Raisonnement par récurrence

A. Camanes

Niveau : Terminale
Difficulté : ★ (exercice 1), ★★ (exercice 2)
Durée : 1h
Rubrique(s) : Analyse (étude de fonctions, inégalités, logarithmes), Logique (récurrence) .

Le raisonnement par récurrence est un outil très puissant pour démontrer des propriétés. Il est étudié en classe de Terminale S. Voici deux exercices qui vous permettront de le découvrir et de l'"utiliser sans aucune restriction.

La petite histoire...
Rodolphe vient d'ouvrir un restaurant qui marche bien. Il stocke les bouteilles vides dans sa cave. Le premier jour, une seule bouteille a été consommée, puis trois le deuxième, cinq le troisième, sept le quatrième... et ainsi de suite. Tous les jours, Rodolphe constate que deux bouteilles de plus que la veille sont consommées !
Évidemment, à un moment ou à un autre, il devra aller jeter les bouteilles. Quand cela se produira-t-il ? Il faudrait savoir combien de bouteilles sont stockées au bout de n jours dans sa cave. C'est-à-dire calculer la somme des n premiers nombres impairs :

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1).$$

Rodolphe se dit que ça ne doit vraiment pas être simple. Mais comme il range bien ses bouteilles pour éviter qu'elles ne prennent trop de place, la solution lui apparaît toute seule. Comment ? C'est ce que nous allons voir maintenant. Pour être rigoureux, Rodolphe a fait un raisonnement par récurrence quelque part.

Monsieur et Madame
Currencepeutservirpourpasmaldepreuves ont une fille...

Exercice 1 (Somme des impairs).
Nous cherchons à calculer la valeur de la somme des n premiers entiers impairs, où n est un entier naturel non nul :

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 3) + (2n - 1).$$

Réponse : $\Gamma^{9\imath 9}$

1.a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
1.b. Conjecturer la valeur de u_n pour $n \geq 1$.

2.a. Dessiner maintenant les rangements successifs des bouteilles vides de Rodolphe pour les quatre premiers jours, en sachant qu'il cherche à les ranger de la façon la plus compacte possible.
2.b. Quelle sera la disposition des bouteilles au temps n ? Pourquoi Rodolphe en est-il convaincu ?

Commentaires sur l'Exercice 1

Voila, vous venez peut-être de faire votre première démonstration par récurrence. Pas si difficile ! En voici les grandes étapes dans un exemple plutôt « concret » :
Imaginez que vous avez devant vous une file de voitures qui vérifient les propriétés suivantes :

- La première voiture est bleue [1] (c'est l'étape dite d'initialisation) ;
- Toute voiture précédée d'une voiture bleue est bleue (c'est l'étape dite d'hérédité)
- Conclusion, toute les voitures sont bleues d'après le principe de récurrence.

Vous pouvez donc utiliser ce raisonnement pour démontrer que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = n^2$ et ensuite vous vous lancez dans la résolution de l'exercice suivant.

Exercice 2 (Mais quand est-ce que $(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n$ est vraie ?).

1. On se propose dans un premier temps d'étudier la fonction f définie par

$$\begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & (x+1)\ln\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right) - \ln 2. \end{array}$$

a. Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que g est positive et illustrer par un dessin.

b. Étudier les variations de la fonction f.

c. Montrer que cette fonction s'annule au moins une fois en un point x_0 appartenant à l'intervalle $[4;5]$. En déduire que pour tout $x \in [5;+\infty[$, on a $0 < f(x)$.

2. On cherche les entiers naturels n tels que

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

a. Cette égalité est-elle vraie pour $n = 1$, 2, 3, 4, 5 ?

1. Si vous n'aimez pas la couleur bleue, vous pouvez choisir votre couleur préférée...

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\sum_{k=3}^{n+2} k^{n+1} < (n+3) \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

c. Pour $n \geq 5$, montrer que $(n+3)^n > \displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} k^n$.

d. Conclure.

Commentaires sur l'Exercice 2

Cet exercice a été posé au Concours Général de Mathématiques en 1999.

Indications

Indications sur l'Exercice 2

1.b. Dériver deux fois la fonction f.

1.c. On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés, alors f s'annule (au moins une fois) sur le segment $[a, b]$.

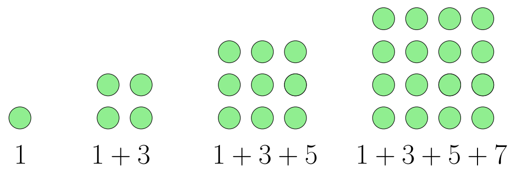
2.a. Utiliser la calculatrice pour $n = 4$ et $n = 5$.

Corrections

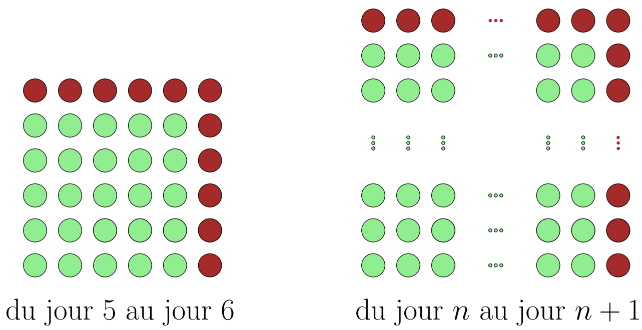
Correction de l'Exercice 1

1.a. $u_1 = 1$, $u_2 = 1+3 = 4$, $u_3 = 1+3+5 = 9$, $u_4 = 1+3+5+7 = 16$.
1.b. On obtient donc 1, 4, 9, 16 puis 25, 36... c'est-à-dire des carrés, et même les carrés successifs des entiers. On peut donc conjecturer que $u_n = n^2$.

2.a. Rangeons les bouteilles de manière compacte, c'est-à-dire « la plus carrée possible ». Il y a donc 1, puis 4, 9 et 16 bouteilles à ranger.



2.b. On a l'impression qu'à chaque fois les bouteilles formeront un carré de côté composé de n bouteilles. Cela marche pour $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ et cette propriété géométrique continuera de se vérifier jour après jour. En effet, si au temps n les bouteilles forment un carré de coté n, en ajoutant $2n+1$ bouteilles le jour suivant, on peut naturellement les ranger autour du carré de côté n en plaçant n bouteilles à droite, n devant et 1 en diagonale :



Rodolphe est ainsi convaincu qu'il obtiendra au n-ième jour un carré de bouteilles de côté n, et donc il y aura n^2 bouteilles. Il fait ici un raisonnement par récurrence, en remarquant une propriété les premiers jours et en s'assurant que celle-ci se vérifiera jour après jour : elle sera donc toujours vraie.
Maintenant voici une preuve par récurrence comme attendue en classe de Terminale :
Pour tout entier naturel non nul n, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $u_n = n^2$. Montrons par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
Initialisation. $u_1 = 1$ et $1^2 = 1$, donc $u_1 = 1^2$ et la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geq 1$ *(quelconque mais fixé)*. On suppose que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n = n^2$. Montrons que la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1+3+5+...+[2n-1]+[2(n+1)-1] \\ &= u_n+2n+1 \\ &= n^2+2n+1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)^2 \quad \text{par identité remarquable} \end{aligned}$$

et la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n = n^2$. □

Correction de l'Exercice 2

1.a. Il faut montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a $g(x) \geq 0$. Soit $x \in [0,+\infty[$ et $y \geq x$. Comme la fonction g est décroissante, $g(y) \leq g(x)$. De plus, $\lim_{y\to+\infty} g(y)$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité et $\lim_{y\to+\infty} g(y) \leq g(x)$ soit $0 \leq g(x)$.

1.b. Pour étudier les variations de f, nous allons calculer sa dérivée f'. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la quantité $x+3$ est non nulle et $\frac{x+4}{x+3} > 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ par opération et composition des fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + (x+1)\frac{\frac{x+3-x-4}{(x+3)^2}}{\frac{x+4}{x+3}}. \\ &= \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right) - \frac{x+1}{(x+3)(x+4)}, \end{aligned}$$

Mais il semble difficile de déterminer le signe de f'. Même la recherche des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est un problème compliqué. Ceci est dû au fait que f' est la somme de deux fonctions de nature différente (une fonction logarithme et une fraction rationnelle). On va alors étudier les variations de f' pouvoir obtenir des informations sur f'. Nous allons donc dériver f', que l'on appelle dérivée seconde de f et que l'on note f''. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{(x+3)(x+4)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} + (x+1)\frac{2x+7}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+1)(2x+7)-2(x+3)(x+4)}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= -\frac{5x+17}{(x+3)^2(x+4)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a les inégalités $0 < 5x+17$ et $0 < (x+3)^2(x+4)^2$ et donc $f''(x) < 0$ Ainsi, la fonction f' est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
Déterminons la limite, si elle existe, de f' en $+\infty$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right) - \frac{x+1}{(x+3)(x+4)} = \ln\left(\frac{x(1+\frac{4}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}\right) - \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2\,(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})} \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right) - \frac{1+\frac{1}{x}}{x\,(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})}. \end{aligned}$$

On en déduit que $f'(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Donc, grâce à la question précédente, on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Ainsi, f est croissante sur $[0; +\infty[$.

1.c. On remarque que $f(4) = 5.\ln(8/7) - \ln 2 = -0,025... < 0$ et $f(5) = 6.\ln(9/8) - \ln 2 \simeq 0,013 > 0$. Comme f est continue sur $[4; 5]$, on peut donc trouver grâce au théorème des valeurs intermédiaires un $x_0 \in [4, 5]$ tel que $f(x_0) = 0$.
Soit $x \in [5; +\infty[$ quelconque fixé. Par croissance de f, on a $0 < f(5) \leq f(x)$.

2.a. On commence par étudier ce qui se passe lorsque n est petit.

- $n = 1 : 4 \neq 3$.
- $n = 2 : 5^2 = 25$ et $3^2 + 4^2 = 25$, l'égalité est vraie.
- $n = 3 : 6^3 = 216$ et $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216$, l'égalité est vraie.
- $n = 4 : 7^4 = 2401$ et $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 81 + 256 + 625 + 1296 = 2258$, l'égalité est fausse.
- $n = 5 : 8^5 = 32768$ et $3^5+4^5+5^5+6^5+7^5 = 243+1024+3125+7776+16807 = 28975$, l'égalité est fausse.

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme pour tout $k \in \{1, \dots, n+2\}$, $k < n+3$, on a bien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+2} k^{n+1} &= \sum_{k=3}^{n+2} k \cdot k^n \\
&< \sum_{k=3}^{n+2} (n+3) \cdot k^n \\
&< (n+3) \sum_{k=3}^{n+2} k^n.
\end{aligned}$$

2.c. Pour tout $n \geq 5$, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété :

$$(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

Montrons par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 5$.
<u>Initialisation</u>. Pour $n = 5$, la propriété $(\mathcal{P}_5)$ est vraie puisque $(5+3)^5 > \sum_{k=3}^{5+2} k^5$ d'après le dernier calcul de la question 2.a).
<u>Hérédité</u>. On suppose que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour un entier $n \geq 5$ fixé, c'est-à-dire que $(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{(n+1)+2} k^{n+1} &= \sum_{k=3}^{n+3} k^{n+1} \\
&= (n+3)^{n+1} + \sum_{k=3}^{n+2} k \cdot k^n \\
&< (n+3)^{n+1} + (n+3) \sum_{k=3}^{n+2} k^n \\
&< (n+3)^{n+1} + (n+3)\,(n+3)^n = 2(n+3)^{n+1},
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, il nous suffit de montrer maintenant que

$$0 < 2(n+3)^{n+1} < (n+4)^{n+1},$$

ce qui est équivalent, par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, à

$$\ln\left(2(n+3)^{n+1}\right) < \ln\left((n+4)^{n+1}\right),$$

ce qui équivaut à

$$0 < \ln\left(\frac{(n+4)^{n+1}}{2(n+3)^{n+1}}\right),$$

ce qui équivaut à

$$0 < \ln\left(\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+1}\right) - \ln 2,$$

ce qui équivaut à

$$0 < (n+1)\ln\frac{n+4}{n+3} - \ln 2.$$

Cette inégalité est vraie lorsque $n \geq 5$ car $f(n) > 0$ dans ce cas d'après la question 1.c). Ainsi, la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 5$,

$$(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

(i) À noter que cette démonstration ne s'applique pas au cas $n = 4$ ...

(ii) Il est absolument indispensable de préciser que la fonction logarithme est strictement croissante et pas seulement croissante. En effet une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante peut transformer une inégalité $<$ en une inégalité $\leq$.

2.d. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{2, 3\}.$$

□

