kp(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}S_n - S_{n-1} &= \left(p + \sum_{k=2}^{n} kp(1-p)^{k-1}\right) - \left(p + \sum_{k=2}^{n-1} kp(1-p)^{k-1}\right) \\ &= \left(p + \sum_{k=2}^{n-1} kp(1-p)^{k-1} + np(1-p)^{n-1}\right) - \left(p + \sum_{k=2}^{n-1} kp(1-p)^{k-1}\right) \\ &= np(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

Pour finir on va démontrer que la suite de terme général $np(1-p)^{n-1}$ tend vers 0. Pour cela on pose $q = 1 - p$ et on remarque que

$$np(1-p)^{n-1} = \frac{p}{q} \times nq^n,$$

c'est-à-dire que la suite qui nous intéresse est de la forme une constante fois la suite de l'exercice précédent. Comme $q \in]0, 1[$, cette suite tend vers 0.

b. En utilisant le changement de variable $k' = k - 1$, dans l'égalité précédente, on a

$$S_n = p + \sum_{k'=1}^{n-1} (k'+1)p(1-p)^{k'} = p + \sum_{k'=1}^{n-1} k'p(1-p)^{k'} + \sum_{k'=1}^{n-1} p(1-p)^{k'}.$$

c. On a

$$\begin{aligned} S_n &= p + \sum_{k'=1}^{n-1} k' p(1-p)^{k'} + \sum_{k'=1}^{n-1} p(1-p)^{k'} \\ &= p + (1-p)\sum_{k'=1}^{n-1} k' p(1-p)^{k'-1} + \sum_{k'=1}^{n-1} p(1-p)^{k'} \\ &= p + (1-p)S_{n-1} + \sum_{k'=1}^{n-1} p(1-p)^{k'}. \end{aligned}$$

Maintenant en calculant la somme d'une suite géométrique pour le terme de droite, on trouve la première formule voulue. Puis, celle-ci s'écrit

$$S_n = p + (1-p)S_{n-1} + (1-p)(1-(1-p)^{n-1}).$$

Mais $S_n = pS_n + (1-p)S_n$, donc en soustrayant $(1-p)S_n$ à gauche et à droite de cette expression, on trouve

$$\begin{aligned} pS_n &= p + (1-p)S_{n-1} + (1-p)(1-(1-p)^{n-1}) - (1-p)S_n \\ &= p + (1-p)(S_{n-1} - S_n) + (1-p)(1-(1-p)^{n-1}), \end{aligned}$$

où pour la dernière égalité, on a factorisé par $(1-p)$.

d. Par les questions précédentes, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{n-1} - S_n) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} (1-p)^{n-1} = 0,$$

car $((1-p)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $1-p$ avec $0 < 1-p < 1$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} pS_n = p + (1-p)\times 0 + (1-p)(1-0) = p + 1 - p = 1,$$

et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p}$. On conclut donc que

$$E[G] = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p}.$$

$\square$

