

# Repoussons nos limites

N. Jacquet

**Niveau :** TERMINALE

**Difficulté :** ★★

**Durée :** 1 à 2 heures

**Rubrique(s) :** Analyse (suites, inégalités), Logique (raisonnement par l'absurde).

---

*En classe de Terminale on vous a défini les limites finies ou infinies d'une suite numérique à l'aide d'une définition manipulant des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Cette définition est juste mais une définition équivalente vous est présentée dans cet atelier qui manipule de manière plus rigoureuse les quantificateurs logiques. On vous apprendra ensuite à découper les « epsilon » dans le supérieur.*

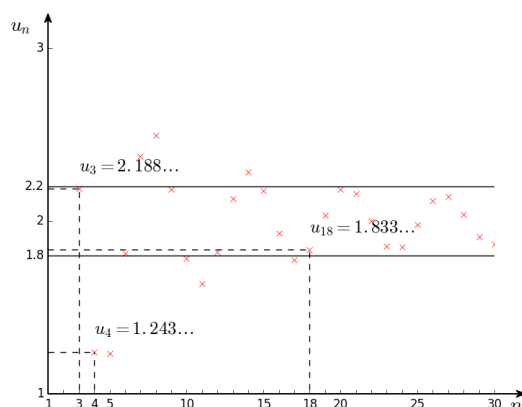
## La petite histoire...

Dans ce problème, nous allons donner une définition de la limite un peu plus rigoureuse que celle que vous avez vue en classe. Dans un premier temps, nous manipulerons cette nouvelle définition sur des exemples. Ensuite nous verrons comment résoudre certains problèmes de limite que vous ne pouviez pas vraiment résoudre avant.

Intuitivement, dire que  $(u_n)_{n \geq 0}$  a pour limite  $\ell \in \mathbb{R}$  signifie que lorsque  $n$  est de plus en plus grand, les réels  $u_n$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $\ell$ .

Plus rigoureusement, dire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  a pour limite le nombre réel  $\ell$  signifie que tout intervalle ouvert centré en  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout intervalle de la forme  $I = ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$  (avec  $\varepsilon$  strictement positif), il existe un rang  $N_0$  tel que pour  $n$  plus grand que  $N_0$ ,  $u_n$  se trouve dans  $I$ . Ainsi, lorsque  $\varepsilon$  devient de plus en plus petit, les termes de la suite « se collent » de plus en plus au nombre réel  $\ell$ .

Par exemple pour la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 2 + \frac{4}{n} \sin(n)$ , que l'on a représentée ci-dessous, la limite est égale à 2. On a pris  $\varepsilon = 0,2$  et on peut constater qu'à partir du rang 18, tous les termes sont dans l'intervalle  $]2 - 0,2; 2 + 0,2[ = ]1,8; 2,2[$ .



Attention, dans l'exemple précédent, on a pris une valeur particulière de  $\varepsilon$ , mais pour prouver que la limite de la suite est bien 2, il faudra avoir la propriété de l'exemple précédent pour tout  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, il faut bien noter que le rang  $N_0$  dépend de  $\varepsilon$ , car plus on est proche de la limite (c'est-à-dire plus  $\varepsilon$  est petit), et plus il faudra chercher loin les termes de la suite situés dans l'intervalle  $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ . Si on reprend l'exemple précédent, pour  $\varepsilon = 0,1$ ,  $N_0$  sera au moins égal à 28.

*Monsieur et Madame  
Ongementparcontinuité ont un fils...*

### Exercice 1 (Travail sur la définition).

**1.a.** Reprenons la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 2 + \frac{4}{n} \sin(n)$ . Montrer par le calcul qu'à partir d'un certain rang, on a  $1,9 < u_n < 2,1$  et donner ce rang (on ne cherche pas forcément le plus petit rang, nous voulons juste un rang  $N_0$  tel que l'on soit sûr d'avoir  $u_n$  dans  $]1,9; 2,1[$ , pour  $n \geq N_0$ ).

**b.** Avec cette même suite, montrer que pour tout  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , il existe un rang  $N_0$  à partir duquel  $u_n \in ]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ .

**c.** Que vient-on de prouver ?

**2.** Voici un exemple dans lequel on montre que la suite  $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Nous voulons trouver un  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$  on a la propriété  $1 + \frac{1}{n} \in ]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[$ . Ceci revient à avoir pour tout  $n \geq N_0$

$$1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

car  $\frac{1}{n}$  est toujours strictement positif. On veut donc trouver  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\frac{1}{\varepsilon} < n$ , puisque la fonction inverse est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Ainsi, il suffit de choisir un entier  $N_0$  strictement plus grand que  $\frac{1}{\varepsilon}$ . En utilisant la décroissance de la fonction inverse, on a alors pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$  et donc pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{soit encore} \quad 1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$1 + \frac{1}{n} \in ]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[.$$

Ceci prouve que la suite  $(1 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  a pour limite 1.

Copier cet exemple pour prouver que la suite  $\left(13 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$  a pour limite 13.

### Exercice 2 (Divergence de la série harmonique).

Soit  $(S_n)_{n \geq 1}$ , la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Nous allons montrer que cette suite diverge, ce qui signifie qu'elle n'admet pas de limite finie (en fait, elle tend vers  $+\infty$ ).

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S'_n = S_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Nous allons montrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  diverge par un raisonnement par l'absurde. Nous supposons donc qu'elle converge, à savoir qu'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que  $S_n$  admette  $\ell$  pour limite.

1. Montrer que l'on peut trouver  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\ell - \frac{1}{4} < S_p < \ell + \frac{1}{4}$  et  $\ell - \frac{1}{4} < S'_p < \ell + \frac{1}{4}$ .
2. Montrer que  $S'_p - S_p$  est la somme de  $p$  termes tous plus grands que  $\frac{1}{2p}$ . En déduire que l'on a  $S'_p - S_p \geq \frac{1}{2}$ .
3. Montrer que l'on obtient une contradiction et conclure.

### Exercice 3 (Quelques propriétés).

1. Nous allons montrer qu'une suite admet au plus une limite. Le fait que l'on ait besoin de le montrer peut paraître surprenant, vu le caractère intuitif de cette propriété, mais chose prouvée, chose vraie...

Nous allons raisonner par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  qui admette deux limites différentes  $\ell$  et  $\ell'$ . On peut supposer que  $\ell < \ell'$ , quitte à intervertir le rôle de  $\ell$  et  $\ell'$ .

a. On pose  $d = \frac{\ell' - \ell}{2}$ . Montrer que l'on peut trouver un terme  $u_p$  de la suite se trouvant à la fois dans  $] \ell - d; \ell + d[$  et  $] \ell' - d; \ell' + d[$  et faire un dessin de la situation.

b. La propriété précédente est-elle vraiment possible? Le prouver. Qu'en conclut-on?

2. Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite. Soient  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  les suites définies par  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous voulons montrer que les suites

$(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  ont pour limite  $\ell$  si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  admet  $\ell$  pour limite.

**a.** Écrire les premiers termes des suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$ .

**b.** On suppose que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  admet  $\ell$  pour limite. Montrer que les suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  ont pour limite  $\ell$ , à l'aide de notre définition de la limite.

**c.** Réciproquement, on suppose que les suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$  ont pour limite  $\ell$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  a pour limite  $\ell$ , à l'aide de notre définition de la limite.

**3.** Nous allons appliquer le résultat précédent pour trouver de manière simple des limites.

**a.** Montrer que la suite  $((-1)^n)_{n \geq 1}$  n'admet pas de limite.

**b.** Montrer que la suite  $\left(\frac{1}{n+(-1)^n}\right)_{n \geq 1}$  admet une limite, puis montrer que la suite  $\left(\frac{1}{n+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)_{n \geq 1}$  admet aussi une limite.

## Indications



### Indications sur l'Exercice 1

**1.a.** Montrer d'abord que l'on cherche  $N_0$  à partir duquel on a :  $|\frac{4}{n} \sin(n)| < 0,1$ . Puis montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a  $|\frac{4}{n} \sin(n)| \leq \frac{4}{n}$  et choisir  $N_0$  en conséquence.

**1.b.** Reprendre les calculs précédents en remplaçant 0,1 par  $\varepsilon$ .



### Indications sur l'Exercice 2

**1.** Utiliser la définition de la limite pour la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ . On note  $N_0$  le rang associé à ce  $\varepsilon$ . Remarquer que si  $n$  est plus grand que  $N_0$ , alors  $2n$  l'est aussi.

**2.** Pour la minoration de chaque terme de la somme, remarquer que  $p+1, p+2, \dots, 2p$  sont plus petits que  $2p$ . Pour la minoration de  $S'_p - S_p$ , se rappeler qu'on a la somme de  $p$  termes tous plus grands que  $\frac{1}{2p}$ .

**3.** Grâce à la première question, montrer qu'on a  $S'_p - S_p < \frac{1}{2}$ . En déduire une contradiction.



### Indications sur l'Exercice 3

**1.a.** Reprendre la définition de la limite pour  $\ell$  et  $\ell'$ , avec  $\varepsilon = d$ .

**1.b.** Montrer que  $u_p < \ell + d = \ell' - d < u_p$ .

**2.b.** Reprendre la définition de la limite pour  $(u_n)_{n \geq 1}$ . On note  $N_0$  le rang associé à un  $\varepsilon$ . Montrer à l'aide de notre définition de la limite que l'on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell'$ . Remarquer que pour ces deux suites, un rang convenable pour avoir  $v_n$  et  $w_n$  dans  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  est  $N_0$ , car pour  $n$  plus grand que  $N_0$ , on a toujours  $2n$  et  $2n+1$  plus grands que  $N_0$ .

**2.c.** Reprendre la définition de la limite pour  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(w_n)_{n \geq 1}$ . On note  $N_1$  (respectivement  $N_2$ ) le rang associé à un  $\varepsilon$  pour  $(v_n)_{n \geq 1}$  (respectivement pour  $(w_n)_{n \geq 1}$ ). Considérer un entier  $N_0$  plus grand que  $2N_1$  et  $2N_2 + 1$  et montrer que  $u_n$  est dans  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , dès lors que  $n \geq N_0$ . Il faudra faire une distinction de cas suivant la parité de  $n$ .

**3.a.** Utiliser la question **2.b**).

**3.b.** Utiliser la question **2.c**).

## Corrections

### Correction de l'Exercice 1

**1.a.** Nous devons chercher un  $N_0$  tel que pour tout  $n$  plus grand que  $N_0$ , on ait :  $1,9 < 2 + \frac{4}{n} \sin(n) < 2,1$  soit  $-0,1 < \frac{4}{n} \sin(n) < 0,1$ , soit encore  $|\frac{4}{n} \sin(n)| < 0,1$ . Cherchons d'autre part un encadrement de  $\frac{4}{n} \sin(n)$ . Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$  et comme  $\frac{4}{n}$  est positif, on a  $-\frac{4}{n} \leq \frac{4}{n} \sin(n) \leq \frac{4}{n}$  et donc  $|\frac{4}{n} \sin(n)| \leq \frac{4}{n}$ . On suffit donc d'avoir  $\frac{4}{n} < 0,1$ , soit  $\frac{n}{4} > \frac{1}{0,1} = 10$ , i.e.  $n > 40$ . On pose donc  $N_0 = 41$ . Soit  $n$  plus grand que  $N_0$ . On a  $n > 40$ , donc  $\frac{n}{4} > 10$  et donc  $\frac{4}{n} < 0,1$ , par stricte décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,  $|\frac{4}{n} \sin(n)| \leq \frac{4}{n} < 0,1$  et pour tout  $n$  plus grand que 41, on a bien  $u_n \in ]1,9; 2,1[$ .

**b.** On reprend les calculs précédents en remplaçant 0,1 par  $\varepsilon$  quelconque. Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . On veut trouver les entiers  $n$  tels que  $|\frac{4}{n} \sin(n)| < \varepsilon$ . Il est suffisant d'avoir  $\frac{4}{n} < \varepsilon$ , soit  $\frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$ , autrement dit  $n > \frac{4}{\varepsilon}$ . Soit  $N_0$  un entier strictement supérieur à  $\frac{4}{\varepsilon}$ . Si  $n$  plus grand que  $N_0$ ,  $n \geq N_0 > \frac{4}{\varepsilon}$  et donc  $\frac{4}{n} < \varepsilon$ . Ceci nous donne  $|\frac{4}{n} \sin(n)| \leq \frac{4}{n} < \varepsilon$  et donc pour tout  $n$  plus grand que  $N_0$ , on a la propriété  $u_n \in ]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$ .

**c.** On vient de prouver que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

**2.** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Nous voulons trouver un  $N_0$  tel que l'on ait pour tout  $n \geq N_0$  la propriété  $13 + \frac{1}{\sqrt{n}} \in ]13 - \varepsilon; 13 + \varepsilon[$ . Ceci revient à avoir pour tout  $n \geq N_0$

$$13 - \varepsilon < 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 13 + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

puisque  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  est toujours strictement positif. On veut donc que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$  (la fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ), ou de manière équivalente  $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$ , puisque la fonction carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour que cette propriété soit vérifiée, il suffit donc de choisir un entier  $N_0$  strictement plus grand que  $1/\varepsilon^2$ . Prenons-en un, par exemple le plus petit entier strictement supérieur à  $1/\varepsilon^2$ . Alors, pour tout  $n \geq N_0$ , on a bien  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon^2$ , par stricte décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En invoquant, pour finir, la stricte croissance de la fonction racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$ , on arrive à  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq N_0$ , on a  $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ , d'où  $13 - \varepsilon < 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 13 + \varepsilon$ , ce qui équivaut encore à

$$\forall n \geq N_0, \quad 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} \in ]13 - \varepsilon; 13 + \varepsilon[.$$

Ceci prouve que la suite  $\left(13 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$  a pour limite 13.  $\square$

### Correction de l'Exercice 2

**1.** En prenant la définition de la limite pour  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ , on ait  $S_n \in ]\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}[$ . On pose  $p = N_0$ . On a bien  $p \geq N_0$  et  $2p \geq 2N_0 \geq N_0$  et par conséquent  $S_p$  et  $S_{2p} = S'_p$  sont dans  $]\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}[$ . On a donc  $\ell - \frac{1}{4} < S_p < \ell + \frac{1}{4}$  et  $\ell - \frac{1}{4} < S'_p < \ell + \frac{1}{4}$ .

**2.** On a

$$S'_p - S_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+p}.$$

Cette dernière écriture permet de voir que la somme est composée d'exactly  $p$  termes.

Or,  $p+1, p+2, \dots, 2p$  sont tous des entiers inférieurs à  $2p$ . Donc en passant à l'inverse, on obtient par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{2p}, \frac{1}{p+2} \geq \frac{1}{2p}, \dots, \frac{1}{2p} \geq \frac{1}{2p}.$$

Ainsi,  $S'_p - S_p$  est la somme de  $p$  termes plus grands que  $\frac{1}{2p}$ , cette somme est donc minorée par  $p \times \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$ . Au final,  $S'_p - S_p \geq \frac{1}{2}$ .

**3.** Grâce à la première question, on sait que

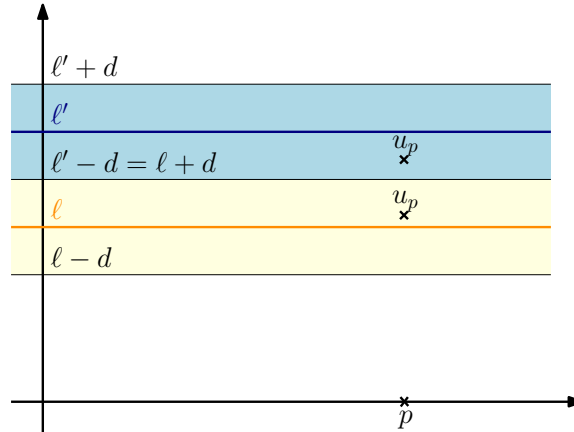
$$-\ell - \frac{1}{4} < -S_p < -\ell + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \ell - \frac{1}{4} < S'_p < \ell + \frac{1}{4}.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient  $-\frac{1}{2} < S'_p - S_p < \frac{1}{2}$  et donc  $S'_p - S_p < \frac{1}{2}$ . Ceci est en contradiction avec le résultat de la question précédente. Par conséquent, la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  n'admet pas de limite.

*Remarque :* on a montré d'une autre manière que  $S_n$  tendait vers  $+\infty$  à l'atelier « Achille, la Tortue et Riemann » .  $\square$

### Correction de l'Exercice 3

**1.a.** On remarque pour commencer que  $d > 0$ . On peut donc utiliser la définition de la limite pour  $\ell$  et  $\ell'$  avec  $\varepsilon = d$ . Ainsi, il existe un rang  $N_0$  tel que pour  $n \geq N_0$ , on a  $u_n \in ]\ell - d, \ell + d[$ . De même, il existe un rang  $N'_0$  tel que pour  $n \geq N'_0$  on a  $u_n \in ]\ell' - d, \ell' + d[$ . Il suffit alors de choisir  $p$  plus grand que  $N_0$  et  $N'_0$  pour conclure que  $u_p \in ]\ell - d, \ell + d[ \cap ]\ell' - d, \ell' + d[$ . Graphiquement, on peut représenter ceci de la manière suivante :



**b.** Comme  $u_p$  est dans  $]\ell - d, \ell + d[$ , on a  $u_p < \ell + d = \ell + \frac{\ell' - \ell}{2} = \frac{\ell' + \ell}{2}$ . De plus,  $u_p$  est dans  $]\ell' - d, \ell' + d[$  et donc  $u_p > \ell' - d = \ell' - \frac{\ell' - \ell}{2} = \frac{\ell' + \ell}{2}$ . Ceci nous donne  $u_p < \frac{\ell' + \ell}{2} < u_p$ , ce qui est impossible.

Finalement, la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  ne peut avoir deux limites distinctes, ce qui est rassurant !

**2.a.** On a  $v_0 = u_0, v_1 = u_2, v_2 = u_4, v_3 = u_6, \dots$  et  $w_0 = u_1, w_1 = u_3, w_2 = u_5, w_3 = u_7, \dots$

**b.** Montrons d'abord que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe un rang  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Or, si  $n$

est plus grand que  $N_0$ , on a aussi  $2n \geq 2N_0 \geq N_0$  et donc  $u_{2n} \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , soit encore  $v_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

On a donc montré que pour tout intervalle de la forme  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ , on peut trouver un rang  $N_0$  à partir duquel tous les termes de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ , d'où on peut conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .

Montrons ensuite que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe un rang  $N_0$  tel que pour  $n \geq N_0$ ,  $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Une fois de plus, si  $n \geq N_0$  on a également  $2n + 1 \geq 2n \geq 2N_0 \geq N_0$  et donc  $u_{2n+1} \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Autrement dit,  $w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

On a donc montré que pour tout intervalle de la forme  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ , on peut trouver un rang  $N_0$  à partir duquel tous les termes de la suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ .

**c.** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Il existe un rang  $N_1$  tel que pour  $n \geq N_1$ ,  $v_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Par ailleurs, il existe aussi un rang  $N_2$  tel que pour  $n \geq N_2$ ,  $w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

Choisissons un entier  $N_0$  plus grand que  $2N_1$  et  $2N_2 + 1$ . Pour tout  $n \geq N_0$ , on a deux cas possibles :

*Premier cas : n est pair.*

Alors  $u_n = u_{2 \frac{n}{2}} = v_{\frac{n}{2}}$ . L'inégalité  $n \geq N_0$  implique l'inégalité  $\frac{n}{2} \geq \frac{N_0}{2} \geq \frac{2N_1}{2} = N_1$ , donc  $v_{\frac{n}{2}}$  se trouve dans  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$  et par conséquent  $u_n$  est dans ce même intervalle.

*Deuxième cas : n est impair*

On a  $u_n = u_{2 \frac{n-1}{2} + 1} = w_{\frac{n-1}{2}}$  ( $n - 1$  est pair). L'inégalité  $n \geq N_0$  implique l'inégalité  $\frac{n-1}{2} \geq \frac{N_0-1}{2} \geq \frac{2N_2+1-1}{2} = N_2$ , donc  $w_{\frac{n-1}{2}}$  appartient à  $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$  et finalement  $u_n$  est dans ce même intervalle.

Dans les deux cas, et donc dans tous les cas, on a l'implication :  $n \geq N_0 \Rightarrow u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . En utilisant la définition de la limite, on peut conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**3.a.** Considérons  $u_n = (-1)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$ . Or, grâce à la question 2.b) on sait que si  $(u_n)_{n \geq 1}$  avait une limite, alors les suites  $(u_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq 1}$  auraient la même limite, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  n'admet pas de limite.

**b.** On pose  $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$ , pour  $n \geq 2$ . On a  $v_{2n} = \frac{1}{2n+1}$  et  $v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1-1} = \frac{1}{2n}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = 0$ , ce qui permet de conclure grâce à 2.c) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . Ensuite, pour tout  $n \geq 1$  on pose  $w_n = \frac{1}{n+\cos(\frac{n\pi}{2})}$ . On a cette fois

$$w_{2n} = \frac{1}{2n + \cos(\frac{2n\pi}{2})} = \frac{1}{2n + \cos(n\pi)} = \frac{1}{2n + (-1)^n}.$$

En utilisant la même méthode que pour  $(v_n)_{n \geq 1}$ , on montre que alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n} = 0$ .

Par ailleurs,

$$w_{2n+1} = \frac{1}{2n + 1 + \cos(\frac{2n+1\pi}{2})} = \frac{1}{2n + 1 + \cos(n\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2n + 1}.$$

On a donc immédiatement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n+1} = 0$ .

En utilisant encore la question 2.c), on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .  $\square$