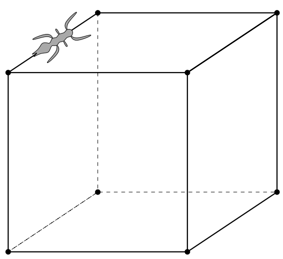
Le cube et la fourmi

N. Jacquet (R. Dos Santos pour le titre)

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★★
Durée : 2h
Rubrique(s) : Combinatoire (dénombrement, binôme de Newton), Modélisation.

Dans cet atelier, vous allez utiliser les coefficients binomiaux que vous avez déjà étudié en classe de Première. Il va falloir les manier avec leur sens de dénombrement qui est vu dans le supérieur, et dans ce recueil dans l'atelier « Coefficients binomiaux » du troisième chapitre.

La petite histoire...
Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un cube de côté de longueur 1. Cette fourmi se situe au départ sur l'un des sommets de ce cube et passe de sommet en sommet en parcourant les arêtes du cube. Dans ce problème, nous allons calculer le nombre N_n de chemins différents de longueur n qu'elle peut parcourir en revenant à la fin à sa position initiale.
Ce problème se compose de trois exercices. Le premier exercice étudie un problème similaire dans un cas plus simple, mais dont les idées peuvent servir pour la résolution du problème initial. Le deuxième exercice vise à mettre en place des éléments essentiels de dénombrement et de calcul pour pouvoir donner dans l'exercice 3 la valeur de N_n.



Afin de bien utiliser les coefficients binomiaux dans les divers problèmes de dénombrement, nous vous recommandons de regarder les diverses interprétations de ceux-ci se trouvant dans l'atelier « Coefficients binomiaux ».

Monsieur et Madame
Rédanslecubbe ont une fille...

Exercice 1 (Un échauffement en deux dimensions).
Voici un exercice qui peut constituer un premier pas vers notre problème. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on veut aller de l'origine O jusqu'au point $A(a, b)$ où a et b sont dans $\mathbb{N}$. On ne permet pour cela que des translations successives de vecteur $\overrightarrow{i}$ ou $\overrightarrow{j}$. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 2 (Une formule utilisant le binôme de Newton).
Nous rappelons la formule du binôme de Newton qui est démontrée dans l'atelier « Coefficients binomiaux ». Soient a et b deux nombres complexes (ou réel si vous ne connaissez pas les nombres complexes). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Nous rappelons la notation somme $\sum$: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.
Nous rappelons aussi la manipulation suivante sur les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

1. Soient $x \in \mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}$ si vous ne connaissez pas les nombres complexes) et $p \in \mathbb{N}^*$.

a. Donner une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$.

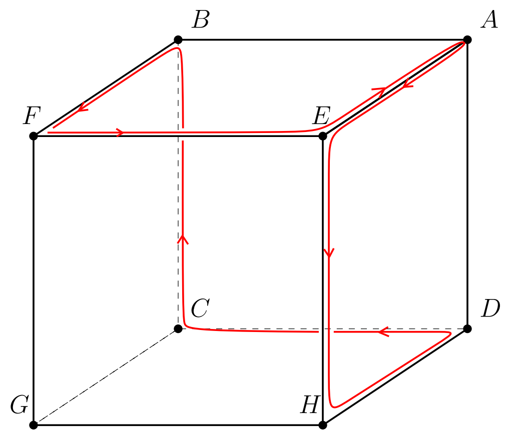
b. En déduire une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} x^{2k}$. Que devient cette formule pour $p = 0$?

2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \left(\sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) = \frac{3^{2q}+3}{4}.$$

Exercice 3 (Calcul du nombre N_n de chemins).
Avant de commencer cet exercice, essayer de bien réfléchir sur la façon de modéliser un chemin et donc de bien réfléchir sur ce que représente un chemin, sur la manière de le décrire le plus simplement possible avec le minimum de paramètres. Cette étape est essentielle pour l'exercice. Les trois premières questions peuvent vous aider à trouver un formalisme. Si vous avez du mal avec

cette étape qui n'est pas aussi simple qu'elle en a l'air, il est vivement conseillé de regarder d'abord l'indication avant d'aborder les questions suivantes, pour partir sur des bases solides. Par contre si vous êtes très très fort, à l'aise et en confiance, vous pouvez faire les questions 1), 2) et 3) et passer ensuite directement à la question 4)d).
Par exemple voici un parcours possible pour $n = 8$ avec F pour sommet de départ. La fourmi parcourt successivement les sommets F (le point de départ), E, A, E, ,H, D, C, B et F (l'arrivée).



1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel non nul n, le nombre N_n de chemins de longueur n revenant à la position de départ ne dépend pas du sommet de départ. Essayer de le prouver. (Cette propriété, qui paraît naturelle, est en fait difficile à prouver précisément.)

2. Quel est, pour la fourmi, le nombre de chemins possibles de longueur 1, 2, 3 et 4 qui reviennent à la fin à la position de départ ? Autrement dit, calculer N_1, N_2, N_3 et N_4.

3. Montrer qu'un chemin le long des arêtes du cube qui revient à la position initiale est forcément de longueur paire (c'est-à-dire que $N_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

4. On suppose que n est pair et s'écrit sous la forme $n = 2q$ avec q dans $\mathbb{N}^*$. Soit k dans $\{1, 2, ..., q\}$

a. Si nous regardons le cube de face, quel est le nombre de façons de choisir $2k$ déplacements suivant la direction haut/bas (déplacements suivant les arêtes $[FG]$, $[EH]$, $[AD]$ et $[BC]$) parmi les n déplacements possibles ?

b. Une fois que l'on a fixé à quels moments nous effectuons les $2k$ déplacements choisis suivant la direction haut/bas, combien reste-t-il de déplacements possibles suivant la direction gauche/droite (déplacements suivant les arêtes $[GH]$, $[FE]$, $[CD]$ et $[BA]$) ?

c. En déduire que $N_n = \sum\limits_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \left(\sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right)$.

d. En déduire une formule simple de N_n et vérifier la cohérence avec la question 2) de cet exercice.

Commentaires sur l'Exercice 3

Voici une proposition de modélisation. Supposons que l'on voie le cube de face. La fourmi peut se déplacer de six manières : droite, gauche, haut, bas, devant et derrière. Ainsi, les mouvements sont effectués suivant trois axes : horizontal (déplacement suivant les arêtes $[GH]$, $[FE]$, $[CD]$ et $[BA]$), vertical (déplacements suivant les arêtes $[FG]$, $[EH]$, $[AD]$ et $[BC]$) et en profondeur (déplacements suivant les arêtes $[GC]$, $[FB]$, $[HD]$ et $[EA]$). De plus, en partant de n'importe quel sommet, lorsque la fourmi se déplace suivant un axe, elle n'aura jamais le choix. Par exemple, si elle part d'un sommet à droite du cube, la première fois qu'elle empruntera la direction horizontale, elle se déplacera nécessairement vers la gauche pour ne pas sortir du cube. Ensuite, lorsqu'elle se déplacera de nouveau suivant un axe horizontal, elle devra aller vers la droite. Ainsi un chemin peut être vu comme n choix successifs d'axes. Le nombre de déplacements suivant chaque axe doit être pair pour être sûr de revenir au point de départ. Si on note v un déplacement vertical, h un déplacement horizontal et p un déplacement en profondeur, pour modéliser un chemin de longueur n, il faut choisir une succession de n lettres parmi les lettres v, h et p, chacune d'entre elles devant apparaître un nombre pair de fois. Par exemple, si l'on reprend le chemin de l'énoncé, il se traduit par les déplacements $\rightarrow\nearrow\swarrow\downarrow\nearrow\leftarrow\uparrow\swarrow$ et peut se représenter par les lettres *hppvphvp*.

Indications

Indications sur l'Exercice 1

Il faut étudier les différentes façons de positionner les déplacements suivant $\vec{i}$ pour les $a+b$ déplacements possibles.

Indications sur l'Exercice 2

1.b. Utiliser le développement de $(-x+1)^{2p}+(x+1)^{2p}$.

2. Commencer par démontrer que

$$\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\left(\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2(q-k)}{2l}\right)=2^{2q-1}\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{2}.$$

Indications sur l'Exercice 3

2. Donner tous les agencements possibles des lettre v, h et p en suivant la modélisation donnée dans cette indication.

3. Bien voir que si l'on se déplace suivant une direction, on doit compenser celle-ci pour ne pas sortir du cube.

4.b. Une fois les $2k$ déplacements verticaux fixés, il reste $2(q-k)$ déplacements. Calculer le nombre de déplacements horizontaux possibles lorsque l'on a $2l$ déplacements suivant cette direction, avec l fixé. Ensuite ajouter toutes les possibilités en faisant varier l.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

On ne peut se déplacer à chaque fois que selon $\overrightarrow{i}$ ou $\overrightarrow{j}$, on a donc $a+b$ déplacements sur un chemin (a suivant $\overrightarrow{i}$ et b suivant $\overrightarrow{j}$). Il suffit donc de choisir les a déplacements qui s'effectuent suivant $\overrightarrow{i}$ parmi les $a+b$ déplacements possibles. Une fois que l'on a déterminé quand on va se déplacer suivant $\overrightarrow{i}$, il nous reste $a+b-a=b$ déplacements et on n'aura pas le choix : ces déplacements seront suivant $\overrightarrow{j}$. Ainsi on a $\binom{a+b}{a}$ déplacements possibles. On remarque que l'on aurait pu faire le même raisonnement en commençant par déterminer les déplacements suivant $\overrightarrow{j}$ et on aurait obtenu dans ce cas $\binom{a+b}{b}$ déplacements possibles, mais ceci donne le même résultat car on a $\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}$. □

Correction de l'Exercice 2

1.a. En utilisant la formule du binôme de Newton avec $n=p$, $a=x$ et $b=1$, on obtient

$$(x+1)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k 1^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k.$$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton avec $n=2p$, $a=-x$ et $b=1$, on obtient

$$(-x+1)^{2p}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-x)^k\,1^{2p-k}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-x)^k.$$

Dans l'égalité obtenue dans la question 1.a), en remplaçant p par $2p$, on obtient

$$(x+1)^{2p}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k\,1^{2p-k}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k.$$

En additionnant ces deux expressions, on arrive donc à

$$\begin{aligned}(x+1)^{2p}+(-x+1)^{2p} &= \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k+\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(x^k+(-x)^k)=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(x^k+(-1)^k\,x^k)\\ &= \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k(1+(-1)^k).\end{aligned}$$

Si k est pair alors $(-1)^k=1$ et donc $1+(-1)^k=2$. Si k est impair alors $(-1)^k=-1$ et donc $1+(-1)^k=0$. Ainsi dans la somme $\sum\limits_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k(1+(-1)^k)$, on ne garde que les termes pairs compris entre 0 et $2p$:

$$(x+1)^{2p}+(-x+1)^{2p}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}x^k(1+(-1)^k)$$

$$=\sum_{0\le k\le 2p,k\text{ pair}}\binom{2p}{k}x^k(1+(-1)^k)+\sum_{0\le k\le 2p,k\text{ impair}}\binom{2p}{k}x^k(1+(-1)^k)$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq 2p, k \text{ pair}} \binom{2p}{k} x^k \, 2 + 0$$

Les nombres pairs compris entre 0 et $2p$ s'écrivent sous la forme $2i$ pour i variant de 0 à p. Par conséquent,

$$(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p} = 2\sum_{i=0}^{p} \binom{2p}{2i} x^{2i},$$

soit

$$\frac{(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p}}{2} = \sum_{i=0}^{p} \binom{2p}{2i} x^{2i}.$$

Pour $p = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{2 \times 0}{2i} x^{2i} = \binom{2 \times 0}{2 \times 0} x^{2 \times 0} = 1.$$

2. Soit $k \in \{0, ..., q-1\}$ fixé. D'après la question 1.b) appliquée à $x = 1$ et $p = q - k$,

$$\sum_{i=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2i} = \frac{(1+1)^{2(q-k)} + (-1+1)^{2(q-k)}}{2} = 2^{2(q-k)-1} + 0 \text{ car } q-k \geq 1,$$

et pour $k = q$, on a $\sum\limits_{i=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2i} = \sum\limits_{l=0}^{0} \binom{2\times 0}{2i} = 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \sum_{i=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2i} &= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \sum_{i=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2i} + \binom{2q}{2q} \sum_{i=0}^{q-q} \binom{2(q-k)}{2i} \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \sum_{i=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2i} + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} 2^{2(q-k)-1} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^{2k}} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^{2k}} - 2^{2q-1} \binom{2q}{2q} \frac{1}{2^{2q}} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la question 1.b) pour $p = q$ et $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2} &= 2^{2q-1} \frac{(\frac{1}{2}+1)^{2q} + (-\frac{1}{2}+1)^{2q}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 2^{2q-2} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2q} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2q} \right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3^{2q}+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3^{2q}+3}{4}.
\end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 3

1. On sent bien que le nombre de possibilités qui s'offrent à la fourmi ne va pas dépendre de son sommet de départ. Simplement, les chemins empruntés ne seront pas les mêmes. Il y a des correspondances naturelles entre les chemins issus de sommets différents. Mathématiquement, on parle de bijection et cette propriété permet notamment de montrer comme ici que deux quantités sont égales. Essayons de préciser cela.
Si l'on reprend la modélisation donnée dans l'indication qui consiste à choisir une succession de n lettres parmi les lettres v, h et p, chacune d'entre elles devant apparaître un nombre pair de fois, nous constatons que le nombre de chemins est indépendant du sommet de départ, dans la mesure où, dans cette modélisation, on ne mentionne à aucun moment le sommet.
Le nombre de chemins est indépendant du choix du sommet.
On peut donner un argument plus mathématique. Pour passer d'un sommet A à un sommet B, on peut effectuer plusieurs rotations du cube suivant ses diagonales. Ainsi, chaque chemin partant de A et revenant sur A est transformé par ces successions de rotations en un chemin partant de B et revenant sur B. En effectuant toutes ces rotations dans l'autre sens, on passe du sommet B au sommet A et on transforme chaque chemin partant de B et revenant sur B en un chemin partant de A et revenant sur A. A chaque chemin partant de A et revenant sur A on peut donc faire correspondre un unique chemin partant de B et revenant sur B et le nombre de chemins est bien indépendant du sommet. En employant le vocabulaire qui sera utilisé après le bac, on peut dire que de telles rotations sont des isométries de l'espace laissant le cube invariant. La composition de telles applications permet d'établir une bijection entre l'ensemble des chemins partant de A et revenant sur A avec l'ensemble des chemins partant de B et revenant sur B.

2. On utilise les lettres de l'indication. Bien sûr, il n'existe pas de chemin de longueur 1 qui permette à la fourmi de revenir à la position initiale, puisqu'avec une longueur 1, elle ne peut que quitter sa position initiale pour un sommet voisin. Donc $N_1 = 0$.
Pour les chemins de longueur 2, on a les trois axes comme trajets possibles :

$$vv \quad hh \quad pp,$$

c'est à dire 3 chemins possibles et $N_2 = 3$.
Il n'y a pas de chemin de longueur 3 qui permette de revenir au point de départ : $N_3 = 0$.
Pour les chemins de longueur 4, on a

$$vvvv \quad pppp \quad hhhh$$

$$vvpp \quad vvhh \quad vpvp \quad vhvh \quad vppv \quad vhhp$$

$$pvvp \quad hvvh \quad pvpv \quad hvhv \quad ppvv \quad hhvv$$

$$pphh \quad phph \quad phhp \quad hpph \quad hphp \quad hhpp.$$

Il y a donc 21 chemins de longueur 4 : $N_4 = 21$.

3. Comme la fourmi doit revenir au point de départ, on a vu dans l'indication que le nombre de déplacements suivant chaque direction doit être pair. Donc la longueur d'un chemin doit elle-même être paire.

4.a. Il y a $\binom{2q}{2k}$ façons de placer les $2k$ lettres v parmi les $n = 2q$ déplacements possibles.

b. Une fois ces $2k$ déplacements verticaux déterminés, il reste ensuite $2(q-k)$ déplacements possibles. Si l'on suppose que l'on a $2l$ déplacements horizontaux (ce qui correspond à la lettre h), il y a donc $2l$ choix parmi les $2(q-k)$ déplacements restant pour placer la lettre h, soit

$\binom{2(q-k)}{2l}$ choix possibles. Ensuite les déplacements horizontaux peuvent être au nombre de $0, 2, 4, ..., 2(q-k)$. Ainsi l peut varier dans $\{0, ..., q-k\}$. On trouve donc $\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2(q-k)}{2l}$ possibilités.

c. Une fois les déplacements horizontaux et verticaux choisis (c'est-à-dire que les emplacements des lettres v et h ont été fixés), les déplacements restant doivent être des déplacements en profondeur et donc il n'y a plus le choix pour le placement de la lettre p. Ainsi grâce à la question précédente, en combinant le résultat obtenu pour les déplacements gauche-droite une fois, $2k$ déplacements bas-haut fixés et le nombre des $2k$ déplacements verticaux, on a $\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q}{2k}\binom{2(q-k)}{2l}$ possibilités.
On obtient alors tous les chemins possibles lorsque k varie dans $\{0, ..., q\}$. Le nombre de chemins est donc donné par

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q}{2k}\binom{2(q-k)}{2l} = \sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\left(\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2(q-k)}{2l}\right).$$

d. Grâce à la question 2. de l'exercice 2, on a : $N_n = \dfrac{3^{2q}+3}{4} = \dfrac{3^n+3}{4}$. Autrement dit, il y a $\dfrac{3^n+3}{4}$ chemins possibles si n est pair et 0 chemin si n est impair. En remplaçant n par 2 dans l'égalité précédente, on trouve 3, et en remplaçant n par 4, on trouve $(3^4+3)/4 = (81+3)/4 = 21$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 2 et permet de **vérifier un peu** notre résultat. $\square$

