

# Topologie Algébrique

*Alain Prouté*

(alp@math.univ-paris-diderot.fr)

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Ce document rassemble les notes de cours de topologie algébrique mises à la disposition des étudiants lors de mon cours du second semestre de l'année universitaire 2011-2012. Elle n'ont pas été révisées depuis et sont donc simplement concaténées ici. Le cours aura à nouveau lieu au second semestre de l'année universitaire 2012-2013.

Ce cours présente quelques notions fondamentales de la topologie algébrique dans un esprit plus « catégorique » que ce qu'on rencontre habituellement. J'ai fait ce choix parce que je considère que l'apprentissage de la théorie des catégories (très limité toutefois ici) est au moins aussi important que l'apprentissage de la topologie algébrique elle-même. D'ailleurs, il faut croire que cette façon de présenter les choses plaît aux étudiants si j'en juge par le nombre plutôt élevé de ces derniers pour un cours de Master 1 (et par leur propres commentaires). La théorie des catégories est une manière à la fois moderne et synthétique d'aborder les notions mathématiques. Elle permet de dégager des comportements généraux des objets mathématiques, qui restent difficilement visibles sans son aide. Elle prend de plus en plus d'importance dans les mathématiques, et il ne me semble pas raisonnable de l'ignorer.

Pour ce qui est de la topologie algébrique proprement-dite, le cours se compose essentiellement de deux parties, à savoir une première partie sur les groupoïdes fondamentaux et les revêtements et une seconde partie sur l'homologie et la cohomologie singulières, ce qui constitue un programme assez classique pour une introduction au sujet. Dans la première partie, on démontre (à la manière de Ronnie Brown) le théorème de van Kampen pour les groupoïdes fondamentaux d'un espace relatifs à un sous-ensemble de cet espace, c'est-à-dire que les objets du groupoïde ne sont pas tous les points de l'espace mais seulement ceux d'un sous-ensemble judicieusement choisi. On applique par exemple ce théorème au calcul du groupe fondamental du cercle en prenant comme ensemble des objets du groupoïde un ensemble de deux éléments distincts du cercle, ce qui n'est pas possible en prenant un seul élément, c'est-à-dire avec une version du théorème de van Kampen ne parlant que de groupes. Vient ensuite un exposé assez complet sur les revêtements, comprenant entre autres choses l'étude des automorphismes d'un revêtement et la classification des revêtement sur une base donnée. Le revêtement universel (d'un espace suffisamment régulier) est construit comme une colimite d'une nature différente du quotient d'un espace de chemins qu'on rencontre habituellement.

La seconde partie commence par une initiation à l'algèbre homologique assortie de considérations intuitives sur les motivations géométriques. La théorie de l'homologie singulière est présentée axiomatiquement sous la forme d'une « théorie de chaînes », la construction d'une telle théorie étant repoussée plus loin. Les théorèmes classiques du point fixe de Brouwer, de

séparation de Jordan-Brouwer, etc. . . en sont déduits. La construction de la théorie des chaînes singulières vient ensuite et utilise la méthode des modèles acycliques aussi bien pour la démonstration de la propriété d'invariance homotopique que pour la démonstration du théorème des petites chaînes (qui entraîne la propriété d'excision et les suites de Mayer-Vietoris). L'existence et l'unicité de la subdivision barycentrique est démontrée sans construction explicite de cette subdivision. Cette présentation est bien sûr plus abstraite que celle qu'on trouve habituellement dans les cours d'initiation à la topologie algébrique, mais elle a l'avantage de passer à la trappe la plupart des calculs. La cohomologie, le cup-produit et le cap-produit sont introduits ensuite. Le théorème des coefficients universels pour la cohomologie est démontré, et on trouvera des démonstrations détaillées des propriétés reliant les connectants des suites exactes avec ces produits. Le cours se termine avec la notion de rétract absolu de voisinage et la dualité d'Alexander. Le temps imparti n'a pas permis de traiter la dualité de Poincaré.

Ce texte a été établi dans les quelques mois qui ont précédé le cours et pendant le cours lui-même et est donc un premier jet. Il souffre clairement de quelques faiblesses. Certains sujets ont été abordés dans l'optique d'une utilisation dans des sections qui n'ont pas encore été écrites (ni bien sûr enseignées faute de temps), mais restent intéressants par eux-mêmes. L'ensemble est donc un peu disparate, tout en étant plutôt consistant pour une première initiation à la topologie algébrique et aux catégories.

Paris, septembre 2012.

## Table des Matières

- **23 janvier 2012** : Présentation des catégories comme une généralisation des groupes. Exemples : Ens, Top, Gr, ensembles (pré)ordonnés, groupes, monoïdes. Isomorphismes. Automorphismes d'un objet. Groupoïdes. Connexité et simple connexité d'un groupoïde. Définition des foncteurs. Exemples : applications croissantes/décroissantes, dual d'un espace vectoriel. Catégorie Cat des petites catégories. Congruences et catégories quotient.
- **25 janvier 2012** : Paire topologique et morphismes de paires. Chemins, standardisation des chemins, concaténation, catégorie des chemins de X à extrémités dans A. Homotopie entre chemins. L'homotopie est une congruence pour la concaténation. Inversion d'un chemin à homotopie près. Le groupoïde fondamental de X relatif à A. Objet initial/final dans une catégorie. Isomorphisme canonique. Notion de somme et de produit dans une catégorie.
- **30 janvier 2012** : Notion de somme amalgamée et exemples : ensembles, espaces topologiques, graphes. Théorème de van Kampen (version groupoïdes à la Ronald Brown).
- **1 février 2012** : Esquisse de calcul de la somme amalgamée de groupoïdes qui donne le groupe fondamental du cercle. Flèche universelle d'un objet vers un foncteur. Exemples : groupe libre sur un ensemble, abélianisé d'un groupe. Transformations naturelles, exemples. Naturalité de la bijection intervenant dans la définition des flèches universelles.

- **6 février 2012** Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2. Théorème de fonctorialité. Foncteurs adjoints. Limites/colimites et leur préservation par les adjoints.
- **8 février 2012** : Compositions hétérogènes. Unité et co-unité des adjonctions. Limites et colimites dans  $\mathbf{Ens}$  et dans  $\mathbf{Top}$ . Exemples : écrasement d'un sous-espace, cylindre et cône d'une application continue.
- **13 février 2012** : Notion générale d'homotopie, Catégories homotopiques. Carrés cartésiens et pullbacks. Groupe topologique agissant sur un espace topologique. Définition des revêtements. Actions de groupes produisant des revêtements. Exemples classiques de revêtements.
- **15 février 2012** : Relèvement des homotopies, relation entre revêtement et groupe fondamental, action du groupe fondamental de la base sur la fibre, critère de relèvement d'une application continue le long d'un revêtement.
- **20 février 2012** : Suite exacte courte d'un revêtement principal, foncteurs représentables, définition des revêtements universels.
- **22 février 2012** : Notion d'espace semi-localement simplement connexe. Théorème d'existence de revêtements au dessus d'une base suffisamment régulière. Existence d'un revêtement universel.
- **27 février 2012** : Classification des revêtements au dessus d'une base donnée. Automorphismes d'un revêtement.
- **29 février 2012** : Revêtements principaux. Une application des revêtements aux surfaces plongés dans l'espace euclidien. Catégories présentées par générateurs et relations. Groupoïde libre sur un graphe. Quaternions.
- **5 mars 2012** : CO-topologie et loi exponentielle pour les espaces topologiques et les espaces topologiques pointés. Suspension réduite et espace des lacets. Groupes d'homotopie supérieurs.
- **7 mars 2012** : Premier examen partiel. Texte et corrigé.
- **12 mars 2012** : Présentation de l'algèbre homologique : simulation algébrique de la notion de bord. Modules sur un anneau. Suites exactes. Lemme des cinq. Produit tensoriel.
- **14 mars 2012** : Algèbres associatives graduées. Algèbre tensorielle, algèbre extérieure. Théorie du déterminant.
- **19 mars 2012** : Quelques propriétés des modules sur les anneaux principaux. Modules différentiels gradués et homologie. Lemme du serpent.
- **21 mars 2012** : Notion d'homotopie de chaînes. Présentation axiomatique des théories de chaînes. Suite exacte longue d'un triplet, théorème d'excision, suite exacte de Mayer-Vietoris.
- **26 mars 2012** : Suites exactes scindées. Homologie réduite. Homologie des sphères. Degré de Brouwer et quelques applications.
- **28 mars 2012** : Chaînes singulières d'un espace topologique. Opérateur bord. Augmentation. Vérification des axiomes (1) et (4) des théories de chaînes. La méthode des modèles

acycliques. Le théorème des modèles acycliques.

- **2 avril 2012** : Preuve de l'invariance homotopique (axiome 3) et du théorème des petites chaînes (axiome 2) pour l'homologie singulière.
- **4 avril 2012** : Comparaison du groupe fondamental avec l'homologie de dimension 1 à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Quelques mots sur les limites et colimites de modules différentiels gradués. Commutation de l'homologie aux limites inductives. Théorèmes de séparation de Jordan-Brouwer et d'invariance du domaine.
- **11 avril 2012** : Second examen partiel. Texte et corrigé.
- **30 avril 2012** : Cône d'un morphisme de modules différentiels gradués. Foncteurs Tor et Ext. Cohomologie singulière. Théorème des coefficients universels pour la cohomologie. Diagonale d'Alexander-Whitney. Cup-produit et cap-produit.
- **2 mai 2012** : Cup-produit dans le cas relatif, cross-produit pour la cohomologie. Relations entre connectants et cup-produit. Un cas particulier de la formule de Künneth. Notion de fibré vectoriel orientable. Isomorphisme de Thom. Suite exacte de Thom-Gysin. Algèbre de cohomologie des espaces projectifs réels et complexes.
- **7 mai 2012** : Rétracts absolus de voisinage (ANR). Polyèdres finis. Plongements propres au sens d'Alexander. Cap-produit et connectants de suites exactes de Mayer-Vietoris. Appendice : Espace normaux, lemme d'Urysohn, théorème de Tietze-Urysohn.
- **9 mai 2012** : Dualité d'Alexander.
- **29 mai 2012** : Examen première session. Texte et corrigé.
- **25/26 juin 2012** : Recueil d'exercices ayant servi pour l'oral de seconde session.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 23 janvier 2012.

Nous introduisons ici le langage des « catégories », qui va nous permettre d'établir un pont entre la topologie et l'algèbre. Bien que ce ne soit pas l'idée qui a historiquement mené à la notion de catégorie, il est intéressant de voir cette notion comme une généralisation de celle de groupe. On peut penser à un groupe comme à un ensemble d'« opérations » susceptibles d'agir ou d'opérer sur un ensemble. Le fait de pouvoir agir sur un ensemble est d'ailleurs l'une des principales raisons d'être des groupes. On peut généraliser la notion de groupe dans deux directions indépendantes. On peut d'abord renoncer à ne considérer que des opérations réversibles. On obtient alors la notion de « monoïde ». Un monoïde est un ensemble d'opérations qu'on peut composer (la composition étant toujours associative) et comportant une opération « identique » jouant le rôle d'élément neutre. Mais on ne demande plus que ces opérations soient réversibles (inversibles). Le concept de monoïde est parfaitement naturel et on le rencontre dans de nombreuses situations. Une autre manière de généraliser la notion de groupe est de considérer que les objets sur lesquels on va agir ne sont pas indifférenciés, mais classés selon leur « type ». Chaque opération opère sur les éléments d'un certain type et produit des éléments d'un autre type (éventuellement le même). La composition sera toujours associative, et ces opérations toujours réversibles. La notion ainsi définie est celle de « groupoïde », que nous allons étudier avec quelques détails, car elle est importante en topologie algébrique. Enfin, on peut faire ces deux généralisations en même temps et ce qu'on obtient est la notion de catégorie, tout au moins la notion de « petite catégorie ». Pour les besoins de la topologie algébrique, on doit aussi considérer de « grandes catégories », c'est-à-dire des catégories qui ont trop d'opérations pour que ces dernières puissent former un ensemble.

Dans le vocabulaire officiel des catégories, ce que nous avons appelé « opération » s'appelle « flèche » ou « morphisme », et ce que nous avons appelé « type » s'appelle « objet ». Ce vocabulaire est en très grande partie justifié par les exemples historiques qui ont mené au concept de catégorie, comme la catégorie des ensembles et applications, des groupes et morphismes de groupes, des espaces vectoriels sur un corps et applications linéaires ou des espaces topologiques et applications continues.

**1 Définition.** Une catégorie  $\mathcal{C}$  est constituée d'objets et de flèches.<sup>(1)</sup> Chaque flèche de  $\mathcal{C}$  a une source et un but, qui sont des objets de  $\mathcal{C}$ . Une flèche  $f$  de source  $X$  et de but  $Y$  sera notée :

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  a une flèche « identité » :  $X \xrightarrow{1} X$ , et si on a des flèches  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , alors on a une flèche  $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ , appelée « composition de  $f$  et  $g$  ». Ces données doivent satisfaire les axiomes suivants :

---

1. Ici j'évite de dire qu'on a un « ensemble » d'objets ou une « classe » d'objets (c'est-à-dire une collection trop grosse pour être un ensemble). En fait, on a une grande liberté sur cette question et la collection des objets ou des flèches d'une catégorie peut être à peu près ce qu'on veut. Bien sûr, dans les exemples « historiques » de catégories, qui sont ceux qu'on utilise principalement ici, les collections des objets et des flèches ne sont pas des ensembles. On parle alors de « grande catégorie ». Quand au contraire les collections des objets et des flèches sont des ensembles, on parle de « petite catégorie ».

- *Éléments neutres* : pour toute flèche  $X \xrightarrow{f} Y$ , on a  $f \circ 1 = f = 1 \circ f$ ,
- *Associativité* : pour toutes flèches  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$  on a  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

☞ **2 Exemple.** Des exemples de catégories qui sont importants pour la topologie algébrique (et qui sont aussi les exemples historiques) sont les suivants :

- La catégorie **Ens** des ensembles et applications.
- La catégorie **Top** des espaces topologiques et applications continues.
- La catégorie **Gr** des groupes et morphismes de groupes.
- La catégorie **Ab** des groupes abéliens et morphismes de groupes.
- Pour tout corps commutatif  $k$ , la catégorie **Vect** $_k$  des espaces vectoriels sur  $k$  et applications  $k$ -linéaires.

La vérification du fait que ces exemples sont bien des catégories, c'est-à-dire que les conditions de la définition ci-dessus sont satisfaites, est évidemment triviale. Les exemples ci-dessus sont bien sûr de grandes catégories. Plus généralement, pour une structure mathématique quelconque pour laquelle on a une notion de morphisme, on a le plus souvent une « catégorie des modèles de cette structure ».

D'autres exemples, cette fois de petites catégories, nous seront également utiles :

- Un ensemble  $X$  préordonné<sup>(2)</sup> est une catégorie dont les objets sont les éléments de  $X$ , dans laquelle il y a une seule flèche de  $x$  vers  $y$  si  $x \leq y$ , aucune flèche sinon. Noter que la donnée d'un ensemble préordonné est équivalente à la donnée d'une petite catégorie dans laquelle il y a au plus une flèche entre deux objets.
- Un groupe est une petite catégorie qui a un seul objet (anonyme) et dont les flèches sont les éléments du groupe. La composition des flèches est la multiplication du groupe, la flèche identité de l'unique objet est l'élément neutre du groupe.
- Plus généralement, un monoïde est une catégorie à un seul objet (et réciproquement !). Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative avec élément neutre. Un groupe n'est rien d'autre qu'un monoïde dans lequel tous les éléments sont inversibles.

☞ **3 Remarque.** Quiconque a fait un peu de mathématiques sait qu'il ne faut pas confondre la composition des applications avec l'opération qui consiste à appliquer une fonction à un argument. Il est toutefois d'usage en mathématiques de noter ces deux concepts par simple juxtaposition. Ainsi,  $gf$  pourra être une notation pour  $g \circ f$  et  $fx$  une notation pour  $f(x)$ . Un peu de réflexion permet pratiquement toujours de lever l'ambiguïté, ce qui est d'ailleurs essentiellement dû au fait que pour des raisons de typage, l'une des deux possibilités n'a souvent pas de sens. Toutefois, nous noterons ici le plus souvent la composition à l'aide du signe  $\circ$  afin de rendre la lecture plus facile. Ce genre de vœu pieux a ses limites. Par exemple, si la catégorie est un groupe, la composition est la multiplication du groupe, et noter la multiplication à l'aide de  $\circ$  alourdirait tout à fait inutilement l'écriture. On procédera souvent de même pour les groupoïde. De même, la composition des foncteurs sera le plus souvent notée par juxtaposition. Notons enfin que les « transformations naturelles » que nous allons définir plus loin peuvent se composer de diverses façons (compositions verticale, horizontale et hétérogène). Seule la composition verticale sera notée à l'aide de  $\circ$ . Les deux autres seront notées par simple juxtaposition, et la composition (ordinaire) des foncteurs qui peuvent apparaître dans des formules contenant des

---

2. C'est-à-dire un ensemble muni d'une relation binaire réflexive et transitive.

compositions hétérogènes sera notée exceptionnellement par simple juxtaposition. On trouvera plus loin plus de détails sur ces questions.

**4 Définition.** Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, et si  $X$  et  $Y$  sont deux objets de  $\mathcal{C}$ , la collection des flèches de  $X$  vers  $Y$  sera notée  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Si pour tous objets  $X$  et  $Y$ ,  $\mathcal{C}(X, Y)$  est un ensemble, la catégorie  $\mathcal{C}$  est dite « localement petite ».

Toutes les catégories que nous allons utiliser sont localement petites.

**5 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $f$  est « inversible », ou que  $f$  est un « isomorphisme », s'il existe une flèche  $g : Y \rightarrow X$  (qu'on notera le plus souvent  $f^{-1}$ ), telle que  $f \circ g = 1$  et  $g \circ f = 1$ .

On peut donc reformuler la définition des groupes de la façon suivante : Un groupe est une petite catégorie à un seul objet dont toutes les flèches sont des isomorphismes. D'ailleurs, une catégorie avec un nombre quelconque d'objets dont toutes les flèches sont des isomorphismes est appelée un « groupoïde ».

**6 Définition.** Les isomorphismes  $f : X \rightarrow X$  d'un objet  $X$  d'une catégorie vers lui-même sont appelés des « automorphismes » de  $X$ . Il est clair qu'ils forment un groupe (au moins dans le cas d'une catégorie localement petite), noté  $\text{Aut}(X)$ , pour la composition des flèches, et dont l'élément neutre est la flèche identité de  $X$ .

De même qu'il y a des morphismes de groupes, des applications continues entre espaces topologiques, etc. . . c'est-à-dire plus généralement des « morphismes » entre deux modèles d'une même structure, il y a des morphismes entre catégories, qu'on appelle des « foncteurs » :

**7 Définition.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des catégories. Un « foncteur covariant (resp. contravariant) »  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur un objet  $F(X)$  de  $\mathcal{D}$  et toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  sur une flèche  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  ( $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$  dans le cas d'un foncteur contravariant) de  $\mathcal{D}$ , en respectant les structures de catégories, c'est-à-dire que :

- $F(1_X) = 1_{F(X)}$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  pour toute paire de flèches composables de  $\mathcal{C}$  (foncteur covariant), ou  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$  (foncteur contravariant).

On a donc une catégorie **Cat** des petites catégories (qui est une grande catégorie) et une catégorie des grandes catégories (qui est une « très grande » catégorie). On vérifie facilement que les morphismes entre des catégories qui sont des groupes sont précisément les morphismes de groupes, de même pour les monoïdes. On pourra éventuellement s'étonner de ce qu'il existe deux sortes de morphismes (covariant et contravariant) entre catégories. En fait, dans le cas des ensembles ordonnés ces deux notions sont celles de fonction croissante et de fonction décroissante, qui nous sont déjà familières.

L'un des exemples historiques de foncteur<sup>(3)</sup> est celui de l'espace dual d'un espace vectoriel. Le foncteur  $F : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$  associe à chaque espace vectoriel  $X$  son espace dual  $F(X) = X^*$ , c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur  $X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application linéaire,  $F$  lui associe sa « transposée » :  $f^* : Y^* \rightarrow X^*$ . On a  $(1_X)^* = 1_{X^*}$  et  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ . Il s'agit bien sûr d'un foncteur contravariant.

---

3. Utilisé par Eilenberg et Mac Lane dans leurs articles fondateurs.

# 1 Groupoïdes.

Rappelons qu'un groupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes. Noter qu'une sous-catégorie d'un groupoïde n'est pas nécessairement un groupoïde, car une telle sous-catégorie, si elle contient une flèche  $f$  ne contient pas nécessairement son inverse (par exemple, le monoïde additif  $\mathbb{N}$  est une sous-catégorie du groupe additif  $\mathbb{Z}$ , sans pour autant être un groupe). Toutefois, toute sous-catégorie pleine d'un groupoïde est clairement un groupoïde. En particulier, si  $X$  est un objet d'un groupoïde  $\mathcal{C}$ , la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  ayant  $X$  pour unique objet est un groupoïde, en fait un groupe, qui n'est autre que  $\text{Aut}(X)$ .

La relation d'isomorphisme est clairement une relation d'équivalence sur la classe des objets d'un groupoïde  $\mathcal{C}$ . Toute sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  ayant pour objets les éléments d'une classe d'isomorphisme est appelée une « composante connexe de  $\mathcal{C}$  ». Un groupoïde est « connexe » si et seulement si il a une seule composante connexe, ce qui revient à dire que tous ses objets sont isomorphes.

Soit  $u : X \rightarrow Y$  une flèche dans un groupoïde  $\mathcal{C}$ . L'application  $\text{Aut}(u) = (f \mapsto ufu^{-1})$  envoie  $\text{Aut}(X)$  dans  $\text{Aut}(Y)$ . Elle est appelée « conjugaison par  $u$  ».

$$f \circ X \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{u^{-1}} \end{array} Y \begin{array}{c} \circ ufu^{-1} \end{array}$$

**8 Lemme.** *Pour tout groupoïde  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Aut}$  est un foncteur (covariant) de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie **IsoGr** des groupes et isomorphismes de groupes. De plus, deux flèches parallèles  $u, v : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  sont envoyées sur des morphismes conjugués, c'est-à-dire qu'il existe  $w \in \text{Aut}(Y)$  tel que  $\text{Aut}(v)(f) = w \text{Aut}(u)(f)w^{-1}$ , pour tout  $f \in \text{Aut}(X)$ .*

*Démonstration.* On sait déjà que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Aut}(X)$  est un groupe. Soit  $u : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . On a, pour tous  $f$  et  $g$  dans  $\text{Aut}(X)$ ,  $\text{Aut}(u)(gf) = ugf u^{-1} = ugu^{-1} u f u^{-1} = \text{Aut}(u)(g) \text{Aut}(u)(f)$ , ce qui montre que  $\text{Aut}(u) : \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(Y)$  est un morphisme de groupes.

Par ailleurs  $\text{Aut}(1_X) = 1_{\text{Aut}(X)}$  et  $(\text{Aut}(u) \text{Aut}(v))(f) = uvf v^{-1} u^{-1} = (uv)f(uv)^{-1} = \text{Aut}(uv)(f)$ .  $\text{Aut}$  est donc un foncteur (covariant) de  $\mathcal{C}$  vers **Gr**, et même vers **IsoGr** puisque tout foncteur préserve les isomorphismes.

Si  $u, v : X \rightarrow Y$  sont des flèches parallèles de  $\mathcal{C}$ , On a  $\text{Aut}(v)(f) = v f v^{-1} = v u^{-1} u f u^{-1} u v^{-1} = w \text{Aut}(u)(f) w^{-1}$ , avec  $w = v u^{-1}$ .  $\square$

Il en résulte bien sûr que si  $X$  et  $Y$  sont dans une même composante connexe du groupoïde  $\mathcal{C}$ , les groupes  $\text{Aut}(X)$  et  $\text{Aut}(Y)$  sont isomorphes, mais généralement, ils ne le sont pas d'une manière canonique, sauf bien sûr s'ils sont commutatifs, d'après ce qui précède. Noter également que même si  $\text{Aut}(X)$  et  $\text{Aut}(Y)$  ne sont pas isomorphes d'une manière canonique (pour  $X$  isomorphe à  $Y$ ), tout sous-groupe distingué de  $\text{Aut}(X)$  a la même image par tous les morphismes  $\text{Aut}(u)$  (pour  $u : X \rightarrow Y$ ).

**9 Définition.** *Un groupoïde  $\mathcal{C}$  est dit « simplement connexe » si tous les diagrammes de  $\mathcal{C}$  sont commutatifs.<sup>(4)</sup>*

Il revient au même de dire que pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}(X, Y)$  a au plus un élément. En pratique, un groupoïde simplement connexe est tel que si on va de  $X$  à  $Y$  en suivant des flèches composables,

4. On n'impose pas que  $\mathcal{C}$  soit connexe.

la composition de ces flèches ne dépend pas du chemin suivi. Bien sûr, si  $\mathcal{C}$  est simplement connexe,  $\mathcal{C}(X, X)$  a au plus un élément et tous les groupes d'automorphismes des objets de  $\mathcal{C}$  sont réduits à leur élément neutre.

## 2 Congruences et catégories quotients.

On construit l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  des entiers modulo  $n$  en faisant le quotient du groupe (additif)  $\mathbb{Z}$  par la relation d'équivalence qui identifie deux entiers dont la différence est divisible par  $n$ . La raison pour laquelle le quotient ainsi obtenu a une structure naturelle de groupe est que cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition de  $\mathbb{Z}$ . Autrement-dit, elle est une « congruence » relativement à l'addition de  $\mathbb{Z}$ . On imagine facilement que cette construction se généralise aux catégories.

**10 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une « congruence » sur  $\mathcal{C}$  est une relation d'équivalence  $\sim$  entre flèches parallèles de  $\mathcal{C}$  qui est compatible avec la composition, c'est-à-dire que si on a des flèches

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow f' & & \searrow g' & \\ & & & & \end{array}$$

telles que  $f \sim f'$  et  $g \sim g'$ , alors  $g \circ f \sim g' \circ f'$ .

**11 Lemme.** Soit  $\sim$  une congruence sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . On a une « catégorie quotient », notée  $\mathcal{C}/\sim$ , dont les objets sont ceux de  $\mathcal{C}$  et dont les flèches de  $X$  vers  $Y$  sont les classes d'équivalence de flèches de  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $Y$ . Il y a un foncteur de projection canonique  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ , et il est tel que pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que  $F(f) = F(g)$  pour toutes flèches  $f$  et  $g$  telles que  $f \sim g$ , il existe un unique foncteur  $\bar{F} : \mathcal{C}/\sim \rightarrow \mathcal{D}$  ( $F$  « passé au quotient ») tel que  $\bar{F} \circ \pi = F$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}/\sim \\ & \searrow F & \swarrow \bar{F} \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

*Démonstration.* La démonstration n'est qu'un remake trivial de celle qui vaut pour le cas des groupes. Noter que le fait que  $\pi$  soit un foncteur signifie en particulier qu'on a  $\pi(g \circ f) = \pi(g) \circ \pi(f)$ , autrement-dit que pour calculer la composée de deux flèches (composables) de  $\mathcal{C}/\sim$ , il suffit de choisir des représentants de ces deux flèches dans  $\mathcal{C}$ , de les composer et de prendre la classe d'équivalence du résultat obtenu. On voit qu'on a affaire à une simple généralisation du calcul modulo  $n$  sur les entiers.  $\square$

**12 Remarque.** Le foncteur  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$  est clairement bijectif sur les objets et surjectif sur les flèches. Comme tout foncteur préserve les isomorphismes, on voit que  $\mathcal{C}/\sim$  est un groupoïde dès que  $\mathcal{C}$  est un groupoïde, et on retrouve donc le cas particulier des groupes.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 25 janvier 2012.

Le groupe fondamental est le foncteur historique de la topologie algébrique. Il a été introduit par Henri Poincaré au début du XX<sup>ième</sup> siècle. À chaque point  $a$  d'un espace topologique  $X$  est attaché un groupe, appelé « groupe fondamental de  $X$  en  $a$  » et noté  $\pi_1(X, a)$ . Mais on peut aussi utiliser plusieurs points de  $X$  au lieu du seul point  $a$ , c'est-à-dire une partie  $A$  de  $X$ . Ce qu'on définit n'est alors plus un groupe, mais un groupoïde, qu'on notera  $\Pi(X, A)$ , qui a autant d'objets qu'il y a de points dans  $A$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(X, a)$ , qui n'est autre que  $\Pi(X, \{a\})$ , est alors le groupe des automorphismes de l'objet  $a$  de n'importe quel groupoïde  $\Pi(X, A)$  tel que  $a \in A$ . Bien que  $\Pi(X, A)$  et  $\pi_1(X, a)$  soient des catégories équivalentes quand  $X$  est connexe par arcs et  $a \in A$ ,  $\Pi(X, A)$  s'avère être plus pratique et plus naturel. Il permet également d'obtenir des résultats qu'on ne peut pas obtenir en ne considérant que des groupes. Par exemple, le théorème de van Kampen exprimé à l'aide des groupoïdes permet de calculer  $\pi_1(\mathbb{S}^1, *)$ , ce qu'on ne peut pas faire avec le théorème de van Kampen exprimé avec des groupes.

## 1 Chemins.

**1 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique,  $a$  et  $b$  deux points de  $X$ . Un « chemin (de  $X$ ) de  $a$  à  $b$  » est une application continue  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  (où  $u$  et  $l$  sont deux réels et  $0 \leq l$ ), telle que  $\gamma(u) = a$  et  $\gamma(u + l) = b$ . Le réel  $l$  est appelé la « longueur » du chemin  $\gamma$  (qui peut être nulle). Si  $u = 0$  et  $l = 1$ , on dit que le chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  est « standard ». Si  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  est un chemin quelconque, le chemin standard  $\bar{\gamma}$  défini par  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(u + sl)$  est appelé le « standardisé de  $\gamma$  ».

Les points  $a$  et  $b$  sont appelés respectivement l'« origine » et l'« extrémité » de  $\gamma$ .  $a$  et  $b$  seront aussi appelés « les extrémités de  $\gamma$  ». Il est clair que tout chemin a les mêmes extrémités (et la même image) que son standardisé.

**2 Définition.** Soient  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  et  $\delta : [x, x + k] \rightarrow X$  deux chemins d'un espace topologique  $X$ . On dit que «  $\delta$  est concaténable à  $\gamma$  » si l'origine de  $\delta$  est l'extrémité de  $\gamma$  (i.e.  $\delta(x) = \gamma(u + l)$ ). Si tel est le cas, la concaténation  $\gamma * \delta : [u, u + l + k] \rightarrow X$  est le chemin défini par

$$(\gamma * \delta)(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } s \in [u, u + l] \\ \delta(s - u - l + x) & \text{si } s \in [u + l, u + l + k] \end{cases}$$

L'application  $\gamma \star \delta$  est bien définie car pour  $u + l \leq s \leq u + l + k$ , on a  $x \leq s - u - l + x \leq x + k$ , et  $\gamma(u + l)$  étant égal à  $\delta(x)$ , un lemme bien connu de topologie générale montre que  $\gamma \star \delta$  est une fonction continue. Noter également que si deux chemins sont concaténables, il en est de même de leurs standardisés (puisque la standardisation ne modifie pas les extrémités).

**3 Lemme.** *La concaténation des chemins est associative, et les chemins de longueur nulle sont neutres pour la concaténation.*

*Démonstration.* Soient  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$ ,  $\delta : [x, x + k] \rightarrow X$  et  $\epsilon : [y, y + m] \rightarrow X$  trois chemins de  $X$ , tels que  $\gamma(u + l) = \delta(x)$  et  $\delta(x + k) = \epsilon(y)$ . La définition 2 nous donne

$$((\gamma \star \delta) \star \epsilon)(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } s \in [u, u + l] \\ \delta(s - u - l + x) & \text{si } s \in [u + l, u + l + k] \\ \epsilon(s - u - l - k + y) & \text{si } s \in [u + l + k, u + l + k + m] \end{cases}$$

Par ailleurs, elle donne

$$(\delta \star \epsilon)(s) = \begin{cases} \delta(s) & \text{si } s \in [x, x + k] \\ \epsilon(s - x - k + y) & \text{si } s \in [x + k, x + k + m] \end{cases}$$

et comme  $(s - u - l + x) - x - k + y = s - u - l - k + y$ , on voit que  $((\gamma \star \delta) \star \epsilon)(s) = (\gamma \star (\delta \star \epsilon))(s)$ . L'assertion concernant les chemins de longueur nulle est triviale.  $\square$

En conséquence, pour toute paire topologique  $(X, A)$ , on a une catégorie **Chem** $(X, A)$  des « chemins de  $X$  relatifs à  $A$  ». Les objets de **Chem** $(X, A)$  sont les éléments de  $A$ , et les flèches de  $a \in A$  vers  $b \in A$  sont les chemins de  $a$  à  $b$ . La composition des flèches est la concaténation des chemins et le chemin de longueur nulle en  $a \in A$ , est l'identité de  $a$ .

**4 Lemme.** ***Chem** est un foncteur (covariant) de la catégorie **Top2** des paires topologiques vers la catégorie **Cat** des petites catégories.*

*Démonstration.* On a déjà construit **Chem** sur les objets. Soit  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  une application continue. Si  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  est un chemin de  $X$  de  $a \in A$  à  $b \in A$ , le composé  $f \circ \gamma : [u, u + l] \rightarrow Y$  est un chemin de  $f(a) \in B$  à  $f(b) \in B$ . Il est immédiat que cette correspondance préserve la concaténation et les chemins de longueur nulle.  $\square$

**Exercice 1.** En remarquant que **Chem** $(f) : \mathbf{Chem}(X, A) \rightarrow \mathbf{Chem}(Y, B)$  préserve la longueur des chemins, montrer que **Chem** n'a pas d'adjoint à gauche. Montrer que **Chem** n'a pas non plus d'adjoint à droite. Montrer que **Chem** préserve quand-même les produits et les sommes.

**5 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique,  $a$  et  $b$  deux points de  $X$ ,  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  et  $\delta : [x, x + k] \rightarrow X$  deux chemins de  $a$  à  $b$  (on a donc  $\gamma(u) = \delta(x) = a$  et  $\gamma(u + l) = \delta(x + k) = b$ ). On dit que «  $\gamma$  est homotope à  $\delta$  » s'il existe une application continue (appelée une « homotopie

de  $\gamma$  à  $\delta$  »)  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que

$$\begin{array}{ll} h(0, s) &= \gamma(u + sl) && \text{pour tout } s \in [0, 1] \\ h(1, s) &= \delta(x + sk) && \text{pour tout } s \in [0, 1] \\ h(t, 0) &= a && \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ h(t, 1) &= b && \text{pour tout } t \in [0, 1] \end{array}$$

☞ **6 Lemme.** *Tout chemin est homotope à son standardisé.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  un chemin, et  $\delta : [0, 1] \rightarrow X$  son standardisé. On a  $\delta(s) = \gamma(u + sl)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Il suffit de poser  $h(t, s) = \gamma(u + sl)$ . On a alors en effet :

$$\begin{array}{ll} h(0, s) &= \gamma(u + sl) \\ h(1, s) &= \gamma(u + sl) = \delta(s) = \delta(0 + s \times 1) \\ h(t, 0) &= \gamma(u) = a \\ h(t, 1) &= \gamma(v) = b \end{array}$$

□

☞ **7 Remarque.** On peut éventuellement s'étonner du fait que l'homotopie  $h$  de la démonstration précédente ne fasse pas intervenir  $t$ . La raison est qu'une homotopie entre deux chemins est juste par définition une homotopie entre leurs standardisés. Du point de vue de l'homotopie, un chemin est donc essentiellement indiscernable de son standardisé, ce qui fait que l'homotopie de la démonstration précédente est « constante par rapport à  $t$  ».

☞ **8 Définition.** *Un chemin  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  d'un espace topologique  $X$  est dit « constant » si  $\gamma$  est une application constante.*

On a dans ce cas  $\gamma(s) = a$  (où  $a$  est un point de  $X$ ) pour tout  $s \in [u, u + l]$ . Les extrémités d'un tel chemin sont  $a$  et  $a$ . Le standardisé d'un chemin constant est évidemment constant. Si un chemin  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  est tel que  $l = 0$  (ce qui est permis par la définition 1), et si  $\gamma(u) = a$ , il est le « chemin de longueur nulle en  $a$  » et il est nécessairement constant.

☞ **9 Lemme.** *Soit  $X$  un espace topologique,  $a$  et  $b$  deux points de  $X$ . L'homotopie entre chemins de  $a$  à  $b$  est une relation d'équivalence.*

*Démonstration.* On a vu que deux chemins sont homotopes si et seulement si leurs standardisés sont homotopes. Il suffit donc de démontrer que l'homotopie est une relation d'équivalence entre chemins standard. Le lecteur complétera lui-même cette démonstration. □

Bien sûr, deux chemins qui ont le même standardisé sont homotopes.

☞ **10 Lemme.** *L'homotopie est une congruence sur la catégorie  $\mathbf{Chem}(X, A)$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que si les chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $a$  à  $b$  sont homotopes, et si les chemins  $\delta$  et  $\delta'$  de  $b$  à  $c$  sont homotopes, alors les chemins  $\gamma \star \delta$  et  $\gamma' \star \delta'$  (de  $a$  à  $c$ ) sont

homotopes. Soit  $h_1$  une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma'$  et  $h_2$  une homotopie de  $\delta$  à  $\delta'$ . On a

$$\begin{array}{ll} h_1(0, s) &= \gamma(u + sl) & h_2(0, s) &= \delta(x + sk) \\ h_1(1, s) &= \gamma'(u' + sl') & h_2(1, s) &= \delta'(x' + sk') \\ h_1(t, 0) &= a & h_2(t, 0) &= b \\ h_1(t, 1) &= b & h_2(t, 1) &= c \end{array}$$

Il suffit de poser  $h(t, s) = h_1(t, 2s)$  pour  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  et  $h(t, s) = h_2(t, 2s - 1)$  pour  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Pour  $s = \frac{1}{2}$ , on a  $h_1(t, 2s) = b = h_2(t, 2s - 1)$ . La fonction  $h$  est donc bien définie et continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Par ailleurs, c'est une homotopie de  $\gamma \star \delta$  à  $\gamma' \star \delta'$ .  $\square$

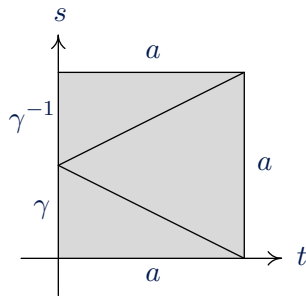
En particulier, on voit que bien que le standardisé d'une concaténation  $\gamma \star \delta$  ne soit pas la concaténation des standardisés de  $\gamma$  et  $\delta$  (puisque le premier est défini sur  $[0, 1]$  et la seconde sur  $[0, 2]$ ), ces deux chemins sont homotopes.

**11 Lemme.** Soit  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  une application continue. Si les chemins  $\gamma$  et  $\delta$  de  $a \in A$  à  $b \in A$  sont homotopes, il en est de même des chemins  $f \circ \gamma$  et  $f \circ \delta$ .  $\square$

Soient  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  un chemin de  $a$  à  $b$  d'un espace topologique  $X$ . On pose  $\gamma^{-1}(s) = \gamma(2u + l - s)$ . Noter que  $\gamma^{-1}$  est bien défini, car pour si  $u \leq s \leq u + l$ , on a  $u \leq 2u + l - s \leq u + l$ . De plus  $\gamma^{-1}(u) = \gamma(u + l) = b$  et  $\gamma^{-1}(u + l) = \gamma(u) = a$ . L'origine de  $\gamma^{-1}$  est donc l'extrémité de  $\gamma$  et réciproquement.  $\gamma^{-1}$  est appelé le « chemin inverse de  $\gamma$  ».

**12 Lemme.** Pour tout chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  dans un espace topologique  $X$ ,  $\gamma \star \gamma^{-1}$  est homotope au chemin de longueur nulle en  $a$  et  $\gamma^{-1} \star \gamma$  est homotope au chemin de longueur nulle en  $b$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [u, u + l] \rightarrow X$  un chemin de  $a$  à  $b$  de  $X$ .



On définit une homotopie  $h$  en posant

$$\begin{array}{ll} h(t, s) &= \gamma(u + 2sl) & \text{pour } (t, s) \text{ dans le triangle inférieur } (2s \leq 1 - t) \\ h(t, s) &= \gamma(u + (1 - t)l) & \text{pour } (t, s) \text{ dans le triangle médiant } (1 - t \leq 2s \leq 1 + t) \\ h(t, s) &= \gamma(u + (2 - 2s)l) & \text{pour } (t, s) \text{ dans le triangle supérieur } (1 + t \leq 2s) \end{array}$$

Pour  $2s = 1 - t$ , on a  $\gamma(u + 2sl) = \gamma(u + (1 - t)l)$ , et pour  $2s = 1 + t$ , on a  $\gamma(u + (1 - t)l) = \gamma(u + (2 - 2s)l)$ . On a donc une fonction continue  $h$  bien définie sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ , qui prend par ailleurs sur les bords du carré les valeurs indiquées sur le dessin. On traite de même le cas de  $\gamma^{-1} \star \gamma$ .  $\square$

## 2 Le groupoïde fondamental $\Pi(X, A)$ .

Il résulte du lemme **12** que le quotient de la catégorie **Chem**( $X, A$ ) par la congruence d'homotopie est un groupoïde.

☞ **13 Définition.** Soit  $(X, A)$  une paire topologique. Le groupoïde quotient de **Chem**( $X, A$ ) par la relation d'homotopie est appelé le « groupoïde fondamental de  $X$  relatif à  $A$  » et noté  $\Pi(X, A)$ . Dans le cas où  $A = X$ , il est appelé le « groupoïde fondamental de  $X$  ». Pour tout point  $a \in X$ ,  $\Pi(X, \{a\})$  est noté  $\pi_1(X, a)$  et appelé le « groupe fondamental de  $X$  en  $a$  ».

On verra plus loin des exemples pour lesquels le groupe  $\pi_1(X, a)$  n'est pas commutatif.

☞ **14 Lemme.** Soit  $(X, A, B)$  un triplet topologique ( $B \subset A \subset X$ ). Alors  $\Pi(X, B)$  est la sous-catégorie pleine de  $\Pi(X, A)$  dont les objets sont les éléments de  $B$ .

En particulier, on voit que pour  $a \in A$ ,  $\pi_1(X, a)$  est le groupe des automorphismes de  $a$  dans le groupoïde  $\Pi(X, A)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du fait que  $\Pi(X, A)(a, b)$  ne dépend que de  $X$ ,  $a$  et  $b$ , et non pas de  $A$ . □

☞ **15 Lemme.** Soient  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  des paires topologiques,  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un morphisme entre elles. Alors  $f$  induit un morphisme de groupoïdes  $\Pi(f) : \Pi(X, A) \rightarrow \Pi(Y, B)$ , et  $\Pi$  devient ainsi un foncteur de **Top2** vers **Grpd**.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du lemme **11** (page 4). □

☞ **16 Lemme.** Si l'espace topologique  $X$  est contractile,  $\Pi(X, A)$  est simplement connexe pour toute partie non vide  $A$  de  $X$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $\Pi(X, A)$  est simplement connexe si et seulement si il n'y a pas dans  $\Pi(X, A)$  plus d'une flèche entre deux objets. Comme  $X$  est connexe par arcs,  $\Pi(X, A)$  est connexe, et il suffit de montrer que pour au moins un point  $a$  de  $A$ ,  $\Pi(X, A)(a, a)$  est un singleton, et pour cela, il suffit en fait de montrer que  $\pi_1(X, a) = 0$  pour au moins un point de  $X$  (peu importe qu'il soit ou non dans  $A$ ). Comme  $X$  est contractile, l'identité de  $X$  est homotope à l'application constante qui envoie tout élément de  $X$  sur un point  $*$ . Si  $\sigma \in \mathbf{Chem}(X, \{*\})$ , la composition par cette homotopie montre que  $\sigma$  est homotope au chemin constant en  $*$ . Ainsi  $\Pi(X, \{*\}) = \pi_1(X, *)$  n'a qu'un élément. □

## 3 Problèmes universels.

La notion de « problème universel » est sans conteste la plus importante de la théorie des catégories. C'est elle qui donne à la théorie son caractère behavioriste (à ce sujet, on pourra consulter [http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours\\_2010.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf)). Elle peut être exprimée de diverses façons : objet initial ou final, limite ou colimite, flèche universelle, foncteur adjoint,

classifiant, ... et ces divers aspects du concept de problème universel ont tous leur utilité en topologie algébrique (et dans d'autres disciplines bien sûr).

☞ **17 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un objet  $I$  de  $\mathcal{C}$  est dit « initial » si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  il existe une et une seule flèche  $I \rightarrow X$ . Un objet  $F$  de  $\mathcal{C}$  est dit « final » si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  il existe une et une seule flèche  $X \rightarrow F$ .

☞ **18 Exemple.** Voici quelques exemples assez triviaux d'objets initiaux et finals. On verra des exemples moins triviaux plus loin.

- L'ensemble vide est initial dans **Ens** et **Top**.
- Tout singleton est final dans **Ens** et **Top**.
- $(\{*\}, *)$  est à la fois initial et final dans **Top**.
- $\mathbb{Z}$  est initial dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires.
- Tout groupe réduit à son élément neutre est initial et final dans **Gr** et dans **Ab**.

Les objets initiaux (ou finals) ont une propriété, essentiellement triviale à établir, mais dont les conséquences sont considérables. C'est en effet cette propriété qui est à l'origine de la notion de « problème universel », une notion qui a révolutionné la façon de penser les mathématiques.

☞ **19 Lemme.** Si  $I_1$  et  $I_2$  sont deux objets initiaux dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , ils sont isomorphes par un unique isomorphisme (qu'on appelle l'« isomorphisme canonique »). On a le même résultat avec deux objets finals.

*Démonstration.* Comme  $I_1$  est initial, il existe une unique flèche  $f : I_1 \rightarrow I_2$ . De même, il existe une unique flèche  $g : I_2 \rightarrow I_1$ . Toujours parce que  $I_1$  est initial, le composé  $g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$  ne peut être que l'identité de  $I_1$ . De même, le composé  $f \circ g : I_2 \rightarrow I_2$  ne peut être que l'identité de  $I_2$ .  $\square$

La conséquence de cette propriété est qu'un objet mathématique qu'on définit en disant qu'il est initial ou final dans une catégorie est bien défini à isomorphisme canonique près (ce qui ne prouve pas bien sûr son existence). Comme pratiquement tout objet mathématique peut être défini de cette façon, on comprend l'importance de ce concept.

Le cours s'est terminé par quelques explications sur les produits et les sommes dans une catégorie. À ce sujet, on pourra consulter [http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours\\_2010.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf) sections 2.2.2 et 2.2.3.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 30 janvier 2012.

Le cours a commencé par un exposé rapide de la notion de somme amalgamée (carrés cocartésiens). Se reporter à [http://people.math.jussieu.fr/~alp/cours\\_2010.pdf](http://people.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf) pour cette question.

## 1 Le théorème de van Kampen.

Dans toute cette section nous considérons un espace topologique  $X$ , deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$  couvrant  $X$ , et une partie  $A$  de  $U \cap V$  ayant au moins un élément dans chaque composante connexe par arcs de  $U \cap V$ . Le théorème de van Kampen nous explique comment calculer le groupoïde  $\Pi(X, A)$  à partir du diagramme de groupoïdes

$$\Pi(U, A) \longleftarrow \Pi(U \cap V, A) \longrightarrow \Pi(V, A)$$

dont les flèches sont induites par les inclusions.

### 1 Définition.

- Si  $a \in A$ ,  $b \in A$ , si  $\sigma : [u, u + l] \rightarrow X$  est un chemin de  $a$  à  $b$  dans  $X$ , et si  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\sigma_i^n$  (ou  $\sigma_i$ ) la restriction de  $\sigma$  à l'intervalle  $[u + \frac{il}{2^n}, u + \frac{(i+1)l}{2^n}]$  (où bien sûr  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ). Le chemin  $\sigma_i^n$  sera appelé le «  $i^{\text{ième}}$   $n$ -tronçon » (ou «  $i^{\text{ième}}$  tronçon ») de  $\sigma$ .
- On dira que le chemin  $\sigma$  est «  $n$ -propre », si pour tout  $i$ , l'image de  $\sigma_i^n$  est incluse dans  $U$  ou incluse dans  $V$ .
- Une homotopie  $h$  entre deux chemins  $\sigma$  et  $\tau$  de  $X$  de  $a \in A$  à  $b \in A$ , est dite «  $n$ -propre » si pour tout  $i$  ( $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ),  $h([0, 1] \times [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}])$  est contenu dans  $U$  ou dans  $V$ . Évidemment, ceci implique que les chemins  $\sigma$  et  $\tau$  sont eux-mêmes  $n$ -propres, et on dira dans ce cas qu'ils sont «  $n$ -proprement homotopes ».

 **2 Lemme.** Pour tout chemin  $\sigma : [u, u + l] \rightarrow X$  de  $a \in A$  à  $b \in A$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma$  soit  $n$ -propre. Si  $\sigma$  est  $n$ -propre et si  $n \leq m$ , alors  $\sigma$  est  $m$ -propre.

*Démonstration.*  $\sigma^{-1}(U)$  et  $\sigma^{-1}(V)$  sont deux ouverts qui recouvrent  $[u, u+l]$ . Par le lemme de Lebesgue, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que chaque segment de la forme  $[u + \frac{il}{2^n}, u + \frac{(i+1)l}{2^n}]$  soit inclus soit dans  $\sigma^{-1}(U)$  soit dans  $\sigma^{-1}(V)$ .  $\sigma$  est donc  $n$ -propre. La deuxième assertion est triviale.  $\square$

**3 Lemme.** *Si deux chemins de  $a \in A$  à  $b \in A$ ,  $\sigma$  et  $\tau$ , sont homotopes, il existe  $n \in \mathbb{N}$  et une suite finie  $\gamma_0, \dots, \gamma_k$  de chemins de  $a$  à  $b$  tels que  $\gamma_0 = \sigma$ ,  $\gamma_k = \tau$  et pour tout  $i$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ),  $\gamma_i$  soit  $n$ -proprement homotope à  $\gamma_{i+1}$ .*

*Démonstration.* Comme tout chemin  $n$ -propre est clairement  $n$ -proprement homotope à son standardisé, on peut supposer que  $\sigma$  et  $\tau$  sont standard. Soit  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une homotopie de  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  à  $\tau : [0, 1] \rightarrow X$  ( $h(0, s) = \sigma(s)$ ,  $h(1, s) = \tau(s)$ ,  $h(t, 0) = a$ ,  $h(t, 1) = b$ ).  $h^{-1}(U)$  et  $h^{-1}(V)$  sont deux ouverts qui recouvrent  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Il existe donc d'après le lemme de Lebesgue un entier  $n$  tel que tout carré de la forme  $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}] \times [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$  soit inclus soit dans  $h^{-1}(U)$  soit dans  $h^{-1}(V)$ . Posons  $k = 2^n$  et  $\gamma_i(s) = h(\frac{i}{2^n}, s)$ . La conclusion du lemme est alors satisfaite.  $\square$

**4 Lemme.** *Soit  $\sigma$  un chemin  $n$ -propre de  $a \in A$  à  $b \in A$ ,  $x$  une des extrémités d'un  $n$ -tronçon  $\sigma_i^n$  de  $\sigma$ .*

- *Si  $\sigma_i^n$  est contenu dans  $U \cap V$ , il existe un chemin contenu dans  $U \cap V$  de  $x$  à un élément de  $A$ .*
- *Si  $\sigma_i^n$  est contenu dans  $U$  (resp.  $V$ ), il existe un chemin contenu dans  $U$  (resp.  $V$ ) de  $x$  à un élément de  $A$ .*

*Démonstration.* La première assertion est triviale, puisque chaque composante connexe par arcs de  $U \cap V$  contient un élément de  $A$ . La seconde assertion requiert un raisonnement par récurrence sur  $i$ . Si  $i = 0$ , le tronçon  $\sigma_0$  a pour origine un élément de  $A$  ce qui résout le problème que  $x$  soit l'origine ou l'extrémité de  $\sigma_0$ . Si le résultat est acquis pour le tronçon  $\sigma_{i-1}$ , le problème est trivial si  $x$  est l'origine de  $\sigma_i$ . Si  $x$  est l'extrémité de  $\sigma_i$  il suffit de concaténer un chemin de  $U$  reliant l'origine de  $\sigma_i$  à un élément de  $A$  à  $\sigma_i$  lui-même.  $\square$

**5 Théorème.** (théorème de van Kampen) *Le carré de morphismes de groupoïdes (dont les flèches sont induites par les inclusions)*

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V, A) & \xrightarrow{i} & \Pi(U, A) \\ j \downarrow & & \downarrow k \\ \Pi(V, A) & \xrightarrow{l} & \Pi(X, A) \end{array}$$

*est cocartésien.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupoïde,  $\varphi : \Pi(U, A) \rightarrow G$  et  $\psi : \Pi(V, A) \rightarrow G$  deux morphismes de groupoïdes tels que le diagramme (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi(U \cap V, A) & \xrightarrow{i} & \Pi(U, A) \\
 j \downarrow & & \downarrow k \\
 \Pi(V, A) & \xrightarrow{l} & \Pi(X, A)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \varphi \\
 \searrow \psi \\
 \text{---} \theta \text{---} \\
 \searrow \\
 G
 \end{array}$$

soit commutatif. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme de groupoïdes  $\theta : \Pi(X, A) \rightarrow G$  tel que  $\theta \circ k = \varphi$  et  $\theta \circ l = \psi$ .

Si  $a$  est un objet de  $\Pi(X, A)$ , c'est-à-dire un élément de  $A$ , on a  $\varphi(a) = \varphi(i(a)) = \psi(j(a)) = \psi(a)$ . On pose donc  $\theta(a) = \varphi(a)$  et le diagramme ci-dessus est commutatif sur les objets. L'unicité de  $\theta$  sur les objets résulte de l'injectivité de  $k$  sur les objets.

Pour la suite de la démonstration, nous simplifions l'écriture en écrivant **Chem**( $X, A$ ) au lieu de **Fl**(**Chem**( $X, A$ )) et  $G$  au lieu de **Fl**( $G$ ). Afin de définir  $\theta$  sur les flèches de  $\Pi(X, A)$ , on va d'abord définir une application  $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \rightarrow G$  puis on montrera que  $\Theta$  passe au quotient pour donner l'application  $\theta : \Pi(X, A) \rightarrow G$  cherchée.

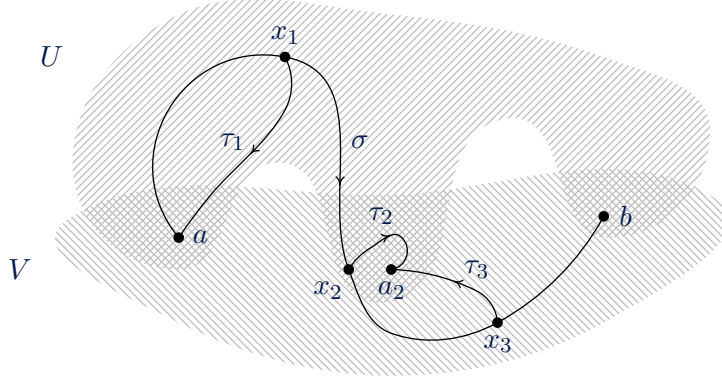
**Affirmation :** Il existe une application  $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \rightarrow G$  telle que (pour tous  $\sigma$  et  $\sigma'$  de **Chem**( $X, A$ )) :

- $\Theta(\sigma) = \varphi([\sigma])$  si  $\sigma$  est contenu dans  $U$ ,
- $\Theta(\sigma) = \psi([\sigma])$  si  $\sigma$  est contenu dans  $V$ ,
- $\Theta(\sigma \star \sigma') = \Theta(\sigma)\Theta(\sigma')$  si  $\sigma$  est concaténable à  $\sigma'$  (où la composition de  $G$  est notée par simple juxtaposition),
- $\Theta(\sigma) = \Theta(\sigma')$  si  $\sigma$  est homotope à  $\sigma'$ .

De plus,  $\Theta$  est unique, mais ce fait ne nous servira pas.

Notons d'abord que si un chemin  $\sigma \in \mathbf{Chem}(X, A)$  est contenu dans  $U \cap V$ , on a  $[\sigma] = i([\sigma])$  et  $[\sigma] = j([\sigma])$ , donc  $\varphi([\sigma]) = \psi([\sigma])$ . Les deux premières conditions sont donc compatibles. On utilisera cette propriété plusieurs fois.

Soit  $\sigma : [u, u + l] \rightarrow X$  un chemin quelconque de **Chem**( $X, A$ ). Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma$  soit  $n$ -propre (lemme 2 (page 1)). Pour chaque  $x_i = \sigma(u + \frac{il}{2^n})$  ( $i = 1, \dots, 2^n - 1$ ), soit  $\tau_i^n$  (aussi noté  $\tau_i$ ) un chemin de  $x_i$  à un point  $a_i$  de  $A$ , tel que  $\tau_i$  soit dans  $U \cap V$  si  $x_i \in U \cap V$ , sinon dans  $U$  (resp.  $V$ ) si  $x_i \in U$  (resp.  $V$ ) (lemme 4 (page 2)). On définit de plus les chemins  $\tau_0$  et  $\tau_{2^n}$  comme constants (et standard) respectivement en  $a$  et en  $b$ . Sur la figure ci-dessous, on a  $A = \{a, a_2, b\}$ ,  $n = 2$ ,  $a = a_0 = a_1$ ,  $a_2 = a_3$ ,  $b = a_4$  et les chemins  $\tau_0$  et  $\tau_4$  ne sont pas représentés puisque constants respectivement en  $a$  et  $b$ .



Pour chaque  $i$  ( $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ), posons  $\gamma_i^n = (\tau_i^n)^{-1} \star \sigma_i^n \star \tau_{i+1}^n$ .  $\gamma_i^n$  (aussi noté  $\gamma_i$ ) est un chemin reliant deux éléments de  $A$ , et il est contenu soit dans  $U$ , soit dans  $V$ , ce qui impose la valeur de  $\Theta$  sur chaque  $\gamma_i$ . Si  $\gamma_i$  est dans  $U \cap V$ , sa valeur est obtenue indifféremment via  $\varphi$  ou via  $\psi$ . Par ailleurs,  $\sigma$  est homotope à  $\gamma_0 \star \dots \star \gamma_{2^n-1}$ . Les conditions de l'affirmation entraînent donc l'unicité de  $\Theta$ , puisqu'on devra avoir  $\Theta(\sigma) = \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_{2^n-1})$ .

Bien que  $\Theta(\gamma_i)$  dépende en général des choix de  $\tau_i$  et de  $\tau_{i+1}$ ,  $\Theta(\sigma)$  ne dépend pas de ces choix. En effet, remplaçons l'un des  $\tau_i$  ( $1 \leq i \leq 2^n - 1$ , puisque  $\tau_0$  et  $\tau_{2^n}$  étant constants, ils ne sont pas l'objet de choix) par  $\tau'_i$ , ce qui transforme  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma_i$  en  $\gamma'_{i-1}$  et  $\gamma'_i$ . Supposons par exemple  $\sigma_{i-1}$  (donc aussi  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma'_{i-1}$ ) dans  $U$  et  $\sigma_i$  dans  $V$ . On a, en remarquant que  $\tau_i^{-1} \star \tau'_i$  est un élément de  $\mathbf{Chem}(X, A)$  contenu dans  $U \cap V$ , et en utilisant le fait que  $\tau'_i \star \tau_i'^{-1}$  est homotope à un chemin de longueur nulle :

$$\begin{aligned}
\Theta(\gamma_{i-1})\Theta(\gamma_i) &= \varphi([\gamma_{i-1}])\psi([\gamma_i]) \\
&= \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
&= \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \tau'_i \star \tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
&= \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\psi([\tau_i^{-1} \star \tau'_i])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
&= \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau_i])\varphi([\tau_i^{-1} \star \tau'_i])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
&= \varphi([\tau_{i-1}^{-1} \star \sigma_{i-1} \star \tau'_i])\psi([\tau_i'^{-1} \star \sigma_i \star \tau_{i+1}]) \\
&= \Theta(\gamma'_{i-1})\Theta(\gamma'_i)
\end{aligned}$$

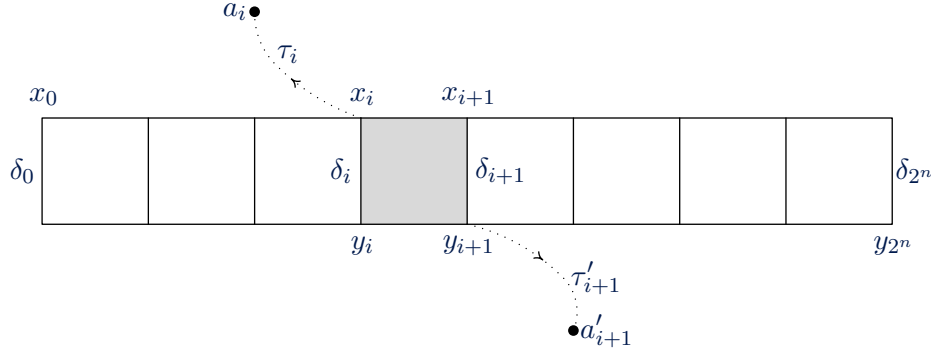
On traite de manière similaire le cas où  $\sigma_{i-1}$  est dans  $V$  et  $\sigma_i$  dans  $U$  et les cas où tous deux sont dans  $U$  ou tous deux sont dans  $V$ . On a donc montré que  $\Theta(\sigma)$  défini par la formule  $\Theta(\sigma) = \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_{2^n-1})$  ne dépend pas des choix des  $\tau_i$ .

Pour voir que  $\Theta(\sigma)$  ne dépend pas de  $n$ , il suffit de montrer que sa valeur est invariante quand on remplace  $n$  par  $n + 1$ . Or ceci revient à remplacer dans la formule définissant  $\Theta(\sigma)$  chaque  $\Theta(\gamma_i^n)$  par  $\Theta(\gamma_{2i}^{n+1})\Theta(\gamma_{2i+1}^{n+1})$ . Si on suppose par exemple  $\sigma_i$  dans  $U$ ,  $\gamma_{2i}^{n+1}$  et  $\gamma_{2i+1}^{n+1}$  sont tous les deux dans  $U$ , et on a

$$\begin{aligned}
\Theta(\gamma_{2i}^{n+1})\Theta(\gamma_{2i+1}^{n+1}) &= \varphi([\gamma_{2i}^{n+1}])\varphi([\gamma_{2i+1}^{n+1}]) \\
&= \varphi([\gamma_{2i}^{n+1} \star \gamma_{2i+1}^{n+1}]) \\
&= \varphi([\gamma_i^n]) \\
&= \Theta(\gamma_i)
\end{aligned}$$

L'application  $\Theta : \mathbf{Chem}(X, A) \rightarrow G$  est donc bien définie. Il reste à montrer qu'elle satisfait les conditions de l'affirmation. Les deux premières sont clairement satisfaites par la construction même de  $\Theta$ . Pour la troisième, prenons un  $n$  assez grand pour que  $\sigma$  et  $\sigma'$  soient  $n$ -propres. Alors  $\sigma \star \sigma'$  est  $(n+1)$ -propre, et la formule définissant  $\Theta$  montre immédiatement que  $\Theta(\sigma \star \sigma') = \Theta(\sigma)\Theta(\sigma')$ .

D'après le lemme 3 (page 2), il suffit de montrer la dernière propriété pour des chemins  $\sigma : [u, u+l] \rightarrow X$  et  $\sigma' : [x, x+k] \rightarrow X$   $n$ -proprement homotopes. Soit  $h$  une homotopie  $n$ -propre de  $\sigma$  à  $\sigma'$ . Posons  $x_i = \sigma(u + \frac{il}{2^n})$  et  $y_i = \sigma'(x + \frac{ik}{2^n})$ . Introduisons les  $\tau_i$  et  $\tau'_i$  qui comme ci-dessus permettent de définir les  $\gamma_i$  et les  $\gamma'_i$  qui servent à définir  $\Theta(\sigma)$  et  $\Theta(\sigma')$ . Notons  $\delta_i$  le chemin  $t \mapsto h(t, \frac{i}{2^n})$  (qui va de  $x_i$  à  $y_i$ ).



Noter que  $\delta_0$  et  $\delta_{2^n}$  sont des chemins constants. Posons  $\mu_i = \sigma_0 \star \dots \star \sigma_{i-1} \star \delta_i \star \sigma'_i \star \dots \star \sigma'_{2^n-1}$ . Il suffit de montrer que  $\Theta(\mu_i) = \Theta(\mu_{i+1})$  ( $0 \leq i \leq 2^n - 1$ ). Supposons par exemple que le carré gris sur la figure ci-dessus soit dans  $U$ . Il en est alors de même de  $\tau_i$  et  $\tau'_{i+1}$ . D'après la troisième propriété de l'affirmation, on a

$$\begin{aligned} \Theta(\mu_i) &= \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_{i-1}) \Theta(\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i) \Theta(\gamma'_i) \dots \Theta(\gamma'_{2^n-1}) \\ \Theta(\mu_{i+1}) &= \Theta(\gamma_0) \dots \Theta(\gamma_i) \Theta(\tau_{i+1}^{-1} \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}) \Theta(\gamma'_{i+1}) \dots \Theta(\gamma'_{2^n-1}) \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \Theta(\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i) \Theta(\gamma'_i) &= \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i]) \varphi([\gamma'_i]) \\ &= \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \tau'_i \star \gamma'_i]) \\ &= \varphi([\tau_i^{-1} \star \delta_i \star \sigma'_i \star \tau'_{i+1}]) \\ &= \varphi([\tau_i^{-1} \star \sigma_i \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}]) \\ &= \Theta(\gamma_i) \Theta(\tau_{i+1}^{-1} \star \delta_{i+1} \star \tau'_{i+1}) \end{aligned}$$

On a donc terminé la preuve de l'affirmation. L'existence de  $\theta$  telle que  $\theta \circ k = \varphi$  et  $\theta \circ l = \psi$  en résulte immédiatement, de même que le fait que  $\theta$  est un morphisme de groupoïdes. L'unicité de  $\theta$  résulte du fait que pour toute flèche  $[\sigma]$  de  $\Pi(X, A)$ , il existe des chemins  $\gamma_0, \dots, \gamma_k$  chacun contenu dans  $U$  ou dans  $V$  et à extrémités dans  $A$ , donc chacun dans  $\Pi(U, A)$  ou  $\Pi(V, A)$ , tels que  $[\sigma] = [\gamma_0] \star \dots \star [\gamma_k]$ , car ceci implique que  $\theta([\sigma]) = \theta([\gamma_0]) \dots \theta([\gamma_k])$ , et bien sûr  $\theta$  est déterminé sur les  $[\gamma_i]$  à cause des relations  $\theta \circ k = \varphi$  et  $\theta \circ l = \psi$ .  $\square$

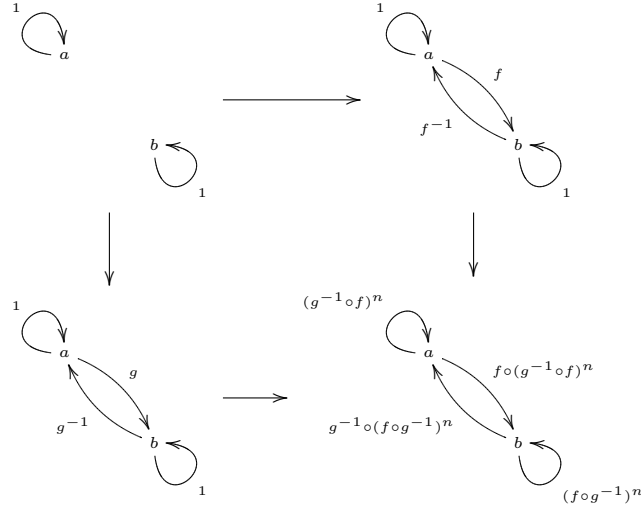
# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 1 février 2012.

Le diagramme de morphismes de groupoïdes :



(où le dernier groupoïde a autant de flèches entre deux objets qu'il y a de  $n \in \mathbb{Z}$ ) est cocartésien. On a esquissé une démonstration de cette affirmation sans entrer dans trop de détails. On a ensuite appliqué ce résultat au calcul de  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . À cette fin, on identifie  $\mathbb{S}^1$  à l'espace des complexes de module 1, on pose  $U = \mathbb{S}^1 - \{i\}$ ,  $V = \mathbb{S}^1 - \{-i\}$ , et  $A = \{-1, +1\}$ . Il est facile de vérifier que les groupoïdes  $\Pi(U \cap V, A)$ ,  $\Pi(U, A)$  et  $\Pi(V, A)$  sont isomorphes aux trois premiers des groupoïdes du diagramme précédent. On en déduit par van Kampen que le dernier groupoïde est isomorphe à  $\Pi(\mathbb{S}^1, \{-1, +1\})$  et donc que  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ . On vérifie de même facilement que la classe d'homotopie du lacet standard  $s \mapsto e^{2i\pi s}$  est  $g^{-1} \circ f$ , et donc que ce lacet représente un générateur de  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  (le point  $a$  étant  $1 \in \mathbb{S}^1$ ).

## 1 Transformations naturelles.

Les catégories et les foncteurs ne sont pas en réalité les concepts les plus importants de la théorie des catégories. Il y a un troisième concept, et qui est d'ailleurs la notion pour la formalisation

de laquelle Eilenberg et Mac Lane ont introduit les deux précédentes. Il s'agit de la notion de « transformation naturelle ». Elle joue un rôle très important en topologie algébrique.

Si on se donne deux foncteurs (covariants) « parallèles », c'est-à-dire de même source et de même cible :

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

on obtient pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , deux objets  $F(X)$  et  $G(X)$  de  $\mathcal{D}$ . Ces deux objets peuvent être la source et la cible d'une flèche de  $\mathcal{D}$  (notée  $\varphi_X$  ci-dessous) :

$$\begin{array}{ccc} & & F(X) \\ & & \downarrow \varphi_X \\ X & & G(X) \\ & & \downarrow \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array}$$

Ceci pouvant éventuellement être fait pour tous les objets de  $\mathcal{C}$ , on peut considérer une famille de flèches  $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  indexée par la collection  $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$  des objets de  $\mathcal{C}$ . Une telle famille peut être appelée une « transformation » de  $F$  vers  $G$ .

De nombreux exemples vont montrer qu'il est « naturel » d'imposer à toutes les flèches d'une transformation une condition de cohérence globale. En effet, jusqu'ici on a ignoré les flèches de  $\mathcal{C}$ , mais si on considère une flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ , on obtient un carré de flèches dans  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{array}{ccc} & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \\ \mathcal{C} & & \mathcal{D} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & F(Y) \\ & & \downarrow \varphi_Y \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & G(Y) \\ \downarrow \varphi_X & & \downarrow G(f) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

La « condition de cohérence globale » (qu'on nommera plutôt « naturalité ») consiste à demander que ce carré soit « commutatif » pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

**1 Définition.** Soient  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux foncteurs parallèles. Une « transformation naturelle »  $\varphi : F \rightarrow G$  est une application  $\varphi : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Fl}(\mathcal{D})$  telle que :

$$\varphi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_X$$

pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$ . La collection des transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  sera notée  $\mathbf{Nat}(F, G)$ .

☞ **2 Exemple.** Considérons la catégorie  $\mathcal{C}$  dont les objets sont les paires  $(X, A)$ , où  $X$  est un ensemble et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ . Une flèche de  $\mathcal{C}$  de  $(X, A)$  vers  $(Y, B)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) \subset B$ . Il est immédiat qu'on a bien une catégorie. On peut définir deux foncteurs  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{C}$  vers **Ens** de la façon suivante :  $F(X, A) = A$ ,  $G(X, A) = X$ , et pour toute  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ,  $F(f) = f|_A : A \rightarrow B$  et  $G(f) = f : X \rightarrow Y$ . Il est facile de vérifier qu'on a bien deux foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers **Ens**.

À chaque paire  $(X, A)$  on peut associer l'inclusion canonique  $i_{(X,A)} : A \rightarrow X$  (définie par  $i_{(X,A)}(x) = x$ ). C'est une transformation de  $F$  vers  $G$ , puisque  $A = F(X, A)$  et  $X = G(X, A)$ , et elle est naturelle, car pour toute  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_{(X,A)}} & X \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ B & \xrightarrow{i_{(Y,B)}} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & \xrightarrow{\quad} & f(x) \end{array}$$

est commutatif.

On peut mesurer sur cet exemple la force de la contrainte qu'impose la naturalité, car bien qu'il y ait en général pour chaque paire  $(X, A)$  de nombreuses applications distinctes de  $A$  vers  $X$ , il n'y a qu'une seule transformation naturelle de  $F$  vers  $G$ . En effet, pour chaque paire  $(X, A)$  et pour chaque  $x \in A$ , il y a une seule flèche  $f_x : (\{*\}, \{*\}) \rightarrow (X, A)$  telle que  $f_x(*) = x$ , et on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{i_{(\{*\}, \{*\})}} & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{i_{(X,A)}} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\quad} & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{\quad} & x \end{array}$$

quelle que soit la transformation naturelle  $i$ . Ceci impose que  $i_{(X,A)}(x) = x$  pour toute paire  $(X, A)$  et tout  $x \in A$ . En utilisant la paire  $(\{*\}, \emptyset)$ , on montre de même qu'il n'y a aucune transformation naturelle de  $G$  vers  $F$ .

Cet exemple a de nombreuses variantes. On peut remplacer les ensembles par des espaces topologiques et on a le même résultat, ou par des espaces vectoriels et dans ce cas les transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  forment un espace vectoriel de dimension 1 et celles de  $G$  vers  $F$  un espace vectoriel de dimension 0.

☞ **3 Exemple.** Un autre exemple, qui est l'un de ceux qu'Eilenberg et Mac Lane considèrent dès leur premier article sur les transformations naturelles, est le cas du foncteur « bidual »  $** : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ , qui envoie tout espace vectoriel  $E$  sur son bidual  $E^{**}$  et toute application linéaire  $f$  sur sa double transposée  $f^{**}$  (rappelons que  $f^*$  est définie par  $f^*(l) = l \circ f$ ). Il y a une transformation naturelle (notée  $i$  ci-dessous) bien connue du foncteur identité  $1 : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$  vers le foncteur  $**$ . C'est celle qui est définie par la formule

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ x & \xrightarrow{\quad} & (l \mapsto l(x)) \end{array}$$

On a en effet, pour toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$  le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ F & \xrightarrow{i_F} & F^{**} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (l \mapsto l(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \text{dotted} \\ f(x) & \longmapsto & (l \mapsto l(f(x))) \end{array}$$

puisque  $f^{**}(l \mapsto l(x)) = (l \mapsto l(x)) \circ (l \mapsto l \circ f) = (l \mapsto l(f(x)))$ . Bien sûr, pour tout  $\lambda \in k$ ,  $\lambda i$  est encore une transformation naturelle de  $1$  vers  $^{**}$ . Le point intéressant est qu'on les a maintenant toutes. En effet, pour tout vecteur  $x \in E$ , il y a une unique application linéaire  $f_x : k \rightarrow E$  telle que  $f_x(1) = x$ . On a alors, pour toute transformation naturelle  $j : 1 \rightarrow ^{**}$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{j_k} & k^{**} \\ f_x \downarrow & & \downarrow f_x^{**} \\ E & \xrightarrow{j_E} & E^{**} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & j_k(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & j_E(x) \end{array}$$

et on voit que  $j$  est complètement déterminée par le choix de l'élément  $j_k(1) \in k^{**}$ , puisqu'alors  $j_E(x) = f_x^{**}(j_k(1))$  pour tout espace vectoriel  $E$  et tout  $x \in E$ . Or  $k^{**}$  est de dimension 1.  $j$  ne peut donc être que de la forme  $\lambda i$  pour un certain  $\lambda \in k$ .

Les transformations naturelles peuvent se composer de deux façons différentes (dites « verticale » et « horizontale ») et peuvent même être composées avec des foncteurs (composition « hétérogène »). Le cas le plus simple est celui de la composition verticale.

**4 Définition.** Soient trois foncteurs parallèles  $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\alpha : F \rightarrow G$  et  $\beta : G \rightarrow H$  deux transformations naturelles. Alors l'application  $X \mapsto \beta_X \circ \alpha_X$  est une transformation naturelle notée  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ , qu'on appelle « composition verticale » de  $\alpha$  et  $\beta$ .

La vérification de la naturalité de  $\beta \circ \alpha$  est immédiate.

Il est usuel de représenter les transformations naturelles par des flèches doubles (ou « 2-flèches ») quand on représente les foncteurs eux-mêmes par des flèches « simples » (ou « 1-flèches »). Le diagramme suivant met en scène la composition verticale (!) de  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \alpha & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow \beta & \\ & H & \end{array}$$

## 2 Quelques constructions de catégories.

Les catégories ont certains comportements en commun avec les ensembles. En particulier, on peut définir les analogues du produit cartésien et de la notion d'ensemble fonctionnel.

☞ **5 Définition.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories. La « catégorie produit »  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  a pour objets les couples  $(X, Y)$  où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{D}$ . Une flèche de  $(X, Y)$  vers  $(U, V)$  est un couple de flèches  $(f, g)$  tel que  $f : X \rightarrow U$  et  $g : Y \rightarrow V$ .

La « catégorie de foncteurs »  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  a pour objets les foncteurs de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$  et pour flèches de  $F$  vers  $G$  les transformations naturelles de  $F$  vers  $G$ .

La composition et les identités sont évidentes dans ces deux nouvelles catégories. Précisément, on a  $(h, k) \circ (f, g) = (h \circ f, k \circ g)$  et  $1_{(X, Y)} = (1_X, 1_Y)$  pour ce qui concerne  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ . Dans le cas de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  la composition est la composition verticale de la définition 4 (page 4), et l'identité  $1_F$  du foncteur  $F$  (vu comme un objet de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ ) est la transformation naturelle identique  $X \mapsto 1_{F(X)}$ .

Il est d'usage de considérer des « diagrammes » dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Un diagramme dans  $\mathcal{C}$  est fait d'objets et de flèches de  $\mathcal{C}$ . Il est également d'usage de considérer des « morphismes de diagrammes » entre diagrammes de même forme, de telle sorte qu'on a une catégorie des diagrammes (d'une forme donnée) dans  $\mathcal{C}$ . En fait, cette catégorie est facilement définie comme la catégorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ , où  $\mathcal{I}$  (la catégorie des indices) détermine la forme des diagrammes.

On peut par exemple prendre pour  $\mathcal{I}$  la catégorie associée à l'ensemble ordonné  $\vec{2} = \{0, 1\}$ . Un foncteur de  $\mathcal{I}$  vers **Ens** est donné par deux ensembles (les images de 0 et 1 par ce foncteur) et une application entre ces ensembles (l'image de l'unique flèche  $0 \rightarrow 1$ ). La donnée d'un diagramme de cette sorte est donc équivalente à la donnée d'une application entre deux ensembles.

Un morphisme du diagramme  $E \xrightarrow{f} F$  vers le diagramme  $E' \xrightarrow{f'} F'$ , est composé de deux applications (les images de 0 et 1 par la transformation naturelle que constitue ce morphisme), rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{f'} & F' \end{array}$$

On n'a bien sûr pas tenu compte des flèches identité de 0 et 1, qui n'apportent aucune information supplémentaire.

☞ **6 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une « sous-catégorie »  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$  a pour objets des objets de  $\mathcal{C}$ , pour flèches des flèches de  $\mathcal{C}$ , contient les flèches identités des objets qui lui appartiennent et la classe des flèches qui lui appartiennent est stable par composition. Il y a bien sûr un foncteur « inclusion canonique » (covariant) de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{C}$ .

☞ **7 Définition.** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur et  $Y$  un objet de  $\mathcal{D}$ . La catégorie  $F/Y$  (lire «  $F$  sur  $Y$  ») a pour objets les  $\langle f \rangle^X$ , où  $f$  est une flèche de la forme  $f : F(X) \rightarrow Y$  et pour flèches les  $[\varphi] : \langle f \rangle^X \rightarrow \langle f' \rangle^{X'}$ , où  $\varphi : X \rightarrow X'$  est telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X') \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & Y & \end{array}$$

soit commutatif.

Symétriquement, la catégorie  $Y/F$  («  $Y$  sur  $F$  ») a pour objets les  $\langle f \rangle_X$  où  $f$  est une flèche de la forme  $f : Y \rightarrow F(X)$  et pour flèches les  $[\varphi] : \langle f \rangle_X \rightarrow \langle f' \rangle_{X'}$  où  $\varphi : X \rightarrow X'$  est telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X') \end{array}$$

soit commutatif.

Il est facile de vérifier que  $F/Y$  et  $Y/F$  sont bien des catégories, la composition des flèches et les identités étant celles de  $\mathcal{C}$ . De plus, une flèche  $[\varphi]$  de  $F/Y$  ou de  $Y/F$  est un isomorphisme si et seulement si la flèche  $\varphi$  (de  $\mathcal{C}$ ) est un isomorphisme.

### 3 Flèches universelles et foncteurs adjoints.

**8 Définition.** Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur (covariant) et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Une « flèche universelle de  $X$  vers  $G$  » est une flèche  $\eta : X \rightarrow G(F(X))$  (où  $F(X)$  est bien sûr un objet de  $\mathcal{D}$ ) telle que pour toute flèche  $f : X \rightarrow G(Y)$ , il existe une unique flèche  $\theta^{-1}(f) : F(X) \rightarrow Y$  de  $\mathcal{D}$ ,<sup>(1)</sup> telle que  $G(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & G(F(X)) \\ f \searrow & & \swarrow G(\theta^{-1}(f)) \\ & G(Y) & \end{array}$$

La définition peut paraître un peu compliquée, mais il s'agit en fait juste d'un objet initial dans la catégorie  $X/G$ .

**9 Exemple.** Considérons le foncteur d'oubli  $G : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie tout groupe sur son ensemble sous-jacent et tout morphisme de groupes sur son application sous-jacente. Soit  $X$  un ensemble. Il y a une flèche universelle de  $X$  vers  $G$ . Il suffit en effet de prendre pour  $F(X)$  le « groupe libre » sur l'ensemble  $X$ .<sup>(2)</sup> L'application  $\eta : X \rightarrow G(F(X))$  envoie tout élément  $x$  de  $X$  sur lui-même vu comme un élément de  $F(X)$  (ou plus précisément de  $G(F(X))$ ). La « propriété universelle » exprimée par la définition ci-dessus dit que définir un morphisme de groupe (ici  $\theta^{-1}(f)$ ) de  $F(X)$  vers un groupe  $Y$  revient exactement à définir une application ordinaire  $f$  de  $X$  vers l'ensemble sous-jacent à  $Y$ , ce qui correspond exactement à l'idée qu'on se fait généralement du « groupe libre sur  $X$  ». Bien entendu, la notion de flèche universelle

1. La raison pour laquelle cette flèche est notée  $\theta^{-1}(f)$  est expliquée dans la remarque 18 (page 9).

2. Le lecteur sait sans doute ce qu'est le groupe libre sur un ensemble. Nous allons de toute façon faire plus tard une construction plus générale montrant qu'un tel groupe existe et comment il peut être construit.

est bien plus générale que ce que cet exemple laisse supposer. On s'en rendra compte à l'aide d'autres exemples.

Le fait qu'on ait parlé « du » groupe libre sur  $X$  et non pas « d'un » groupe libre sur  $X$  suggère qu'il y a une forme d'unicité de l'objet  $F(X)$ . C'est ce qui est précisé par le lemme ci-dessous, qui est juste la traduction d'un lemme concernant les objets initiaux en termes de flèches universelles (en tenant compte du fait qu'une flèche de  $X/G$  est un isomorphisme si et seulement si elle en est une comme flèche de  $\mathcal{D}$ ).

**10 Lemme.** *Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur,  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $\eta : X \rightarrow G(F(X))$  et  $\eta' : X \rightarrow G(F'(X))$  deux flèches universelles de  $X$  vers  $G$ . Alors il existe une unique flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow F'(X)$  telle que  $G(\varphi) \circ \eta = \eta'$ , et cette flèche est un isomorphisme.  $\square$*

L'objet défini par une flèche universelle est donc unique « à isomorphisme canonique près ». Ceci ne veut bien sûr pas dire qu'une telle flèche universelle existe, et son existence doit éventuellement être prouvée indépendamment. Toutefois, cette propriété d'unicité caractérise parfaitement l'objet  $F(X)$  par son comportement vis-à-vis des autres objets (génériquement représentés par  $Y$  dans la définition 8) de sa catégorie.

**11 Lemme.**  $\theta^{-1} : \mathcal{C}(X, G(Y)) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), Y)$  (définition 8 (page 6)) est une application bijective (dont l'inverse sera bien sûr noté  $\theta$ ) et elle est naturelle en  $Y$ .

*Démonstration.* La définition des flèches universelles montre que  $\theta^{-1}$  est bien définie puisqu'elle dit que pour toute  $f : X \rightarrow G(Y)$  il existe une unique flèche  $\theta^{-1}(f) : F(X) \rightarrow Y$  satisfaisant une certaine propriété. La propriété en question est l'égalité  $G(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$ , qui montre que si on pose  $\theta(\varphi) = \eta \circ G(\varphi)$ , on a  $\theta(\theta^{-1}(f)) = f$  donc que  $\theta \circ \theta^{-1} = 1_{\mathcal{D}(X, G(Y))}$ . Par ailleurs, pour toute flèche  $\varphi : F(X) \rightarrow Y$ , on a  $\theta^{-1}(\eta \circ G(\varphi)) = \varphi$  par définition même de  $\theta^{-1}$ . On a donc  $\theta^{-1}(\theta(\varphi)) = \varphi$ , et  $\theta$  est la bijection inverse de  $\theta^{-1}$ .

La naturalité de  $\theta^{-1}$  (ou de manière équivalente de  $\theta$ ) en  $Y$  est la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X, G(Y)) & \xrightarrow{\theta^{-1}} & \mathcal{D}(F(X), Y) \\ G(f)_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \mathcal{C}(X, G(Y')) & \xrightarrow{\theta^{-1}} & \mathcal{D}(F(X), Y') \end{array}$$

pour toute flèche  $f : Y \rightarrow Y'$ , ce qui peut s'écrire  $f \circ \theta^{-1}(\varphi) = \theta^{-1}(G(f) \circ \varphi)$  (pour toute flèche  $\varphi : X \rightarrow G(Y)$ ). Pour établir cette égalité, il suffit de considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & G(F(X)) \\ & \searrow \varphi & \swarrow G(\theta^{-1}(\varphi)) \\ & G(Y) & \\ G(f) \circ \varphi \swarrow & \downarrow G(f) & \searrow G(f \circ \theta^{-1}(\varphi)) \\ & G(Y') & \end{array}$$

qui est clairement commutatif et qui donne notre égalité par universalité de la flèche  $\eta$ .  $\square$

**12 Exemple.** Voici un autre exemple que nous utiliserons plus loin. Soit  $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Gr}$  le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes abéliens vers celle des groupes (tout groupe commutatif est quand même un groupe), et soit  $G$  un groupe. Il y a une flèche universelle de  $G$  vers  $U$ . Notons en effet  $[G, G]$  le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  qui contient tous les produits de la forme  $aba^{-1}b^{-1}$  ( $[G, G]$  est appelé le « sous-groupe des commutateurs » de  $G$ ), et considérons le groupe quotient  $G/[G, G]$ . La projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/[G, G]$  est une flèche universelle de  $G$  vers  $U$ . En effet, si on a une flèche  $f : G \rightarrow A$  où  $A$  est un groupe abélien, on a  $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1} = f(a)f(a)^{-1}f(b)f(b)^{-1} = 1$ . Le sous-groupe  $[G, G]$  de  $G$  est donc contenu dans le noyau de  $f$ , et le théorème de passage au quotient montre qu'il existe une unique flèche  $\theta^{-1}(f) : G/[G, G] \rightarrow A$  telle que  $\theta^{-1}(f) \circ \pi = f$ . Le groupe  $G/[G, G]$  est appelé l'« abélianisé de  $G$  ».

On a bien sûr le concept (dual du précédent) de flèche universelle d'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  vers un objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$ . Il s'agit juste en fait d'un objet final dans la catégorie  $F/Y$ . C'est une flèche  $\varepsilon : F(G(Y)) \rightarrow Y$ , où  $G(Y)$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , telle que pour toute flèche  $f : F(X) \rightarrow Y$ , il existe une unique flèche  $\theta(f) : X \rightarrow G(Y)$  telle que  $\varepsilon \circ F(\theta(f)) = f$ .

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \\ & \swarrow F(\theta(f)) \quad \nearrow f & \\ & F(X) & \end{array}$$

**13 Exemple.** La notion de produit cartésien d'ensemble peut être définie à l'aide d'un problème universel de la façon suivante. Considérons le « foncteur diagonal »  $\Delta : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ , qui envoie tout ensemble  $X$  sur le couple d'ensembles  $(X, X)$  et toute application  $f : X \rightarrow Y$  sur le couple d'applications  $(f, f) : (X, X) \rightarrow (Y, Y)$ . Soit  $(A, B)$  un objet de  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens}$ . Le lecteur vérifiera sans peine que la flèche  $\varepsilon = (p_1, p_2) : (A \times B, A \times B) \rightarrow (A, B)$  est universelle de  $\Delta$  vers  $(A, B)$ .

$$\begin{array}{ccc} (A \times B, A \times B) & \xrightarrow{(p_1, p_2)} & (A, B) \\ & \swarrow (\varphi, \varphi) \quad \nearrow (f, g) & \\ & (X, X) & \end{array}$$

ce qui revient exactement à dire que se donner deux flèches  $f : X \rightarrow A$  et  $g : X \rightarrow B$  est équivalent à se donner une seule flèche  $\varphi : X \rightarrow A \times B$  (telle que  $p_1 \circ \varphi = f$  et  $p_2 \circ \varphi = g$ ).

**14 Exemple.** Donnons enfin un exemple pour lequel une flèche universelle n'existe pas. Considérons le foncteur  $+$  :  $\mathbf{Ens} \times \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie toute paire d'ensembles  $(X, Y)$  sur la somme (union disjointe)  $X + Y$ , et toute paire d'applications  $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  sur l'application  $f + g$  définie par  $(f + g)(x) = f(x)$  si  $x \in X$  et  $(f + g)(x) = g(x)$  si  $x \in Y$ . Soit  $E$  un ensemble non vide. Alors il n'y a pas de flèche universelle de  $E$  vers  $+$ . En effet, si  $\eta : E \rightarrow E_1 + E_2$  était une telle flèche, l'image d'un élément  $x_0 \in E$  (choisi une fois pour toutes)

par  $\eta$  serait soit dans  $E_1$  soit dans  $E_2$ . Supposons que  $\eta(x_0) \in E_1$ , et soit  $f : E \rightarrow X + Y$  une application qui envoie  $x_0$  dans  $Y$ . On devrait avoir une application  $\varphi + \psi : E_1 + E_2 \rightarrow X + Y$  qui envoie l'élément de  $\eta(x_0) \in E_1$  dans  $Y$ , ce qui est impossible.

Le lecteur s'est peut-être demandé pourquoi, dans la définition 8 (page 6), l'objet  $F(X)$  de  $\mathcal{D}$  n'a pas été noté plus simplement, par exemple par une seule lettre. La raison est qu'il arrive souvent (comme cela est le cas dans les exemples ci-dessus) qu'une flèche universelle de  $X$  vers  $G$  existe pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, on a une fonction  $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$  (quitte à choisir une flèche universelle pour chaque objet de  $\mathcal{C}$ ). Cette application n'est a priori pas un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{D}$ , car elle ne transforme que les objets. Toutefois, elle se prolonge automatiquement et canoniquement en un foncteur comme le montre le théorème suivant, qui sera démontré dans la prochaine leçon.

☞ **15 Théorème.** (théorème de fonctorialité) Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  il existe une flèche universelle  $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$ . Alors  $F$  se prolonge de manière unique en un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que la bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  (qui est déjà naturelle en  $Y$  ; lemme 11 (page 7)) soit naturelle en  $X$ .

On a bien sûr le résultat dual :

☞ **16 Théorème.** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur tel que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$  il existe une flèche universelle  $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \rightarrow Y$ . Alors  $G$  se prolonge de manière unique en un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que la bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  (qui est déjà naturelle en  $X$ ) soit naturelle en  $Y$ . □

Ceci nous conduit à la définition ci-dessous.

☞ **17 Définition.** Deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sont dits « adjoints » ( $F$  adjoint à gauche de  $G$ , ou  $G$  adjoint à droite de  $F$ ), ce qui s'écrit  $F \dashv G$ , s'il existe une bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  naturelle en  $X$  et en  $Y$ .

☞ **18 Remarque.** On voit que la notion de foncteurs adjoints est symétrique en ce sens qu'il est équivalent de demander que  $F$  soit adjoint à gauche de  $G$  ou que  $G$  soit adjoint à droite de  $F$ . Pour éviter par la suite toute confusion, nous noterons toujours  $\theta$  la bijection de  $\mathcal{D}(F(X), Y)$  vers  $\mathcal{C}(X, G(Y))$  (et donc  $\theta^{-1}$  son inverse). C'est ce qui justifie l'utilisation de la notation  $\theta^{-1}$  dès la définition 8 (page 6).

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

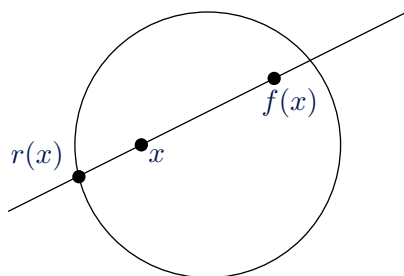
Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 6 février 2012.

## 1 Intermède topologique.

☞ **1 Lemme.** *S'il existe une application continue  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  sans point fixe, alors il existe une rétraction continue  $r : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  (c'est-à-dire telle que  $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , où  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n$  est l'inclusion canonique).*

*Démonstration.* Le cas  $n = 0$  est trivial puisque  $\mathbb{D}^0$  est réduit à un seul point (noter que  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ ). Supposons  $n > 0$ , et soit  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  une application continue sans point fixe. Pour tout  $x \in \mathbb{D}^n$ , les points  $x$  et  $f(x)$  sont distincts et déterminent donc une droite affine dans  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $\mathbb{D}^n$  est convexe et borné, cette droite coupe la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  (le bord de  $\mathbb{D}^n$ ) en deux points. Notons  $r(x)$  celui qui est du côté de  $x$  sur cette droite.



Afin de prouver que  $r$  est continue, on peut facilement établir une formule explicite pour  $r(x)$  :

$$r(x) = x + \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x) \rangle^2 - \|x - f(x)\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{\|x - f(x)\|^2}(x - f(x))$$

En effet, comme  $r(x)$  est aligné avec  $x$  et  $f(x)$ , il est de la forme  $x + \lambda(x - f(x))$ . Le fait qu'il soit « du côté de  $x$  » se traduit par  $\lambda \geq 0$ . Enfin, il doit être sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ , c'est-à-dire qu'on doit avoir  $\|r(x)\| = 1$ , autrement-dit  $\langle x + \lambda(x - f(x)), x + \lambda(x - f(x)) \rangle = 1$ . Il s'agit d'une équation du second degré en  $\lambda$  qui peut être réécrite :

$$\lambda^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\lambda \langle x, x - f(x) \rangle + \|x\|^2 - 1 = 0$$

Comme  $\|x\| \leq 1$ , on voit que les coefficients de  $\lambda^2$  et  $\lambda^0$  sont de signes contraires, et que l'équation a donc deux racines (a priori non nécessairement distinctes) réelles de signes contraires. En particulier, la valeur sous le radical dans la formule ci-dessus donnant la valeur de  $r(x)$  est positive ou nulle. Comme on doit avoir  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda$  est la plus grande des deux racines, et on a la formule proposée (avec un signe + devant le radical). Noter que le dénominateur  $\|x - f(x)\|^2$  ne peut pas être nul puisque  $x \neq f(x)$  pour tout  $x$ .

Ceci prouve que l'application  $r$  est continue. De plus, si  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , on a  $\lambda = 0$ , donc  $r(x) = x$ , ce qui montre que  $r$  est une rétraction continue pour l'inclusion de  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $\mathbb{D}^n$ .  $\square$

**2 Lemme.** (Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2) *Toute application continue  $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  a un point fixe.*

*Démonstration.* S'il existait une application continue  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  sans point fixe, il existerait une rétraction continue  $r$  de  $\mathbb{D}^2$  sur  $\mathbb{S}^1$ . On aurait donc le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{D}^2 \\ & \searrow 1_{\mathbb{S}^1} & \downarrow r \\ & & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Choisissons un point de base  $*$  dans  $\mathbb{S}^1$  qui servira aussi de point de base pour  $\mathbb{D}^2$ .  $i$ ,  $r$  et  $1_{\mathbb{S}^1}$  sont alors des applications pointées. Par ailleurs, comme  $\mathbb{D}^2$  est convexe, on a  $\pi_1(\mathbb{D}^2, *) = 0$ . En appliquant le foncteur  $\pi_1$  au triangle commutatif ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif de morphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow 1_{\mathbb{Z}} & \downarrow \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

ce qui est impossible.  $\square$

## 2 Foncteurs adjoints.

**3 Théorème.** (théorème de fonctorialité) *Soit  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur tel que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  il existe une flèche universelle  $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$ . Alors  $F$  se prolonge de manière unique en un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tel que la bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  (qui est déjà naturelle en  $Y$ ) soit naturelle en  $X$ .*

*Démonstration.* La naturalité de  $\theta$  en  $X$  signifie que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  et toute flèche  $\varphi : F(Y) \rightarrow Z$ , on a  $\theta(\varphi) \circ f = \theta(\varphi \circ F(f))$ . En particulier, pour  $\varphi = 1_{F(Y)}$ , on doit avoir

$\eta_Y \circ f = \theta(F(f))$ , c'est-à-dire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ f \downarrow & & \downarrow GF(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & G(F(Y)) \end{array}$$

La flèche  $F(f)$  rendant ce diagramme commutatif existe par universalité de  $\eta_X$ , et son unicité montre qu'on n'a pas d'autre choix pour la définir. Noter au passage que le diagramme commutatif ci-dessus exprime la naturalité de la transformation  $\eta : 1 \rightarrow GF$ .

On doit vérifier que  $F$  préserve les identités et la composition. Si  $f = 1_X$ , l'unicité de  $\varphi$  montre que  $F(1_X)$  ne peut être que  $1_{F(X)}$ . De même, si  $g : Y \rightarrow Z$  est une deuxième flèche, on aura  $G(F(g) \circ F(f)) \circ \eta_X = GF(g) \circ GF(f) \circ \eta_X = GF(g) \circ \eta_Y \circ f = \eta_Z \circ g \circ f$ , ce qui montre que  $F(g \circ f)$  ne peut être que  $F(g) \circ F(f)$ .

Enfin, le calcul :

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) \circ f &= G(\varphi) \circ \eta_Y \circ f && \text{(définition de } \theta) \\ &= G(\varphi) \circ GF(f) \circ \eta_X && \text{(définition de } F(f)) \\ &= G(\varphi \circ F(f)) \circ \eta_X && (G \text{ est un foncteur}) \\ &= \theta(\varphi \circ F(f)) && \text{(définition de } \theta) \end{aligned}$$

montre la naturalité de  $\theta$  en  $X$ . □

**4 Remarque.** L'énoncé du théorème de fonctorialité dit que  $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$  se prolonge en un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  unique et non pas seulement unique à isomorphisme près. Ceci est dû au fait que l'application  $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$  étant donnée, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'objet  $F(X)$  (pour un  $X$  donné). Le foncteur étant défini sans ambiguïté sur les objets, on a vu dans la démonstration qu'aucune ambiguïté ne peut exister quant à la définition de  $F(f)$  pour  $f : X \rightarrow Y$ . C'est dû à la définition même des flèches universelles de  $X$  vers  $G$  qui impose que pour  $f : X \rightarrow G(Z)$  donnée, il existe une et une seule flèche  $\theta^{-1}(f) : F(X) \rightarrow Z$  ayant les propriétés requises. Si au contraire, on déclare seulement que pour tout objet  $X$  il existe une flèche universelle  $\eta : X \rightarrow G(\bar{X})$ , et qu'on ne choisit pas explicitement l'objet  $\bar{X}$  pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , l'application  $F : \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$  ne sera définie qu'à isomorphisme (canonique) près, et il en sera de même du foncteur  $F$  dont l'existence est affirmée par le théorème de fonctorialité.

On a bien sûr le résultat dual :

**5 Théorème.** Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur tel que pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$  il existe une flèche universelle  $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \rightarrow Y$ . Alors  $G$  se prolonge de manière unique en un foncteur  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que la bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  (qui est déjà naturelle en  $X$ ) soit naturelle en  $Y$ . □

**6 Définition.** Deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sont dits « adjoints » ( $F$  adjoint à gauche de  $G$ , ou  $G$  adjoint à droite de  $F$ ), ce qui s'écrit  $F \dashv G$ , s'il existe une bijection  $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  naturelle en  $X$  et en  $Y$ .

**7 Remarque.** On voit que la notion de foncteurs adjoints est symétrique en ce sens qu'il est équivalent de demander que  $F$  soit adjoint à gauche de  $G$  ou que  $G$  soit adjoint à droite de  $F$ . Pour éviter par la suite toute confusion, nous noterons toujours  $\theta$  la bijection de  $\mathcal{D}(F(X), Y)$  vers  $\mathcal{C}(X, G(Y))$  (et donc  $\theta^{-1}$  son inverse). C'est ce qui justifie l'utilisation de la notation  $\theta^{-1}$  dès la définition des flèches universelles. On se souviendra également du fait que  $\theta(1_{F(X)})$  n'est autre que  $\eta : X \rightarrow G(F(X))$ .

La naturalité de  $\theta$  en  $X$  s'exprime par l'égalité  $\theta(\varphi) \circ f = \theta(\varphi \circ F(f))$  et sa naturalité en  $Y$  par l'égalité  $G(g) \circ \theta(\varphi) = \theta(g \circ \varphi)$ . On peut combiner ces deux égalités en une seule qui leur est équivalente :

$$G(g) \circ \theta(\varphi) \circ f = \theta(g \circ \varphi \circ F(f))$$

### 3 Limites et colimites

Nous introduisons maintenant deux notions qui sont très utilisées dans de nombreuses branches des mathématiques. Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  sont des catégories, on a un foncteur  $\Delta$ , dit « diagonal » :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$$

qui envoie tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  « constant en  $X$  », défini par  $d(i) = X$  et  $d(f) = 1_X$ , pour tout objet  $i$  et toute flèche  $f$  de  $\mathcal{I}$ . Il est facile de vérifier que  $\Delta$  est bien un foncteur (covariant).

**8 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, et  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un diagramme dans  $\mathcal{C}$ . Une « limite » du diagramme  $d$  est une flèche universelle de  $\Delta$  vers  $d$ , et une « colimite » du diagramme  $d$  est une flèche universelle de  $d$  vers  $\Delta$ .

J'ai donné des exemples simples faisant intervenir des ensembles ordonnés (colimite = borne supérieure et limite = borne inférieure).

Pour plus de détails, voir [http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours\\_2010.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf) section 1.1, et les exercices qu'on y trouvera. Voir dans ce même cours la section 2.2.10 pour des informations générales sur les limites et les colimites et d'autres exemples.

**9 Théorème.** Les adjoints à gauche préservent les colimites et les adjoints à droite préservent les limites.

Je n'ai démontré le théorème que dans le cas où les catégories sont des ensembles préordonnés, ce qui est beaucoup plus simple. Toutefois, le cas général relève de la même méthode. On trouvera la démonstration dans [http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours\\_2010.pdf](http://www.math.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf) section 2.3.4. Toutefois, cette démonstration utilise les notions d'unité et de co-unité qu'on ne verra en toute généralité que dans la prochaine leçon, et que je n'ai définies dans la présente leçon que dans le cas des ensembles ordonnés.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 8 février 2012.

## 1 Compositions hétérogènes.

Les « compositions hétérogènes » ont lieu entre des foncteurs et des transformations naturelles (d'où leur nom<sup>(1)</sup>). Si  $\varphi : F \rightarrow G$  est une transformations naturelle de  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  vers  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , on a pour chaque objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  une flèche  $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$  de  $\mathcal{D}$ , et donc si  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  est un foncteur, on a aussi la flèche  $H(\varphi_X) : HF(X) \rightarrow HG(X)$ . Il est immédiat que  $X \mapsto H(\varphi_X)$ , qu'on notera  $H\varphi$  est une transformation naturelle de  $HF$  vers  $HG$  (simplement parce que  $H$  transforme les carrés commutatifs en carrés commutatifs). On peut aussi restreindre la transformation naturelle  $\varphi$  à l'image d'un foncteur  $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ . On a alors, pour chaque flèche  $f : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{B}$ , le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} FK(X) & \xrightarrow{FK(f)} & FK(Y) \\ \varphi_{K(X)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{K(Y)} \\ GK(X) & \xrightarrow{GK(f)} & GK(Y) \end{array}$$

qui est juste un cas particulier du carré qui dit que  $\varphi : F \rightarrow G$  est naturelle. La transformation  $X \mapsto \varphi_{K(X)}$ , de  $FK$  vers  $GK$ , qui est clairement naturelle sera notée  $\varphi K$ . En résumé :

**1 Définition.** (compositions hétérogènes) Étant donné des foncteurs et une transformation naturelle comme ci-dessous

$$\mathcal{B} \xrightarrow{K} \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \varphi \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \xrightarrow{H} \mathcal{E}$$

On définit les transformations naturelles  $H\varphi : HF \rightarrow HG$  et  $\varphi K : FK \rightarrow GK$  par  $(H\varphi)_X = H(\varphi_X)$  et  $(\varphi K)_X = \varphi_{K(X)}$ .

---

1. À vrai dire ce nom est un nom maison, que j'ai déjà utilisé dans mon cours de logique catégorique. Il ne semble pas que les catégoriciens aient donné un nom à cette sorte de composition (hormis celui de « composition »).

☞ **Exercice 1.** On considère les foncteurs et transformations naturelles suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{B} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \lambda \\ \xrightarrow{F'} \end{array} & \mathcal{D} & \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \Downarrow \nu \\ \xrightarrow{G'} \end{array} & \mathcal{E} \xrightarrow{K} \mathcal{F}
 \end{array}$$

Vérifier que :

- $(KG)\lambda = K(G\lambda)$
- $\nu(FH) = (\nu F)H$
- $(G\lambda)H = G(\lambda H)$
- $G(\mu \circ \lambda)H = (G\mu H) \circ (G\lambda H)$
- $G1H = 1$

Les trois premiers points de l'exercice ci-dessus montrent qu'on peut considérer des compositions de la forme  $G_1 \dots G_n \lambda F_1 \dots F_m$  où les  $G_i$  et  $F_j$  sont des foncteurs et  $\lambda$  une transformation naturelle, sans se soucier des parenthèses. La seule condition est que ces éléments soient composables. Le quatrième point dit que les compositions hétérogènes sont distributives sur la composition verticale des transformations naturelles. Le cinquième point dit que la transformation naturelle identité est neutre pour les compositions hétérogènes.

## 2 Unité et co-unité d'une adjonction.

On a rencontré plus haut la transformation naturelle  $\eta : 1 \rightarrow GF$ , donnée au dessus de l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  par  $\eta_X = \theta(1_{F(X)})$ . On l'appelle l'« unité » de l'adjonction  $\theta : F \dashv G$ . Symétriquement, on a une transformation naturelle  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  donnée au dessus de l'objet  $Y$  de  $\mathcal{D}$  par  $\varepsilon_Y = \theta^{-1}(1_{G(Y)})$ .

$$\begin{array}{ccc}
 G(Y) & \xrightarrow{\eta_{G(Y)}} & GFG(Y) \\
 \searrow 1_{G(Y)} & & \swarrow G(\varepsilon) \\
 & G(Y) &
 \end{array}$$

La transformation naturelle  $\varepsilon$  est appelée la « co-unité » de l'adjonction  $\theta : F \dashv G$ .

On voit sur le diagramme ci-dessus qu'on a la relation  $G\varepsilon \circ \eta G = 1$  appelée « équation triangulaire ». Symétriquement, on a l'autre équation triangulaire  $\varepsilon F \circ F\eta = 1$ . Les compositions  $G\varepsilon$ ,  $\eta G$ ,  $\varepsilon F$  et  $F\eta$  sont bien sûr des « compositions hétérogènes » (définition 1 (page 1)).

Le théorème de fonctorialité a une sorte de réciproque évidente. Si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est adjoint à gauche de  $G$ , alors pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  il y a une flèche universelle de  $X$  vers  $G$ , qui n'est autre bien sûr que  $\eta_X$  où  $\eta$  est l'unité de l'adjonction.

☞ **Exercice 2.** Montrer que si  $G$  et  $G'$  sont tels que  $\theta : F \dashv G$  et  $\theta' : F \dashv G'$ ,  $\theta'(\varepsilon_X) : G(X) \rightarrow G'(X)$  est un isomorphisme naturel en  $X$  (où  $\varepsilon$  est la co-unité de  $F \dashv G$ ).

L'exercice ci-dessus montre que, s'il existe, l'adjoint (à gauche ou à droite) d'un foncteur est unique à isomorphisme canonique près.

☞ **Exercice 3.** Montrer que si  $F \dashv G$  et  $H \dashv K$ , et si  $F$  et  $H$  sont composables, on a  $H \circ F \dashv G \circ K$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \xleftarrow{G} & & \xleftarrow{K} & \\ & & \mathcal{D} & & \end{array}$$

☞ **Exercice 4.** Montrer que deux foncteurs  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  sont tels que  $F \dashv G$  si et seulement si il existe des transformations naturelles  $\eta : 1 \rightarrow GF$  et  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  vérifiant les équations triangulaires.

☞ **Exercice 5.** Montrer que si  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un adjoint à gauche et si  $I$  est initial dans  $\mathcal{C}$ ,  $F(I)$  est initial dans  $\mathcal{D}$ . Énoncer la propriété duale.

☞ **Exercice 6.** Soit  $\theta : F \dashv G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une adjonction d'unité  $\eta : 1 \rightarrow GF$  et de co-unité  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$ . Soit  $\mathcal{I}$  une catégorie.

(a) Montrer qu'en posant  $F_*(d) = F \circ d$  et  $F_*(f : d \rightarrow d') = (i \mapsto F(f(i)))$ , on définit un foncteur  $F_* : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{I}}$ .

(b) Montrer qu'en posant  $\theta_*(\varphi : F_*(d) \rightarrow d') = (i \mapsto \theta(\varphi_i))$  on obtient une adjonction  $\theta_* : F_* \dashv G_* : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{I}}$ .

(c) Exprimer l'unité  $\eta_*$  et la co-unité  $\varepsilon_*$  de l'adjonction  $\theta_*$  en fonction de l'unité  $\eta$  et de la co-unité  $\varepsilon$  de l'adjonction  $\theta$ .

☞ **Exercice 7.** Soit le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{H} & \mathcal{C} \\ \uparrow V & & \uparrow G \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{K} & \mathcal{D} \\ \downarrow U & & \downarrow F \end{array}$$

tels que  $FH = KU$ ,  $GK = HV$ ,  $U \dashv V$  et  $F \dashv G$ . Soit  $Y$  un objet de  $\mathcal{D}$ . On note  $\varepsilon : FG \rightarrow 1$  la co-unité de l'adjonction  $F \dashv G$ . Montrer qu'en posant

$$\begin{array}{ll} F_*(\langle f \rangle) &= \langle \varepsilon \circ F(f) \rangle & G_*(\langle g \rangle) &= \langle G(g) \rangle \\ F_*([ \varphi ]) &= [ U(\varphi) ] & G_*([ \psi ]) &= [ V(\psi) ] \end{array}$$

on obtient une paire de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} H/G(Y) & \xrightleftharpoons[F_*]{G_*} & K/Y \end{array}$$

tels que  $F_* \dashv G_*$ .

### 3 Limites et colimites dans **Ens** et dans **Top**.

☞ **2 Lemme.** *Tout petit diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a un cône limite, dont le sommet est le sous-ensemble  $L$  du produit  $\prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d(i)$  constitué des familles  $(y_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  ( $y_i \in d(i)$ ) telles que pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on ait  $d(\varphi)(y_i) = y_j$ . La projection  $p_i : L \rightarrow d(i)$  est donnée par  $(y_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} \mapsto y_i$ .*

*Démonstration.* Soient  $f_i : X \rightarrow d(i)$  une famille de fonctions telles que  $d(\varphi) \circ f_i = f_j$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$  (autrement-dit, un cône de sommet  $X$  sur  $d$ ). Pour chaque  $x \in X$ , la famille  $y = (f_i(x))_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  est alors un élément de  $L$ , et c'est la seule qui soit telle que  $p_i(y) = f_i(x)$  pour tout  $i$ . On a donc une unique application  $f : X \rightarrow L$  telle que  $p_i \circ f = f_i$ .  $\square$

On peut construire une limite d'un petit diagramme dans **Top** en la construisant d'abord dans **Ens**, puis en mettant sur le sommet du cône la plus petite topologie (dite « initiale ») qui rend les arêtes du cônes continues. Les détails sont laissés à titre d'exercice. En fait, cette topologie est juste celle qui est induite par la topologie produit sur  $\prod_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d(i)$ .

☞ **3 Lemme.** *Tout petit diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a un cocône colimite, dont le sommet est le quotient de l'ensemble des couples  $(i, x)$  où  $i$  est un objet de  $\mathcal{I}$  et  $x \in d(i)$  par la plus petite relation d'équivalence identifiant  $(i, x)$  à  $(j, d(\varphi)(x))$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$  et tout  $x \in d(i)$ , et où la flèche canonique  $\gamma_i : d(i) \rightarrow \mathbf{colim} d$  envoie  $x \in d(i)$  sur la classe d'équivalence de  $(i, x)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\delta : d \rightarrow \Delta_X$  un cocône sur  $d$ . Considérons l'application  $\theta$  qui envoie tout couple  $(i, x)$  (avec  $x \in d(i)$ ) sur  $\delta_i(x) \in X$ . Comme  $\delta_j \circ d(\varphi) = \delta_i$  pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on a  $\theta(i, x) = \delta_i(x) = \delta_j(d(\varphi)(x)) = \theta(j, d(\varphi)(x))$  et on voit que  $\theta$  passe au quotient en une application  $\bar{\theta} : \mathbf{colim} d \rightarrow X$ , qui est donc l'unique application telle que  $\bar{\theta} \circ \gamma_i = \delta_i$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ .  $\square$

En résumé, pour construire la colimite d'un diagramme d'ensembles, faire l'union disjointe de ces ensembles puis identifier tout point de l'un de ces ensembles avec ses images par les applications du diagramme. Toute la difficulté de comprendre de quoi est faite une telle colimite est celle de comprendre la relation d'équivalence engendrée par les identifications  $(i, x) \simeq (j, d(\varphi)(x))$ .

☞ **4 Exemple.** La colimite du diagramme

$$X_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{s} \end{array} X_1$$

où  $X_0 = X_1 = \mathbb{N}$  et où  $i(x) = x$  et  $s(x) = x+1$ , est un singleton, car on identifie  $(0, x)$  à  $(1, x)$  et à  $(1, x+1)$ , donc par transitivité tout couple de la forme  $(0, x)$  à tout couple de la forme  $(1, y)$  et

donc tous les éléments de  $X_0$  à tous les éléments de  $X_1$ . Dans certaines situations, déterminer la colimite d'un diagramme d'ensemble même simple peut être un problème insoluble, équivalent à un problème de mots. Toutefois, les colimites que nous allons utiliser en topologie algébrique ne sont pas aussi mystérieuses.

☞ **5 Exemple.** En particulier, tout diagramme de **Ens** de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

a une colimite, autrement-dit, **Ens** a des sommes amalgamées. D'après la description qu'en fait le lemme 3, la colimite du diagramme ci-dessus est un quotient de l'union disjointe  $X \amalg Y \amalg Z$ , mais comme tout  $x \in X$  est identifié à ses images par  $f$  et  $g$ , chaque élément de la colimite a au moins un représentant dans  $Y$  ou dans  $Z$ . La colimite peut donc aussi être vue comme un quotient de l'union disjointe  $Y \amalg Z$ . Noter que deux éléments distincts de  $Y$  peuvent être identifiés dans la colimite. Il suffit pour cela qu'ils aient des antécédents dans  $X$  ayant la même image par  $g$ . En particulier, si  $Z = \{*\}$  et si  $f$  est surjective, la colimite sera un singleton (distinguer le cas où  $Y$  est vide du cas où il n'est pas vide).

Les colimites dans **Top** sont obtenues à partir de celles de **Ens** :

☞ **6 Lemme.** *Tout petit diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$  a une colimite. Elle peut être construite en construisant un cocône colimite  $\gamma : d \rightarrow \Delta_L$  de  $d$  dans **Ens** puis en mettant sur le sommet  $L$  de ce cocône la topologie dont les ouverts sont les parties  $A$  de  $L$  telles que  $\gamma_i^{-1}(A)$  soit ouvert dans  $d(i)$  pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ .<sup>(2)</sup>*

*Démonstration.* En oubliant les topologies, on a donc d'abord le cocône  $\gamma : d \rightarrow \Delta_L$  dans **Ens**. Comme l'image réciproque préserve la partie vide, la partie pleine, les intersections et les réunions (quelconques), on voit que l'ensemble des parties  $A$  de  $L$  telle que  $\gamma_i^{-1}(A)$  soit un ouvert de  $d(i)$  pour tout  $i$  est une topologie. Par définition de la continuité,  $\gamma$  est alors un cocône sur  $d$  dans **Top**.

Soit maintenant  $\delta : d \rightarrow \Delta_X$  un cocône quelconque sur  $d$  dans **Top**. Comme c'est un cocône dans **Ens**, il existe une unique application  $\varphi : L \rightarrow X$  telle que  $\varphi \circ \gamma_i = \delta_i$  pour tout  $i$ . Il reste donc juste à vérifier que  $\varphi$  est continue. Si  $U$  est un ouvert de  $X$ ,  $\gamma_i^{-1}(\varphi^{-1}(U))$  est un ouvert de  $d(i)$ , car il est égal à  $\delta_i^{-1}(U)$ .  $\varphi^{-1}(U)$  est donc ouvert dans  $L$  par définition de la topologie de  $L$ .  $\square$

De nombreuses constructions utilisées en topologie algébrique sont des colimites dans **Top**. En voici quelques exemples.

☞ **7 Exemple. Écrasement d'un sous-espace.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un sous-espace de  $X$ . L'espace obtenu en « écrasant »  $A$  sur un point, noté  $X/A$ , est la colimite du

---

2. La topologie ainsi définie sur  $L$  est dite « finale ». Il résulte immédiatement de sa définition que c'est la plus fine (plus grande) des topologies pour lesquelles toutes les applications  $\gamma_i$  sont continues.

diagramme (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{*\} & \dashrightarrow & X/A \end{array}$$

Ensemblistement, on a identifié tous les éléments de  $A$  en un seul point.<sup>(3)</sup> Une partie  $U$  de  $X/A$  est ouverte si et seulement si son image réciproque par l'application canonique  $\pi : X \rightarrow X/A$  est ouverte dans  $X$ . On notera  $*$  le point de  $X/A$  qui est l'image de  $*$   $\in \{*\}$ .

La topologie de  $X/A$  n'est pas toujours séparée même quand celle de  $X$  l'est. Il suffit de prendre pour  $A$  une partie dense dans  $X$  dont le complémentaire a moins un point  $x$ . Soit  $y \in A$ . Les images de  $x$  et  $y$  par l'application canonique  $\pi : X \rightarrow X/A$  sont alors des points distincts. Si  $U$  et  $V$  sont des voisinages ouverts de  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$  respectivement,  $\pi^{-1}(U)$  et  $\pi^{-1}(V)$  sont des voisinages ouverts de  $x$  et  $y$ . Comme  $A$  est dense dans  $X$  il existe  $a \in A \cap \pi^{-1}(U)$ . Mais alors  $\pi(a) = \pi(y) = *$  appartient à  $U$ , et on voit que tout voisinage d'un point de  $X/A$  doit contenir le point  $*$ .

Par contre, la topologie de  $X/A$  est séparée si  $X$  est un espace métrique et si  $A$  est fermé dans  $X$ . En effet, si  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$  sont deux points distincts de  $X/A$  et distincts de  $*$ ,  $x$  et  $y$  sont des points distincts de  $X$  qui ne sont pas dans  $A$ . Comme  $X - A$  est ouvert dans  $X$ , il existe une boule ouverte  $U$  de centre  $x$  et une boule ouverte  $V$  de centre  $y$ , disjointes et disjointes de  $A$ . Comme la restriction de  $\pi$  à  $X - A$  est injective,  $U$  et  $V$  sont égales aux images réciproques de leurs images directes par  $\pi$ . Ces images directes sont donc des voisinages ouverts disjointes de  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$  dans  $X/A$ . Comme tout espace métrique est régulier, il existe pour tout  $x$  qui n'est pas dans  $A$  une boule ouverte  $U$  de centre  $x$  et un ouvert  $V$  contenant  $A$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ . Comme  $U$  et  $V$  sont à nouveau les images réciproques de leurs images directes par  $\pi$ , on raisonne comme précédemment.

**8 Exemple. Cylindre d'une application continue.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Le « cylindre »  $\text{Cyl}(f)$  de  $f$  est la colimite du diagramme (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{j} & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

où  $i_1(x) = (x, 1)$  pour tout  $x \in X$ . On notera que l'application canonique  $i : Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$  est injective, puisque dans **Ens** tout pushout d'une injection est une injection.

**9 Exemple. Cône d'une application continue.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application

---

3. Noter toutefois que si  $A$  est vide,  $X/A$  est juste l'union disjointe de  $X$  et de  $\{*\}$ .

continue. Le « cône » de  $f$ , noté  $C(f)$ , est la colimite du diagramme (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \xrightarrow{f} Y \\
 & \downarrow i_1 & \vdots \\
 X & \xrightarrow{i_0} X \times [0, 1] & \searrow \text{dotted} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{*\} & \xrightarrow{\text{dotted}} & C(f)
 \end{array}$$

où  $i_0(x) = (x, 0)$  et  $i_1(x) = (x, 1)$  pour tout  $x \in X$ .

☞ **Exercice 8.** On note  $X_n$  l'intervalle  $[0, 1/n]$  des réels ( $n > 0$ ), et soit  $f_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$  l'application définie par  $x \mapsto \inf(x, 1/(n+1))$ . Montrer que la colimite du diagramme formé par les  $f_n$  est homéomorphe à l'espace de Sierpiński.

☞ **10 Exemple.** La « suspension »  $\Sigma X$  d'un espace  $X$  est obtenue comme le double quotient  $((X \times [0, 1])/X \times \{0\})/X \times \{1\}$  (au sens de l'exemple 7). On a montré en cours que  $\Sigma \mathbb{S}^{n-1}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^n$  (exercice facile de topologie générale).

J'ai évoqué à la fin du cours la notion de « H-cogroupe » sur laquelle je reviendrai plus tard.

## 4 Bonus.

☞ **11 Lemme.** Soit  $X$  objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . Le foncteur  $\check{X}$ , défini sur les objets par  $\check{X}(Y) = \mathcal{C}(X, Y)$  et sur les flèches par  $\check{X}(f)(\varphi) = f_*(\varphi) = f \circ \varphi$ , préserve les limites.

*Démonstration.* Soit  $\gamma : \Delta_L \rightarrow d$  un cône limite de  $\mathcal{C}$  sur le diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Il s'agit de montrer que le cône  $\check{X}\gamma : \check{X} \circ \Delta_L \rightarrow \check{X} \circ d$  est un cône limite dans **Ens**, autrement-dit que l'application  $f \mapsto (\gamma_i \circ f)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  est une bijection de  $\check{X}(L) = \mathcal{C}(X, L)$  vers l'ensemble des familles  $(f_i)_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})}$  ( $f_i \in \mathcal{C}(X, d(i))$ ) telles que pour toute flèche  $\varphi : i \rightarrow j$  de  $\mathcal{I}$ , on ait  $d(\varphi) \circ f_i = f_j$ . Mais c'est le cas, car c'est exactement la définition des cônes limites dans  $\mathcal{C}$ .  $\square$

☞ **12 Remarque.** Examiner le cas particulier d'un produit de deux objets peut aider à mieux comprendre la démonstration ci-dessus. Soient  $A$  et  $B$  deux objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , et soit

$$\begin{array}{ccc}
 & L & \\
 \gamma \swarrow & & \searrow \gamma' \\
 A & & B
 \end{array}$$

un cône limite sur cette paire d'objets. En appliquant le foncteur  $\check{X}$  à ce cône limite, on obtient

le cône de **Ens**

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}(X, L) & \\
 \gamma_* \swarrow & & \searrow \gamma'_* \\
 \mathcal{C}(X, A) & & \mathcal{C}(X, B)
 \end{array}$$

Dire que ce dernier est un cône limite dans **Ens** revient à dire que  $f \mapsto (\gamma \circ f, \gamma' \circ f)$  est une bijection de  $\mathcal{C}(X, L)$  vers  $\mathcal{C}(X, A) \times \mathcal{C}(X, B)$ , ce qui est exactement la propriété universelle qui définit les produits.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 13 février 2012.

## 1 Catégories topologiques.

En topologie algébrique on manipule beaucoup plus souvent des couples  $(X, A)$  ou des triplets  $(X, A, B)$  où  $X$  est un espace topologique,  $A$  et  $B$  des sous-espaces de  $X$ , que de simples espaces topologiques. Toutefois, ces couples et triplets ont beaucoup de propriétés communes avec les espaces topologiques, et nous introduisons ici le vocabulaire qui va nous permettre de traiter tous ces cas particuliers en une seule opération.

☞ **1 Définition.** On appellera « catégorie topologique » toute sous-catégorie d'une catégorie de diagrammes dans **Top**.<sup>(1)</sup>

☞ **2 Exemple.** On utilisera essentiellement les catégories topologiques suivantes (en plus de **Top** elle-même) :

- La catégorie **Top2** des « paires topologiques ». Ses objets sont les inclusions canoniques d'un sous-espace topologique dans un espace topologique. Un tel objet sera noté  $(X, A)$  où  $X$  est donc un espace topologique, et  $A$  un sous-espace de  $X$ . Un morphisme de  $(X, A)$  vers  $(Y, B)$  est une application continue  $X \rightarrow Y$  qui envoie  $A$  dans  $B$ .
- La sous-catégorie **Top<sub>•</sub>** de la précédente dans laquelle le sous-espace de chaque paire topologique est réduit à un seul point est appelée la « catégorie des espaces pointés ».
- La catégorie **Top3** des « triplets topologiques ». Ses objets sont les triplets  $(X, A, B)$  où  $X$  est un espace topologique,  $A$  et  $B$  deux sous-espaces de  $X$  tels que  $B \subset A$ . Un morphisme de  $(X, A, B)$  vers  $(Y, U, V)$  est une application continue  $X \rightarrow Y$  qui envoie  $A$  dans  $U$  et  $B$  dans  $V$ .
- La catégorie **Triad** des « triades topologiques ». Ses objets sont les « triades »<sup>(2)</sup>  $(X, A, B)$  où  $X$  est un espace topologique,  $A$  et  $B$  deux parties de  $X$ . Ses morphismes de  $(X, A, B)$  vers  $(Y, U, V)$  sont donc les applications continues  $X \rightarrow Y$  qui envoient  $A$  dans  $U$  et  $B$  dans  $V$ .

---

1. Rappelons qu'une catégorie de diagrammes dans **Top** est de la forme **Top<sup>I</sup>**.

2. Ce vocabulaire est officiel en topologie algébrique.

Pour tout espace topologique  $T$ , on a un foncteur  $P_T : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  (« produit par  $T$  ») défini par

$$\begin{aligned} P_T(X) &= X \times T \\ P_T(f) &= f \times 1 \end{aligned}$$

où, pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ , l'application (continue)  $f \times 1 : X \times T \rightarrow Y \times T$  est définie par  $(f \times 1)(x, t) = (f(x), t)$ . Pour toute catégorie  $\mathcal{I}$ , le foncteur  $P_T$  induit le foncteur  $P_T : \mathbf{Top}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbf{Top}^{\mathcal{I}}$ , envoyant l'objet  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$  sur l'objet  $P_T F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$  et la flèche  $\theta : F \rightarrow G$  sur la flèche  $P_T \theta : P_T F \rightarrow P_T G$ .

Par exemple, si  $\mathcal{I}$  est  $\vec{2}$ ,<sup>(3)</sup> un objet de  $\mathbf{Top}^{\vec{2}}$  est juste une application continue  $\varphi : X \rightarrow Y$  que  $P_T$  envoie sur  $\varphi \times 1 : X \times T \rightarrow Y \times T$ , et une flèche de  $\mathbf{Top}^{\vec{2}}$  de  $\varphi : X \rightarrow Y$  vers  $\varphi' : X' \rightarrow Y'$  est juste un couple de flèches  $(f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y')$  telles que  $\varphi' \circ f = g \circ \varphi$ , que  $P_T$  envoie sur le carré

$$\begin{array}{ccc} X \times T & \xrightarrow{\varphi \times 1} & Y \times T \\ f \times 1 \downarrow & & \downarrow g \times 1 \\ X' \times T & \xrightarrow{\varphi' \times 1} & Y' \times T \end{array}$$

Or, le foncteur  $P_T$  transforme les inclusions canoniques en inclusions canoniques, c'est-à-dire que si  $i : A \rightarrow X$  est l'inclusion canonique du sous-espace  $A$  dans l'espace  $X$ ,  $P_T(i) = i \times 1 : A \times T \rightarrow X \times T$  est l'inclusion canonique de  $P_T(A)$  dans  $P_T(X)$ . Il en résulte que  $P_T$  est bien défini sur certaines des catégories topologiques de l'exemple **2** (page 1). Cela a donc un sens de faire le produit d'une paire topologique, d'un triplet topologique et d'une triade topologique par un espace topologique. Par contre, le foncteur  $P_T$  ne respecte pas la notion de singleton. Il n'envoie donc pas un espace pointé sur un espace pointé.<sup>(4)</sup>

## 2 Applications homotopes.

L'homotopie est une notion qui concerne deux applications continues « parallèles »  $f, g : X \rightarrow Y$ , c'est-à-dire deux applications de même source et de même but.<sup>(5)</sup> Une homotopie de  $f$  à  $g$  doit être comprise comme une « déformation continue transformant  $f$  en  $g$  ». Nous avons toutefois besoin d'une définition un peu plus générale que ce qui vient d'être suggéré.

Les deux « inclusions » de  $\{*\}$  dans les extrémités de l'intervalle  $[0, 1]$ , seront notées  $i_0$  et  $i_1$ . Elles sont définies par  $i_0(*) = 0$  et  $i_1(*) = 1$ . On identifiera sans plus de formalités un espace topologique  $X$ , et plus généralement un objet  $X$  d'une catégorie topologique, avec son produit par  $\{*\}$ . On notera également  $i_0$  et  $i_1$  les applications  $X \rightarrow \times[0, 1]$  définies par  $i_0(x) = (x, 0)$  et  $i_1(x) = (x, 1)$ .

3. Où  $\vec{2}$  est l'ensemble ordonné  $\{0, 1\}$  vu comme une catégorie.

4. On verra plus loin la notion de « smash-produit » qui résout ce problème pour les espaces pointés.

5. On verra plus loin une autre notion d'homotopie, cette fois entre morphismes de DG-modules.

☞ **3 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie topologique, et soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux flèches parallèles de  $\mathcal{C}$ . Une « homotopie de  $f$  à  $g$  » est une flèche de  $\mathcal{C}$

$$h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

telle que  $h \circ i_0 = f$  et  $h \circ i_1 = g$ . Si une telle homotopie existe, on dit que  $f$  est « homotope » à  $g$ .

Noter par exemple que dans le cas des paires topologiques, une homotopie de  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  à  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une flèche  $h : (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$ , c'est-à-dire en fait  $h : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$ . On voit donc que pour chaque  $t \in [0, 1]$  l'application  $x \mapsto h(x, t)$  envoie  $A$  dans  $B$ . On parle alors éventuellement d'homotopie « relative ». C'est un concept très important en topologie algébrique, en fait plus important même que celui d'homotopie entre flèches de **Top**.

☞ **4 Convention.** Par la suite, si  $f : X \rightarrow Y$  est une flèche d'une catégorie topologique, on n'hésitera pas l'appliquer à des éléments, c'est-à-dire à écrire  $f(x)$  où  $x$  est un élément de l'un quelconque des espaces topologiques formant le diagramme  $X$ .<sup>(6)</sup> Bien entendu, dans le cas des paires  $(X, A)$ , triplets ou triades  $(X, A, B)$  topologiques, on peut toujours considérer  $x$  comme un élément de  $X$ . Nous nommerons aussi le plus souvent « application continue » les flèches entre objets d'une catégorie topologique.

☞ **5 Lemme.** La relation d'homotopie entre flèches de  $X$  vers  $Y$  dans une catégorie topologique est une relation d'équivalence.

*Démonstration.* La relation est réflexive, car pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  on peut poser  $h(x, t) = f(x)$ . Elle est symétrique car si  $h$  est une homotopie de  $f$  à  $g$ ,  $(x, t) \mapsto h(x, 1 - t)$  est une homotopie de  $g$  à  $f$ . Enfin, elle est transitive, car si  $h$  est une homotopie de  $f$  à  $g$  et  $h'$  une homotopie de  $g$  à  $k$ , on peut considérer la fonction  $h'' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  définie par

$$h''(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h'(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie car  $h(x, 2\frac{1}{2}) = g(x) = h'(x, 2\frac{1}{2} - 1)$ . Elle est continue car  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  et  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  sont fermés dans  $X \times [0, 1]$  et  $h''$  est continue sur chacun de ces fermés. Comme  $h''(x, 0) = f(x)$  et  $h''(x, 1) = k(x)$ , on voit que c'est une homotopie de  $f$  à  $k$ .  $\square$

☞ **6 Lemme.** Soient des flèches dans une catégorie topologique

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Z \xrightarrow{\psi} T$$

6. Cette manière de faire est courante par exemple en théorie des topos, en particulier dans le cas où  $X$  est un préfaisceau, une notion plus générale que celle que nous manipulons ici.

*telle que  $f$  soit homotope à  $g$ . Alors  $\psi \circ f \circ \varphi$  est homotope à  $\psi \circ g \circ \varphi$ .*

*Démonstration.* Soit  $h : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$  une homotopie de  $f$  à  $g$ . Alors  $k : X \times [0, 1] \rightarrow T$  définie par  $k(x, t) = \psi(h(\varphi(x), t))$  est une application continue, et on a  $k(x, 0) = \psi(f(\varphi(x)))$  et  $k(x, 1) = \psi(g(\varphi(x)))$ .  $\square$

On voit donc que l'homotopie est une « congruence » sur chacune de nos catégories topologiques, et qu'il y a donc dans chaque cas une catégorie dont les objets sont ceux de la catégorie topologique considérée et dont les flèches sont les classes d'homotopie d'applications continues. Cette catégorie, dite « catégorie homotopique », est notée en accolant le préfixe **Ho** au nom de la catégorie topologique. On a ainsi les catégories **HoTop**, **HoTop<sub>•</sub>**, **HoTop2**, **HoTop3**, **HoTriad**. Pour tous objets  $X$  et  $Y$  de la catégorie topologique  $\mathcal{C}$ , l'ensemble des flèches de **HoC** de  $X$  vers  $Y$  sera noté  $[X, Y]$  plutôt que **HoC**( $X, Y$ ).

**7 Définition.** Une flèche  $f : X \rightarrow Y$  entre objets d'une catégorie topologique  $\mathcal{C}$  est appelée une « équivalence d'homotopie » si la flèche qu'elle représente dans la catégorie **HoC** est un isomorphisme. Un espace topologique  $X$  est dit « contractile », si l'unique application  $X \rightarrow \{*\}$  est une équivalence d'homotopie.

Il revient bien sûr au même de dire que  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie si et seulement si il existe une flèche  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  soient respectivement homotopes aux identités de  $X$  et  $Y$ . Bien sûr, tout homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

**Exercice 1.** Montrer que toute partie non vide convexe, et plus généralement toute partie étoilée,<sup>(7)</sup> d'un espace vectoriel réel est contractile.

**Exercice 2.** Montrer que les flèches suivantes sont des équivalences d'homotopies :

- Dans **Top** : Toute flèche de  $\{*\}$  vers  $\mathbb{R}^n$  ou vers  $\mathbb{D}^n$ , l'inclusion canonique de  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , l'inclusion canonique de  $O(n)$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$  et de  $SO(n)$  dans  $GL_n^+(\mathbb{R})$ .
- Dans **Top<sub>•</sub>** : Toute flèche de  $(\{*\}, *)$  vers  $(\mathbb{R}^n, *)$ .
- Dans **Top2** : L'inclusion canonique de  $(\mathbb{R}^n, \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq 1\})$  dans  $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ .
- Dans toute catégorie topologique : toute flèche de  $X$  vers  $X \times [0, 1]$  de la forme  $\langle 1, f \rangle$ , de même que la projection canonique  $p_1 : X \times [0, 1] \rightarrow X$ .

### 3 Carrés cartésiens et pullbacks.

Il s'agit d'un cas particulier de la notion de limite, en fait juste la notion duale de celle de somme amalgamée (carrés cocartésiens). Nous la redéfinissons ici d'une manière autonome.

---

7. Une partie  $A$  d'un espace vectoriel réel  $E$  est dite « étoilée », s'il existe un point  $x_0 \in A$  tel que le segment de droite joignant un point quelconque  $x \in A$  à  $x_0$  soit contenu dans  $A$ . On dit alors que  $A$  est « étoilée par rapport à  $x_0$  ». Une partie convexe est une partie qui est étoilée par rapport à chacun de ses points.

☞ **8 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \beta \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

est dit « cartésien », si pour toutes flèches  $\varphi : U \rightarrow X$  et  $\psi : U \rightarrow Y$  telle que  $f \circ \varphi = g \circ \psi$ , il existe une unique flèche  $\rho : U \rightarrow P$  telle que  $\alpha \circ \rho = \varphi$  et  $\beta \circ \rho = \psi$ .

$$\begin{array}{ccccc} U & & & & \\ & \searrow \varphi & & & \\ & \rho & \searrow \alpha & & \\ & P & & X & \\ & \beta \downarrow & & \downarrow f & \\ & Y & \xrightarrow{g} & Z & \end{array}$$

La flèche  $\beta$  est alors appelée un « pullback de  $f$  le long de  $g$  », et sera notée  $g^*(f)$ . On dit qu'une catégorie  $\mathcal{C}$  « a des pullbacks » si toute flèche de  $\mathcal{C}$  a un pullback le long de toute flèche (de même cible, bien sûr).

le lecteur vérifiera facilement qu'un carré cartésien est un objet final dans une catégorie de carrés commutatifs construits sur les flèches  $f$  et  $g$ . En conséquence, le cône formé des deux flèches de source  $P$  est bien défini à isomorphisme canonique près, et ne dépend que de  $f$  et  $g$ . La flèche  $g^*(f)$  est donc elle-même bien définie à isomorphisme près à partir de  $f$  et  $g$ . En fait, si  $\beta$  et  $\beta'$  sont deux pullbacks de  $f$  le long de  $g$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\simeq} & P \\ \beta' \searrow & & \searrow \beta \\ & Y & \end{array}$$

où la flèche supérieure est un isomorphisme et est par ailleurs unique (pourvu qu'il commute aussi avec  $\alpha$  et  $\alpha'$ ).

Le lemme suivant n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général vu précédemment concernant les limites de **Ens** et de **Top**.

☞ **9 Lemme.** Soient  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  des flèches de **Ens** (resp. de **Top**). Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

est cartésien.

*Démonstration.* Vérifions-le d'abord pour **Ens**. Soient  $\varphi : U \rightarrow X$  et  $\psi : U \rightarrow Y$  telles que  $f\varphi = g\psi$ . Pour tout  $u \in U$ , la paire  $\rho(u) = (\varphi(u), \psi(u))$  appartient à  $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ , ce qui définit  $\rho : U \rightarrow P$ , et c'est clairement la seule flèche telle que  $\pi_1\rho = \varphi$  et  $\pi_2\rho = \psi$ .

Supposons maintenant que  $f$  et  $g$  soient des applications continues.  $P$  reçoit la topologie induite par celle de  $X \times Y$ .  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (en fait leurs restrictions à  $P$ ) sont alors continues. Enfin, si  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues, il en est de même de  $\rho$  définie par la formule ci-dessus.  $\square$

☞ **10 Définition.** Soient des flèches  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  dans une catégorie. Un « relèvement » de  $f$  le long de  $g$  est une flèche  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  telle que  $g\bar{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \bar{f} & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Une « section de  $g$  » n'est rien d'autre qu'un relèvement de l'identité de  $Z$  le long de  $g$ . Il est facile de voir qu'une section est un « relèvement universel » en ce sens qu'une section de  $g$  existe si et seulement si toute flèche de cible  $Z$  se relève le long de  $g$ .

Il est souvent plus pratique de manipuler des sections que des relèvements. C'est ce que le lemme ci-dessous nous autorise à faire.

☞ **11 Lemme.** Dans une catégorie qui a des pullbacks, si une flèche  $f : X \rightarrow Z$  se relève le long de  $g : Y \rightarrow Z$  en une flèche  $\bar{f}$ ,  $s = \langle 1, \bar{f} \rangle$  est une section de  $f^*(g)$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{k} & Y \\ \uparrow s & \nearrow f^*(g) & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Réciproquement, si  $s$  est une section de  $f^*(g)$ ,  $k \circ s$  est un relèvement de  $f$  le long de  $g$ . De plus, cette correspondance est biunivoque.

*Démonstration.* La vérification est sans difficulté.  $\square$

## 4 Groupe topologique agissant sur un espace topologique.

☞ **12 Définition.** Soit  $G$  un groupe (multiplicatif), et soit  $X$  un ensemble.

- Une « action à droite » de  $G$  sur  $X$  est une application  $X \times G \rightarrow X$ , notée  $(x, g) \mapsto x.g$ ,

telle que :

$$\begin{aligned}(x.g).h &= x.(gh) \\ x.1 &= x\end{aligned}$$

pour tous  $x \in X$  et  $g, h \in G$ .

- Pour toute partie  $A$  de  $X$ , on note  $A.g$  l'ensemble  $\{y \in X \mid \exists x \in A \ y = x.g\}$ , qu'on appelle « translaté de  $A$  par  $g$  ». L'action est dite « libre » si  $\forall x \in X \ \forall g \in G \ x = x.g \Rightarrow g = 1$ .
- Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $\{y \in X \mid \exists g \in G \ y = x.g\}$  est appelé l'« orbite de  $x$  (sous l'action de  $G$ ) », et l'ensemble de toutes les orbites est noté  $X/G$ . Pour tout  $g \in G$ , la bijection  $x \mapsto x.g$  de  $X$  vers  $X$  est appelée l'« action de  $g$  sur  $X$  ».
- Une action qui n'a pas plus d'une orbite est dite « transitive ».
- Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux ensembles sur lesquels  $G$  agit à droite est dite «  $G$ -équivariante » si pour tout  $x \in X$  et tout  $g \in G$ , on a  $f(x.g) = f(x).g$ .

On notera que se donner une action  $(x, g) \mapsto x.g$  de  $G$  sur  $X$  est équivalent à se donner un morphisme de groupes  $\psi$  de  $G$  vers le groupe des bijections de  $X$  vers  $X$ . Il suffit de poser  $\psi(g)(x) = x.g$ . Les axiomes de la définition **12** deviennent alors ceux des morphismes de groupes. Réciproquement, on peut définir l'action à partir de  $\psi$  en posant  $x.g = \psi(g)(x)$ .

On aura aussi à utiliser des actions à gauche (et en fait simultanément des actions à gauche et à droite d'un même groupe). Le lecteur établira lui-même les définitions correspondantes.

Rappelons qu'un groupe  $G$  (disons noté multiplicativement) muni d'une topologie est un « groupe topologique » si les applications  $(x, y) \mapsto xy$  et  $x \mapsto x^{-1}$  de  $G \times G$  vers  $G$  et de  $G$  vers  $G$  sont continues. Si  $X$  est un espace topologique, il en est alors de même de  $X \times G$ , et cela a donc un sens de parler d'« action continue » (par exemple à droite) de  $G$  sur  $X$  (l'application  $(x, g) \mapsto x.g$  est continue).

**13 Exemple.** Les exemples d'actions de groupes sur des ensembles abondent en mathématiques. D'ailleurs, cette notion a même précédé celle de groupe, car les premiers groupes de l'histoire ont été des groupes de transformations de figure géométriques ou des groupes de permutations. Dans chacun de ces cas, un groupe « agit » sur une figure géométrique ou sur un ensemble. Parmi les exemples classiques, signalons les suivants.

- Le groupe  $G$  agit « trivialement » sur l'ensemble  $X$ , quand l'action est définie comme  $(x, g) \mapsto x$ . Dans ce cas, toutes les orbites sont des points, et toute partie a elle-même comme saturé.
- Le groupe  $G$  agit « canoniquement » sur l'ensemble  $X \times G$  quand on définit l'action comme  $((x, h), g) \mapsto (x, hg)$ . À nouveau, s'il s'agit d'une action continue.
- Un « espace affine » est un ensemble sur lequel le groupe additif d'un espace vectoriel agit librement et transitivement.
- Si  $X$  est un ensemble muni d'une structure quelconque, et si  $G$  est un sous-groupe du groupe des automorphismes de  $X$ ,  $G$  agit sur  $X$ .

- Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  (pas nécessairement distingué), le groupe  $H$  agit à droite sur  $G$  via  $(g, h) \mapsto gh$ .
- Le groupe  $O(1)$  (qui n'a que deux éléments  $-1$  et  $+1$ , et est donc isomorphe au groupe additif  $\mathbb{Z}/2$ ) agit librement sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  par multiplication. C'est une action libre et continue qu'on appelle l'« action antipodale ».
- Le groupe  $U(1)$  des complexes de module 1 agit sur toute sphère de dimension impaire. En effet,  $\mathbb{S}^{2n+1}$  est l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Quand on multiplie un vecteur de norme 1 par un scalaire de module 1, on obtient un vecteur de norme 1. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une action, qui est de plus libre et continue.

## 5 Revêtements : définition et exemples.

☞ **14 Définition.** Soit  $F$  un espace topologique discret.

Une application continue  $\pi : E \rightarrow X$  est appelée un « revêtement trivial de fibre  $F$  » s'il existe un homéomorphisme  $\varphi : E \rightarrow X \times F$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & X \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & X & \end{array}$$

soit commutatif.

Une application continue  $\pi : E \rightarrow X$  est appelée un « revêtement » s'il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  de  $X$ , et pour chaque  $i \in I$  un espace discret  $F_i$ , tels que pour tout  $i \in I$  le pullback de  $\pi$  le long de l'inclusion  $U_i \subset X$  soit un revêtement trivial de fibre  $F_i$ .

Si pour tout  $i$  on a  $F_i = F$ , on dit que  $\pi$  est un « revêtement de fibre  $F$  ».

On dit que le recouvrement  $\mathcal{U}$  dont il est question dans cet énoncé « trivialise  $\pi$  ». Pour vérifier que  $\pi : E \rightarrow X$  est un revêtement, il suffit bien sûr de trouver pour chaque  $x \in X$  un voisinage  $U$  de  $x$  tel que le pullback de  $\pi$  le long de l'inclusion  $U \rightarrow X$  soit un revêtement trivial. Le pullback de  $\pi$  le long d'une inclusion  $U \rightarrow X$  sera aussi appelé la « restriction » de  $\pi$  au dessus de  $U$ . Si la restriction de  $\pi$  au dessus de  $U$  est un revêtement trivial, on dira que «  $U$  trivialise  $\pi$  », ou que  $\pi$  est « trivial au dessus de  $U$  ». Noter que le carré

$$\begin{array}{ccc} Y \times F & \xrightarrow{f \times 1} & X \times F \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

étant cartésien, tout pullback d'un revêtement trivial est trivial (de même fibre). Ainsi, tout revêtement qui est trivial au dessus de  $U$  l'est a fortiori au dessus de tout ouvert inclus dans

$U$ . Si  $\pi : E \rightarrow X$  est un revêtement et  $f : Y \rightarrow X$  une application continue, le pullback de  $\pi$  le long de  $f$  pourra être noté  $f^*(\pi)$ .

☞ **15 Lemme.** *Tout pullback d'un revêtement (le long d'une application continue) est un revêtement.*

*Démonstration.* Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement, et soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue. Soit  $y \in Y$  et soit  $U$  un voisinage de  $f(y)$  au dessus duquel  $\pi$  est trivial. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

est commutatif (il est même cartésien), on voit que  $f^*i^*(\pi) = i^*f^*(\pi)$ . Mais comme  $i^*(\pi)$  est trivial, il en est de même de  $f^*i^*(\pi)$ , donc de  $i^*f^*(\pi)$ . Comme  $f^{-1}(U)$  est un voisinage de  $y$ , on voit que  $f^*(\pi)$  est un revêtement.  $\square$

☞ **Exercice 3.** Montrer que tout revêtement est un homéomorphisme local.

☞ **Exercice 4.** Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement de fibre  $F$  finie non vide. Montrer que  $E$  est compact si et seulement si  $X$  est compact.

☞ **Exercice 5.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme local propre, où  $X$  et  $Y$  sont des espaces localement compacts. Montrer que  $f$  est un revêtement et que la fibre au dessus de chaque point de  $Y$  est finie.

## 6 Groupes et revêtements.

☞ **16 Définition.** Soit  $G$  un groupe topologique discret et  $\varphi : X \times G \rightarrow X$  une action continue de  $G$  sur  $X$ . On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est « proprement discontinue »<sup>(8)</sup> si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que les translatés de  $U$  sous l'action de  $G$  soient deux à deux disjoints.

On remarque qu'une action proprement discontinue est nécessairement libre.

☞ **17 Lemme.** Soit  $G$  un groupe discret dont l'action (continue) sur un espace topologique  $X$  est proprement discontinue. Alors la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/G$  est un revêtement de fibre  $G$ .

*Démonstration.* Pour tout point  $y \in X/G$  il existe un  $x \in X$  tel que  $y = \pi(x)$ . Soit  $U_y$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$  tel que les translatés  $U_y \cdot g$  ( $g \in G$ ) de  $U_y$  soient deux à deux disjoints, et soit  $V_y$  l'image directe de  $U_y$  par  $\pi$ . Alors  $V_y$  est un ouvert, car  $\pi^{-1}(V_y) = \bigcup_{g \in G} U_y \cdot g$

---

8. Bien sûr, ce vocabulaire est un peu troublant car l'action est à la fois continue et proprement discontinue.

en est un.  $V_y$  est donc un voisinage ouvert de  $y$  dans  $X/G$ . L'application  $\psi$  définie par  $\psi(u, g) = u.g$  de  $U_y \times G$  vers  $\pi^{-1}(V_y)$  est un homéomorphisme (c'est en effet une application bijective, continue et ouverte), et on a  $\pi \circ \psi = \pi_1$ . On voit donc que la famille d'ouverts  $(V_y)_{y \in X/G}$  qui recouvre  $X/G$ , est telle que le pullback de  $\pi : X \rightarrow X/G$  le long chaque inclusion  $V_y \subset X/G$  est un revêtement trivial de fibre  $G$ .  $\square$

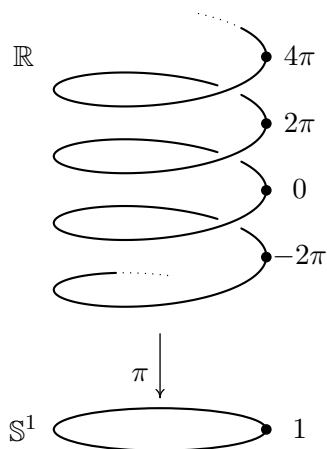
**18 Exemple.** Le groupe multiplicatif  $O(1) = \{-1, +1\}$  (groupe des matrices orthogonales réelles  $1 \times 1$ ), qui est un groupe topologique discret, agit sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  par multiplication (la multiplication par  $+1$  ne bouge pas les points, et la multiplication par  $-1$  envoie tout point  $x$  de  $\mathbb{S}^n$  sur son antipode  $-x$ ). L'action est clairement proprement discontinue. Le quotient  $\mathbb{S}^n/O(1)$  est noté  $\mathbb{RP}^n$  et appelé l'« espace projectif réel de dimension  $n$  ». La projection canonique  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  est donc un revêtement d'après le lemme 17.

**19 Lemme.** Soit  $G$  un groupe topologique, et soit  $H$  un sous-groupe discret de  $G$  (non nécessairement distingué). Alors la projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/H$  est un revêtement de fibre  $H$ .

*Démonstration.* (Le groupe  $G$  est noté multiplicativement.) Comme  $H$  est discret, il existe un voisinage  $U$  de 1 dans  $G$  tel que  $U \cap H = \{1\}$ . Comme l'application  $\lambda : G \times G \rightarrow G$  définie par  $\lambda(x, y) = x^{-1}y$  est continue et envoie  $(1, 1)$  sur 1, il existe un voisinage  $V$  de  $\{1\}$  tel que  $\lambda(V \times V) \subset U$ . Soient  $h$  et  $k$  des éléments de  $H$ . Si  $V.h$  et  $V.k$  ont un point commun, alors il existe  $x$  et  $y$  dans  $V$  tels que  $xh = yk$ , et on a  $x^{-1}y = hk^{-1}$ , donc  $hk^{-1} \in U$ . Mais comme  $hk^{-1}$  appartient à  $H$ , on a  $hk^{-1} = 1$  donc  $h = k$  et l'action à droite (par multiplication) de  $H$  sur  $G$  est proprement discontinue. On conclut en appliquant le lemme 17.  $\square$

**20 Exemple.** Il résulte du lemme précédent que la projection canonique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est un revêtement, de même que la projection canonique  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$  (les groupes étant ici additifs). Comme l'application  $x \mapsto e^{ix}$  induit (par passage au quotient) un homéomorphisme  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$  (où  $\mathbb{S}^1$  est identifié à l'espace des complexes de module 1), on voit que  $x \mapsto e^{ix}$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{S}^1$  est un revêtement de fibre  $\mathbb{Z}$ . De même  $z \mapsto e^z$  de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C} - \{0\}$  est un revêtement de fibre  $\mathbb{Z}$ .

Voici une représentation graphique du revêtement  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  défini par  $x \mapsto e^{ix}$ . La convention habituelle dans les représentations graphiques de revêtements  $\pi : E \rightarrow X$  (et plus généralement de fibrés) est que pour tout  $x \in E$ ,  $\pi(x)$  doit se situer (sur le dessin) en dessous de  $x$  sur la même ligne verticale. Ceci oblige généralement à représenter  $E$  d'une manière inhabituelle. Dans le cas du revêtement  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  défini par  $\pi(x) = e^{ix}$ ,  $\mathbb{R}$  doit être représenté, en perspective cavalière, comme une hélice :



Dans cette même perspective, le cercle  $\mathbb{S}^1$  apparaît comme une ellipse, et l'application  $x \mapsto e^{ix}$  consiste à « projeter » tout point de l'hélice  $\mathbb{R}$  verticalement sur le cercle. Par exemple, sur ce dessin on voit bien que la fibre au dessus de 1, c'est-à-dire  $\pi^{-1}(1)$ , est  $2\pi\mathbb{Z}$ . Ce qui est également visible sur ce dessin est que la restriction de ce revêtement à toute partie du cercle qui n'est pas le cercle tout entier est un revêtement trivial. Ce qu'on peut voir également est qu'un revêtement n'est pas nécessairement une application fermée. En effet,  $\mathbb{Z}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ , mais à cause de l'irrationalité du nombre  $\pi$ , son image par l'application  $x \mapsto e^{ix}$  est une partie dénombrable et dense de  $\mathbb{S}^1$ , qui ne peut donc pas être fermée.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 15 février 2012.

## 1 Le relèvement des homotopies.

☞ **1 Lemme.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un revêtement, et soient  $f, g : X \rightarrow E$  deux applications continues telle que  $\pi \circ f = \pi \circ g$  (autrement-dit,  $f$  et  $g$  sont deux relèvements d'une même application). Alors l'ensemble  $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  est ouvert et fermé dans  $X$ . En conséquence, si  $X$  est connexe, deux applications  $f, g : X \rightarrow E$  qui sont des relèvements d'une même application (c'est-à-dire telles que  $\pi \circ f = \pi \circ g$ ) sont égales dès qu'elles sont égales en un point de  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . Posons  $a = f(x)$  et  $b = g(x)$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $\pi(a)$  (qui est égal à  $\pi(b)$ ) dans  $B$  au dessus duquel le revêtement  $\pi$  est trivial. On a donc un homéomorphisme  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , avec  $F$  discret, tel que  $\pi_1 \circ \varphi = \pi$ . Posons  $V_a = U \times \{\pi_2(\varphi(a))\}$  et  $V_b = U \times \{\pi_2(\varphi(b))\}$ .  $V_a$  et  $V_b$  sont alors des voisinages ouverts de  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  dans  $U \times F$ . On a  $V_a = V_b$  si et seulement si  $a = b$ , c'est-à-dire si  $x \in A$ , et  $V_a \cap V_b = \emptyset$  dans le cas contraire.

Comme  $\varphi \circ f$  et  $\varphi \circ g$  sont continues, il existe un voisinage  $W$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $\varphi(f(W)) \subset V_a$  et  $\varphi(g(W)) \subset V_b$ . Comme  $\pi_1 : V_a \rightarrow U$  et  $\pi_1 : V_b \rightarrow U$  sont des homéomorphismes, et que  $\pi \circ f = \pi \circ g$ , on voit que  $\varphi \circ f$  et  $\varphi \circ g$  sont égales sur  $W$  si  $a = b$ , et ne sont égales en aucun point de  $W$  sinon. Ceci prouve que  $A$  ainsi que son complémentaire dans  $X$  sont ouverts.  $\square$

☞ **2 Théorème.** (Théorème de relèvement des homotopies) Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un revêtement. Soit  $f : X \rightarrow E$  une application continue. Soit  $h : X \times [0, 1] \rightarrow B$  une homotopie de  $\pi \circ f$  à une application  $g$ . Alors il existe une application  $\bar{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$  qui relève  $h$  (c'est-à-dire telle que  $\pi \circ \bar{h} = h$  et qui est une homotopie de  $f$  à un relèvement de  $g$ ).

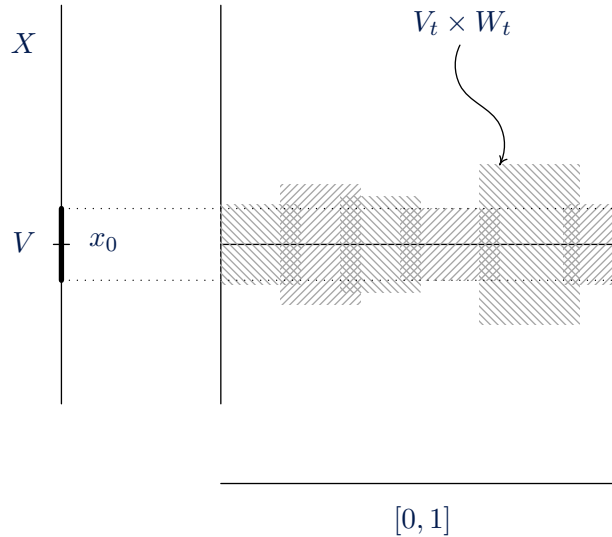
L'énoncé de ce théorème est résumé par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \bar{h} & \downarrow \pi \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

où  $i_0(x) = (x, 0)$ , où les flèches en trait plein sont données, et où la flèche en pointillés est celle dont l'existence est affirmée par le théorème, rendant commutatifs les deux triangles du diagramme.

*Démonstration.* Démontrons d'abord le théorème dans le cas où le revêtement  $\pi$  est trivial. On peut supposer que  $\pi$  est la projection  $\pi_1 : X \times F \rightarrow X$  ( $F$  discret).  $(X \times \{a\})_{a \in F}$  est un recouvrement de  $X \times F$  par des ouverts deux à deux disjoints, et  $(f^{-1}(X \times \{a\}))_{a \in F}$  est donc un recouvrement de  $X$  par des ouverts deux à deux disjoints, et  $(f^{-1}(X \times \{a\}) \times [0, 1])_{a \in F}$  est un recouvrement de  $X \times [0, 1]$  par des ouverts deux à deux disjoints. Il suffit de définir  $\bar{h}$  sur l'ouvert  $f^{-1}(X \times \{a\}) \times [0, 1]$  en posant  $\bar{h}(x, t) = (h(x, t), a)$ .

Passons maintenant au cas général. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $B$  par des ouverts qui trivialisent  $\pi$ . L'image réciproque par  $h$  de ce recouvrement est une famille d'ouverts qui recouvre  $X \times [0, 1]$ . Soit  $x_0 \in X$  (le problème est trivial si  $X$  est vide). Chaque  $(x_0, t) \in X \times [0, 1]$  appartient à un ouvert de la forme  $h^{-1}(U_i)$  dans lequel on peut trouver un voisinage de  $(x_0, t)$  en forme de pavé, qu'on va noter  $V_t \times W_t$  ( $V_t$  ouvert de  $X$  et  $W_t$  ouvert de  $[0, 1]$ ).



Les  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  recouvrent  $[0, 1]$ , et le lemme de Lebesgue nous donne donc un entier naturel  $n$  tel que chaque segment  $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$  (pour  $i = 0, \dots, n-1$ ) soit contenu dans l'un des  $W_t$ . Pour chaque  $i$ , choisissons un  $t_i \in [0, 1]$  tel que  $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \subset W_{t_i}$ .

Posons  $V = \bigcap_{i=0}^{n-1} V_{t_i}$ .  $V$  est un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $X$ , et pour chaque  $i$ ,  $h(V \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$  est contenu dans un ouvert (appelons-le  $U_i$ ) de  $B$  au dessus duquel le revêtement  $\pi$  est trivial.  $h$  est déjà relevée sur  $V \times \{0\}$ . Supposons que  $h$  soit relevée sur  $V \times [0, \frac{i}{n}]$ . Alors  $h$  est relevée sur  $V \times \{\frac{i}{n}\}$ , et la première partie de la démonstration montre qu'on peut relever  $h$  sur  $V \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ .

On a donc montré par récurrence sur  $i$  qu'on peut relever  $h$  sur  $V \times [0, 1]$  de telle façon que ce relèvement prolonge  $f$  sur  $V$ .

Le relèvement de  $h$  qui en résulte sur  $\{x\} \times [0, 1]$  (pour tout  $x \in V$ ) est unique d'après le lemme 1 (page 1), puisque  $\{x\} \times [0, 1]$  est connexe. On peut recouvrir  $X$  par des ouverts  $V_j$  tels que  $h$  se relève sur chaque  $V_j \times [0, 1]$ . Tous ces relèvements s'accordent sur les intersections de leurs domaines (toujours d'après le lemme 1). Ils définissent donc un relèvement de  $h$  sur  $X \times [0, 1]$  prolongeant le relèvement donné pour  $t = 0$ .  $\square$

**3 Corollaire.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un revêtement,  $\sigma : [0, 1] \rightarrow B$  un chemin de  $B$ , et  $a \in E$  un point tel que  $\pi(a) = \sigma(0)$ . Alors il existe un unique relèvement  $\bar{\sigma} : [0, 1] \rightarrow E$  de  $\sigma$  tel que  $\bar{\sigma}(0) = a$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\sigma$  est juste une homotopie entre les deux applications  $\{*\} \rightarrow B$  définies par  $* \mapsto \sigma(0)$  et  $* \mapsto \sigma(1)$ , et d'appliquer le théorème 2.  $\square$

On dira du chemin  $\bar{\sigma}$  qu'il est « le relèvement de  $\sigma$  à partir de  $a$  » et qu'il « aboutit » au point  $b$  si  $b$  est  $\bar{\sigma}(1)$ .

Noter que si  $\bar{\sigma}$  est le relèvement de  $\sigma$  à partir de  $a$  et s'il aboutit à  $b$ , le relèvement de  $\sigma^{-1}$  à partir de  $b$  n'est autre que  $\bar{\sigma}^{-1}$  et il aboutit à  $a$ .

**4 Lemme.** Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement pointé. Soit  $\gamma$  un lacet de  $(X, *)$  tel que  $[\gamma] \in \pi_*(\pi_1(E, *))$ . Alors l'unique relèvement de  $\gamma$  à partir de  $*$   $\in E$  est un lacet, c'est-à-dire aboutit à  $*$   $\in E$ .

*Démonstration.* L'hypothèse dit qu'il existe un lacet  $\delta$  de  $(E, *)$  tel que  $\pi \circ \delta$  soit homotope à  $\gamma$ . En relevant cette homotopie le long de  $\pi$ , on obtient une homotopie de  $\delta$  à un lacet qui ne peut être que le relèvement de  $\gamma$  à partir de  $*$   $\in E$ .  $\square$

**5 Lemme.** Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement. On suppose que  $E$  et  $X$  ont des points de base notés  $*$  et tels que  $\pi(*) = *$ . Alors le morphisme de groupes

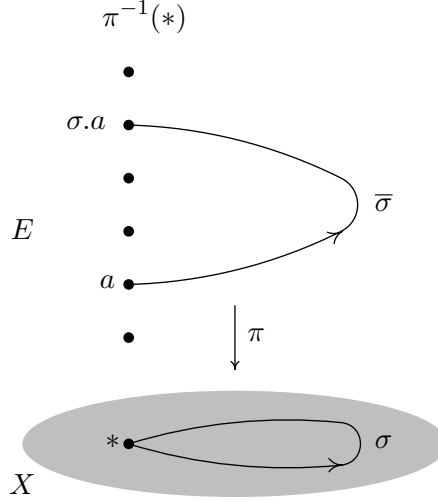
$$\pi_1(E, *) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(X, *)$$

est injectif.

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un lacet de  $E$  tel qu'il existe une homotopie  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  du lacet  $\pi_*(\sigma)$  au lacet constant.  $\sigma$  est un relèvement de  $h$  au dessus de  $\{0\} \times [0, 1]$ . D'après le théorème 2,  $h$  se relève en une application continue  $\bar{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ , prolongeant  $(0, x) \mapsto \sigma(x)$ , et telle que  $\pi \circ \bar{h} = h$ . Comme  $\bar{h}$  envoie les trois cotés  $[0, 1] \times \{0\}$ ,  $[0, 1] \times \{1\}$  et  $\{1\} \times [0, 1]$  du carré, dont la réunion forme une partie connexe de  $[0, 1] \times [0, 1]$ , dans  $\pi^{-1}(*)$  qui est discret,  $\bar{h}$  est constante sur cette même réunion où elle prend la valeur  $*$   $\in E$ . On voit donc que  $\bar{h}$  est une homotopie de  $\sigma$  au lacet constant de  $E$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement, On suppose  $X$  connexe par arcs, et soit  $*$  un point de base dans  $X$ . Si  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  est un lacet de  $X$  en  $*$  et si  $a \in \pi^{-1}(*)$ , il existe un unique relèvement  $\bar{\sigma}$  de ce lacet en un chemin de  $E$  d'origine  $a = \bar{\sigma}(0)$ . L'extrémité  $\bar{\sigma}(1)$  de ce chemin est un élément

de  $\pi^{-1}(*)$ , car  $\pi(\bar{\sigma}(1)) = \sigma(1) = *$ . Cet élément de  $\pi^{-1}(*)$  sera noté  $\sigma.a$ .



Or  $\sigma.a$  ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet  $\sigma$  et non pas de  $\sigma$  lui-même. En effet, supposons donc qu'on ait un second lacet  $\tau$  de  $X$  en  $*$ . Soit  $\bar{\tau}$  le relèvement de  $\tau$  d'origine  $a$ . Soit  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une homotopie entre ces deux lacets (on a donc  $\sigma(s) = h(0, s)$  et  $\tau(s) = h(1, s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , et  $h(t, 0) = h(t, 1) = *$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ). L'application  $h$  peut être relevée sur  $[0, 1] \times \{0\}$  en envoyant tous les éléments de cet ensemble sur  $a$ , puisque  $h(t, 0) = *$  pour tout  $t$ . Le théorème (2) (page 1) montre que  $h$  a un relèvement  $\bar{h}$  tel que  $\bar{h}(t, 0) = a$  pour tout  $t$ . Il en résulte que  $s \mapsto \bar{h}(0, s) = \bar{\sigma}(s)$  et  $s \mapsto \bar{h}(1, s) = \bar{\tau}(s)$ , et donc que  $\bar{h}(0, 1) = \sigma.a$  et  $\bar{h}(1, 1) = \tau.a$ . Mais on a aussi  $\pi\bar{h}(t, 1) = h(t, 1) = *$  pour tout  $t$ , ce qui signifie que la restriction de  $\bar{h}$  à  $[0, 1] \times \{1\}$  prend ses valeurs dans  $\pi^{-1}(*)$ . Mais comme  $[0, 1] \times \{1\}$  est connexe et  $\pi^{-1}(*)$  discret, cette restriction est une fonction constante, et on a  $\sigma.a = \tau.a$ .

On vient de définir ce qui est clairement une action de  $\pi_1(X, *)$  sur la fibre  $\pi^{-1}(*)$  du revêtement au dessus de  $*$ .

**6 Lemme.** Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement pointé où  $E$  est connexe par arcs. Alors l'action de  $\pi_1(X, *)$  sur  $\pi^{-1}(*)$  est transitive et chaque point  $x$  de  $\pi^{-1}(*)$  a l'image du morphisme (injectif)  $\pi_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(X, *)$  comme sous-groupe d'isotropie.

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \pi^{-1}(*)$ . Comme  $E$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma$  de  $E$  d'extrémités  $x$  et  $y$ . Sa projection  $\pi \circ \gamma$  sur  $X$  est un lacet de  $(X, *)$  et  $\gamma$  est l'unique relèvement de ce lacet à partir de  $x \in E$ . Il en résulte que  $y = [\pi \circ \gamma].x$ , et donc que l'action de  $\pi_1(X, *)$  sur  $\pi^{-1}(*)$  est transitive. Si un lacet  $\sigma$  de  $(X, *)$  agit trivialement sur le point  $x$  de la fibre  $\pi^{-1}(*)$ , c'est que tout relèvement de ce lacet partant de  $x$  aboutit à  $x$ , autrement-dit est un élément de  $\pi_1(E, x)$ .  $[\sigma]$  est donc dans l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(X, *)$ . Réciproquement, si  $[\sigma]$  est dans l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(X, *)$ , son relèvement à partir de  $x$  aboutit à  $x$ , et  $[\sigma]$  est dans le sous-groupe d'isotropie de  $x$ .  $\square$

**7 Corollaire.** Tout revêtement  $\pi : E \rightarrow B$  tel que  $B$  soit connexe par arcs, localement

*connexe par arcs et simplement connexe, est trivial.*

*Démonstration.* Soit  $E'$  une composante connexe par arcs de  $E$ . Tout point de  $B$  ayant un voisinage connexe par arcs trivialisant  $\pi$ , on voit que la restriction  $\pi'$  de  $\pi$  à  $E'$  est encore un revêtement de base  $B$ . Le groupe  $\pi_1(B, *)$ , qui est réduit à 0, agit transitivement sur la fibre  $\pi'^{-1}(*)$  qui est donc réduite à un seul point (quelque soit le choix de  $*$   $\in B$ ).  $\pi'$  est donc bijective continue et ouverte, c'est-à-dire que c'est un homéomorphisme  $E' \rightarrow B$ . Comme ceci s'applique à toutes les composantes connexes par arcs de  $E$ , lesquelles recouvrent  $E$ , on voit que  $\pi$  est un revêtement trivial (de fibre  $\pi_0(E)$ ).  $\square$

En particulier, pour  $n \geq 2$ , tout revêtement de  $\mathbb{S}^n$  est trivial.

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application propre différentiable de classe  $\mathcal{C}^1$ , ayant en tout point une différentielle inversible. Montrer que  $f$  est un difféomorphisme.

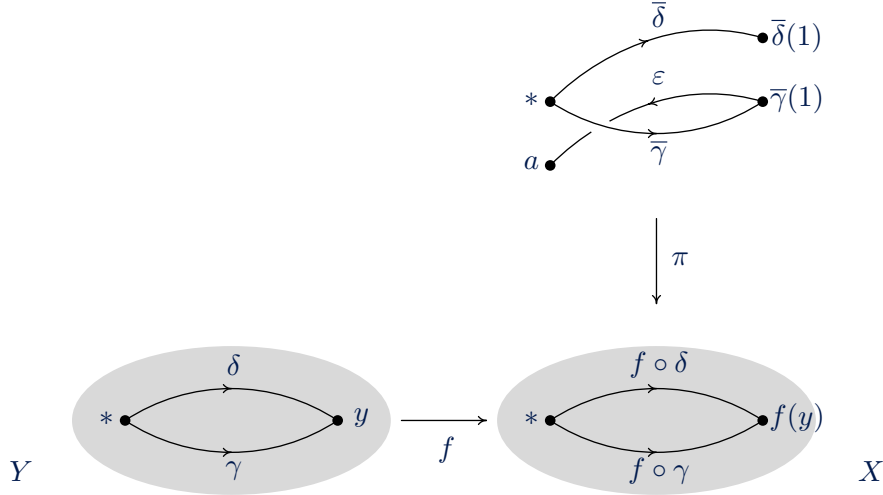
**8 Lemme.** Soit  $\pi : (E, *) \rightarrow (X, *)$  un revêtement pointé, et soit  $f : (Y, *) \rightarrow (X, *)$  une application continue pointée, où  $Y$  est connexe et localement connexe par arcs. Pour qu'il existe un relèvement pointé de  $f$  le long de  $\pi$ , il faut et il suffit que l'image de  $f_* : \pi_1(Y, *) \rightarrow \pi_1(X, *)$  soit contenue dans l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, *) \rightarrow \pi_1(X, *)$ .

*Démonstration.* Si un tel relèvement  $\bar{f} : (Y, *) \rightarrow (E, *)$  existe, on a  $\pi \circ \bar{f} = f$ , donc  $\pi_* \circ \bar{f}_* = f_*$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(E, *) & \\ \bar{f}_* \nearrow & \downarrow \pi_* & \\ \pi_1(Y, *) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, *) \end{array}$$

et on a  $\text{Im}(f_*) \subset \text{Im}(\pi_*)$ .

Réciproquement, supposons  $\text{Im}(f_*) \subset \text{Im}(\pi_*)$  et soit  $y \in Y$ . Comme  $Y$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $*$  à  $y$  dans  $Y$ . Le chemin  $f \circ \gamma$  de  $*$  à  $f(y)$  dans  $X$  se relève (de manière unique) à partir de  $*$   $\in E$  en un chemin  $\bar{\gamma}$ . Le point  $\bar{\gamma}(1)$  ne dépend alors pas du choix de  $\gamma$ . En effet, soit  $\delta$  un autre chemin de  $*$  à  $y$  dans  $Y$ , et faisons pour  $\delta$  la même construction que pour  $\gamma$ , c'est-à-dire le relèvement  $\bar{\delta}$  de  $f \circ \delta$  à partir de  $*$   $\in E$ . Construisons également le relèvement  $\varepsilon$  de  $(f \circ \delta)^{-1}$  à partir de  $\bar{\gamma}(1)$ , qui aboutit à  $a$ .



A priori, les points  $\bar{\gamma}(1)$  et  $\bar{\delta}(1)$  peuvent être distincts. On va montrer qu'ils sont égaux. Comme  $(f \circ \gamma) \star (f \circ \delta)^{-1}$  est un lacet de  $(X, *)$  qui est l'image par  $f$  du lacet  $\gamma \star \delta^{-1}$  de  $(Y, *)$ , sa classe d'homotopie est dans  $f_*(\pi_1(Y, *))$  donc dans  $\pi_*(\pi_1(E, *))$ . Ceci signifie que si on relève  $(f \circ \gamma) \star (f \circ \delta)^{-1}$  à partir de  $*$ , on aboutit à  $*$  (lemme 4 (page 3)). On a donc  $\bar{\delta} = \varepsilon^{-1}$ , puis  $\bar{\gamma}(1) = \bar{\delta}(1)$ .

L'application  $\bar{f} : Y \rightarrow E$  définie par  $\bar{f}(y) = \bar{\gamma}(1)$  est donc bien définie, et telle que  $\pi \circ \bar{f} = f$  et  $\bar{f}(*) = *$ . Il reste juste à montrer que  $\bar{f}$  est continue. Soit  $U$  un voisinage de  $\bar{f}(y)$  dans  $E$ . Quitte à réduire  $U$ , on peut supposer que  $\pi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $\pi(U)$ , dont l'inverse sera noté  $s : \pi(U) \rightarrow U$ . Soit  $V$  un voisinage de  $y$  tel que  $f(V) \subset \pi(U)$ . Comme  $Y$  est localement connexe par arcs, il existe pour tout  $z \in V$ , un chemin  $\delta$  de  $y$  à  $z$  contenu dans  $V$ . Par ailleurs,  $s \circ f \circ \delta$  est un chemin contenu dans  $U$  allant de  $\bar{f}(y)$  à  $s(f(z))$ , et qui se projette sur  $f \circ \delta$ . C'est donc le relèvement de  $f \circ \delta$  à partir de  $\bar{f}(y)$ . Il en résulte que le relèvement de  $f \circ (\gamma \star \delta)$  à partir de  $*$  est  $\bar{\gamma} \star (s \circ f \circ \delta)$ , et il aboutit à  $\bar{f}(z)$ , puisque  $\delta \star \gamma$  est un chemin de  $*$  à  $z$  dans  $Y$ . Le point  $\bar{f}(z)$  est donc dans  $U$ .  $\square$

**Exercice 2.** Montrer que pour  $n \geq 2$ , toute application continue  $\mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ , de même que toute application continue  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^1$ , est homotope à une application constante.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 20 février 2012.

## 1 Suite exacte courte d'un revêtement principal.

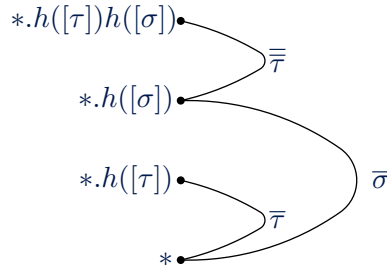
Les revêtements isomorphes à une projection canonique  $X \rightarrow X/G$ , où  $G$  est un groupe discret agissant de manière proprement discontinue sur un espace  $X$  sont dits « principaux ».

**1 Lemme.** Soit  $G$  un groupe discret agissant de manière proprement discontinue sur un espace connexe par arcs  $X$ . Soit  $*$   $\in X$  un point de base pour  $X$ . On note encore  $*$  la projection de  $*$  sur  $X/G$ . On a la suite exacte<sup>(1)</sup>

$$1 \longrightarrow \pi_1(X, *) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(X/G, *) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1$$

où le morphisme  $h$  est caractérisé par  $*.h([\sigma]) = *.[\sigma]$ , où le premier point représente l'action de  $G$  sur  $X$  et le second point l'action de  $\pi_1(X/G, *)$  sur  $\pi^{-1}(*)$ .<sup>(2)</sup>

*Démonstration.* L'application  $h$  est bien définie parce que l'action de  $G$  sur  $X$  est libre et que  $*.[\sigma]$  appartient à l'orbite de  $*$  sous l'action de  $G$ . Montrons d'abord que  $h$  est un morphisme de groupes. Soient  $[\sigma]$  et  $[\tau]$  deux éléments de  $\pi_1(X/G, *)$ . Soient  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\tau}$  les relèvements de  $\sigma$  et  $\tau$  à partir de  $*$   $\in X$ . Le chemin  $\bar{\bar{\tau}}$  défini par  $\bar{\bar{\tau}}(s) = \bar{\tau}(s).h([\sigma])$  va de  $*.h([\sigma])$  à  $*.h([\tau]).h([\sigma])$ .



Comme  $\bar{\bar{\tau}}$  a pour origine l'extrémité de  $\bar{\sigma}$ , on voit que  $\bar{\bar{\tau}}\bar{\sigma}$  est le relèvement de  $\tau\sigma$  à partir de  $*$ , et qu'on a donc  $*.h([\tau][\sigma]) = *.[\tau][\sigma] = \bar{\bar{\tau}}(1) = *.h([\tau]).h([\sigma])$ . Il en résulte que  $h([\tau][\sigma]) = h([\tau]).h([\sigma])$ .

1. On note 1 un groupe multiplicatif réduit à son élément neutre. Rappelons qu'une suite est « exacte » si l'image de chaque flèche est le noyau de la suivante.

2. Bien sûr,  $\pi^{-1}(*)$  n'est rien d'autre que l'orbite de  $*$   $\in X$  sous l'action de  $G$ .

On sait déjà que  $\pi_*$  est injectif. Comme le groupe  $\pi_1(X/G, *)$  agit transitivement sur la fibre  $\pi^{-1}(*)$ , il existe pour tout  $g \in G$ , un lacet  $\sigma$  de  $(X/G, *)$  tel que  $*.[\sigma] = *.g$ , et on voit que  $h$  est surjective.

Si  $\sigma$  est un lacet de  $(X, *)$ , le lacet  $\pi \circ \sigma$  a  $\sigma$  pour relevé à partir de  $*$  et on voit que  $1 = h([\pi \circ \sigma]) = h(\pi_*([\sigma]))$  (où 1 est l'élément neutre de  $G$ ). Réciproquement, si  $\sigma$  est un lacet de  $(X/G, *)$  tel que  $h([\sigma]) = 1$ , on a  $*.[\sigma] = *$ , et le relèvement  $\bar{\sigma}$  de  $\sigma$  à partir de  $*$  est un lacet de  $(X, *)$ , ce qui montre que  $[\sigma]$  est dans l'image de  $\pi_*$ .  $\square$

**2 Exemple.** Reprenons l'action par translation de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , qui donne le revêtement  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}, *) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, *) \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

et comme  $\pi_1(\mathbb{R}, *) \simeq 1$ , on voit que  $h$  est un isomorphisme. Comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , ceci nous redonne le groupe fondamental du cercle.<sup>(3)</sup>

## 2 Foncteurs représentables.

**3 Définition.** Un foncteur covariant  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est dit « représentable » s'il existe un objet  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$  et un élément  $\iota \in F(\Gamma)$  tels que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Gamma, X) &\longrightarrow F(X) \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi)(\iota) \end{aligned}$$

soit bijective.

De même, un foncteur contravariant  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est dit « représentable », s'il existe un objet  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$  et un élément  $\iota \in F(\Gamma)$  tels que pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, \Gamma) &\longrightarrow F(X) \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi)(\iota) \end{aligned}$$

soit bijective.

La paire  $(\Gamma, \iota)$  est appelée un « classifiant » du foncteur  $F$ . L'élément  $\iota \in F(\Gamma)$  est appelé l'« élément universel » de ce classifiant.

**4 Exemple.** Les deux foncteurs  $F$  et  $G$  de l'exemple 2 de la leçon du 1 février sont représentables, avec pour classifiants respectifs  $((\{*\}, \{*\}), *)$  et  $((\{*\}, \emptyset), *)$ .

Le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Ens}$  est représentable avec le couple  $(k, 1)$  comme classifiant. En effet, l'application  $\mathbf{Vect}_k(k, E) \rightarrow E$  définie par  $f \mapsto f(1)$  est clairement bijective.

---

3. Dans la littérature, c'est généralement de cette manière qu'on calcule le groupe fondamental du cercle plutôt que par le théorème de van Kampen.

☞ **5 Lemme.** Si le foncteur (covariant ou contravariant)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est représentable, la bijection  $\varphi \mapsto F(\varphi)(\iota)$  de la définition 3 est naturelle en  $X$ .

*Démonstration.* Dans le cas où  $F$  est covariant, cela signifie que pour toute flèche  $f : X \rightarrow Y$  on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\Gamma, X) & \xrightarrow{\simeq} & F(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \mathcal{C}(\Gamma, Y) & \xrightarrow{\simeq} & F(Y) \end{array}$$

ce qui est clair puisque pour toute flèche  $\varphi : \Gamma \rightarrow X$ , on a  $F(f)(F(\varphi)(\iota)) = F(f \circ \varphi)(\iota) = F(f_*(\varphi))(\iota)$ . Le cas d'un foncteur contravariant se traite de la même façon.  $\square$

☞ **6 Lemme.** (Lemme de Yoneda) Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur (covariant ou contravariant) représentable de classifiant  $(\Gamma, \iota)$  et soit  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur de même variance que  $F$ . Alors l'application  $\mathbf{y} : \mathbf{Nat}(F, G) \rightarrow G(\Gamma)$  définie par  $\mathbf{y}(\varphi) = \varphi_\Gamma(\iota)$  est bijective.

*Démonstration.* Supposons d'abord  $F$  et  $G$  covariants. Soit  $a \in G(\Gamma)$ . On va montrer que  $a$  a un unique antécédent par  $\mathbf{y}$ . Remarquons d'abord que si un tel antécédent  $\varphi$  existe, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(\Gamma) & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & G(\Gamma) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \end{array}$$

pour toute flèche  $f : \Gamma \rightarrow X$ . Comme  $a = \varphi_\Gamma(\iota)$ , on voit que  $\varphi_X(F(f)(\iota)) = G(f)(a)$ , et comme tout élément de  $F(X)$  s'écrit de façon unique sous la forme  $F(f)(\iota)$  (définition 3), on voit que  $a$  détermine  $\varphi_X$  pour tout objet  $X$  et donc que  $\mathbf{y}$  est injective.

Il reste à construire un tel antécédent de  $a$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $x$  un élément de l'ensemble  $F(X)$ . Comme  $(\Gamma, \iota)$  est un classifiant de  $F$ , il existe une unique flèche  $\chi_x : \Gamma \rightarrow X$  telle que  $x = F(\chi_x)(\iota)$ . Posons  $\varphi_X(x) = G(\chi_x)(\iota)$ . Ceci définit une transformation  $\varphi : F \rightarrow G$  dont il suffit de montrer qu'elle est naturelle. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{C}$ . On doit vérifier que le carré

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

est commutatif. On a, pour tout  $x \in F(X)$ ,  $G(f)(\varphi_X(x)) = G(f)(G(\chi_x)(\iota)) = G(f \circ \chi_x)(\iota) = G(f_*(\chi_x))(\iota)$ . Le lemme 5 nous dit que  $f_*(\chi_x) = \chi_{F(f)(x)}$ . On a donc  $\varphi_Y(F(f)(x)) = G(\chi_{F(f)(x)})(\iota) = G(f_*(\chi_x))(\iota)$ .

Le cas des foncteurs contravariants se traite de même.  $\square$

Le lemme de Yoneda a la réputation d'être difficile à comprendre parce que trop abstrait. C'est en effet ce qui ressort de la démonstration précédente. Toutefois, quelques exemples simples

parlant d'objet concrets sont de nature à le démystifier.

**7 Exemple.** Considérons le foncteur identité  $1 : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , qui envoie tout ensemble sur lui-même et toute application sur elle-même. Ce foncteur (covariant) admet  $(\{*\}, *)$  pour classifiant. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}(\{*\}, X) &\longrightarrow 1(X) = X \\ \varphi &\longmapsto 1(\varphi)(*) = \varphi(*) \end{aligned}$$

est clairement bijective. Autrement-dit, il y a exactement autant de points dans  $X$  que d'applications  $\{*\} \rightarrow X$ , et la correspondance est donnée par la formule ci-dessus.

Ce que dit le lemme de Yoneda dans ce cas est que pour tout foncteur covariant  $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , il y a exactement autant de transformations naturelles  $1 \rightarrow G$  que d'éléments dans  $G(\{*\})$ . Par exemple, il y a autant de transformations  $X \rightarrow X \times X$  naturelles en  $X$  que d'éléments dans  $\{*\} \times \{*\}$ . Comme il y en a un seul, il n'y a qu'une transformation  $X \rightarrow X \times X$  naturelle en  $X$  est c'est bien sûr l'application diagonale  $x \mapsto (x, x)$ .

D'ailleurs, le foncteur  $X \mapsto X \times X$  est lui aussi représentable, avec pour classifiant la paire  $(\{a, b\}, (a, b))$  (remarquer que  $(a, b) \in \{a, b\} \times \{a, b\}$ ). En effet, se donner une application de  $\{a, b\}$  vers  $X$  revient à se donner deux éléments (pas nécessairement distincts) de  $X$ , c'est-à-dire un élément de  $X \times X$ . En termes plus précis, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Ens}(\{a, b\}, X) &\longrightarrow X \times X \\ \varphi &\longmapsto (\varphi \times \varphi)(a, b) \end{aligned}$$

est bijective. Dans ce cas, le lemme de Yoneda nous dit par exemple qu'il y a autant de transformations  $X \times X \rightarrow X$  naturelles en  $X$  que d'éléments dans  $1(\{a, b\}) = \{a, b\}$ , soit deux. Bien entendu, il s'agit des deux projections canoniques  $\pi_1, \pi_2 : X \times X \rightarrow X$  définies respectivement par  $\pi_1(x, y) = x$  et  $\pi_2(x, y) = y$ .

**8 Exemple.** Un autre exemple, plus amusant qu'utile, est le suivant. Considérons les deux foncteurs (contravariants)  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{Top}$  vers  $\mathbf{Ens}$  qui associent à chaque espace topologique  $X$  l'ensemble de ses ouverts et l'ensemble de ses fermés, et à chaque application continue  $f : X \rightarrow Y$  les applications images réciproques  $f^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$  et  $f^* : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$  (bien définies par définition même de la continuité). Il y a trois transformations naturelles évidentes de  $\mathcal{O}$  vers  $\mathcal{F}$ , qui associent à tout ouvert  $U$  de  $X$ , respectivement la partie vide, la partie pleine et le complémentaire de  $U$ . Le lemme de Yoneda nous montre qu'il n'y en a pas d'autre. Un classifiant de  $\mathcal{O}$  est la paire  $(S, \{a\})$ , où  $S = \{a, b\}$  est l'espace de Sierpiński dont la topologie est constitué des trois ouverts  $\emptyset$ ,  $\{a\}$  et  $S$ . En effet, l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Top}(X, S) &\longrightarrow \mathcal{O}(X) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^*(\{a\}) \end{aligned}$$

est clairement bijective (exercice trivial de topologie générale). Le lemme de Yoneda dit qu'il y a donc autant de transformations naturelles  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$  que d'éléments dans  $\mathcal{F}(S)$ , c'est-à-dire trois.

### 3 Revêtement universel.

Pour tout espace topologique  $X$  connexe par arcs, On note  $\text{Rev}(X)$  la catégorie dont les objets sont les revêtements au dessus de  $X$ , et dont les flèches sont les morphismes de revêtements au dessus de  $X$ . Soit  $*$  un point de base pour  $X$ . Le foncteur  $\text{Rev}(X) \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie tout revêtement au dessus de  $X$  sur sa fibre au dessus de  $*$ , et tout morphisme de revêtements au dessus de  $X$  sur l'application qu'il induit entre leurs fibres au dessus de  $*$ , sera appelé le « foncteur fibre de  $(X, *)$  ». Noter que pour un revêtement au dessus de  $X$ , on ne demande pas de point de base dans l'espace total de ce revêtement.

**9 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs, et soit  $*$   $\in X$ . Si le foncteur fibre de  $(X, *)$  est représentable, un classifiant  $(\pi : E \rightarrow X, *)$  (où  $*$   $\in \pi^{-1}(*)$ ) de ce foncteur est appelé un « revêtement universel de  $(X, *)$  ».

Un revêtement universel de  $(X, *)$ , s'il existe, sera noté  $\pi : (\tilde{X}, *) \rightarrow (X, *)$  (ou éventuellement  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ). Il résulte des propriétés générales des classifiants que deux revêtements universels de  $(X, *)$  sont isomorphes, et qu'un tel isomorphisme est déterminé par le choix des éléments universels, c'est-à-dire des points de base dans la fibre de ces revêtements au dessus de  $*$ .

La définition ci-dessus dit en d'autres termes que si un revêtement universel  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  existe, il y a, pour tout revêtement  $\pi' : E \rightarrow X$ , une bijection entre les morphismes de revêtements de  $\pi$  vers  $\pi'$  et les éléments de  $\pi'^{-1}(*)$ , et cette bijection est naturelle en  $\pi'$ .

**10 Exemple.** Le revêtement  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  donné par  $x \mapsto e^{ix}$  est un revêtement universel de  $(\mathbb{S}^1, 1)$ . En effet, soit  $\pi' : E \rightarrow \mathbb{S}^1$  un revêtement. Comme  $\pi_1(\mathbb{R}, *) = 0$  (quel que soit le point  $*$  choisi dans  $\pi^{-1}(1)$ ), il existe un morphisme de revêtements  $\pi \rightarrow \pi'$  au dessus de  $\mathbb{S}^1$ . Comme  $\mathbb{R}$  est connexe, ce morphisme est par ailleurs déterminé par le choix de l'image de  $*$   $\in \mathbb{R}$ . L'application qui envoie un morphisme  $f$  de  $\pi$  vers  $\pi'$  sur l'élément  $f(*)$  de la fibre de  $\pi'$  au dessus de  $*$  est donc bijective. La naturalité de cette bijection résulte du lemme 5 (page 3).

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 22 février 2012.

## 1 Revêtement universel (suite).

☞ **1 Lemme.** Si  $\pi : E \rightarrow X$  est un revêtement universel de  $(X, *)$  ( $X$  connexe par arcs), et si  $*'$  est un point quelconque de  $X$ ,  $\pi$  est un revêtement universel de  $(X, *')$ .

Autrement-dit, la notion de revêtement universel de  $X$  ne dépend pas du point de base choisi dans  $X$ .

*Démonstration.* Comme  $X$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = *$  et  $\gamma(1) = *'$ , et ce chemin induit, pour tout revêtement  $\pi' : E' \rightarrow X$ , une bijection de la fibre  $\pi'^{-1}(*)$  vers la fibre  $\pi'^{-1}(*')$ . De plus cette bijection est naturelle en  $\pi'$ . Il en résulte que les foncteurs fibre de  $(X, *)$  et  $(X, *')$  sont isomorphes et que tout classifiant de l'un est un classifiant de l'autre.  $\square$

☞ **2 Lemme.** Soit  $X$  un espace connexe et localement connexe par arcs et  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement de  $X$ . Si  $E$  est non vide, connexe et simplement connexe, le revêtement  $\pi$  est universel.<sup>(1)</sup>

*Démonstration.* Choisissons un point de base  $*$  dans  $E$ . Soit  $\pi' : E' \rightarrow X$  un revêtement quelconque de  $X$ . Comme  $\pi_1(E, *) = 0$  et comme  $E$  est connexe et localement connexe par arcs, il résulte du critère de relèvement (leçon du 15 février) qu'il existe un morphisme de revêtements  $f : \pi \rightarrow \pi'$  et, comme  $E$  est connexe par arcs, un tel morphisme est déterminé par l'image par  $f$  de  $*$   $\in E$ .  $\square$

## 2 Existence de revêtements.

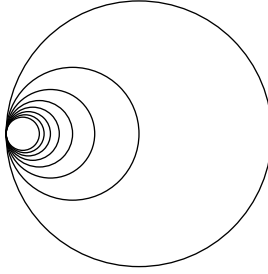
☞ **3 Définition.** Un espace topologique  $X$  est dit « semi-localement simplement connexe » si pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$ , tel que le morphisme  $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  induit par l'inclusion de  $V$  dans  $X$  soit nul.

---

1. Il existe des revêtements universels dont l'espace total n'est pas simplement connexe.

Autrement-dit, dans un tel espace, un lacet « local » n'est pas nécessairement localement homotope à un lacet constant, mais il l'est si l'homotopie est autorisée à sortir du voisinage  $V$ .

**4 Exemple.** Il existe des espaces qui ne sont pas semi-localement simplement connexes, comme par exemple le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  réunion de tous les cercles de diamètres  $[(0, 0), (\frac{1}{n}, 0)]$  ( $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ). La figure ci-dessous représente les 8 premiers cercles de cette réunion.



Si  $V$  est un voisinage de  $(0, 0)$ , il contient l'un des cercles de la réunion (en fait une infinité d'entre eux) et on peut montrer qu'un lacet qui parcourt ce cercle n'est pas homotope à un lacet constant, même dans l'espace  $X$  tout entier.

Tout espace localement simplement connexe est a fortiori semi-localement simplement connexe, mais un espace semi-localement simplement connexe n'est pas nécessairement localement simplement connexe.

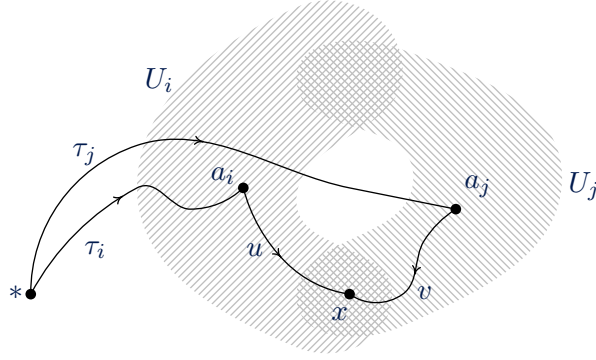
Il est facile de voir qu'un espace  $X$  qui a un revêtement universel  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , d'espace total simplement connexe, est semi-localement simplement connexe. En effet, soit  $x \in X$  et soit  $U$  un voisinage de  $x$  au dessus duquel le revêtement  $\pi$  est trivial. Soit  $\sigma$  un lacet basé en  $x$  et contenu dans  $V = \pi(U)$ . Alors  $\sigma$  se relève en un lacet  $\bar{\sigma}$  de  $\tilde{X}$ , et comme  $\tilde{X}$  est simplement connexe,  $\bar{\sigma}$  est homotope à un lacet constant de  $\tilde{X}$ . En composant cette homotopie avec  $\pi$ , on obtient une homotopie de  $\sigma$  à un lacet constant de  $X$ , homotopie dont l'image n'est pas en général contenue dans  $V$ .

**5 Théorème.** Soit  $(X, *)$  un espace pointé connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit  $H$  un sous-groupe (non nécessairement distingué) de  $\pi_1(X, *)$ . Alors il existe un revêtement pointé  $\pi : (E, *) \rightarrow (X, *)$  tel que  $H$  soit l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, *) \rightarrow \pi_1(X, *)$ . De plus, ce revêtement a  $H \backslash \pi_1(X, *)$  comme fibre.<sup>(2)</sup>

*Démonstration.* Recouvrons  $X$  par des ouverts (non vides)  $(U_i)_{i \in I}$  connexes par arcs et assez petits pour que tout lacet de l'un de ces ouverts soit homotope à un lacet constant dans  $X$ . Dans chaque  $U_i$  choisissons un point  $a_i$ . Il est possible de faire en sorte que  $a_0$  soit le point de base  $*$  de  $X$ . Soit  $\tau_i$  un chemin de  $*$  à  $a_i$  (le chemin constant dans le cas de  $a_0$ ). Posons  $E_i = U_i \times (H \backslash \pi_1(X, *))$ . On va recoller les  $E_i$  (via une colimite dans **Top**) pour en faire l'espace total d'un revêtement sur  $X$ .

2. Où  $H \backslash \pi_1(X, *)$  est le quotient de  $\pi_1(X, *)$  par l'action à gauche de  $H$ . Lire : «  $H$  sous  $\pi_1(X, *)$  ».

Pour tout  $x \in U_i \cap U_j$ , on choisit un chemin  $u$  de  $a_i$  à  $x$  dans  $U_i$  et un chemin  $v$  de  $a_j$  à  $x$  dans  $U_j$ .



C'est possible puisque  $U_i$  et  $U_j$  sont connexes par arcs (ce qui n'est pas nécessairement le cas de  $U_i \cap U_j$ ). De plus, les classes d'homotopie (dans  $X$ ) de  $u$  et  $v$  ne dépendent pas des choix de  $u$  et  $v$ . En effet, si  $u'$  est un autre choix pour  $u$ , le lacet  $u^{-1} \star u'$  est homotope à un lacet constant dans  $X$ . On définit le lacet  $\gamma_{i,j}(x)$  de  $(X, *)$  comme la concaténation  $\tau_i \star u \star v^{-1} \star \tau_j^{-1}$ . La classe d'homotopie  $[\gamma_{i,j}(x)]$  ne dépend donc pas des choix de  $u$  et  $v$ .

Pour chaque paire  $(i, j)$  de  $I \times I$ , Posons  $E_{i,j} = (U_i \cap U_j) \times (H \setminus \pi_1(X, *))$ . On définit les applications

$$\begin{array}{ccc} E_i & & E_j \\ & \swarrow \alpha_{i,j} \quad \searrow \beta_{i,j} & \\ & E_{i,j} & \end{array}$$

par  $\alpha_{i,j}(x, [\sigma]) = (x, [\sigma])$  et  $\beta_{i,j}(x, [\sigma]) = (x, [\sigma \star \gamma_{i,j}(x)]) = (x, [\sigma][\gamma_{i,j}(x)])$ . Ici, on n'a pas introduit de notation pour les classes à gauche modulo  $H$ . La notation  $[\sigma]$  représente donc aussi bien un élément de  $\pi_1(X, *)$  qu'un élément de  $H \setminus \pi_1(X, *)$ . On note que si  $[h] \in H$ , on a  $[h][\sigma][\gamma_{i,j}(x)] = ([h][\sigma])[\gamma_{i,j}(x)]$ , et que les applications  $\beta_{i,j}$  sont donc bien définies.<sup>(3)</sup>

Les flèches  $\alpha_{i,j}$  et  $\beta_{i,j}$  (pour tous les couples  $(i, j)$ ) forment alors un diagramme dans **Top**, et on définit  $E$  comme la colimite de ce diagramme. Chaque  $E_i$  et chaque  $E_{i,j}$  se projette sur  $X$

---

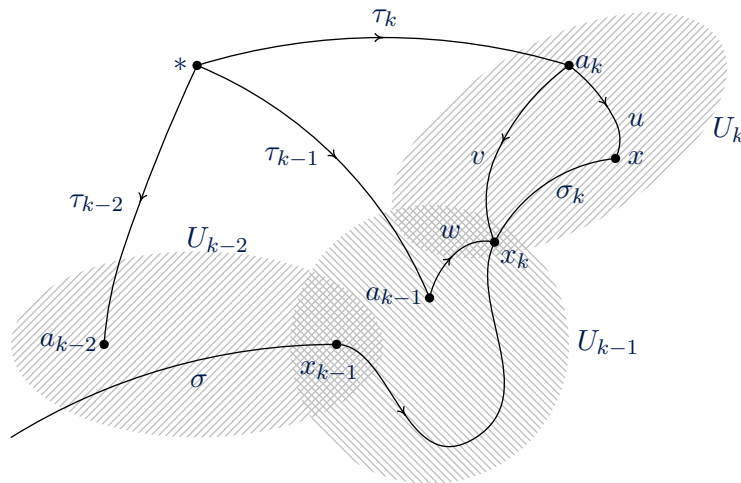
3. Noter qu'on bénéficie ici d'un mécanisme extrêmement général, qu'on retrouve souvent en mathématiques, qui est le fait que la multiplication par la gauche commute avec la multiplication par la droite. C'est bien sûr l'associativité de la multiplication qui produit ce phénomène. Noter également qu'on peut intervertir  $i$  et  $j$ , et qu'on a donc les flèches

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{j,i} & & \\ & \swarrow \beta_{j,i} & \downarrow \varphi_{j,i} & \searrow \alpha_{j,i} & \\ E_i & & & & E_j \\ & \swarrow \alpha_{i,j} & \downarrow & \searrow \beta_{i,j} & \\ & & E_{i,j} & & \end{array}$$

où  $\varphi_{j,i}(x, [\sigma]) = (x, [\sigma][\gamma_{j,i}(x)])$ . Ce diagramme est commutatif,  $\varphi_{j,i}$  est un homéomorphisme, et on voit qu'on a une forme de redondance. On a également  $E_{i,i} = E_i$  et  $\alpha_{i,i} = \beta_{i,i} = 1_{E_i}$ . Alternativement, on pourrait supposer  $I$  totalement ordonné et ne considérer que les couples  $(i, j)$  tels que  $i < j$ .

$\pi^{-1}(U_i)$  est la colimite du sous-diagramme du précédent formé des flèches de cible  $E_i$  (ceci résulte de la description des colimites dans **Ens** et dans **Top**). Or, cette colimite est canoniquement homéomorphe à  $E_i$  (car  $\{E_i\}$  est une partie cofinale dans ce sous-diagramme) par un homéomorphisme qui respecte les projections sur  $U_i$ .  $\pi$  est donc un revêtement de fibre  $H \setminus \pi_1(X, *)$ , et il est bien sûr trivial au dessus de chaque  $U_i$ .

Par compacité de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $\sigma$  est une concaténation de chemins  $\sigma_0 \star \dots \star \sigma_k$ , où chaque  $\sigma_i$  est contenu dans un  $U_i$ . Si  $k = 0$ ,  $\sigma$  est contenu dans  $U_0$ , et le lacet  $\sigma \star u^{-1} \star \tau_0^{-1}$ , qui est contenu dans  $U_0$  est homotope à un lacet constant dans  $(X, *)$ . Autrement-dit, on a  $[\sigma \star u^{-1} \star \tau_0^{-1}] = 1$ . Dans le revêtement trivial  $p_1 : U_0 \times (H \setminus \pi_1(X, *)) \rightarrow U_0$ , le relèvement de  $\sigma$  à partir de  $(*, 1)$  aboutit à  $(x, 1)$ , donc dans le revêtement  $\pi$ , le relèvement de  $\sigma$  à partir de  $* \in E$  aboutit à l'image dans  $E$  de  $(x, 1) \in E_0$ . Supposons maintenant  $k > 0$  et raisonnons par récurrence sur  $k$ . Soient  $u$  et  $v$  des chemins dans  $U_k$  de  $a_k$  à  $x$  et à  $x_k$  (l'origine de  $\sigma_k$ ) respectivement, et  $w$  un chemin dans  $U_{k-1}$  de  $a_{k-1}$  à  $x_k$ .


$$(x_k, [\sigma_0 \star \dots \star \sigma_{k-1} \star w^{-1} \star \tau_{k-1}^{-1} \star \tau_{k-1} \star w \star v^{-1} \star \tau_k^{-1}]) \in E_k$$

c'est-à-dire  $(x_k, [\sigma_0 \star \dots \star \sigma_{k-1} \star v^{-1} \star \tau_k^{-1}]) \in E_k$ , ou encore  $(x_k, [\sigma_0 \star \dots \star \sigma_k \star u^{-1} \star \tau_k^{-1}]) \in E_k$ , puisque  $v^{-1}$  est homotope à  $\sigma_k \star u^{-1}$  dans  $X$  par l'hypothèse de connexité simple semi-locale. Comme par ailleurs le revêtement est trivial au dessus de  $U_k$ , on voit que le relèvement du chemin  $\sigma$  à partir de  $\ast \in E$  aboutit à l'image dans  $E$  de  $(x, [\sigma_0 \star \dots \star \sigma_k \star u^{-1} \star \tau_k^{-1}]) \in E_k$ , ce qui termine cette preuve par récurrence.

Si maintenant  $\sigma$  est un lacet de  $(X, \ast)$ , l'unique relèvement de  $\sigma$  à partir de  $\ast \in E$  aboutit donc à l'image dans  $E$  de  $(\ast, [\sigma \star u^{-1} \star \tau_0^{-1}]) \in E_0$  (où  $u$  est un lacet contenu dans  $U_0$ ), c'est-à-dire à l'image de  $(\ast, [\sigma]) \in E_0$ . Comme  $[\sigma] \in \pi_1(X, \ast)$  est arbitraire, on voit que tout point de la fibre de  $\pi$  au dessus de  $\ast \in X$  peut être relié par un chemin à  $\ast \in E$ . Comme par ailleurs, la connexité par arcs de  $X$  et le théorème de relèvement des chemins montrent que tout point de  $E$  peut être relié à un point de cette fibre, on voit que  $E$  est connexe par arcs.

Soit enfin  $\sigma$  un lacet de  $(E, \ast)$ .  $\pi \circ \sigma$  est alors un lacet de  $(X, \ast)$ , dont le relèvement à partir de  $\ast \in E$  est  $\sigma$ . Comme ce relèvement aboutit à  $(\ast, [\pi \circ \sigma])$ , on a  $[\pi \circ \sigma] = 1$ , où 1 est la classe de 1 dans  $H \setminus \pi_1(X, \ast)$ , c'est-à-dire  $H$  lui-même. Autrement-dit,  $[\pi \circ \sigma] \in H$ . Réciproquement, si  $[h] \in H$ , le lacet  $h$  se relève à partir de  $\ast \in E$  en un chemin aboutissant à l'image dans  $E$  de  $(\ast, [h \star u^{-1} \star \tau_0^{-1}]) \in E_0$ , où  $\tau_0$  est le lacet constant en  $\ast$ , et  $u$  un lacet contenu dans  $U_0$ , donc tel que  $[u] = 1$ . Or l'hypothèse  $[h] \in H$  signifie que  $[h] = 1$  dans  $H \setminus \pi_1(X, \ast)$ . Le relèvement de  $h$  à partir de  $\ast \in E$  aboutit donc à l'image dans  $E$  de  $(\ast, 1) \in E_0$ . Autrement-dit,  $[h]$  est dans l'image de  $\pi_\ast : \pi_1(E, \ast) \rightarrow \pi_1(X, \ast)$ .  $\square$

**6 Corollaire.** *Tout espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe a un revêtement universel, lequel est connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème 5 avec  $H = 0$ , d'utiliser le fait que  $\pi_\ast : \pi_1(E, \ast) \rightarrow \pi_1(X, \ast)$  est injectif, de remarquer que le fait que  $\pi$  soit un revêtement (donc un homéomorphisme local) entraîne que  $E$  est lui aussi localement connexe par arcs, enfin d'utiliser le lemme 2 (page 1).  $\square$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 27 février 2012.

## 1 Classification des revêtements sur une base donnée.

Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement où  $E$  et  $X$  sont connexes par arcs et soit  $*$  un point de base pour  $X$ . On a vu que la connexité par arcs de  $E$  entraîne que le groupe  $\pi_1(X, *)$  agit transitivement sur la fibre  $\pi^{-1}(*)$  au dessus de  $*$ , et que chaque point  $x$  de  $\pi^{-1}(*)$  a l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(X, *)$  comme sous-groupe d'isotropie. De plus, par les propriétés générales des actions, si  $x$  et  $y$  sont des points de  $\pi^{-1}(*)$  les sous-groupes d'isotropie  $\text{Iso}(x)$  et  $\text{Iso}(y)$  sont conjugués. Précisément,  $\text{Iso}(y)$  est l'image de  $\text{Iso}(x)$  par la conjugaison  $\sigma \mapsto \pi_*(\tau)^{-1} \sigma \pi_*(\tau)$ , où  $\tau$  est la classe d'homotopie d'un chemin reliant  $x$  à  $y$  dans  $E$ .

**1 Lemme.** *Soit  $X$  un espace connexe et localement connexe par arcs. Deux revêtements pointés  $\pi : E \rightarrow X$  et  $\pi' : E' \rightarrow X$  d'espaces totaux connexes par arcs sont isomorphes comme revêtements pointés si et seulement si les sous-groupes  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  et  $\pi'_*(\pi_1(E', *))$  sont égaux et sont isomorphes comme revêtements non pointés si et seulement si ces deux mêmes sous-groupes sont conjugués dans  $\pi_1(X, *)$ .*

*Démonstration.* Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes comme revêtements pointés, on a le diagramme commutatif d'applications continues pointées

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & E' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

et les sous-groupes  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  et  $\pi'_*(\pi_1(E', *))$  sont égaux. Réciproquement, si ces sous-groupes sont égaux,  $\pi$  se relève le long de  $\pi'$  en une application pointée  $\varphi : E \rightarrow E'$  et  $\pi'$  se relève le long de  $\pi$  en une application pointée  $\psi : E' \rightarrow E$ . Le composé  $\psi \circ \varphi$  est un automorphisme de  $\pi$  qui laisse fixe le point de base de  $E$ . Il est donc égal à l'identité de  $E$  puisque  $E$  est connexe. De même  $\varphi \circ \psi$  est l'identité de  $E'$ , et  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes.

On a vu que changer le point de base de  $E$  pour un autre point de  $\pi^{-1}(*)$  changeait  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  pour un sous-groupe conjugué. On voit donc que si  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes comme revêtements non pointés les sous-groupes  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  et  $\pi'_*(\pi_1(E', *))$  sont conjugués. Réciproquement, si  $\pi'_*(\pi_1(E', *)) = \tau^{-1} \pi_*(\pi_1(E, *)) \tau$ , soit  $\bar{\tau}$  le relèvement de  $\tau$  dans le revêtement  $\pi$  à partir  $*$  de  $E$

et notons  $a$  le point de  $\pi^{-1}(*)$  auquel il aboutit. On a  $\pi_*(\pi_1(E, a)) = \tau^{-1}\pi_*(\pi_1(E, *))\tau$ , d'où il résulte que  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes comme revêtement pointés si on prend  $a$  comme point de base dans  $E$ . Ceci implique que  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes comme revêtements non pointés.  $\square$

**2 Théorème.** *Soit  $X$  un espace connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe et soit  $*$   $\in X$ . L'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements non pointés de  $X$  d'espace total non vide et connexe par arcs est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de  $\pi_1(X, *)$ .*

*Démonstration.* Pour chaque revêtement  $\pi : E \rightarrow X$  on choisit un point de base  $*$  dans  $E$  et on associe à ce revêtement la classe de conjugaison de  $\pi_*(\pi_1(E, *))$ , laquelle ne dépend pas du choix de  $*$   $\in E$  d'après le lemme précédent. C'est donc une application bien définie. Elle est injective d'après le lemme précédent et surjective d'après le théorème d'existence de revêtements (22 février).  $\square$

**3 Exemple.** Comme  $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et comme  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  n'a que deux sous-groupes (non conjugués), on voit qu'il n'y a à isomorphisme près que deux revêtements non vides et connexes de  $\mathbb{RP}^2$ . Les espaces totaux de ces revêtements sont  $\mathbb{RP}^2$  et  $\mathbb{S}^2$ .

## 2 Automorphismes d'un revêtement.

Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement, et soit  $*$   $\in X$ . Rappelons qu'un automorphisme de  $\pi$  est un homéomorphisme  $\varphi : E \rightarrow E$  tel que  $\pi \circ \varphi = \pi$ . Un tel automorphisme induit une bijection de la fibre  $\pi^{-1}(*)$  sur elle-même. Par ailleurs, on sait que le groupe  $\pi_1(X, *)$  agit (à droite) sur  $\pi^{-1}(*)$ .

**4 Lemme.** *Soit  $\varphi$  un automorphisme d'un revêtement  $\pi : E \rightarrow X$  et soit  $*$   $\in X$ . La bijection  $\varphi : \pi^{-1}(*) \rightarrow \pi^{-1}(*)$  induite par  $\varphi$  est  $\pi_1(X, *)$ -équivariante.*

Rappelons que cette affirmation signifie que  $\varphi(a.[\sigma]) = \varphi(a).[ \sigma ]$  pour tout  $a \in \pi^{-1}(*)$  et tout  $[\sigma] \in \pi_1(X, *)$ .

*Démonstration.* Soit  $a \in \pi^{-1}(*)$  et  $[\sigma] \in \pi_1(X, *)$ . Notons  $\bar{\sigma}$  l'unique relèvement de  $\sigma$  à partir de  $a$ , qui aboutit donc à  $a.[\sigma]$ .  $\varphi \circ \bar{\sigma}$  est alors un chemin de  $\varphi(a)$  à  $\varphi(a.[\sigma])$ , et c'est par ailleurs l'unique relèvement de  $\sigma$  à partir de  $\varphi(a)$ . Il aboutit donc à  $\varphi(a).[ \sigma ]$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

On vient donc de voir que tout automorphisme de  $\pi$  induit une bijection  $\pi_1(X, *)$ -équivariante de  $\pi^{-1}(*)$ . Autrement-dit, on a une application  $\tau : \text{Aut}(\pi) \rightarrow \text{Aut}_{\pi_1(X, *)}(\pi^{-1}(*)).$ <sup>(1)</sup>

**5 Lemme.** *Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement où  $E$  et  $X$  sont connexes et localement connexes par arcs et soit  $*$   $\in X$ . L'application  $\tau : \text{Aut}(\pi) \rightarrow \text{Aut}_{\pi_1(X, *)}(\pi^{-1}(*))$  définie ci-dessus est un isomorphisme de groupes.*

---

1. Où  $\text{Aut}_{\pi_1(X, *)}(\pi^{-1}(*))$  représente bien sûr le groupe des bijections  $\pi_1(X, *)$ -équivariantes de  $\pi^{-1}(*)$ .

*Démonstration.* Noter que si  $E$  est vide, le lemme est trivial. On peut donc supposer  $E$  non vide, et comme  $X$  est connexe par arcs, il en résulte que  $\pi^{-1}(*)$  n'est pas vide. Il est évident que  $\tau$  est un morphisme de groupes puisque le fait de restreindre un automorphisme de  $\pi$  à la fibre  $\pi^{-1}(*)$  respecte la composition. Soit maintenant  $\psi : \pi^{-1}(*) \rightarrow \pi^{-1}(*)$  une bijection  $\pi_1(X, *)$ -équivariante. Choisissons un point  $a \in \pi^{-1}(*)$ . Pour tout  $[\sigma] \in \pi_1(X, *)$  tel que  $a \cdot [\sigma] = a$ , on a  $\psi(a) \cdot [\sigma] = \psi(a \cdot [\sigma]) = \psi(a)$ . Ainsi,  $a$  et  $\psi(a)$  ont le même sous-groupe d'isotropie pour l'action de  $\pi_1(X, *)$  et il en résulte qu'il existe un unique automorphisme  $\varphi$  de  $\pi$  tel que  $\varphi(a) = \psi(a)$ . Comme  $\varphi$  induit sur  $\pi^{-1}(*)$  une application  $\pi_1(X, *)$ -équivariante, et comme l'action de  $\pi_1(X, *)$  sur  $\pi^{-1}(*)$  est transitive, on en déduit que  $\varphi$  induit  $\psi$  sur  $\pi^{-1}(*)$ , et donc que  $\tau$  est bijectif.  $\square$

Soit  $G$  un groupe et  $A$  une partie de  $G$ . L'ensemble

$$N_G(A) = \{g \in G \mid g^{-1}Ag = A\}$$

est appelé le « normalisateur de  $A$  dans  $G$  ».  $N_G(A)$  est clairement un sous-groupe de  $G$  (quelle que soit la partie  $A$  de  $G$ ). De plus, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on a  $h^{-1}Hh = H$  pour tout  $h \in H$  et donc  $H \subset N_G(H)$ .  $N_G(H)$  est clairement le plus grand sous-groupe de  $G$  dans lequel  $H$  est distingué (ou « normal »), d'où son nom. On a donc pour tout sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$ , un groupe quotient  $N_G(H)/H$ . De plus, si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-groupes de  $G$  tels que  $H_2 = a^{-1}H_1a$ , on a  $N_G(H_2) = a^{-1}N_G(H_1)a$ , comme on le vérifie facilement. Il en résulte que les quotients  $N_G(H_1)/H_1$  et  $N_G(H_2)/H_2$  sont isomorphes.<sup>(2)</sup>

Soit  $X$  un ensemble sur lequel un groupe  $G$  agit (à droite) transitivement. Soit  $a \in X$  et soit  $\text{Iso}(a)$  le groupe d'isotropie de  $a$ . Soit  $g \in N_G(\text{Iso}(a))$ , c'est-à-dire tel que  $\text{Iso}(a) = g^{-1}\text{Iso}(a)g = g\text{Iso}(a)g^{-1}$ . Alors il existe une unique bijection  $\varphi(g) : X \rightarrow X$   $G$ -équivariante telle que  $\varphi(g)(a) = a.g$ . En effet, pour  $x \in X$ , on a un  $h \in G$  (non unique) tel que  $x = a.h$ . Comme on doit avoir  $\varphi(g)(a.h) = \varphi(g)(a).h$ , on doit poser  $\varphi(g)(x) = a.gh$ . Si on change  $h$  pour  $h'$ , on a  $x = a.h = a.h'$ , donc  $h'h^{-1} \in \text{Iso}(a)$  puis  $gh'h^{-1}g^{-1} \in \text{Iso}(a)$ . Mais ceci signifie que  $a.gh = a.gh'$ , et donc que  $\varphi(g) : X \rightarrow X$  est bien définie (et bien sûr unique). Par ailleurs, toujours avec  $x = a.h$ , on a  $x.k = a.hk$  pour tout  $k \in G$ , donc  $\varphi(g)(x.k) = a.ghk = (a.gh).k = \varphi(g)(x).k$  et on voit que  $\varphi(g)$  est  $G$ -équivariante.

On vient donc de définir une application  $\varphi : N_G(\text{Iso}(a)) \rightarrow \text{Aut}_G(X)$ , qui est par ailleurs un morphisme de groupes. En effet, toujours avec  $x = a.h$ , on a  $\varphi(gg')(x) = a.gg'h$ . D'autre part,  $\varphi(g)(\varphi(g')(x)) = \varphi(g)(a.g'h) = a.gg'h$ .

**6 Lemme.** *Le morphisme de groupes  $\varphi : N_G(\text{Iso}(a)) \rightarrow \text{Aut}_G(X)$  défini ci-dessus est surjectif et son noyau est  $\text{Iso}(a)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow X$  un automorphisme  $G$ -équivariant de  $X$ . Comme l'action de  $G$  sur  $X$  est transitive, il existe  $g \in G$  tel que  $f(a) = a.g$ . On a, pour tout  $h \in \text{Iso}(a)$ ,  $a.ghg^{-1} = f(a).hg^{-1} = f(a.h).g^{-1} = f(a).g^{-1} = a.gg^{-1} = a$ , et on voit que  $ghg^{-1} \in \text{Iso}(a)$

---

2. Un exemple important de cette situation est celui des groupes de Lie. On considère un « tore maximal »  $T$  dans un groupe de Lie  $G$ , c'est-à-dire un sous-groupe fermée commutatif de dimension maximale. Tous les tores maximaux de  $G$  sont conjugués, et le groupe  $W(G) = N_G(T)/T$  ne dépend donc (à isomorphisme près) que de  $G$ . Il est appelé de « groupe de Weyl » de  $G$  et joue un rôle très important en théorie des représentations des groupes de Lie.

et donc que  $g \in N_G(\text{Iso}(a))$ . Comme  $\varphi(g)(a) = a.g = f(a)$ , comme l'action de  $G$  sur  $X$  est transitive et comme  $\varphi(g)$  et  $f$  sont  $G$ -équivariantes, on voit que  $f = \varphi(g)$  et donc que  $\varphi$  est surjective.

Soit maintenant  $g \in \text{Iso}(a)$ . On a  $\varphi(g)(a) = a.g = a$ , donc  $\varphi(g) = 1_X$ . Réciproquement, si  $\varphi(g) = 1_X$ , on a  $\varphi(g)(a) = a.g = a$  donc  $g \in \text{Iso}(a)$ .  $\square$

De tout ce qui précède, on déduit immédiatement que :

**7 Théorème.** *Soit  $\pi : E \rightarrow X$  un revêtement pointé où  $E$  et  $X$  sont connexes par arcs. Alors le groupe  $\text{Aut}(\pi)$  des automorphismes de  $\pi$  est isomorphe à*

$$N_{\pi_1(X,*)}(\pi_*(\pi_1(E, *))) / \pi_*(\pi_1(E, *))$$

$\square$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 29 février 2012.

## 1 Revêtement principaux.

Un revêtement est dit « principal » s'il est isomorphe à une projection canonique  $\pi : E \rightarrow E/G$ , où  $G$  est un groupe discret agissant de manière proprement discontinue sur  $E$ . On a vu qu'on a la suite exacte courte de morphismes de groupes

$$1 \longrightarrow \pi_1(E, *) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(E/G, *) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1$$

et comme le noyau d'un morphisme de groupe est toujours un sous-groupe distingué, on voit que  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(E/G, *)$ .

**1 Théorème.** *Un revêtement pointé  $\pi : E \rightarrow X$ , avec  $E$  et  $X$  connexes et localement connexes par arcs, est principal si et seulement si  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(X, *)$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu que si  $\pi$  est un revêtement principal,  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  est distingué dans  $\pi_1(X, *)$ . Réciproquement, supposons que  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  soit un sous-groupe distingué de  $\pi_1(X, *)$ . Alors tous les éléments de  $\pi^{-1}(*)$  ont le même groupe d'isotropie et on voit que  $\text{Aut}(\pi)$  agit transitivement sur  $\pi^{-1}(*)$ . Par ailleurs,  $\text{Aut}(\pi)$  agit librement sur  $\pi^{-1}(*)$ . En effet, si  $a$  est un élément de  $\pi^{-1}(*)$  tels que  $\varphi(a) = a$  (avec  $\varphi \in \text{Aut}(\pi)$ ), alors  $\varphi = 1_E$  par connexité de  $E$ . L'action de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $E$  est bien sûr continue, et elle est proprement discontinue. En effet, pour  $x \in E$ , soit  $U$  un voisinage ouvert de  $\pi(x)$  au dessus duquel  $\pi$  est trivial, et soit  $U_x$  la feuille de ce revêtement trivial contenant  $x$ .  $U_x$  est un voisinage de  $x$ . Comme  $\text{Aut}(\pi)$  permute les feuilles de ce revêtement trivial, les quelles sont des ouverts disjoints de  $E$ , et agit librement sur la fibre au dessus de  $\pi(x)$ , on voit que les translatés de  $U_x$  sont deux à deux disjoints.  $\pi$  est donc isomorphe à un revêtement principal pour le groupe (discret)  $\text{Aut}(\pi)$  (lequel est isomorphe à  $\pi_1(X, *)/\pi_*(\pi_1(E, *))$ ), puisque  $\pi_1(X, *)$  est alors le normalisateur de  $\pi_*(\pi_1(E, *))$  dans  $\pi_1(X, *)$ .  $\square$

En particulier, on voit que tout revêtement d'espace total connexe par arcs sur une base connexe et localement connexe par arcs dont le groupe fondamental est commutatif, est principal. Il existe bien sûr des revêtements non principaux. Il suffit de considérer un espace connexe, localement connexe et semi-localement simplement connexe (pour tout groupe  $G$  un tel espace existe avec  $G$  pour groupe fondamental), dont le groupe fondamental contient un sous-groupe non distingué et d'appliquer le théorème d'existence de revêtements (leçon du 22 février).

## 2 Surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$ .

La notion de surface est un cas particulier de la notion de variété. Comme les surfaces dont il est question ici sont plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^3$ , leur définition est assez largement plus simple que celle des variétés.

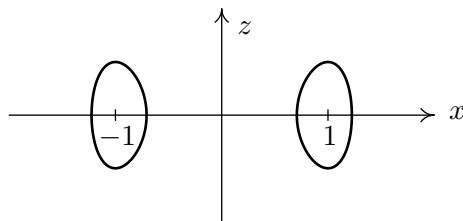
**2 Définition.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$ . On dira que  $S$  est une « surface de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) plongée dans  $\mathbb{R}^3$  », si pour chaque  $x \in S$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$   $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dont la dérivée en  $x$   $(df)_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est de rang 1, et telle que  $S \cap U = f^{-1}(0)$ .

**3 Exemple.** Si on a une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$   $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , et si  $a \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière de cette fonction, c'est-à-dire si pour tout  $x \in f^{-1}(a)$ ,  $(df)_x$  est de rang 1, alors  $f^{-1}(a)$  est une surface ( $a$  peut être remplacé par 0 en remplaçant  $f$  par  $f - a$ ). Par exemple, la sphère  $\mathbb{S}^2$  est une surface car c'est l'image réciproque de 1 par la fonction  $x \mapsto \|x\|^2$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et dont la dérivée en  $x$ , qui est  $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$ , ne s'annule pas pour  $x \neq 0$ , donc pas pour  $x$  vérifiant  $\|x\|^2 = 1$ . Dans un langage plus traditionnel, on dirait que  $\mathbb{S}^2$  est la surface d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (où cette fois  $(x, y, z)$  représente un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ).

Un autre exemple est la surface  $T$  d'équation  $(x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ . Ici la fonction est  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2$ . Sa matrice jacobienne est

$$(4x(x^2 + y^2 - 1) \quad 4y(x^2 + y^2 - 1) \quad 2z)$$

qui ne s'annule que si  $x = y = z = 0$  ou si  $x^2 + y^2 = 1$  et  $z = 0$ , ce qui n'arrive sur aucun point de  $T$ . Cette surface est un « tore ». Pour vous en convaincre, constatez d'abord qu'elle est invariante par rotation autour de l'axe des  $z$ , simplement parce qu'une telle rotation ne change pas la valeur de  $x^2 + y^2$  ni celle de  $z$ . La surface est donc engendrée par rotation à partir de la courbe obtenue en la coupant par exemple par le plan d'équation  $y = 0$ . Cette courbe a pour équation  $(x^2 - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ , et est représentée ci-dessous.



ce qui permet d'imaginer facilement l'allure de ce tore.

Soit  $S$  une surface, soit  $x \in S$  et  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Si  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions différentiables telles que  $S \cap U = f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ , alors les formes linéaires  $(df)_x, (dg)_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ont le même noyau. Ce noyau est donc indépendant de la fonction qui sert à définir la surface  $S$ , et est appelé le « plan tangent à  $S$  en  $x$  », et noté  $T_x(S)$ . Un vecteur normal à la surface  $S$

en  $x \in S$ , est un vecteur  $N_x$  orthogonal à  $T_x(S)$ . Comme  $T_x(S)$  est de dimension 2 et qu'on est dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs normaux à  $S$  en  $x$  forment une droite, qui contient donc deux vecteurs de norme 1. Le choix de l'un de ces vecteurs détermine une « orientation » de  $S$  au voisinage de  $x$ . On dit que la surface  $S$  est « orientable » s'il est possible de choisir pour chaque  $x \in S$  un vecteur unitaire  $N_x$  normal à  $S$  en  $x$ , de façon que la fonction  $x \mapsto N_x$  définie sur  $S$  soit continue. Le choix d'une telle fonction continue est une « orientation » de  $S$ . Noter que si la fonction est définie par  $S = f^{-1}(0)$ , où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est définie dans un voisinage  $U$  de  $S$ , alors  $x \mapsto \frac{\text{grad}(f)_x}{\|\text{grad}(f)_x\|}$  définit une orientation de  $S$ . Bien sûr,  $(df)_x \neq 0$  entraîne  $\text{grad}(f)_x \neq 0$ .<sup>(1)</sup>

**4 Définition.** Soit  $S$  une surface orientable plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Une application continue  $x \mapsto N_x$  associant à tout point de  $S$  un vecteur unitaire normal en ce point est appelé une « application de Gauss » pour  $S$ .

Comme  $\|N_x\| = 1$ , l'application de Gauss  $N$  envoie  $S$  dans  $\mathbb{S}^2$ . Soit  $x \in S$ . On a un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^3$  et une fonction différentiable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $S \cap U = f^{-1}(0)$ . Ceci montre que la fonction  $N$ , qui est bien définie sur  $S \cap U$ , se prolonge à  $U$  tout entier. En effet, il suffit de poser  $N_x = \frac{\text{grad}(f)_x}{\|\text{grad}(f)_x\|}$  comme ci-dessus. On peut donc parler de la dérivée de  $N$  en  $x$ , qui est une application linéaire  $(dN)_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Noter que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $N$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . On supposera désormais  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .  $N$  a donc une dérivée continue en  $x$ .

La dérivée de  $x \mapsto \langle N_x, N_x \rangle$  en  $x$  est  $h \mapsto 2\langle N_x, (dN)_x(h) \rangle$ , mais c'est 0 car  $\langle N_x, N_x \rangle = 1$ . L'application linéaire  $(dN)_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  prend donc ses valeurs dans  $T_x(S)$ , et induit donc un endomorphisme linéaire de  $T_x(S)$ , qu'on note  $W_x$  et qu'on appelle l'« application de Weingarten en  $x$  ».

**Exercice 1.** Montrer que l'application de Weingarten  $W_x$  est un endomorphisme autoadjoint de  $T_x(S)$ .

L'application de Weingarten  $W_x : T_x(S) \rightarrow T_x(S)$  est donc diagonalisable dans une base orthonormée.  $(\epsilon_x^1, \epsilon_x^2)$ . Les vecteurs  $\epsilon_x^1$  et  $\epsilon_x^2$  déterminent les « directions de courbure principales de  $S$  en  $x$  ». La trace de  $W_x$  est appelée « courbure moyenne de  $S$  en  $x$  », et le déterminant de  $W_x$  est appelé la « courbure de Gauss (ou courbure totale) de  $S$  en  $x$  ». Les inverses des valeurs propres de  $W_x$  sont les deux « rayons de courbure principaux de  $S$  en  $x$  » (ils peuvent être  $\infty$  puisqu'une valeur propre de  $W_x$  peut être nulle).

**5 Lemme.** Soit  $S$  une surface de classe  $\mathcal{C}^2$  orientable compacte connexe plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Si la courbure de Gauss n'est nulle en aucun point de  $S$ ,  $S$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^2$ .

*Démonstration.* Supposons que la courbure de Gauss ne s'annule en aucun point de  $S$ . Ceci implique que l'application de Weingarten en un point quelconque de  $S$  est bijective, et donc que l'application de Gauss est un difféomorphisme local (théorème d'inversion locale). Comme  $S$  est compacte, l'application de Gauss est un revêtement, et comme  $S$  est connexe,  $\pi_1(\mathbb{S}^2, *)$

---

1. Rappelons que  $\text{grad}(f)_x$ , le « gradient de  $f$  en  $x$  », est l'unique vecteur de  $\mathbb{R}^3$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}^3$ ,  $(df)_x(h) = \langle \text{grad}(f)_x, h \rangle$ .

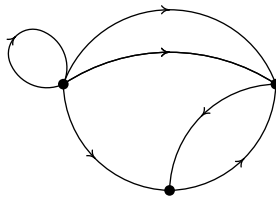
agit transitivement sur la fibre de ce revêtement, mais comme  $\mathbb{S}^2$  est simplement connexe, la fibre n'a qu'un seul élément. Le revêtement est donc un difféomorphisme.  $\square$

### 3 Présentation d'une catégorie par générateurs et relations.

Nous généralisons ici aux petites catégories un concept bien connu pour les groupes.<sup>(2)</sup> Mais nous devons d'abord définir la notion de « graphe », car ce sont des « graphes de générateurs » qui vont jouer pour les catégories le rôle que jouent les « ensembles de générateurs » pour les groupes. Les « mots » dont les lettres sont des générateurs, qui dans le cas des groupes servent à écrire les « relations » (on dira plutôt « équations » pour éviter toute confusion avec les relations d'équivalence qui vont intervenir) de la présentation, sont ici remplacés par des « chemins » (listes d'arêtes consécutives) dans le graphe des générateurs.

**6 Définition.** *Un couple d'application parallèles  $(s, t : A \rightarrow S)$  (où  $A$  et  $S$  sont deux ensembles) est appelé un « graphe ». Un « morphisme » du graphe  $(s, t : A \rightarrow S)$  vers le graphe  $(s', t' : A' \rightarrow S')$  est un couple  $(f : A \rightarrow A', g : S \rightarrow S')$  d'applications telles que  $s' \circ f = g \circ s$  et  $t' \circ f = g \circ t$ .*

Si  $G = (s, t : A \rightarrow S)$  est un graphe, les éléments de  $A$  sont appelés les « arêtes » de  $G$  et les éléments de  $S$  les « sommets » de  $G$ . Les applications  $s : A \rightarrow S$  et  $t : A \rightarrow S$  associent à chaque arête de  $G$  deux sommets de  $G$  qu'on appelle respectivement la « source », et la « cible » de cette arête.<sup>(3)</sup> On peut représenter un graphe en dessinant un point pour chaque sommet et pour chaque arête une flèche de sa source vers sa cible. Ci-dessous, un graphe avec trois sommets et six arêtes.



Remarquer qu'une arête peut aller d'un sommet au même sommet et qu'on peut avoir plusieurs arêtes « parallèles » c'est-à-dire ayant même source et même cible.

Il est clair que toute petite catégorie  $\mathcal{C}$  définit un graphe ayant les objets de  $\mathcal{C}$  pour sommets et les flèches de  $\mathcal{C}$  pour arêtes. Ce graphe est dit « sous-jacent » à  $\mathcal{C}$  et est noté  $U(\mathcal{C})$ . De même, tout foncteur (covariant)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre petites catégories induit un morphisme des graphes sous-jacents. Il est immédiat que  $U$  est un foncteur de **Cat** vers **Grph** (appelé « foncteur d'oubli »).

2. On pourrait aussi bien faire cette généralisation pour les grandes catégories.

3. Le choix des lettres  $s$  et  $t$  (qui est traditionnel) vient de ce qu'en Anglais, « source » et « cible » se disent «source» et «target».

Soit  $G$  un graphe,  $X$  et  $Y$  deux sommets de  $G$ . Un « chemin (de longueur  $n$ ) de  $X$  à  $Y$  » est une liste d'arêtes  $[a_1, \dots, a_n]$ , où  $s(a_1) = X$ ,  $t(a_n) = Y$  et  $t(a_i) = s(a_{i+1})$  pour  $1 \leq i < n$ . Le « chemin vide » (de longueur 0) en  $X$  est noté  $[]$  (ou  $[]_X$  s'il est besoin de préciser  $X$ ). La source de  $a_1$  est appelée la « source » du chemin  $[a_1, \dots, a_n]$ , et la cible de  $a_n$  est la « cible » du chemin  $[a_1, \dots, a_n]$ . La « concaténation » des chemins est notée  $\star$  et définie par  $[a_1, \dots, a_n] \star [a_{n+1}, \dots, a_{n+p}] = [a_1, \dots, a_{n+p}]$ . Elle n'est définie bien sûr que si la cible de  $a_n$  est la source de  $a_{n+1}$ . Elle est clairement associative et les chemins vides sont neutres pour la concaténation. Deux chemins qui ont même source et même cible sont dits « parallèles » (ils ne sont pas nécessairement de même longueur).

Il est clair qu'on vient de définir pour chaque graphe  $G$  une catégorie  $L(G)$  qui a les sommets de  $G$  comme objets et les chemins de  $G$  comme flèches. Cette catégorie est appelée la « catégorie libre sur le graphe  $G$  ». Noter que pour deux chemins concaténables  $\gamma$  et  $\delta$ , et compte tenu des conventions usuelles concernant le signe  $\circ$ , on a  $\delta \circ \gamma = \gamma \star \delta$ .

☞ **Exercice 2.** Soit  $G$  un graphe. Montrer que le morphisme de graphes  $\eta : G \rightarrow U(L(G))$  qui envoie tout sommet de  $G$  sur lui-même et toute arête  $a$  de  $G$  sur l'arête sous-jacente au chemin  $[a]$ , est une flèche universelle de  $G$  vers  $U$ . En déduire qu'on a un foncteur  $L : \mathbf{Grph} \rightarrow \mathbf{Cat}$  tel que  $L \dashv U$ .

Une « équation » pour le graphe  $G$  est un couple  $(\gamma, \delta)$  (qu'on notera aussi  $\gamma = \delta$ ) de chemins parallèles de  $G$ . Si  $R$  est un ensemble d'équations pour  $G$ , deux chemins  $\gamma$  et  $\delta$  de  $G$  de  $X$  à  $Y$  sont dits «  $R$ -équivalents » (noté  $\gamma \simeq_R \delta$ ) si le couple  $(\gamma, \delta)$  appartient à la  $\star$ -congruence engendrée par  $R$ .

Comme on l'a vu plus haut, la  $\star$ -congruence engendrée par  $R$  est la plus petite congruence contenant  $R$ , ou encore l'intersection de toutes les congruences contenant  $R$ . Si  $u = v$  est un élément de  $R$ , et si  $w$  est un chemin concaténable à  $u$  (donc aussi à  $v$ ), l'équation  $u \star w = v \star w$  appartient encore à la  $\star$ -congruence engendrée par  $R$ . Plus généralement, les équations (dites «  $R$ -élémentaires ») de la forme  $a \star u \star b = a \star v \star b$  où  $u = v$  est une équation de  $R$  et où  $a$  et  $b$  sont des chemins quelconques (tels que les concaténations ci-dessus aient un sens) appartiennent à la  $\star$ -congruence engendrée par  $R$ .

☞ **7 Lemme.** Soit  $R$  un ensemble d'équations pour un graphe  $G$ . La relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par les équations  $R$ -élémentaires est la  $\star$ -congruence  $\simeq_R$  engendrée par  $R$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $\sim$  est incluse dans  $\simeq_R$ . Comme  $\simeq_R$  est la plus petite congruence contenant  $R$ , il suffit de montrer que  $\sim$  est une congruence. Toute équation  $u = v$  de  $\sim$  est obtenue par transitivité à partir d'une chaîne finie d'équations élémentaires (ou les deux membres sont éventuellement échangés)  $u_0 = u_1, u_1 = u_2, \dots, u_{k-1} = u_k$  (où  $u_0$  est identique à  $u$  et  $u_k$  identique à  $v$ ). Soient  $a$  et  $b$  deux chemins tels que  $a \star u \star b$  ait un sens. Alors les équations  $a \star u_i \star b = a \star u_{i+1} \star b$  sont encore élémentaires, et la transitivité appliquée à la chaîne d'équations  $a \star u_0 \star b = a \star u_1 \star b, a \star u_1 \star b = a \star u_2 \star b, \dots, a \star u_{k-1} \star b = a \star u_k \star b$  montre que  $a \star u \star b = a \star v \star b$  appartient à  $\sim$ , qui est donc une congruence.  $\square$

Une « présentation (de catégorie) » est un couple  $(G, R)$  où  $G$  est un graphe et  $R$  un ensemble

d'équations pour  $G$ . Un morphisme de présentations de  $\varphi : (G, R) \rightarrow (G', R')$  envoie chaque sommet de  $G$  sur un sommet de  $G'$  et chaque arête de  $G$  de source  $X$  et de cible  $Y$  sur un chemin de  $G'$  de source  $\varphi(X)$  et de cible  $\varphi(Y)$ . Ceci définit une image  $\varphi(\gamma)$  pour chaque chemin  $\gamma$  de  $G$  (par  $\varphi([a_1, \dots, a_n]) = \varphi(a_1) \star \dots \star \varphi(a_n)$ ). On demande de plus que des chemins  $R$ -équivalents soient envoyés sur des chemins  $R'$ -équivalents. On a clairement une catégorie **Pres** des présentations de (petites) catégories.

On a un foncteur  $\text{can} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Pres}$  (dit « de présentation canonique »). Il envoie toute catégorie  $\mathcal{C}$  sur le couple  $(G, R)$  où  $G$  est le graphe sous-jacent à  $\mathcal{C}$ , et où  $R$  est l'ensemble des couples de la forme  $([f, g], [g \circ f])$  et de la forme  $([1_X], [\ ]_X)$  (équations « canoniques »). Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un foncteur.

**8 Lemme.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $(G, R)$  sa présentation canonique. Si  $[f_1, \dots, f_n]$  et  $[g_1, \dots, g_k]$  sont deux chemins (parallèles)  $R$ -équivalents de  $\mathcal{C}$ , on a  $f_n \circ \dots \circ f_1 = g_k \circ \dots \circ g_1$  (avec la convention que si  $n$  ou  $k$  est nul, le composé correspondant est la flèche identité convenable).*

*Démonstration.* Par transitivité de la congruence, il suffit de prouver le lemme dans le cas où l'équivalence entre  $[f_1, \dots, f_n]$  et  $[g_1, \dots, g_k]$  est  $R$ -élémentaire, c'est-à-dire de l'une des formes (à permutation près des deux membres) :

$$\begin{aligned} a \star [f, g] \star b &= a \star [g \circ f] \star b \\ a \star [\ ] \star b &= a \star [1] \star b \end{aligned}$$

Or le résultat est immédiat dans ces cas là. □

**9 Théorème.** *Le foncteur  $\text{can} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Pres}$  a un adjoint à gauche.*

*Démonstration.* Il suffit d'après le théorème de fonctorialité de montrer que pour toute présentation  $(G, R)$  il existe une flèche universelle de  $(G, R)$  vers  $\text{can}$ . On définit la catégorie  $\langle G, R \rangle$  de la façon suivante. Les objets de  $\langle G, R \rangle$  sont les sommets de  $G$ , et une flèche de  $\langle G, R \rangle$  de  $X$  vers  $Y$  est une classe d'équivalence modulo  $R$  de chemins de  $X$  à  $Y$ . Autrement-dit,  $\langle G, R \rangle$  est le quotient de la catégorie libre sur le graphe  $G$  par la congruence engendrée par les équations appartenant à  $R$ . La flèche (morphisme de présentations)  $\eta : (G, R) \rightarrow \text{can}(\langle G, R \rangle)$  est l'identité sur les objets et définie par  $\eta(f) = \overline{[f]}$  sur les flèches (où le surlignement signifie « classe de congruence modulo  $R$  »).

Soit maintenant un morphisme de présentations  $f : (G, R) \rightarrow \text{can}(\mathcal{C})$ .<sup>(4)</sup> On définit la flèche (qui est un foncteur)  $\theta^{-1}(f) : \langle G, R \rangle \rightarrow \mathcal{C}$  en posant  $\theta^{-1}(f)(X) = f(X)$  pour tout objet  $X$  de  $\langle G, R \rangle$  (c'est-à-dire tout sommet  $X$  de  $G$ ), et  $\theta^{-1}(f)(\overline{\gamma}) = f(\gamma)$  pour tout chemin  $\gamma$  de  $G$ . Ce foncteur est bien défini car si  $\gamma$  et  $\delta$  sont des chemins de  $X$  à  $Y$  équivalents modulo  $R$ ,  $f(\gamma)$  et  $f(\delta)$  sont équivalents modulo les équations canoniques de  $\mathcal{C}$ , et représentent donc des flèches (de  $\mathcal{C}$ ) égales d'après le lemme 8. L'unicité de  $\theta^{-1}(f)$  est claire de même que l'égalité  $\text{can}(\theta^{-1}(f)) \circ \eta = f$ . □

La catégorie  $\langle G, R \rangle$  est dite « présentée par  $(G, R)$  ».

---

4. On notera encore  $f$  son extension aux chemins de  $G$ .

☞ **10 Remarque.** Nous avons évoqué plus haut le fait qu'un « diagramme » dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur d'une catégorie  $\mathcal{I}$  (catégorie des indices du diagramme) vers  $\mathcal{C}$ . Le plus souvent la catégorie  $\mathcal{I}$  est donnée par une présentation  $(G, R)$ . Dans ce cas, un diagramme dans  $\mathcal{C}$  peut être vu comme un morphisme de présentations de  $(G, R)$  vers la présentation canonique de  $\mathcal{C}$ . C'est le plus souvent comme ceci que sont décrits les diagrammes.

Par exemple, un « carré commutatif » dans  $\mathcal{C}$  est donné par quatre flèches

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{k} & T \end{array}$$

satisfaisant l'équation  $g \circ f = k \circ h$ . On peut bien sûr voir ce carré comme un foncteur d'une certaine catégorie (à 4 objets et 9 flèches) vers  $\mathcal{C}$ , mais ce n'est pas très naturel. On voit bien que la description ci-dessus d'un « carré commutatif » est en fait celle d'un morphisme de présentations de catégories.

☞ **11 Lemme.** *Le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Grpd} \rightarrow \mathbf{Cat}$  a un adjoint à gauche.*

Autrement-dit, il y a un moyen naturel de transformer une petite catégorie en groupoïde. La méthode est la même que celle qu'on utilise pour construire le groupe  $\mathbb{Z}$  à partir du monoïde  $\mathbb{N}$ . On « inverse formellement » (pour l'addition) les éléments de  $\mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Il s'agit, une petite catégorie  $\mathcal{C}$  étant donnée, de construire une flèche universelle  $\eta : \mathcal{C} \rightarrow U(F(\mathcal{C}))$  de  $\mathcal{C}$  vers  $U$ . Considérons le graphe  $G$  sous-jacent à  $\mathcal{C}$ , et construisons un graphe  $G'$  ayant les mêmes sommets que  $G$ , et ayant pour chaque arête  $a : X \rightarrow Y$  de  $G$ , deux arêtes  $a : X \rightarrow Y$  et  $a^{-1} : Y \rightarrow X$ . Considérons maintenant l'ensemble  $R$  d'équations sur  $G'$  constitué de :

- $[f, g] = [gf]$ , pour toutes flèches  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $[ ]_X = [1_X]$ , pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $[f^{-1}, f] = [ ]_Y$  et  $[f, f^{-1}] = [ ]_X$ , pour toute flèche  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{C}$ .

Posons  $F(\mathcal{C}) = \langle G', R \rangle$ .  $F(\mathcal{C})$  est bien sûr une catégorie, et c'est un groupoïde. En effet, toute flèche de  $F(\mathcal{C})$  est une composition de flèches des formes  $\overline{[f]}$  et  $\overline{[f^{-1}]}$ , et ces dernières sont inversibles d'après le dernier ensemble d'équations ci-dessus. Définissons  $\eta : \mathcal{C} \rightarrow U(F(\mathcal{C}))$  par :

- $\eta(X) = X$ , pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $\eta(f) = \overline{[f]}$ , pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ .

Il est immédiat que  $\eta$  est bien un foncteur. Il reste à vérifier que c'est une flèche universelle. Soit  $G : \mathcal{C} \rightarrow U(\mathcal{D})$  un foncteur, où  $\mathcal{D}$  est un groupoïde. On définit  $\varphi : F(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  en posant (on ne peut d'ailleurs pas faire autrement pour avoir  $U(\varphi) \circ \eta = G$ ) :

- $\varphi(X) = G(X)$  pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,

- $\varphi(\overline{[\ ]_X}) = 1_{G(X)}$ ,
- $\varphi(\overline{[f]}) = G(f)$  et  $\varphi(\overline{[f^{-1}]}) = G(f)^{-1}$  pour toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $\varphi(\overline{[a_1, \dots, a_n]}) = \varphi(\overline{[a_n]}) \dots \varphi(\overline{[a_1]})$ .

Pour vérifier que  $\varphi$  est bien défini, il suffit de montrer que pour toute équation  $u = v$  de  $R$ , on a  $\varphi(\overline{u}) = \varphi(\overline{v})$ , ce qui est immédiat.  $\varphi$  est clairement un morphisme de groupoïdes et c'est le seul qui soit tel que  $U(\varphi) \circ \eta = G$ .  $\square$

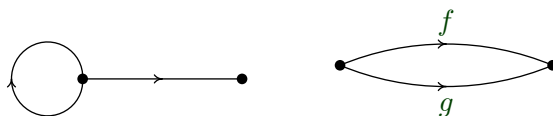
Le groupoïde  $F(\mathcal{C})$  construit ci-dessus est généralement noté  $\mathcal{C}[\mathcal{C}^{-1}]$ .

L'exercice 2 nous donne un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des petites catégories vers les graphes, et le lemme 11 donne un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des groupoïdes vers les petites catégories. On a donc par composition un adjoint à gauche du foncteur d'oubli des groupoïdes vers les graphes, et on peut donc parler du « groupoïde libre sur un graphe ». On pourrait d'ailleurs construire cet adjoint directement comme on l'a fait pour les deux autres.

 **Exercice 3.** (a) Déterminer le groupoïde libre sur le graphe :



(b) Montrer que les groupoïdes libres sur les deux graphes :



sont isomorphes et que les groupes d'automorphismes des objets de ces groupoïdes sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$ . Montrer que le groupe des automorphismes du premier objet du second graphe est engendré par  $g^{-1} \circ f$ .

## 4 Bonus : Quaternions.

Nous noterons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Le « produit scalaire canonique » sur  $\mathbb{R}^n$  est celui qui fait de la base canonique une base orthonormée. La norme associée est appelée « norme euclidienne » et sera celle que nous utiliserons sauf mention explicite du contraire.

L'ensemble des vecteurs de norme 1 dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  est noté  $\mathbb{S}^n$  et appelé la « sphère de dimension  $n$  ». C'est un espace topologique compact (fermé borné dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

Rappelons que le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes peut être vu comme l'ensemble des matrices

de similitude réelles, c'est-à-dire des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont réels (une telle matrice s'identifie au nombre complexe noté  $a+ib$ ). La conjugaison complexe  $x \mapsto \bar{x}$  est donnée par la transposition des matrices.

Tout espace vectoriel complexe a un espace vectoriel réel sous-jacent. Si  $E$  est un espace vectoriel complexe de dimension  $n$ , l'espace réel sous-jacent est de dimension  $2n$ , plus précisément, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$  est une base de l'espace réel sous-jacent. Si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées (complexes) d'un vecteur  $x$  dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$ , le carré de la norme de ce vecteur dans l'espace réel sous-jacent est donnée par

$$\|x\|^2 = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$$

puisque en posant  $x_k = a_k + ib_k$ , on a  $x_k \bar{x}_k = a_k^2 + b_k^2$ .

D'une manière analogue, on peut considérer l'ensemble  $\mathbb{H}$  des matrices de la forme

$$q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont maintenant des nombres complexes. De telles matrices sont appelées des « quaternions ». Le quaternion  $q$  ci-dessus est dit « imaginaire » si le nombre complexe  $a$  est un imaginaire pur.  $\mathbb{H}$  est bien sûr un espace vectoriel réel de dimension 4 avec pour « base canonique » les matrices<sup>(5)</sup>

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Les quaternions imaginaires sont bien sûr les combinaisons linéaire (à coefficients réels) de  $I$ ,  $J$  et  $K$ . Tout quaternion  $q$  est d'une manière unique somme d'un « quaternion réel » (c'est-à-dire un multiple réel de  $1 \in \mathbb{H}$ ) et d'un quaternion imaginaire. Le « conjugué »  $\bar{q}$  de ce quaternion est obtenu en conjugant le complexe  $a$  et en changeant le signe de  $b$ , ce qui revient à conjuguer les deux complexes  $a$  et  $b$  et à transposer la matrice. Pour tout quaternion  $q$ , le produit  $q\bar{q}$  est un quaternion réel. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & 0 \\ 0 & a\bar{a} + b\bar{b} \end{pmatrix}$$

et c'est le produit de  $1 \in \mathbb{H}$  par le carré de la norme de  $q$  dans l'espace vectoriel réel sous-jacent (dans lequel  $(1, I, J, K)$  est la base canonique). Comme le conjugué de  $qq'$  est clairement  $\bar{q}'\bar{q}$ , il est immédiat qu'on a  $\|q\|\|q'\| = \|qq'\|$  pour tous quaternions  $q$  et  $q'$ .

---

5. Apparemment, il n'y a pas ce consensus sur la question de savoir qui est précisément  $I$ ,  $J$  ou  $K$ . L'exercice 4 montre que cela n'a pas d'importance pourvu que  $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ .

Pour simplifier l'écriture, on notera  $\llbracket a, b \rrbracket$  le quaternion

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

On a donc  $\llbracket a, b \rrbracket \llbracket c, d \rrbracket = \llbracket ac - \bar{b}d, bc + \bar{a}d \rrbracket$ . Le conjugué de  $\llbracket a, b \rrbracket$  est  $\llbracket \bar{a}, -b \rrbracket$ .

**Exercice 4.** (a) Vérifier que  $\mathbb{H}$  est un corps non commutatif.

(b) Montrer que l'ensemble des racines de l'équation  $q^2 + 1 = 0$  est l'ensemble des quaternions imaginaires de norme 1, que  $I, J$  et  $K$  en font partie, et que cet ensemble est, comme sous-espace topologique de  $\mathbb{H}$ , homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ .

(c) Montrer que le plan (vectoriel réel) engendré par le vecteur 1 et l'une quelconque des racines de l'équation précédente est un sous-corps de  $\mathbb{H}$  isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

(d) Soient  $I', J'$  et  $K'$  trois quaternions tels que  $I'^2 = J'^2 = K'^2 = I'J'K' = -1$ . Montrer que l'application linéaire réelle qui envoie 1 sur 1,  $I$  sur  $I'$ ,  $J$  sur  $J'$  et  $K$  sur  $K'$  est un automorphisme du corps  $\mathbb{H}$ .

**Exercice 5.** En utilisant les quaternions, montrer que  $\mathrm{SO}(3)$  est homéomorphe à  $\mathbb{RP}^3$ , et que  $\mathrm{SO}(4)$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^3 \times \mathrm{SO}(3)$ .

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 5 mars 2012.

## 1 Espaces d'applications continues.

Pour tous ensembles  $Y$  et  $Z$ , nous notons  $Z^Y$  l'ensemble des applications de  $Y$  vers  $Z$ , et pour tous espaces topologiques  $Y$  et  $Z$ , nous notons  $Z^Y$  l'ensemble des applications continues de  $Y$  vers  $Z$ . On fera attention au fait que  $Z^Y$  n'a pas la même signification pour des espaces topologiques et pour leurs ensembles sous-jacents.

Si  $X, Y$  et  $Z$  sont des ensembles et  $f : X \times Y \rightarrow Z$  est une application, la « curryfiée de  $f$  »<sup>(1)</sup> est l'application  $f^\dagger : X \rightarrow Z^Y$  définie par  $f^\dagger(x) = (y \mapsto f(x, y))$ . Réciproquement, si  $g : X \rightarrow Z^Y$  est une application, sa « décurryfiée »  $g_\dagger : X \times Y \rightarrow Z$  est définie par  $g_\dagger(x, y) = g(x)(y)$ . Les deux opérations sont clairement inverses l'une de l'autre, et la correspondance ainsi définie entre  $Z^{X \times Y}$  et  $(Z^Y)^X$  est clairement bijective. Nous allons voir que, sous la condition que  $X$  et  $Y$  soient localement compacts, on a le même résultat avec des espaces topologiques (avec le fait que cette bijection est alors un homéomorphisme). Mais nous devons d'abord définir l'espace topologique  $Z^Y$  où  $Y$  et  $Z$  sont des espaces topologiques.

**1 Définition.** Soient  $Y$  et  $Z$  des espaces topologiques et  $Z^Y$  l'ensemble des applications continues de  $Y$  vers  $Z$ . La topologie de  $Z^Y$ , dite « CO-topologie », <sup>(2)</sup> est la plus petite topologie qui contient les parties  $\langle K, U \rangle$ , dites « ouverts élémentaires », de  $Z^Y$  définies par

$$\langle K, U \rangle = \{\varphi \in Z^Y \mid \varphi(K) \subset U\}$$

où  $K$  est une partie compacte de  $Y$  et  $U$  un ouvert de  $Z$ .

Les ouverts de  $Z^Y$  sont donc les réunions quelconques d'intersections finies d'ouverts élémentaires. Cette topologie est en fait la généralisation naturelle d'une topologie bien connue, comme le montre l'exercice suivant.

**Exercice 1.** Montrer que si  $Y$  et  $Z$  sont des espaces métriques et si  $Y$  est compact, la CO-topologie sur  $Z^Y$  est la topologie de la convergence uniforme.

---

1. L'appellation est en l'honneur du logicien Haskell Curry (1900-1982), qui fut l'un des principaux chercheurs dans le domaine du  $\lambda$ -calcul, une discipline née de l'étude de la syntaxe des fonctions.

2. « CO » pour « compact-ouvert ».

☞ **2 Lemme.** Soit  $Y$  un espace topologique localement compact et  $Z$  un espace topologique. L'application  $\mathbf{ev} : Z^Y \times Y \rightarrow Z$  définie par  $(f, y) \mapsto f(y)$  (appelée « évaluateur ») est continue.

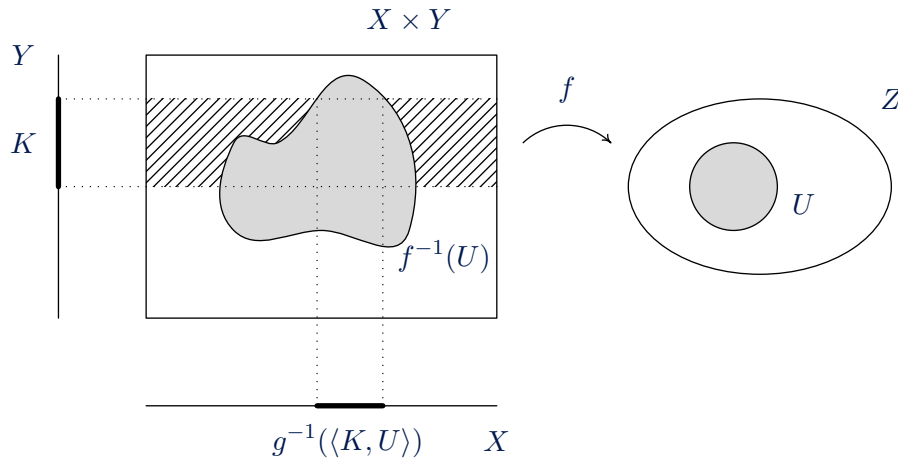
*Démonstration.* Soit  $f_0 \in Z^Y$  et  $y_0 \in Y$ . On va montrer que  $\mathbf{ev}$  est continue en  $(f_0, y_0)$ . Soit  $V$  un ouvert de  $Z$  tel que  $\mathbf{ev}(f_0, y_0) = f_0(y_0) \in V$ . Comme  $f_0$  est continue, il existe un voisinage  $K$  de  $y_0$  dans  $Y$ , qu'on peut supposer compact, et tel que  $f_0(K) \subset V$ . Soit  $(f, y) \in \langle K, V \rangle \times K$ . On a  $f(y) \in V$  par définition de  $\langle K, V \rangle$ . Comme  $\langle K, V \rangle \times K$  est un voisinage de  $(f_0, y_0)$  dans  $Z^Y \times Y$ , on voit que  $\mathbf{ev}$  est continue en  $(f_0, y_0)$ .  $\square$

☞ **3 Remarque.** La décurryfiée de  $g_{\dagger} : X \times Y \rightarrow Z$  de  $g : X \rightarrow Z^Y$  est obtenue par la formule  $g_{\dagger}(x, y) = \mathbf{ev}(g(x), y)$ .

☞ **4 Lemme.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  des espaces topologiques, et soit  $f : X \times Y \rightarrow Z$  une application continue. Alors la curryfiée de  $f$ ,  $f^{\dagger} : X \rightarrow Z^Y$ , prend ses valeurs dans  $Z^Y$  et est continue. Réciproquement si  $g : X \rightarrow Z^Y$  est continue et si  $Y$  est localement compact, sa décurryfiée  $g_{\dagger} : X \times Y \rightarrow Z$  est continue.

*Démonstration.* Supposons d'abord  $f$  continue. Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est continue et  $f^{\dagger}$ , que nous noterons  $g$ , prend donc ses valeurs dans  $Z^Y$ . Comme l'image réciproque commute aux intersections et réunions quelconques, il suffit pour prouver que la curryfiée  $g : X \rightarrow Z^Y$  de  $f$  est continue de prouver que l'image réciproque par  $g$  de tout ouvert élémentaire de  $Z^Y$  est un ouvert de  $X$ . Or  $g^{-1}(\langle K, U \rangle)$  est l'ensemble des  $x$  de  $X$  tels que  $g(x)(K) \subset U$ , autrement-dit :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\langle K, U \rangle) &= \{x \in X \mid \forall_{y \in K} f(x, y) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid \forall_{y \in K} (x, y) \in f^{-1}(U)\} \end{aligned}$$



La zone hachurée dans la figure ci-dessus est le complémentaire de  $f^{-1}(U) \cap (X \times K)$  dans  $X \times K$ . C'est donc un fermé de  $X \times K$ . Comme  $K$  est compact, la projection canonique  $X \times K \rightarrow X$  est une application fermée. Or la projection de  $f^{-1}(U) \cap (X \times K)$  est le complémentaire de  $g^{-1}(\langle K, U \rangle)$  dans  $X$ , et  $g^{-1}(\langle K, U \rangle)$  est donc un ouvert de  $X$ .

La réciproque est conséquence immédiate du lemme 2 (page 2) et de la remarque 3 (page 2).  $\square$

**5 Lemme.** (*Loi exponentielle*) Si  $X$  et  $Y$  sont localement compacts, l'application  $\varphi : Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  qui envoie toute fonction continue  $f : X \times Y \rightarrow Z$  sur sa curryfiée  $f^\dagger : X \rightarrow Z^Y$  est un homéomorphisme.

*Démonstration.* Le lemme 4 montre que  $\varphi$  est bien définie et bijective. Il reste à montrer qu'elle est bicontinue. Or,  $\varphi$  est obtenue en curryfiant deux fois l'application  $(Z^{X \times Y} \times X) \times Y \rightarrow Z$  définie par  $((f, x), y) \mapsto \mathbf{ev}(f, (x, y))$  qui est continue d'après le lemme 2 (page 2). De même,  $\varphi^{-1}$  est obtenue en curryfiant l'application  $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \rightarrow Z$  définie par  $(g, (x, y)) \mapsto \mathbf{ev}(\mathbf{ev}(g, x), y)$ , qui est elle aussi continue par une double application du lemme 2.  $\square$

Nous utiliserons plus loin ces propriétés lors de l'étude de la « suspension » et de l'« espace des lacets ».

## 2 Sommes et produits d'espaces pointés.

Des opérations de même nature, voire de même nom, ayant des sens différents pour les espaces topologiques et pour les espaces topologiques pointés, il est souhaitable pour éviter toute confusion de réserver les lettres latines majuscules  $X, Y, \dots$  aux espaces topologiques et de toujours noter les espaces topologiques pointés sous forme de paires  $(X, *)$ ,  $\dots$

La catégorie **Top<sub>•</sub>** des espaces topologiques pointés a cette particularité que tout objet final y est initial (et réciproquement). Un tel objet (qui, rappelons-le, s'appelle un « zéro ») est un espace singleton pointé, comme par exemple  $(\{*\}, *)$  (dont l'unique élément est évidemment le point de base). Noter que la catégorie **Gr** des groupes de même que la catégorie **Ab** des groupes abéliens ont aussi un zéro (tout groupe réduit à son élément neutre).

Le produit dans la catégorie **Top<sub>•</sub>** des espaces pointés  $(X, *)$  et  $(Y, *)$  est tout simplement  $(X \times Y, (*, *))$ . En effet, si  $f : (Z, *) \rightarrow (X, *)$  et  $g : (Z, *) \rightarrow (Y, *)$  sont deux applications continues pointées, l'application (continue)  $\varphi : Z \rightarrow X \times Y$  qui envoie  $z$  sur  $(f(z), g(z))$  est bien sûr la seule qui vérifie les égalités  $p_1 \circ \varphi = f$  et  $p_2 \circ \varphi = g$ , et par ailleurs elle envoie  $*$  sur  $(*, *)$ . On voit donc que le foncteur d'oubli **Top<sub>•</sub>**  $\rightarrow$  **Top** préserve les produits.

Il n'en va pas de même pour la somme. En effet, si  $(X, *)$  et  $(Y, *)$  sont deux espaces pointés, on devra avoir des inclusions canoniques  $i_1 : (X, *) \rightarrow (X, *) + (Y, *)$  et  $i_2 : (Y, *) \rightarrow (X, *) + (Y, *)$ , ce qui implique qu'il doit y avoir un point de  $(X, *) + (Y, *)$  qui soit à la fois l'image de  $*$   $\in X$  et de  $*$   $\in Y$ . Il n'y a pas de tel point dans  $X + Y$ . L'espace sous-jacent à  $(X, *) + (Y, *)$  doit donc au minimum identifier les points de base de  $X$  et de  $Y$ . En fait, une telle identification suffit, et on pose<sup>(3)</sup>

$$X \vee Y = (X + Y) / \sim$$

où la relation  $\sim$  est celle qui identifie  $*$   $\in X$  avec  $*$   $\in Y$ . Autrement-dit,  $X \vee Y$  est la colimite du

---

3. La notation  $X \vee Y$  est tout à fait incorrecte si  $X$  et  $Y$  sont seulement des espaces topologiques, puisque les points de base sont nécessaires pour définir  $X \vee Y$ . On compte donc sur le contexte pour lever l'ambiguïté.

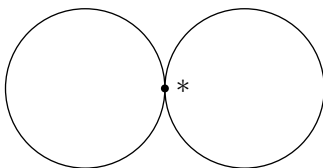
diagramme  $X \longleftarrow \{*\} \longrightarrow Y$  (où les deux flèches envoient  $* \in \{*\}$  respectivement sur  $* \in X$  et  $* \in Y$ ). D'une manière équivalente, le carré suivant de **Top**

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \vee Y \end{array}$$

est cocartésien. L'espace topologique  $X \vee Y$  est appelé le « bouquet »<sup>(4)</sup> des espaces pointés  $(X, *)$  et  $(Y, *)$ . La somme de ces deux espaces pointés (dans **Top**<sub>•</sub>) est alors

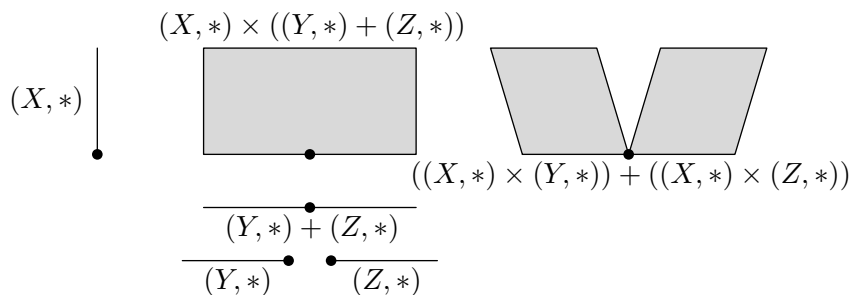
$$(X, *) + (Y, *) = (X \vee Y, *)$$

où  $*$   $\in$   $X \vee Y$  est bien sûr l'image de  $*$   $\in$   $X$  et de  $*$   $\in$   $Y$  par les deux inclusions canoniques. La figure ci-dessous représente le bouquet de deux cercles



c'est-à-dire deux cercles collés par leurs points de base.

La catégorie **Top<sub>•</sub>** a donc des sommes et des produits, mais, contrairement à ce qu'il se passe dans **Top**, le produit n'y est pas distributif sur la somme, comme le montre la figure ci-dessous (où  $(X, *)$ ,  $(Y, *)$  et  $(Z, *)$  sont des objets de **Top<sub>•</sub>**.)



Or, une catégorie dans laquelle le produit n'est pas distributif sur la somme ne peut pas vérifier de loi exponentielle comme celle du lemme 5 (page 3). Il s'agit d'un mécanisme général. Le foncteur d'exponentiation  $Z \mapsto Z^Y$  doit être l'adjoint à droite du foncteur  $X \mapsto X \times Y$ , or un foncteur qui ne commute pas aux colimites (ici aux sommes) ne peut pas avoir d'adjoint à droite. On va voir plus loin comment remédier à ce problème en remplaçant le produit par un ersatz de produit.

4. En Anglais : “wedge”, mot qu’on utilise aussi couramment en Français.

Il y a une application canonique  $X \vee Y \rightarrow X \times Y$ . Elle envoie tout point  $x \in X$  sur  $(x, *)$  et tout point  $y \in Y$  sur  $(*, y)$ . Elle est bien définie car  $*$   $\in X$  et  $*$   $\in Y$  ont la même image. Elle est par ailleurs injective et continue. De plus, si les espaces sont séparés, son image est fermée (comme réunion des deux fermés  $p_2^{-1}(*) = X \times \{*\}$  et  $p_1^{-1}(*) = \{*\} \times Y$ ).

### 3 La loi exponentielle pour les espaces pointés.

Pour établir une loi exponentielle (analogue au lemme 5 (page 3)) pour les espaces pointés, il suffit de prendre le problème à l'envers, c'est-à-dire définir ce qui va jouer le rôle de la puissance avant de définir ce qui va jouer le rôle du produit.<sup>(5)</sup> En effet, si  $(Y, *)$  et  $(Z, *)$  sont des espaces pointés, il est naturel de définir  $(Z, *)^{(Y, *)}$  comme l'ensemble des application continues pointées de  $Y$  vers  $Z$ , de le munir de la topologie induite par la CO-topologie, et de prendre l'application constante  $y \mapsto *$  comme point de base. Ceci étant posé, il n'y a plus qu'à trouver la sorte de produit qui va nous donner une loi exponentielle. Nous utiliserons la notation  $X \wedge Y$  (lire «  $X$  smash  $Y$  »)<sup>(6)</sup> pour l'espace sous-jacent à ce nouveau produit des espaces pointés  $(X, *)$  et  $(Y, *)$ , notation que nous utiliserons aussi pour les espaces pointés eux-mêmes, autrement-dit, on aura  $(X, *) \wedge (Y, *) = (X \wedge Y, *)$ .<sup>(7)</sup>

La question est de faire en sorte que (pour tout  $(Y, *)$ ) le foncteur  $(X, *) \mapsto (X, *) \wedge (Y, *)$  soit adjoint à gauche du foncteur  $(Z, *) \mapsto (Z, *)^{(Y, *)}$ . On devra donc avoir une bijection

$$\mathbf{Top}_\bullet((X, *) \wedge (Y, *), (Z, *)) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Top}_\bullet((X, *), (Z, *)^{(Y, *)})$$

naturelle en  $(X, *)$  et en  $(Z, *)$ , qui devra être donnée par la seule formule possible, à savoir  $\theta(f) = x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$ . Noter que  $\theta(f)$  doit envoyer  $*$   $\in X$  sur l'application constante  $y \mapsto *$ . En conséquence, on aura  $\theta(f)(*)(y) = *$  pour tout  $y \in Y$ . Par ailleurs, quelque soit  $x \in X$ ,  $\theta(f)(x)$  doit être une application pointée de  $Y$  vers  $Z$ . On doit donc aussi avoir  $\theta(f)(x)(*) = *$  pour tout  $x \in X$ . On voit donc que  $\theta(f)(x)(y)$ , c'est-à-dire  $f(x, y)$ , doit être  $*$  dès que  $(x, y) \in X \vee Y$ . Cette condition nécessaire va s'avérer également suffisante, ce qui nous amène à poser

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}$$

autrement-dit, on écrase sur un point, qui servira de point de base à  $X \wedge Y$ , le sous-ensemble de  $X \times Y$  des points de la forme  $(x, *)$  et de la forme  $(*, y)$ .

Il reste à vérifier qu'on a bien l'adjonction annoncée ci-dessus. Pour cela il suffit d'exhiber l'inverse de  $\theta$ , qui est bien sûr défini par  $\theta^{-1}(g) = g(x)(y)$ . Ceci définit bien  $\theta^{-1}(g)$ , car si  $(x, y) \in X \vee Y$ , on a soit  $x = *$ , et alors  $g(*)$  est l'application constante donc  $g(*) (y) = *$ , soit  $y = *$  et alors  $g(x)(*) = *$ . Dans tous les cas, les éléments de  $X \vee Y$  sont envoyés sur  $*$   $\in Z$ , et  $\theta^{-1}(g)$  est

5. On verra qu'on peut utiliser la même méthode pour définir le produit tensoriel.

6. Cette notation et ce vocabulaire sont officiels.

7. Bien sûr, la notation  $X \wedge Y$  est abusive dans le cas des espaces sous-jacents, puisque les points de base seront indispensables pour définir  $X \wedge Y$ .

bien définie (et pointée). La naturalité de la bijection  $\theta$  est une conséquence immédiate du fait qu'elle est donnée par une formule indépendante de  $(X, *)$  et de  $(Z, *)$ .

Noter que le smash-produit  $\wedge$  n'est pas un produit dans **Top**<sub>•</sub> au sens catégorique, puisque nous savons déjà que le produit dans cette catégorie est le produit cartésien usuel, lequel n'est pas homéomorphe au smash-produit, puisque s'il l'était, le produit serait distributif sur la somme.

☞ **6 Lemme.** (*Loi exponentielle pour les espaces pointés*) Soient  $(X, *)$ ,  $(Y, *)$  et  $(Z, *)$  des espaces topologiques pointés, où on suppose  $X$  et  $Y$  localement compacts. On a alors un homéomorphisme (pointé)  $(Z, *)^{(X, *) \wedge (Y, *)} \rightarrow ((Z, *)^{(Y, *)})^{(X, *)}$  (donné par  $f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y)))$ ) et dont la réciproque est donnée par  $g \mapsto ((x, y) \mapsto g(x)(y))$ .

*Démonstration.* On sait déjà que les deux formules de l'énoncé sont des bijections réciproques. Il y a donc juste à montrer qu'elles sont continues. Mais ceci résulte à nouveau du lemme 2 (page 2) par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 5 (page 3).  $\square$

## 4 Suspension et espace des lacets.

Le cercle  $\mathbb{S}^1$  (ou  $U(1)$ , c'est-à-dire le groupe des complexes de module 1) est un espace qui joue un rôle préminent dans de nombreuses branches des mathématiques et en particulier en topologie algébrique. En général, on choisit le point  $1 \in \mathbb{C}$  comme point de base de  $\mathbb{S}^1$ .

☞ **7 Définition.** Pour tout espace pointé  $(X, *)$ , on note  $\Omega(X, *)$  l'espace pointé  $(X, *)^{(\mathbb{S}^1, *)}$ , qu'on appelle « espace des lacets de  $(X, *)$  », et on note  $\Sigma(X, *)$  l'espace pointé  $(X, *) \wedge (\mathbb{S}^1, *)$  qu'on appelle la « suspension réduite de  $(X, *)$  ».<sup>(8)</sup>

Il résulte du lemme 6 (page 6) que pour  $X$  localement compact on a un homéomorphisme pointé

$$(Y, *)^{\Sigma(X, *)} \xrightarrow{\cong} \Omega(Y, *)^{(X, *)}$$

Il résulte du fait que cet homéomorphisme est donné par des formules explicites (curryfication/décurryfication, lemme 6) qu'il est naturel en  $(X, *)$  et en  $(Y, *)$ . Les foncteurs  $\Sigma$  et  $\Omega$  de la catégorie **Top**<sub>•</sub> vers elle-même sont donc adjoints ( $\Sigma$  à gauche de  $\Omega$ ).<sup>(9)</sup>

En appliquant le foncteur  $\pi_0$  à cet homéomorphisme, on obtient la bijection

$$[\Sigma(X, *), (Y, *)] \xrightarrow{\cong} [(X, *), \Omega(Y, *)]$$

également naturelle en  $(X, *)$  et  $(Y, *)$ .

---

8. On l'appelle « réduite » à cause de l'identification des points de la forme  $(*, t)$  au point de base, la suspension ordinaire étant le quotient  $X \times \mathbb{S}^1 / \sim$  où  $\sim$  identifie seulement les points de la forme  $(x, *)$  au point de base. Nous utiliserons la suspension ordinaire (appelée tout simplement « suspension ») quand nous traiterons de l'homologie.

9. Cet exemple de foncteurs adjoints est un des premiers de l'histoire, puisqu'il apparaît en 1958 dans Kan en même temps que la définition de la notion de foncteurs adjoints.

## 5 Groupes et cogroupes homotopiques.

On sait qu'un groupe (disons multiplicatif) est un ensemble  $X$  muni de deux opérations  $m : X \times X \rightarrow X$  (multiplication) et  $i : X \rightarrow X$  (inversion), vérifiant certains axiomes. On peut exprimer cette définition catégoriquement dans n'importe quelle catégorie cartésienne.<sup>(10)</sup> C'est le cas des catégories **Top** et **HoTop**, ce qui donne alors respectivement les notions de « groupe topologique » déjà rencontrée plus haut, et de « groupe homotopique » (ou « H-groupe ») qui fait l'objet de cette section.

☞ **8 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cartésienne. Un « groupe » dans  $\mathcal{C}$  est un quadruplet  $(X, m, i, e)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $m, i$  et  $e$  des flèches  $m : X \times X \rightarrow X, i : X \rightarrow X, e : 1 \rightarrow X$ , tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X \times X & \xrightarrow{m \times 1} & X \times X \\
 \downarrow 1 \times m & & \downarrow m \\
 X \times X & \xrightarrow{m} & X
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\langle 1, i \rangle} & X \times X & \xleftarrow{\langle i, 1 \rangle} & X \\
 & \searrow e \langle \rangle & \downarrow m & \swarrow e \langle \rangle & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\langle e \langle \rangle, 1 \rangle} & X \times X & \xleftarrow{\langle 1, e \langle \rangle \rangle} & X \\
 & \searrow 1 & \downarrow m & \swarrow 1 & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

soient commutatifs.

On reconnaît bien sûr dans ces trois diagrammes les axiomes des groupes (où l'élément neutre du groupe est noté  $e$ ) :

$$\begin{array}{ll}
 \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad \forall z \in X & (xy)z = x(yz) \\
 \forall x \in X & xx^{-1} = e = x^{-1}x \\
 \forall x \in X & ex = x = xe
 \end{array}$$

Un groupe au sens ordinaire est donc un groupe dans **Ens** au sens de la définition ci-dessus, et un groupe topologique est un groupe dans **Top**. Un groupe dans **HoTop** est appelé un H-groupe.

En remplaçant le produit par la somme (et bien sûr l'objet final 1 par l'objet initial 0) et en renversant le sens des flèches dans ces diagrammes, on obtient la notion duale de « cogroupe ». Toutefois, cette notion n'a aucun représentant non trivial dans **Ens**, **Top** et **HoTop**. C'est dû au fait que l'objet initial dans ces catégories étant l'ensemble vide, l'existence d'une flèche  $e : X \rightarrow 0$  entraîne que  $X$  lui-même est vide. Par contre, la notion de cogroupe devient intéressante quand on remplace ces catégories par leurs analogues à objets pointés. Dans ce cas, c'est le singleton qui est à la fois l'objet final et l'objet initial, et l'existence d'une flèche  $e : X \rightarrow \{*\}$  n'impose aucune condition sur  $X$  (de même qu'elle n'apporte aucune information, puisque cette flèche est nécessairement l'unique flèche vers l'objet final). Noter que tout groupe, groupe topologique

10. En fait, la notion générale qui convient ici est celle de « catégorie monoïdale », que nous n'introduirons pas puisque nous disposons déjà du produit cartésien dans **Top** et dans **HoTop**.

ou H-groupe est de toute façon un objet naturellement pointé par son élément neutre. On peut donc rétablir une meilleure symétrie entre groupes et cogroupes en considérant tous les groupes comme des espaces pointés. C'est d'ailleurs ce qu'il convient de faire en général en topologie algébrique.

Quand une catégorie a un objet qui est à la fois initial et final, on dit que cet objet est un « zéro ». Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets d'une telle catégorie, on a la flèche composée  $0 : X \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & Y \\ & \searrow \langle \rangle & \nearrow [ ] \\ & 0 & \end{array}$$

(où le zéro de la catégorie a été noté  $0$ ). La flèche  $0 : X \rightarrow Y$  est appelée la « flèche nulle ».

Bien que la définition des cogroupes soit exactement la duale de celle des groupes, nous la donnons ci-dessous pour la commodité du lecteur.

**9 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocartésienne. Un « cogroupe » dans  $\mathcal{C}$  est un quadruplet  $(X, \delta, i, e)$ , où  $X$  est un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $m$ ,  $i$  et  $e$  des flèches  $\delta : X \rightarrow X + X$ ,  $i : X \rightarrow X$ ,  $e : X \rightarrow 0$ , tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & X + X \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta+1 \\ X + X & \xrightarrow{1+\delta} & X + X + X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow [ ]e & \downarrow \delta & \searrow [ ]e & \\ X & \xleftarrow{[i,1]} & X + X & \xrightarrow{[1,i]} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow 1 & \downarrow \delta & \searrow 1 & \\ X & \xleftarrow{[[ ]e,1]} & X + X & \xrightarrow{[1,[ ]e]} & X \end{array}$$

soient commutatifs.  $\delta$  est appelée « comultiplication », et  $e$  est appelé « co-unité ».

Bien entendu, dans le cas d'une catégorie qui a un zéro, la flèche  $[ ]e : X \rightarrow X$  est juste la flèche nulle. Elle nous sera plus utile que l'unique flèche  $e$  de  $X$  vers le zéro.

**10 Exemple.** Toute suspension réduite  $\Sigma(X, *)$  est un cogroupe homotopique. Il suffit en effet de définir la comultiplication  $\delta : \Sigma(X, *) \rightarrow \Sigma(X, *) + \Sigma(X, *)$  en posant

$$\delta(x, t) = \begin{cases} i(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ j(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

où  $i$  et  $j$  sont les deux inclusions canoniques de la somme  $\Sigma(X, *) + \Sigma(X, *)$ . La vérification du fait qu'on obtient ainsi un cogroupe homotopique est de même nature que celle qui montre que  $\pi_1(X, *)$  est un groupe. Bien entendu, la co-unité (co-élément neutre) est juste l'unique flèche vers le zéro de **Top**.

En particulier,  $(\mathbb{S}^1, 1) = \Sigma(\mathbb{S}^0, 1)$  est un cogroupe homotopique, et plus généralement  $(\mathbb{S}^n, *)$  est un cogroupe homotopique pour tout  $n \geq 1$ .

Un foncteur contravariant qui transforme objet initial en objet final et sommes en produits, transforme évidemment un cogroupe en groupe. C'est le cas (pour tout  $(Z, *)$ ) du foncteur  $(Y, *) \mapsto (Z, *)^{(Y, *)}$  (de **Top.** vers **Top.**), et du foncteur  $(Y, *) \mapsto [(Y, *), (Z, *)]$  (de **HoTop.** vers **Ens**). Ainsi,  $[(\mathbb{S}^1, 1), (Z, *)]$  est un groupe qu'il est facile de reconnaître comme étant en fait  $\pi_1(Z, *)$ , le groupe fondamental, ou « premier groupe d'homotopie de  $(Z, *)$  ». Comme  $(\mathbb{S}^n, *)$  est aussi un cogroupe homotopique,  $[(\mathbb{S}^n, *), (X, *)]$  est encore un groupe, qu'on appelle «  $n^{\text{ième}}$  groupe d'homotopie de  $(X, *)$  », et qu'on note  $\pi_n(X, *)$ . De même  $\Omega(X, *) = (X, *)^{(\mathbb{S}^1, 1)}$  est un groupe homotopique.

De manière similaire, un foncteur covariant qui transforme objet final en objet final et produits en produits, transforme un groupe en un groupe. C'est le cas (pour tout  $(Z, *)$ ) du foncteur  $(Z, *) \mapsto [(Y, *), (Z, *)]$ . D'après ce qui précède,  $[(Y, *), \Omega(X, *)]$  est un groupe. Compte tenu des adjonctions précédentes, on vérifie facilement que  $[(\mathbb{S}^0, 1), \Omega^n(X, *)]$ , avec sa structure de groupe induite par la structure de groupe homotopique de  $\Omega^n(X, *)$ , n'est autre que  $\pi_n(X, *)$ . Le lemme suivant et le commentaire qui suit nous donnent un résultat plus général.

**11 Lemme.** *Soit  $X$  un ensemble, et soient  $\times$  et  $\times'$  deux lois de composition sur  $X$ , ayant un élément neutre bilatéral commun et satisfaisant la « loi d'échange » (ou de « distributivité mutuelle ») :*

$$(x \times y) \times' (z \times t) = (x \times' z) \times (y \times' t)$$

*Alors les deux lois de compositions sont égales, commutatives et associatives.*

*Démonstration.* Notons  $e$  l'élément neutre commun à  $\times$  et  $\times'$ . On a

$$x \times y = (x \times' e) \times (e \times' y) = (x \times e) \times' (e \times y) = x \times' y$$

et les deux lois sont donc égales (et notées toutes deux  $\times$  pour le reste de cette démonstration). Par ailleurs :

$$x \times y = (e \times x) \times (y \times e) = (e \times y) \times (x \times e) = y \times x$$

et :

$$(x \times y) \times z = (x \times y) \times (e \times z) = (x \times e) \times (y \times z) = x \times (y \times z)$$

□

Considérons maintenant deux objets  $(X, *)$  et  $(Y, *)$  dans **Top.**, tels que  $(X, *)$  soit un cogroupe homotopique et  $(Y, *)$  un groupe homotopique. Alors  $[(X, *), (Y, *)]$  reçoit a priori les deux structures de groupes induites par les structures sur  $(X, *)$  et sur  $(Y, *)$ , dont nous noterons les lois  $\delta : (X, *) \rightarrow (X, *) + (X, *)$  et  $\mu : (Y, *) \wedge (Y, *) \rightarrow (Y, *)$ . Les éléments neutres (bilatéraux) de ces deux structures ne peuvent être que l'unique application constante  $e : (X, *) \rightarrow (Y, *)$ . Pour  $f, g \in [(X, *), (Y, *)]$ , posons  $f \times' g = (f + g) \circ \delta$  et  $f \times g = \mu \circ (f \wedge g)$ . Pour  $f, g, h, k \in [X, Y]$ ,

on a

$$\begin{aligned}
(f \times g) \times' (h \times k) &= ((\mu \circ (f \wedge g)) + (\mu \circ (h \wedge k))) \circ \delta \\
&= \mu \circ ((f \wedge g) + (h \wedge k)) \circ \delta \\
&= \mu \circ ((f + h) \wedge (g + k)) \circ \delta \quad (\text{exercice}) \\
&= \mu \circ (((f + h) \circ \delta) \wedge ((g + k) \circ \delta)) \\
&= (f \times' h) \times (g \times' k)
\end{aligned}$$

En conséquence, les deux lois de composition sur  $[(X, *), (Y, *)]$  sont égales, commutatives (et associatives, ce qu'on savait déjà, puisqu'il s'agit de structures de groupes). En particulier, pour  $n \geq 2$ , comme  $\pi_n(X, *) = [\Sigma(\mathbb{S}^{n-2}, *), \Omega(X, *)]$ , on voit que  $\pi_n(X, *)$  est un groupe commutatif.

Nous sommes ici au seuil de la théorie de l'homotopie, qui a bien sûr de nombreux développements. Nous nous limiterons aux considérations ci-dessus dans ce cours d'initiation.

# Topologie Algébrique

A. Prouté, H. Mourtada.

Paris-Diderot 2011-2012

Master 1 (31UDMT42)

Examen partiel du 7 mars 2012.

## I.

On note  $\mathcal{C}$  la catégorie des espaces topologiques localement connexes par arcs et applications continues entre eux. On note  $\pi_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  le foncteur qui envoie tout objet de  $\mathcal{C}$  sur l'ensemble de ses composantes connexes, et toute flèche de  $\mathcal{C}$  sur la flèche induite entre ensembles de composantes connexes.

- (a) Montrer que  $\pi_0$  a un adjoint à droite (le construire explicitement).
- (b) Montrer que  $\pi_0$  n'a pas d'adjoint à gauche. (On pourra utiliser la co-unité de l'adjonction, pour montrer que si  $F \dashv \pi_0$ , alors l'image par  $F$  d'un singleton (et plus généralement de n'importe quel ensemble) est vide.)

## II.

Soit  $X$  un espace topologique séparé non vide, et  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts ayant la propriété que pour tous  $i$  et  $j$  de  $I$ , il existe  $k \in I$  tel que  $U_i \cup U_j \subset U_k$ . On suppose de plus que chaque  $U_i$  est connexe par arcs et simplement connexe.

- (a) Montrer que  $X$  est connexe par arcs.
- (b) Montrer que  $X$  est simplement connexe.

## III.

On note  $U$  le complémentaire de la droite d'équation  $y = x$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

- (a) Montrer que l'application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ (}^1\text{)}$  définie par  $\varphi(x, y) = x - y$  est une équivalence d'homotopie, et que  $U$  est connexe par arcs.

On note  $P[X]$  l'ensemble des polynômes en  $X$  de la forme  $X^2 + aX + b$  (où  $a$  et  $b$  sont des complexes) tels que  $a^2 \neq 4b$ . On pourra sans autre formalité identifier  $P[X]$  au complémentaire dans  $\mathbb{C}^2$  de la courbe d'équation  $a^2 = 4b$ . Soit  $\pi : U \rightarrow P[X]$  l'application définie par  $\pi(x, y) = (X - x)(X - y)$ .

- (b) Montrer que  $\pi$  est bien définie.
- (c) Calculer la matrice jacobienne de  $\pi$  en tout  $(x, y) \in U$ , et en conclure que  $\pi$  est un homéomorphisme local.

---

1. Où  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ .

(d) Montrer que  $\pi : U \rightarrow P[X]$  est un revêtement à deux feuilles et qu'il n'est pas trivial.

On note  $\mathbb{C}[X]^+$  l'ensemble des polynômes en  $X$  non constants à coefficients complexes (c'est-à-dire de degré au moins 1). On sait qu'un tel polynôme a au moins une racine (théorème de d'Alembert).

(e) Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue  $\mathbb{C}[X]^+ \rightarrow \mathbb{C}$  associant à tout polynôme l'une de ses racines.

## IV.

Soit  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue telle que pour tout  $x \in \mathbb{S}^2$ , on ait  $f(-x) = -f(x)$ . On note  $\mathbb{RP}^2$  et  $\mathbb{RP}^1$  les espaces projectifs de dimensions 2 et 1, c'est-à-dire les quotients de  $\mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{S}^1$  par la relation qui identifie tout  $x$  à son opposé (ou antipode)  $-x$ . On note  $\bar{f}$  l'application de  $\mathbb{RP}^2$  vers  $\mathbb{RP}^1$  induite par  $f$ .

(a) Rappeler quels sont les groupes fondamentaux des quatre espaces  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{RP}^1$  et  $\mathbb{RP}^2$ , et expliquer pourquoi on peut ne pas tenir compte des points de base.

(b) Montrer qu'on a un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}^1) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & \pi_1(\mathbb{RP}^1) \end{array}$$

(où les flèches verticales sont induites par les projections canoniques) et que  $\bar{f}_*$  est le morphisme nul.

Soit  $\gamma$  un chemin de  $\mathbb{S}^2$  allant du pôle nord au pôle sud.

(c) Montrer que le chemin  $\bar{f} \circ \pi \circ \gamma$  de  $\mathbb{RP}^1$  est un lacet (pour un certain point de base dans  $\mathbb{RP}^1$ ) et qu'il n'est pas homotope au lacet constant.

(d) Dédire une contradiction de ce qui précède.

(e) Montrer que pour toute application continue  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , il existe un point  $x \in \mathbb{S}^2$  tel que  $g(x) = g(-x)$ . (Raisonnement par l'absurde et construire une fonction  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  vérifiant les hypothèses du début de l'exercice.)



I.

(a) Soit  $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$  le foncteur qui envoie tout ensemble  $E$  sur l'espace topologique obtenu en mettant la topologie discrète sur  $E$  (un tel espace est localement connexe par arcs), et toute application sur elle-même (qui est bien sûr continue puisque les topologies sont discrètes). On a bien sûr  $E = G(E)$  à la topologie près.

On a  $\pi_0 \dashv G$ . En effet, on définit

$$\mathbf{Ens}(\pi_0(X), E) \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(X, G(E))$$

en posant  $\theta(f)(x) = f(\bar{x})$ , où  $\bar{x}$  est la composante connexe de  $x$  dans  $X$ . L'image réciproque d'un ouvert  $U$  de  $G(E)$  (c'est-à-dire d'une partie quelconque  $U$  de  $G(E)$ ) par  $\theta(f)$  est la réunion des composantes connexes qui sont envoyées dans  $U$  par  $f$ . La raison pour laquelle  $\theta(f)$  est continue est que dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes sont ouvertes, donc aussi les réunions de composantes connexes.

$\theta$  est bijective, car comme  $G(E)$  est discret, toute fonction continue  $g : X \rightarrow G(E)$  doit être constante sur chaque composante connexe, et passe donc au quotient en une flèche unique  $f : \pi_0(X) \rightarrow E$  qui vérifie clairement  $\theta(f) = g$ .

Il reste à voir que  $\theta$  est naturelle en  $X$  et en  $E$ . Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application continue. On doit montrer que  $\theta(f) \circ \varphi = \theta(f \circ \pi_0(\varphi))$ . On a  $\theta(f)(\varphi(x)) = f(\overline{\varphi(x)}) = f(\pi_0(\varphi)(\bar{x})) = \theta(f \circ \pi_0(\varphi))(x)$ . Soit maintenant  $\psi : E \rightarrow F$  une application. On doit prouver que  $G(\psi) \circ \theta(f) = \theta(\psi \circ f)$ . On a  $G(\psi)(\theta(f)(x)) = G(\psi)(f(\bar{x})) = \psi(f(\bar{x})) = \theta(\psi \circ f)(x)$ .

(b) Si  $\pi_0$  avait un adjoint à gauche  $F : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$ , on aurait une co-unité  $\varepsilon : F(\pi_0(X)) \rightarrow X$  naturelle en  $X$ . Prenons  $X = \mathbb{R}$  et soit  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une translation non triviale (par exemple  $T(x) = x + 1$ ). On a alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(\pi_0(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{R} \\ F(\pi_0(T)) \downarrow & & \downarrow T \\ F(\pi_0(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{R} \end{array}$$

Comme  $\mathbb{R}$  est connexe,  $\pi_0(\mathbb{R})$  est un singleton, et  $\pi_0(T)$  est l'application identique. Comme  $F$  est un foncteur,  $F(\pi_0(T))$  est la fonction identique sur l'espace  $F(\pi_0(\mathbb{R}))$ . Comme  $T$  n'a pas de point fixe, cela implique que  $F(\pi_0(\mathbb{R})) = \emptyset$ . Comme  $F$  est un adjoint à gauche et comme tout ensemble est la somme (union disjointe) de ses singletons, on voit que  $F(E) = \emptyset$  pour tout ensemble  $E$  (mais ceci ne nous servira).

Soit maintenant  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  ayant au moins deux composantes connexes et  $E = \pi_0(\mathbb{R})$  (qui est un singleton). L'ensemble  $\mathcal{C}(F(E), X) = \mathcal{C}(\emptyset, X)$  n'a qu'un élément, alors que l'ensemble  $\mathbf{Ens}(E, \pi_0(X))$  en a au moins deux.  $F$  ne peut donc pas être adjoint à gauche de  $\pi_0$ .<sup>(2)</sup>

## II.

(a) Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ . Il existe des ouverts  $U_i$  et  $U_j$  du recouvrement  $\mathcal{U}$  tels que  $x \in U_i$  et  $y \in U_j$ . Il existe par ailleurs  $k$  tel que  $U_i \cup U_j \subset U_k$ . On a donc  $x \in U_k$  et  $y \in U_k$ . Comme  $U_k$  est connexe par arcs, il existe un chemin de  $U_k$ , donc de  $X$ , reliant  $x$  à  $y$ .  $X$  est donc connexe par arcs.

(b) Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un lacet de  $X$  en un point  $*$  quelconque de  $X$ . Comme  $[0, 1]$  est compact et  $X$  séparé, l'image de  $\gamma$  est un compact de  $X$ . Il existe donc une sous-famille finie  $U_1, \dots, U_n$  de  $\mathcal{U}$  telle que  $\text{Im}(\gamma) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Il est immédiat par récurrence sur  $n$  qu'il existe  $k$  tel que  $U_1 \cup \dots \cup U_n \subset U_k$ . Comme  $U_k$  est simplement connexe,  $\gamma$  est homotope dans  $U_k$ , donc dans  $X$ , au lacet constant, et  $X$  est donc simplement connexe.

## III.

(a) Par définition de  $U$ ,  $\varphi$  ne prend pas la valeur 0 et est donc à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$  (et continue). On définit  $\psi : \mathbb{C}^* \rightarrow U$  en posant  $\psi(x) = (x/2, -x/2)$ . Comme  $x \neq 0$ , on a  $x/2 \neq -x/2$  et  $\psi$  est à valeurs dans  $U$ . Par ailleurs,  $\varphi(\psi(x)) = (x/2) - (-x/2) = x$ , et  $\psi(\varphi(x, y)) = (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2})$ . Posons  $h(t, (x, y)) = ((1-t)x + t\frac{x-y}{2}, (1-t)y + t\frac{y-x}{2})$ . Si ce couple n'était pas dans  $U$ , on aurait  $(1-t)x + t\frac{x-y}{2} = (1-t)y + t\frac{y-x}{2}$ , d'où on tire immédiatement  $x = y$ , ce qui ne se peut pas.  $h$  est donc bien définie (et continue) de  $[0, 1] \times U$  vers  $U$ . Or  $h(0, (x, y)) = (x, y)$  et  $h(1, (x, y)) = \psi(\varphi(x, y))$ .  $\varphi$  est donc une équivalence d'homotopie. Comme  $\mathbb{C}^*$  est connexe par arcs, il en est de même de  $U$ .

(b) Le polynôme  $(X - x)(X - y)$  est bien de la forme  $X^2 + aX + b$ . Il y a juste à vérifier que  $a^2 \neq 4b$ , autrement-dit que le polynôme n'a pas de racine double. Or c'est le cas puisque ses racines sont  $x$  et  $y$  qui sont distincts.

(c) Comme la courbe d'équation  $a^2 = 4b$  est fermée dans  $\mathcal{C}^2$ ,  $P[X]$  est un ouvert de  $\mathcal{C}^2$ . Il en est de même de  $U$ . On peut donc utiliser les techniques de calcul différentiel vues en L3. De  $(X - x)(X - y) = X^2 + aX + b$ , on tire  $a = -x - y$  et  $b = xy$ .  $\pi$  est donc l'application qui envoie  $(x, y)$  sur  $(-x - y, xy)$ . Sa matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

---

2. Autre solution : Si  $\pi_0$  avait un adjoint à gauche, il préserverait les égaliseurs (un égaliseur de  $f$  et  $g$  est la limite d'un diagramme fait de deux flèches parallèles  $f$  et  $g$ ). Il suffit de prendre un espace connexe par arcs  $X$  et une application continue  $f : X \rightarrow X$  dont l'ensemble des points fixes n'est pas connexe par arcs. Alors l'égaliseur de  $1_X$  et  $f$  a un  $\pi_0$  qui n'est pas réduit à un singleton, et l'égaliseur des flèches  $1_{\pi_0(X)}$  et  $\pi_0(f)$  est nécessairement réduit à un point, puisque  $\pi_0(X)$  est un singleton.

dont le déterminant est  $y - x$ , ce qui ne vaut jamais 0 pour  $(x, y) \in U$ . Comme  $\pi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le théorème d'inversion locale montre que  $\pi$  est un difféomorphisme local.

(d) Tout polynôme  $X^2 + aX + b \in P[X]$  a exactement deux antécédents  $x$  et  $y$  par  $\pi$ , à savoir ses deux racines, qui sont distinctes. Comme  $\pi$  est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  et un voisinage ouvert  $V_y$  de  $y$ , tels que  $\pi$  soit un homéomorphisme de  $V_x$  sur  $\pi(V_x)$  et de  $V_y$  sur  $\pi(V_y)$  et que  $\pi(V_x)$  et  $\pi(V_y)$  soient des voisinages ouverts de  $X^2 + aX + b$ . Quitte à réduire  $V_x$  et  $V_y$  on peut supposer que  $\pi(V_x) = \pi(V_y)$ . Un élément quelconque de  $\pi(V_x)$  ayant exactement deux antécédents par  $\pi$ , ce sont les deux qui sont dans  $V_x$  et dans  $V_y$ .  $\pi$  est donc un revêtement trivial à deux feuilles au dessus du voisinage  $\pi(V_x)$  de  $X^2 + aX + b$ . Comme ceci est valable pour tout polynôme appartenant à  $P[X]$ , on voit que  $\pi$  est un revêtement à deux feuilles. Il n'est pas trivial car  $U$  est connexe.

(e) S'il existait une fonction continue associant l'une des ses racines à tout polynôme non constant, sa restriction à  $P[X]$  serait une section continue du revêtement  $\pi$ . Comme tout revêtement à deux feuilles est principal (car tout sous-groupe d'indice 2 est distingué), ce revêtement serait trivial, ce qui n'est pas le cas.

#### IV.

(a) On a  $\pi_1(\mathbb{S}^1, *) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = 0$ ,  $\pi_1(\mathbb{RP}^1, *) \simeq \mathbb{Z}$  (car  $\mathbb{RP}^1$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ ), et  $\pi_1(\mathbb{RP}^2, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ces espaces étant connexes par arcs, et ces groupes étant commutatifs, deux groupes fondamentaux du même espace correspondant à des points de base distincts sont canoniquement isomorphes (tout chemin d'un point de base à l'autre définit le même isomorphisme entre les groupes fondamentaux). C'est pourquoi on peut ignorer les points de base.

(b) On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{RP}^1 \end{array}$$

d'applications continues. On choisit un point de base dans  $\mathbb{S}^2$ , ce qui donne des points de base dans les autres espaces faisant de toutes ces applications des applications pointées. On peut alors appliquer le foncteur  $\pi_1$  et on obtient le carré de l'énoncé. Le morphisme  $\bar{f}_*$  est nul car il n'existe pas de morphisme non nul de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$ .

(c)  $\bar{f} \circ \pi \circ \gamma$  est un lacet (en  $\bar{f}(\pi(N))$ , où  $N$  est le pôle nord de  $\mathbb{S}^2$ ) parce que la projection  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  envoie les deux pôles de la sphère sur un même point. Si ce lacet était homotope au lacet constant, son relèvement à partir du point  $f(N)$  aboutirait à  $f(N)$ . Or  $f \circ \gamma$  est ce relèvement, et il aboutit à  $f(-N) = -f(N) \neq f(N)$ .

(d) Comme  $\pi(N) = \pi(-N)$ ,  $\pi \circ \gamma$  est un lacet de  $\mathbb{RP}^2$ . Comme  $\bar{f}_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^1)$  est

nul, et comme  $\bar{f} \circ \pi \circ \gamma$  est l'image du lacet  $\pi \circ \gamma$  par  $\bar{f}$ , il doit être homotope au lacet constant, ce qui contredit le résultat de **(c)**.

(e) Supposons que  $g(x) \neq g(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^2$ . Alors la fonction  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$$

est bien définie et continue. De plus elle vérifie l'égalité  $f(-x) = -f(x)$ . Elle ne peut donc pas exister d'après **(d)**.



# Topologie Algébrique

*Alain Prouté*

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

**Notes du cours du 12 mars 2012.**

L'algèbre homologique est une branche de l'algèbre linéaire qui émerge naturellement de la simulation algébrique de la notion (intuitive) de « bord ». Nous exposons d'abord des arguments de nature intuitive et géométrique, qui doivent permettre de comprendre clairement ce qu'on cherche à faire, même si le lien précis que ces simulations ont avec la topologie ne sera établi que plus tard. On se contente donc dans un premier temps d'imiter avec les outils de l'algèbre linéaire le comportement de quelques concepts de nature définitivement géométrique, comme le bord, la dimension, l'orientation et la notion d'homotopie. C'est aussi l'occasion de préciser certaines notions concernant les modules sur les anneaux et d'introduire le produit tensoriel.

## 1 Les intuitions géométriques.

Tout le monde a une notion intuitive de « bord », le « bord de mer », « être au bord du précipice », etc. ... Finalement, qu'est-ce que le « bord » de quelque chose ? Voyons quelques exemples.

Une feuille de papier (rectangulaire) peut être qualifiée de « surface ». Par « surface », on entend en fait que la feuille de papier est « à deux dimensions », en ce sens que deux coordonnées suffisent pour repérer un point sur la feuille. De la même manière, deux coordonnées suffisent pour repérer un point sur une sphère, par exemple la longitude et la latitude sur la terre. Entre la feuille de papier et la sphère, il y a une différence fondamentale. La feuille de papier a un bord, alors que la sphère n'a pas de bord. Il y a une ligne (rectangulaire et essentiellement virtuelle) qui délimite la feuille de papier, alors qu'aucune ligne ne délimite une sphère. Si vous déplacer un crayon sur la feuille de papier, disons en ligne droite, vous allez atteindre le bord. Si vous vous déplacez sur la terre, même « en ligne droite », vous n'atteindrez jamais le bord (le « bout du monde »), mais éventuellement vous reviendrez à votre point de départ.

Bien entendu, le notion de bord ne s'applique pas à n'importe quel objet. Il faut une certaine régularité géométrique pour avoir un bord. Nous n'essaierons pas d'être plus précis sur ce point dans ces préliminaires, mais on peut remarquer que la notion de bord est liée à celle de dimension. La feuille de papier est une surface, c'est-à-dire qu'elle est de dimension 2, et son bord est une ligne, c'est-à-dire qu'il est de dimension 1. De même, si vous gonflez un ballon avec de l'hydrogène, vous obtenez un « volume » d'hydrogène, et ce volume est délimité par le ballon

lui-même. Le volume en question est de dimension 3, et son bord, le ballon, qui est une sphère, est de dimension 2. Vous pouvez faire la même chose avec une chambre à air, qu'on appelle un « tore » en géométrie. Le volume d'air dans la chambre à air est de dimension 3 et son bord, la chambre à air elle-même, est de dimension 2. Bien sûr, pour pouvoir affirmer cela, on suppose que la feuille de papier, le ballon et la chambre à air sont infiniment minces, ce qui est une idéalisation nécessaire pour pouvoir les qualifier de surfaces. Un disque, l'analogue d'une feuille de papier, mais « rond », est encore une surface, dont le bord est un cercle. Le cercle lui-même n'a pas de bord, alors que le bord d'un segment de droite est constitué de deux points (ses deux extrémités). Un point n'a lui-même pas de bord.

On aura remarqué bien sûr que le bord d'un objet est toujours de la dimension immédiatement inférieure à celle de l'objet lui-même, 2 pour un objet de dimension 3, 1 pour un objet de dimension 2, 0 (la dimension d'un point) pour un objet de dimension 1. C'est une des caractéristiques du bord que de diminuer la dimension de 1.

On aura aussi sans doute remarqué qu'un objet qui est lui-même le bord de quelque chose n'a pas de bord. Par exemple, le bord d'un disque est un cercle qui n'a lui-même pas de bord et le bord d'un volume d'hydrogène emprisonné dans un ballon est une sphère (le ballon) qui n'a elle-même pas de bord. Le fait que le bord d'un bord soit toujours vide, est la propriété essentielle du bord. C'est elle, comme on va le voir, qui donne naissance à toute l'algèbre homologique.

Mais ce n'est pas tout. Prenons un disque (dimension 2), par exemple l'ensemble des points du plan euclidien dont la distance à 0 est au plus 1, qu'on appellera  $D$ , et faisons son produit cartésien avec un segment de droite, par exemple l'ensemble  $I = [0, 1]$  des réels compris, au sens large, entre 0 et 1. On obtient un « cylindre », c'est-à-dire une « boîte de conserves » (pleine, c'est-à-dire un volume de dimension 3). Quel est le bord de ce cylindre ? Il est constitué de deux parties. D'une part le « tour » de la boîte (là où on colle l'étiquette), et d'autre part le fond et le couvercle, qui sont deux disques. Notez que le bord du disque  $D$  est le cercle constitué des points dont la distance à 0 est exactement 1. Notons le  $\partial(D)$  (cette expression se lit « bord de  $D$  »). Le tour de la boîte est clairement le produit cartésien  $\partial(D) \times I$ . Par ailleurs, le bord  $\partial(I)$  du segment  $I$  est constitué des deux points 0 et 1, et la paire de disques qui forment le fond et le couvercle de notre boîte de conserves est donc le produit cartésien de  $D$  et  $\partial(I)$ . Si on note la réunion avec un signe  $+$ , on a alors la formule :

$$\partial(D \times I) = \partial(D) \times I + D \times \partial(I)$$

Cela nous rappelle la fameuse formule qu'on apprend au lycée pour dériver un produit de deux fonctions :  $(uv)' = u'v + uv'$ . En fait, le bord est une sorte de dérivation, et d'ailleurs les topologues algébristes l'appellent souvent la « différentielle », expression consacrée que nous allons employer dans ce texte pour désigner le bord. Noter que de même que le bord diminue la dimension de 1, la dérivation usuelle diminue le degré des polynômes de 1. C'est un autre point de ressemblance entre dérivation et bord. Par contre, si le bord d'un bord est toujours vide, il n'est pas vrai que la dérivée seconde d'une fonction soit toujours nulle. Malgré tout, en supposant que vous ayez entendu parler de gradient, de rotationnel et de divergence, qui sont clairement des opérateurs apparentés à la dérivation, vous savez sans doute que  $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$  et  $\text{div}(\text{rot}(X)) = 0$ . En fait, ces opérateurs sont effectivement des opérateurs bords (modulo

l'identification de  $\mathbb{R}^3$  avec son dual induite par la métrique euclidienne) dans une théorie qui s'appelle la « cohomologie de de Rham ».

Enfin, pour en finir avec ces préliminaires intuitifs, il y a encore une notion importante concernant ces objets qui ont éventuellement un bord. C'est la notion d'orientation. Elle est intimement liée à celle de dimension et même plus précisément au fait qu'un objet de dimension  $n$  est « localement comme  $\mathbb{R}^n$  ». Au voisinage d'un point d'un tel objet, on peut repérer les points voisins par  $n$  coordonnées, ce qui permet d'identifier l'objet localement à  $\mathbb{R}^n$  (ou à un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ ). La possibilité d'orienter l'objet vient de la possibilité d'orienter tout espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ . Sans entrer dans trop de détails, rappelons que tout isomorphisme linéaire  $f : E \rightarrow E$  (automorphisme) a un déterminant qui est un réel non nul. Ce réel est donc soit strictement positif, soit strictement négatif. Dans le premier cas, on dit que  $f$  préserve l'orientation de  $E$ , et dans le deuxième cas qu'il la renverse. Ceci laisse entendre que  $E$  a deux orientation « opposées ». Aucune de ces deux orientation n'est privilégiée par rapport à l'autre. On détermine une orientation en choisissant une base de  $E$ . Deux bases définissent la même orientation de  $E$  si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant positif. Une orientation  $E$  est donc par définition une classe d'équivalence de bases de  $E$ . En algèbre homologique, les orientations se manifestent sous forme de signes. Le point important est que si  $X$  et  $Y$  sont deux objets orientés de dimensions respectives  $p$  et  $q$ , alors  $X \times Y$  et  $Y \times X$  sont orientés, et l'application  $(x, y) \mapsto (y, x)$  de  $X \times Y$  vers  $Y \times X$  respecte l'orientation sauf si  $p$  et  $q$  sont tous les deux impairs. Autrement-dit, cette application multiplie l'orientation par  $(-1)^{pq}$ . Noter que  $(-1)^{pq}$  est la signature de la permutation d'un ensemble à  $p + q$  éléments, qui fait passer les  $p$  premiers éléments derrière les  $q$  derniers. C'est le déterminant de la matrice (avec des 0 dans toutes les places vides) :

$$\left( \begin{array}{c|ccc} & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \end{array} \right)$$

dans laquelle le bloc (identité) en bas à gauche est de taille  $p \times p$  et le bloc (identité) en haut à droite de taille  $q \times q$ . C'est une matrice de passage entre deux bases de la forme  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, e_1, \dots, e_p)$ . En algèbre homologique, on retrouvera ce phénomène partout, et le moyen de bien s'en sortir sans avoir à se battre avec les signes consiste à adopter la

**1 Convention.** (Convention de Koszul) Si une définition fait intervenir une égalité la forme  $E = F$ , et si  $E$  et  $F$  sont des expressions multilinéaires par rapport aux variables homogènes  $x_1, \dots, x_n$ ,<sup>(1)</sup> chaque terme de  $F$  doit être précédé du signe qui est la signature de la permutation qu'ont subi dans ce terme les variables de degrés impairs de  $E$  (en supposant que  $E$  ne comporte qu'un seul terme).

---

1. C'est-à-dire que chaque variable a un degré.

Par exemple, on posera  $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y)$  pour définir le produit tensoriel de deux homomorphismes homogènes  $f$  et  $g$  sur des éléments homogènes  $x$  et  $y$ . On remarque que les seules variables qui ont été permutées d'un côté à l'autre de la formule sont  $x$  et  $g$ . Or  $(-1)^{|x||g|}$  vaut  $-1$  précisément quand  $x$  et  $g$  sont tous les deux de degrés impairs.

Comme la signature est un morphisme de groupes, ceci assure une grande cohérence dans les calculs. Si cette convention est bien respectée les égalités qui sont vraies modulo 2 (c'est-à-dire sans tenir compte des signes) sont vraies.<sup>(2)</sup>

En résumé, l'algèbre homologique est une simulation algébrique de la « géométrie du bord ». Elle prend en compte les notions de dimension et d'orientation, et le fait que le bord se comporte comme une dérivation de carré nul ( $\partial \circ \partial = 0$ ).

## 2 Modules sur un anneau.

Rappelons qu'un anneau est un ensemble  $\Lambda$  muni de deux opérations  $+$  (addition) et  $\times$  (multiplication), et dont deux éléments (pas nécessairement distincts) sont notés  $0$  et  $1$ , le tout ayant les propriétés suivantes. L'addition donne à  $\Lambda$  une structure de groupe commutatif<sup>(3)</sup> d'élément neutre  $0$ , la multiplication donne à  $\Lambda$  une structure de monoïde d'élément neutre  $1$ , et la multiplication est distributive sur l'addition.

Des exemples bien connus d'anneaux sont l'anneau des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ , les anneaux quotients  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (qu'on notera  $\mathbb{Z}/n$ ), les anneaux de polynômes (à une ou plusieurs variables) ou de matrices (ces derniers non commutatifs en général, c'est-à-dire ayant une multiplication non commutative). Bien sûr, les corps sont des anneaux. Si  $X$  est un espace topologique, l'ensemble des fonctions continues de  $X$  vers  $\mathbb{R}$  est encore un anneau. Il y a de nombreux autres exemples.

Maintenant, prenez la définition d'un espace vectoriel sur un corps et remplacez partout le mot « corps » par le mot « anneau ». Vous obtiendrez la définition d'un « module sur un anneau ». Les éléments d'un module  $M$  sur  $\Lambda$  (on dira que  $M$  est un  $\Lambda$ -module) sont appelés « vecteurs », alors que ceux de  $\Lambda$  sont appelés « scalaires ». Les vecteurs de  $M$  forment donc un groupe additif (commutatif), et on a une « multiplication externe »  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  de  $\Lambda \times M$  vers  $M$ . Dans le cas où  $\Lambda$  n'est pas commutatif, le côté duquel on multiplie par des scalaires devient important. On distinguera donc les modules « à gauche », dont la multiplication externe envoie  $\Lambda \times M$  dans  $M$  et les modules « à droite », dont la multiplication externe envoie  $M \times \Lambda$  dans  $M$ . Si  $M$  a une multiplication externe de chaque côté (pas nécessairement sur le même anneau), et si les groupes additifs de ces deux structures sont identiques, on dit que  $M$  est un « bimodule ».

Un « idéal à gauche »  $I$  dans un anneau  $\Lambda$  est un sous-groupe additif de  $\Lambda$  qui absorbe les éléments de  $\Lambda$  par multiplication à gauche, précisément, si  $\lambda \in \Lambda$  et  $x \in I$ , on a  $\lambda x \in I$ . Noter qu'un idéal à gauche de  $\Lambda$  est un module à gauche sur  $\Lambda$ . On définit symétriquement les idéaux à droite. Si  $I$  est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que c'est un idéal

2. Nous ne donnons pas à cette affirmation le statut de théorème. C'est juste une heuristique.

3. L'hypothèse de commutativité est en fait ici inutile. Elle se déduit des autres propriétés.

« bilatère ». Ces distinctions d'évanouissent évidemment si  $\Lambda$  est commutatif. Un idéal  $I$  d'un anneau commutatif est dit principal s'il est l'ensemble des multiples d'un élément de l'anneau. Un anneau  $\Lambda$  est dit « intègre », si tout produit de deux éléments non nuls de  $\Lambda$  est non nul.

☞ **Exercice 1.** Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  (pas nécessairement finie) de vecteurs d'un  $\Lambda$ -module  $M$  « engendre »  $M$  si pour tout  $x \in M$ , il existe un sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  et des éléments  $\alpha_j$  ( $j \in J$ ) de  $\Lambda$  (i.e. des scalaires), tels que  $x = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j$ . On dit alors que  $x$  est « combinaison linéaire des

$(e_i)_{i \in I}$  ». On notera le caractère fini des combinaisons linéaires construites à partir d'une famille éventuellement infinie de vecteurs. La famille de vecteurs  $(e_i)_{i \in I}$  est dite « libre » si pour tout sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  une égalité de la forme  $0 = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j$  entraîne que pour tout  $j \in J$ , on

a  $\alpha_j = 0$ . Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $M$  qui est libre et qui engendre  $M$  (on dit aussi qu'elle est « génératrice ») est appelée une « base de  $M$  ».

Contrairement aux espaces vectoriels qui ont toujours au moins une base, un module peut ne pas avoir de base. Un exemple très simple est celui de  $\mathbb{Z}/2$  comme  $\mathbb{Z}$ -module. Comme  $\mathbb{Z}/2$  n'est pas le module réduit à 0, une base de  $\mathbb{Z}/2$  doit avoir au moins un vecteur, qui ne peut d'ailleurs être que  $1 \in \mathbb{Z}/2$ . Mais on a  $2 \times 1 = 0$  (où  $2 \in \mathbb{Z}$  et  $1 \in \mathbb{Z}/2$ ). Si (1) était un système libre, ceci entraînerait que  $2 = 0$  dans  $\mathbb{Z}$ , ce qui n'est bien sûr pas vrai.  $\mathbb{Z}/2$  n'a donc pas de base comme  $\mathbb{Z}$ -module (mais il en a bien sûr une comme  $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel). Un autre exemple est celui de  $\mathbb{Q}$  vu comme un  $\mathbb{Z}$ -module. Si ce module avait une base, on pourrait prendre l'un des

vecteurs  $e_0$  de cette base et écrire  $\frac{e_0}{2} = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  et où les  $e_i$  sont des vecteurs de la base. Mais alors  $(2\lambda_0 - 1)e_0 + \dots + 2\lambda_n e_n = 0$  ce qui implique (puisque les coefficients de cette combinaison linéaire sont tous entiers) que  $2\lambda_0 - 1 = 0$ , ce qui est impossible dans  $\mathbb{Z}$ .

☞ **2 Définition.** Un module  $M$  sur un anneau  $\Lambda$  est dit « libre », s'il possède au moins une base.

Une application  $f : M \rightarrow N$  entre deux  $\Lambda$ -modules (à gauche) est dite « linéaire » (ou «  $\Lambda$ -linéaire ») si

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et tous  $x, y \in M$ . On a clairement une catégorie  $\Lambda\text{-Mod}$  des  $\Lambda$ -modules à gauche et applications  $\Lambda$ -linéaires.

Le produit cartésien  $M \times N$  de deux  $\Lambda$ -modules est un  $\Lambda$ -module avec les opérations  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$  et  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ . Les projections canoniques  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  en font un produit dans la catégorie  $\Lambda\text{-Mod}$ , et les flèches  $x \mapsto (x, 0)$  et  $y \mapsto (0, y)$  en font une somme. Ainsi,  $M \times N$  est à la fois le produit et la somme de  $M$  et  $N$ . On le note généralement  $M \oplus N$  et on l'appelle « somme directe » de  $M$  et  $N$ .

Comme la somme directe ne saurait être distributive sur elle même, le foncteur  $X \mapsto X \oplus N$  ne peut pas avoir d'adjoint à droite. En particulier, il n'est pas l'adjoint à gauche du foncteur

$Y \mapsto \text{Hom}(N, Y)$ . On construira plus loin l'adjoint à gauche de ce dernier foncteur.

### 3 Suites exactes.

☞ **3 Définition.** Une suite d'applications linéaires entre modules (par exemple à gauche) sur un anneau  $\Lambda$  :

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

(où  $n \in \mathbb{Z}$ ) est dite « exacte en  $M_n$  » si  $\text{Im}(f_{n+1}) = \text{Ker}(f_n)$ . Elle est appelée une « suite exacte » si elle est exacte en  $M_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

(où les modules non représentés sont tous nuls) est appelée une « suite exacte courte ».

☞ **4 Exemple.** Un exemple fondamental de suite exacte courte est obtenu en prenant un module  $M$  et un sous-module  $N$  de  $M$ . On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

où  $i$  est l'inclusion canonique de  $N$  dans  $M$  et  $p$  la projection canonique de  $M$  sur le quotient  $\frac{M}{N}$ . L'exactitude en  $N$  signifie que l'image de la flèche nulle  $0 \rightarrow N$ , c'est-à-dire  $0$  est le noyau de  $i$ . C'est équivalent à dire que  $i$  est injectif. L'exactitude en  $M$  signifie que l'image de  $i$ , qui est  $N$ , est le noyau de  $p$ . Enfin l'exactitude en  $\frac{M}{N}$  signifie que l'image de  $p$  est le noyau de la flèche nulle  $\frac{M}{N} \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $\frac{M}{N}$ , autrement-dit que  $p$  est surjectif.

On remarquera en particulier les deux suites exactes courtes (de  $\mathbb{Z}$ -modules)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & x \longmapsto & & 2x & & & & \\ & & & & x \longmapsto & & x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & x \longmapsto & & (x, 0) & & & & \\ & & & & (x, y) \longmapsto & & y & & \end{array}$$

qui montrent que dans une suite exacte courte le module du milieu n'est pas déterminé, ne serait-ce qu'à isomorphisme près, par les deux autres.

☞ **5 Lemme.** (Lemme des cinq) Soit un diagramme de modules et applications linéaires

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & M_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N_3 & \xrightarrow{\beta_3} & N_4 & \xrightarrow{\beta_4} & N_5 \end{array}$$

dont les carrés sont commutatifs, dont les lignes sont exactes, et où  $f_1, f_2, f_4$  et  $f_5$  sont des isomorphismes. Alors  $f_3$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* La technique à employer est connue sous le nom de « diagram chasing », c'est-à-dire « chasse dans le diagramme ». Pour montrer que  $f_3$  est surjective, on déclare un élément  $y_3 \in N_3$  et en parcourant le diagramme on construit de proche en proche des éléments dans les différents modules, jusqu'à obtenir un élément  $x_3 \in M_3$  tel que  $f_3(x_3) = y_3$ . De même pour montrer que  $f_3$  est injective, on déclare un  $x_3 \in M_3$  tel que  $f_3(x_3) = 0$  et en parcourant le diagramme, on arrive à construire un élément  $x_1 \in M_1$  tel que  $\alpha_2(\alpha_1(x_1)) = x_3$ , ce qui prouve que  $x_3 = 0$  par exactitude de la ligne supérieure en  $M_2$ .

Ce genre de démonstration est mieux illustré par deux petites « bandes dessinées » qu'on trouvera ci-dessous que par un texte à la manière usuelle. Le lecteur vérifiera qu'à chaque étape les éléments représentés peuvent effectivement être construits.

Surjectivité de  $f_3$  :

①

$$y_3 \mapsto y_4$$

⑥

$$y_3 - y'_3 \mapsto 0$$

②

$$\begin{array}{c} x_4 \\ \downarrow \simeq \\ y_3 \mapsto y_4 \end{array}$$

⑦

$$y_2 \mapsto y_3 - y'_3 \mapsto 0$$

③

$$\begin{array}{ccccc} & x_4 & \mapsto & x_5 & \\ & \downarrow & & \downarrow \simeq & \\ y_3 & \mapsto & y_4 & \mapsto & 0 \end{array}$$

⑧

$$\begin{array}{ccc} x_2 & \mapsto & x_3'' \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \\ y_2 & \mapsto & y_3 - y'_3 \mapsto 0 \end{array}$$

④

$$\begin{array}{ccc} x'_3 & \mapsto & x_4 \mapsto 0 \\ & \downarrow & \\ y_3 & \mapsto & y_4 \end{array}$$

⑨

$$\begin{array}{c} x_3'' + x'_3 \\ \downarrow \\ y_3 - y'_3 + y'_3 \end{array}$$

⑤

$$\begin{array}{ccc} x'_3 & \mapsto & x_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y'_3 & \mapsto & y_4 \end{array}$$

⑩

$$\begin{array}{c} x_3'' + x'_3 \\ \downarrow \\ y_3 \end{array}$$

Injectivité de  $f_3$  :

$$\begin{array}{ll}
 \textcircled{1} & \begin{array}{ccc} x_3 \mapsto x_4 & & \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ 0 \mapsto 0 & & \end{array} & \textcircled{4} & \begin{array}{ccc} x_1 \mapsto x'_2 & & \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \\ y_1 \mapsto y_2 \mapsto 0 & & \end{array} \\
 \textcircled{2} & \begin{array}{ccc} x_2 \mapsto x_3 \mapsto 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_2 \mapsto 0 & & \end{array} & \textcircled{5} & \begin{array}{ccc} x_2 - x'_2 & & \\ \downarrow \simeq & & \\ 0 & & \end{array} \\
 \textcircled{3} & \begin{array}{ccc} x_2 \mapsto x_3 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_1 \mapsto y_2 \mapsto 0 & & \end{array} & \textcircled{6} & x_1 \mapsto x'_2 = x_2 \mapsto x_3
 \end{array}$$

□

**6 Remarque.** Le lemme des cinq montre que la flèche en pointillés dans le diagramme (censé être commutatif et dont les lignes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow \text{pointillés} & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

n'existe pas (pas plus qu'en sens inverse). En effet, si une telle flèche existait, elle devrait être un isomorphisme, ce qui est impossible.

**Exercice 2.** (Lemme hexagonal) Soit le diagramme commutatif d'applications  $\Lambda$ -linéaires

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \swarrow \alpha & \downarrow m & \searrow \alpha' & \\
 B & & F & & C \\
 \uparrow k & \swarrow j' & & \searrow j & \uparrow k' \\
 D & & F & & E \\
 & \swarrow i & \downarrow n & \searrow i' & \\
 & & G & & 
 \end{array}$$

où  $k$  et  $k'$  sont des isomorphismes, et où  $\text{Ker}(j) = \text{Im}(i)$  et  $\text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$ . Montrer que  $nm = \beta k^{-1} \alpha + \beta' k'^{-1} \alpha'$ .

☞ **Exercice 3.** (Lemme des neuf) Soit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & C_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dont les colonnes sont exactes. Montrer que si deux des lignes sont exactes, il en est de même de la troisième.

## 4 Produit tensoriel de modules.

Soient  $M$  et  $N$  deux modules sur un anneau commutatif  $\Lambda$ . Parmi toutes les applications bilinéaires  $f : M \times N \rightarrow P$  de source  $M \times N$ , il y en a une qui est universelle, en ce sens que toute application bilinéaire de source  $M \times N$  est d'une manière unique la composition de cette application bilinéaire universelle avec une application linéaire. Ceci permet d'une certaine façon de se débarrasser des applications bilinéaires au profit des applications linéaires. Une autre façon de voir les choses est de dire que la complexité supplémentaire qu'apporte la bilinéarité par rapport à la linéarité a été transférée des applications vers les modules. En réalité, ces quelques motivations sont bien insuffisantes à décrire les nombreux usages qu'on peut faire du produit tensoriel.

Plus précisément, pour tous  $\Lambda$ -modules  $M$  et  $N$ , il existe une application  $\Lambda$ -bilinéaire qu'on note

$$M \times N \xrightarrow{\otimes} M \otimes N$$

telle que pour toute application  $\Lambda$ -bilinéaire  $f : M \times N \rightarrow P$  de source  $M \times N$ , il existe une unique application  $\Lambda$ -linéaire  $\varphi : M \otimes N \rightarrow P$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 M \times N & \xrightarrow{\otimes} & M \otimes N \\
 & \searrow f & \swarrow \varphi \\
 & P &
 \end{array}$$

soit commutatif. Le  $\Lambda$ -module  $M \otimes N$  est appelé le « produit tensoriel de  $M$  et  $N$  », et si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $M$  et  $N$  respectivement, l'élément  $x \otimes y$  de  $M \otimes N$  est appelé le « produit

tensoriel de  $x$  et  $y$  ». Un élément de la forme  $x \otimes y$  est appelé un « tenseur ». S'il est besoin de le préciser, le module  $M \otimes N$  peut être noté  $M \otimes_{\Lambda} N$ . En particulier, tout  $\Lambda$ -module étant aussi un  $\mathbb{Z}$ -module (car c'est un groupe additif commutatif), la notation  $M \otimes N$  peut parfois être ambiguë. On n'hésitera donc pas à écrire soit  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ , soit  $M \otimes_{\Lambda} N$ .

On peut donc remplacer l'expression  $f(x, y)$  par l'expression  $\varphi(x \otimes y)$ , où  $\varphi$  a l'avantage sur  $f$  d'être linéaire. Bien sûr, comme l'application  $\otimes$  est bilinéaire, on a les égalités :

$$\begin{aligned} a(x \otimes y) &= (ax) \otimes y = x \otimes (ay) \\ (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y' \end{aligned} \tag{1}$$

pour tous  $a \in \Lambda$ ,  $x, x' \in M$  et  $y, y' \in N$ , qu'on utilisera constamment dans les calculs faisant intervenir des produits tensoriels.

Si on considère la catégorie dont les objets sont les couples  $(P, f)$ , où  $P$  est un  $\Lambda$ -module et  $f : M \times N \rightarrow P$  une application bilinéaire, et dont les flèches de  $(P, f)$  vers  $(Q, g)$  sont les applications linéaires  $\varphi : P \rightarrow Q$  telles que  $\varphi \circ f = g$ , on voit que  $M \times N \xrightarrow{\otimes} M \otimes N$  est juste un objet initial dans cette catégorie. Le produit tensoriel de deux modules (s'il existe) est donc bien défini à isomorphisme canonique près.

**7 Lemme.** *Soit  $\Lambda$  un anneau commutatif. Soient  $M$  et  $N$  des  $\Lambda$ -modules. Alors le produit tensoriel  $M \otimes_{\Lambda} N$  existe, et l'image de l'application  $M \times N \xrightarrow{\otimes} M \otimes_{\Lambda} N$  engendre  $M \otimes_{\Lambda} N$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  le  $\Lambda$ -module libre sur l'ensemble  $M \times N$ . Chaque couple  $(x, y)$  de  $M \times N$  est donc un vecteur de base de  $F$ . Soit  $G$  le sous-module de  $F$  engendré par les éléments :

$$\begin{aligned} a(x, y) - (ax, y) \\ a(x, y) - (x, ay) \\ (x + x', y) - (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y') \end{aligned}$$

pour tous  $a \in \Lambda$ ,  $x, x' \in M$  et  $y, y' \in N$ . On pose  $M \otimes_{\Lambda} N = F/G$ , et la classe modulo  $G$  de  $(x, y)$  dans le quotient  $F/G$  sera notée  $x \otimes y$ , ce qui fournit l'application  $(x, y) \mapsto x \otimes y$  de  $M \times N$  vers  $M \otimes_{\Lambda} N$ . Il y a juste à vérifier que ce qu'on vient de construire est bien une solution du problème universel définissant le produit tensoriel.

L'application  $(x, y) \mapsto x \otimes y$  est bilinéaire par définition même de  $G$ . En fait,  $G$  est exactement le plus petit sous-module de  $F$  par lequel il faut diviser  $F$  pour rendre cette application bilinéaire. Maintenant, soit  $f : M \times N \rightarrow P$  une application bilinéaire. Comme  $F$  est libre sur la famille des  $(x, y)$  (indexée par  $M \times N$ ), on a une unique application linéaire  $\psi : F \rightarrow P$  telle que  $\psi((x, y)) = f(x, y)$ . Comme  $f$  est bilinéaire,  $\psi$  envoie tout élément de  $G$  sur 0, et  $\psi$  passe donc au quotient en une application linéaire  $\varphi : F/G = M \otimes_{\Lambda} N \rightarrow P$ . Il est clair qu'on a  $\varphi(x \otimes y) = f(x, y)$ . L'unicité de  $\varphi$  résulte du fait que les tenseurs de la forme  $x \otimes y$  engendrent  $M \otimes_{\Lambda} N$ .  $\square$

Les tenseurs de la forme  $x \otimes y$  engendrent donc  $M \otimes_{\Lambda} N$ , mais ne forment pas un système libre, puisque qu'ils sont soumis aux relations (1). Tout élément de  $M \otimes_{\Lambda} N$  s'écrit donc comme une

combinaison linéaire finie de tenseurs, ou ce qui revient au même, au vu des premières relations (1), comme une somme de tenseurs, mais cette écriture n'est pas unique.

Soient deux  $\Lambda$ -modules  $M$  et  $N$ . Il est facile de vérifier que l'application linéaire

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \text{Hom}(N, M \otimes N) \\ x &\longmapsto (y \mapsto x \otimes y) \end{aligned}$$

est universelle de  $M$  vers le foncteur  $X \mapsto \text{Hom}(N, X)$ . En conséquence, le foncteur  $M \mapsto M \otimes N$  est adjoint à gauche du précédent et commute donc avec toutes les colimites. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$\left( \bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes N \simeq \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N)$$

Comme l'application  $(x, y) \mapsto y \otimes x$  de  $M \times N$  vers  $N \otimes M$  est bilinéaire, l'application  $T = (x \otimes y \mapsto y \otimes x)$  de  $M \otimes N$  vers  $N \otimes M$  est bien définie, et est un isomorphisme d'inverse  $y \otimes x \mapsto x \otimes y$ . Le produit tensoriel est donc commutatif à isomorphisme canonique près.

Comme  $M \mapsto M \otimes N$  est un foncteur, on a, pour toute flèche  $f : M \rightarrow M'$  une flèche  $f \otimes 1_N : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N$ . Par symétrie, on a aussi, pour toute flèche  $g : N \rightarrow N'$ , une flèche  $1_M \otimes g : M \otimes N \rightarrow M \otimes N'$ . En composant les deux, on obtient une flèche  $f \otimes g : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$ . Il est facile de vérifier qu'on a  $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ , pour tout  $x \in M$  et tout  $y \in N$ .

**Exercice 4.** Montrer que si les modules  $M$  et  $N$  sont libres, avec pour bases respectives  $(e_i)_{i \in I}$  et  $(f_j)_{j \in J}$ , alors  $M \otimes_\Lambda N$  est libre avec pour base  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ .

**Exercice 5.** Montrer que le produit tensoriel des  $\mathbb{Z}$ -modules  $\mathbb{Z}/n$  et  $\mathbb{Z}/m$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/d$ , où  $d$  est le PGCD de  $n$  et  $m$ . En particulier,  $\mathbb{Z}/p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q = 0$  si  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

**Exercice 6.** Montrer que

$$(f \otimes g) \circ (h \otimes k) = (f \circ h) \otimes (g \circ k)$$

(quand ces compositions sont définies).

**Exercice 7.** Donner un exemple d'application linéaire injective  $f : M \rightarrow N$  et de module  $P$ , tels que  $f \otimes 1 : M \otimes_\Lambda P \rightarrow N \otimes_\Lambda P$  ne soit pas injective.

**8 Lemme.** Soit

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $\Lambda$ -modules. Alors la suite :

$$A \otimes_\Lambda M \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes_\Lambda M \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes_\Lambda M \longrightarrow 0$$

est exacte.

*Démonstration.* On peut remarquer que l'exactitude de la suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

équivalent au fait que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow 0 & \nearrow \\ & & C \end{array} \xrightarrow{g}$$

est un diagramme de coégaliseur (cocône colimite sur un diagramme fait de deux flèches parallèles). Comme le foncteur  $A \mapsto A \otimes_{\Lambda} M$  est un adjoint à gauche, il préserve les coégaliseurs, ce qui donne la suite exacte de l'énoncé.  $\square$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 14 mars 2012.

## 1 Algèbres associatives graduées.

Une «  $\Lambda$ -algèbre associative » est un  $\Lambda$ -module  $A$  muni d'une application linéaire  $\mu : A \otimes_{\Lambda} A \rightarrow A$  (appelée « multiplication »), telle que  $\mu(\mu \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$  (associativité) :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \mu} & A \otimes A \\ \mu \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

L'algèbre  $A$  est dite « unitaire », si elle est munie d'une application linéaire  $\eta : \Lambda \rightarrow A$  telle que  $\mu(1 \otimes \eta) = \mu(\eta \otimes 1) = 1$ .

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \mu} & A \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu & \swarrow 1 & \\ & & A & & \end{array}$$

(où on a identifié  $\Lambda \otimes A$  et  $A \otimes \Lambda$  à  $A$ ). L'image de  $x \otimes y$  par  $\mu$  sera notée  $xy$  et appelée le « produit de  $x$  par  $y$  », et l'image de  $1 \in \Lambda$  par  $\eta$  sera notée  $1$ , et appelée l'« unité » de l'algèbre  $A$ . L'associativité s'écrit donc  $(xy)z = x(yz)$  (pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $A$ ).

L'utilité d'écrire les axiomes des algèbres sous forme de diagrammes (et surtout sans utiliser d'éléments) est qu'en renversant le sens des flèches on a immédiatement la notion duale de «  $\Lambda$ -coalgèbre associative », <sup>(1)</sup> tout aussi utile en topologie algébrique que celle de  $\Lambda$ -algèbre associative.

Un « morphisme » d'algèbres  $f : A \rightarrow B$  est une application linéaire  $f : A \rightarrow B$  qui préserve les produits, autrement-dit telle que  $f\mu = \mu(f \otimes f)$ , ce qui peut encore s'écrire  $f(xy) = f(x)f(y)$ . Un morphisme d'algèbres unitaires doit de plus vérifier  $f\eta = \eta$ , c'est-à-dire  $f(1) = 1$ .

Pour les besoins des algèbres graduées, on considère un « semi-anneau commutatif »  $I$ , c'est-à-dire un ensemble muni de deux structures de monoïdes, l'une additive (et commutative), l'autre

---

1. La mode actuelle est de dire « cogèbre » au lieu de « coalgèbre ».

multiplicative (et également commutative), la multiplication étant distributive sur l'addition. Un semi-anneau typique est  $\mathbb{N}$ . Bien sûr, tout anneau est un semi-anneau. Dans la suite nous utiliserons pour les graduations les semi-anneaux  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2$ .

Une  $\Lambda$ -algèbre  $A$  est dite «  $I$ -graduée » (sur le semi-anneau  $I$ ), si  $A$  est un module  $I$ -gradué  $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$  et si  $\mu(A_i \otimes A_j) \subset A_{i+j}$  (pour tous  $i$  et  $j$ ). La condition précédente dit juste que le degré d'un produit de deux éléments homogènes est la somme de leurs degrés (comme dans une algèbre de polynômes). Si l'algèbre est unitaire, l'unité sera supposée homogène de degré 0. Pour le moment, la structure multiplicative de  $I$  n'intervient pas.

Un morphisme d'algèbres  $I$ -graduées  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres qui respecte le degré, i.e. tel que  $f(A_i) \subset B_i$ . On notera  $\Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Alg}$  la catégorie des  $\Lambda$ -algèbres  $I$ -graduées. On a clairement un « foncteur d'oubli »  $U : \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Mod}$  des algèbres graduées vers les modules gradués qui consiste à oublier la structure d'algèbre.

**1 Lemme.** *Le foncteur d'oubli  $U : \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Mod}$  a un adjoint à gauche, qui sera noté  $T$ . L'algèbre  $T(M)$  est appelée l'« algèbre tensorielle de  $M$  ».*

*Démonstration.* Soit  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  un  $\Lambda$ -module  $I$ -gradué. On va construire une flèche universelle de  $M$  vers  $U$ . Le produit tensoriel  $M \otimes \cdots \otimes M$  de  $n$  exemplaires de  $M$  (qui est lui aussi  $I$ -gradué) sera noté  $M^{\otimes n}$ . Remarquer que  $M^{\otimes 0}$  doit être isomorphe à l'élément neutre du produit tensoriel, c'est-à-dire à  $\Lambda$ , avec tous ses éléments homogènes de degré 0. On pose donc  $M^{\otimes 0} = (M^{\otimes 0})_0 = \Lambda$ . On pose de plus

$$T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\otimes n}$$

Un élément de  $T(M)$  est une somme de tenseurs de la forme  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  (dans laquelle  $n$  peut varier), et où chaque  $x_i$  est un élément de  $M$ . On peut supposer les  $x_i$  homogènes. Alors le tenseur  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  est un élément homogène de  $T(M)$  de degré  $|x_1| + \cdots + |x_n|$ . Par ailleurs, ce tenseur sera dit « de longueur  $n$  », et la définition même de  $T(M)$  montre que  $T(M)$  est un module  $\mathbb{N}$ -gradué par la notion de longueur.  $T(M)$  est donc « bigradué », et on prendra garde à ne pas confondre le degré avec la longueur.

On définit la multiplication  $\mu : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$  en posant

$$\mu(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q$$

Il est immédiat que  $\mu$  est bilinéaire, ce qui fait qu'on la notera désormais  $\mu : T(M) \otimes T(M) \rightarrow T(M)$ , et on a

$$\mu((x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q)) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q$$

$\mu$  clairement associatif. Ainsi,  $T(M)$  est une  $\Lambda$ -algèbre associative  $I$ -graduée. Son unité est l'unité de  $M^{\otimes 0} = \Lambda$ .  $T(M)$  n'est évidemment pas commutative (sauf dans des cas très particuliers), puisque  $\mu(x \otimes y)$ , qui n'est autre que  $x \otimes y$ , est généralement distinct de  $y \otimes x$ .

On définit  $\eta : M \rightarrow U(T(M))$  en posant  $\eta(x) = x$ . Plus précisément,  $\eta$  est l'inclusion canonique  $M^{\otimes 1}$  (qui est identique à  $M$ ) dans la somme  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\otimes n}$ . Soit  $A$  une algèbre associative  $I$ -graduée et soit  $f : M \rightarrow U(A)$  un morphisme de modules gradués. On définit  $\bar{f} : T(M) \rightarrow A$  en posant

$$\bar{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$$

(et  $\bar{f}(1) = 1$ ), ce qui est bien sûr la seule façon de faire pour que  $U(\bar{f}) \circ \eta = f$  et que  $\bar{f}$  soit un morphisme d'algèbres. Comme l'expression  $f(x_1) \cdots f(x_n)$  est linéaire par rapport à chaque  $x_i$ ,  $\bar{f}$  est bien définie. C'est trivialement un morphisme d'algèbres graduées.  $\square$

**Exemple 2.** Prenons  $\Lambda = \mathbb{R}$ , et soit  $M$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel gradué (de dimension 1) ayant pour base une famille constituée d'un seul vecteur  $X$ . Alors  $T(M)$  est juste l'algèbre de polynômes  $\mathbb{R}[X]$  (peu importe le degré de  $x$  dans  $M$ , en supposant qu'il soit homogène), le degré des polynômes étant ici la longueur des tenseurs. Par exemple, le polynôme  $X^3$  est le tenseur  $X \otimes X \otimes X$ .

Si on suppose maintenant que  $(X, Y)$  est une base de  $M$ ,  $T(M)$  n'est pas l'algèbre de polynômes à deux variables  $\mathbb{R}[X, Y]$ , mais une version non commutative de cette algèbre (et donc beaucoup plus compliquée). Autrement-dit, dans un monôme, les lettres ne sont pas permutable. Par exemple, les monômes  $XY$  et  $YX$  (qui sont en fait  $X \otimes Y$  et  $Y \otimes X$ ) sont distincts.

On va maintenant utiliser la structure multiplicative de  $I$ , et pour cela on va supposer qu'on a un morphisme de monoïdes du monoïde additif de  $I$  vers le groupe  $O(1) = \{+1, -1\}$ . Ce morphisme sera noté  $i \mapsto (-1)^i$ . On a donc  $(-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j$  et  $(-1)^0 = +1$ . Dans le cas des semi-anneaux  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2$ , ce morphisme est celui qui est habituellement noté  $i \mapsto (-1)^i$ . Remarquer que dans le cas de  $\mathbb{Z}/2$ , il est bien défini.<sup>(2)</sup> Ceci donne un sens à la notion de « pair » et d'« impair ». En effet,  $i$  est pair si  $(-1)^i = +1$  et impair dans le cas contraire. on dira que  $M$  est « concentré en degrés pairs (resp. impairs) » si  $M_i = 0$  pour tout  $i$  impair (resp. pair).

Si  $A$  et  $B$  sont deux  $\Lambda$ -algèbres  $I$ -graduées, le produit tensoriel  $A \otimes B$  est lui aussi muni d'une structure de  $\Lambda$ -algèbre  $I$ -graduée. La graduation est donnée par

$$(A \otimes B)_i = \bigoplus_{j+k=i} A_j \otimes B_k$$

et le produit (pour les éléments homogènes) par la formule

$$(x \otimes y)(u \otimes v) = (-1)^{|y||u|} xu \otimes yv$$

(voir la convention de Koszul dans la leçon du 12 mars).

Si on note  $T : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  l'application (de degré 0) définie par  $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ , on voit que la multiplication de  $A \otimes B$  est donnée par

$$\mu = (\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)$$

---

2. Alors qu'il ne l'est pas par exemple pour  $\mathbb{Z}/3$ .

Le lecteur vérifiera facilement que  $A \otimes B$  est bien une  $\Lambda$ -algèbre associative  $I$ -graduée.<sup>(3)</sup>

## 2 Algèbres graduées commutatives.

**3 Définition.** Une  $\Lambda$ -algèbre (unitaire et associative)  $I$ -graduée  $A$  est dite commutative, si  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  est un morphisme d'algèbres.

Dire que  $A$  est commutative revient donc à dire que

$$\mu(\mu \otimes \mu) = \mu(\mu \otimes \mu)(1 \otimes T \otimes 1)$$

En composant à droite avec  $\eta \otimes 1 \otimes 1 \otimes \eta$ , on obtient  $\mu = \mu T$ . En appliquant cela à un tenseur (homogène)  $x \otimes y$  de  $A \otimes A$ , on obtient  $xy = (-1)^{|x||y|}yx$ , c'est-à-dire la notion usuelle de commutativité avec juste la variation de signe qui la rend conforme à la convention de Koszul.

Réciproquement, une algèbre associative graduée qui vérifie l'égalité  $xy = (-1)^{|x||y|}yx$  pour tous éléments homogènes  $x$  et  $y$ , est commutative au sens de la définition ci-dessus.<sup>(4)</sup>

**4 Lemme.** Soient  $A$  et  $B$  des  $\Lambda$ -algèbres (associatives et unitaires)  $I$ -graduées commutatives. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & A \otimes B \xleftarrow{i_2} B \\ x & \longmapsto & x \otimes 1 \\ & & 1 \otimes y \longleftarrow y \end{array}$$

est un cocône colimite dans la catégorie des  $\Lambda$ -algèbres (associatives et unitaires)  $I$ -graduées commutatives. Autrement-dit, le produit tensoriel est la somme dans cette catégorie.

*Démonstration.* Il est d'abord immédiat que  $i_1$  et  $i_2$  sont des morphismes d'algèbres. Soient  $f : A \rightarrow X$  et  $g : B \rightarrow X$  deux morphismes d'algèbres graduées. On définit  $[f, g] : A \otimes B \rightarrow X$  en posant  $[f, g](x \otimes y) = f(x)g(y)$ , ce qui définit bien  $[f, g]$  comme application linéaire, puisque l'expression  $f(x)g(y)$  est bilinéaire en  $x$  et  $y$ . De plus c'est un morphisme d'algèbres, puisque (se rappeler que  $f$  et  $g$  sont de degré 0)

$$\begin{aligned} [f, g]((x \otimes y)(u \otimes v)) &= (-1)^{|y||u|} [f, g](xu \otimes yv) \\ &= (-1)^{|y||u|} f(xu)g(yv) \\ &= (-1)^{|y||u|} f(x)f(u)g(y)g(v) \\ &= f(x)g(y)f(u)g(v) \\ &= [f, g](x \otimes y)[f, g](u \otimes v) \end{aligned}$$

---

3. Les calculs sont essentiellement les mêmes que ceux qui prouvent qu'un produit de monoïdes (non nécessairement commutatifs) est un monoïde.

4. La raison de préférer la définition 3 à la définition traditionnelle est qu'elle est de portée plus générale. Elle vaut en effet pour de nombreuses sortes d'algèbres plus générales que celles que nous utilisons ici. De plus, il semble que cette propriété soit la raison d'être de la commutativité : un produit commutatif est un produit qui est un morphisme pour lui-même. C'est ce mécanisme qui a permis par exemple à H. Cartan en 1955 d'itérer la bar-construction pour le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

On a  $[f, g](x \otimes 1) = f(x)$ , i.e.  $[f, g] \circ i_1 = f$ , et de même  $[f, g] \circ i_2 = g$ . Enfin, l'unicité de  $[f, g]$  est claire, puisque les  $x \otimes y = (x \otimes 1)(1 \otimes y)$  engendrent  $A \otimes B$ .  $\square$

On aura noté le caractère indispensable de la commutativité dans cette démonstration.

Le foncteur  $U : \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Mod}$  vu plus haut d'oubli de la structure d'algèbre se restreint aux algèbres commutatives.

**5 Lemme.** *La restriction  $U'$  de  $U : \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \Lambda\text{-}I\text{-}\mathbf{Mod}$  à la sous-catégorie (pleine) des algèbres commutatives à un adjoint à gauche.*

*Démonstration.* Un module gradué  $M$  étant donné, il s'agit de construire une flèche universelle de  $M$  vers  $U'$ . Soit  $T(M)$  l'algèbre tensorielle de  $M$ , et soit  $\eta : M \rightarrow U(T(M))$  la flèche universelle correspondante (lemme 1 (page 2)). Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal bilatère de  $T(M)$  engendré par les tenseurs de la forme  $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$  (où  $x$  et  $y$  sont bien sûr des éléments homogènes). L'algèbre quotient  $C(M) = T(M)/\mathcal{I}$  est commutative. On définit  $\eta' : M \rightarrow U'(C(M))$  en composant  $\eta$  avec la (flèche sous-jacente à la) projection canonique de  $T(M)$  sur  $C(M)$ . Si  $f : M \rightarrow U'(X)$  est un morphisme de  $M$  vers le module gradué sous-jacent à une algèbre graduée commutative  $X$ , il existe un unique morphisme d'algèbres  $\varphi : T(M) \rightarrow X$  tel que  $U(\varphi) \circ \eta = f$ , et  $\mathcal{I}$  est inclus dans le noyau de ce morphisme qui passe donc au quotient pour donner  $\varphi' : C(M) \rightarrow X$ , qui a clairement les propriétés requises.  $\square$

L'algèbre  $C(M)$  est appelée l'« algèbre commutative graduée libre sur  $M$  ». Dans le cas où  $M$  est concentrée en degrés pairs,  $C(M)$  est appelée l'« algèbre symétrique de  $M$  », et notée  $S^*(M)$ . Dans le cas où  $M$  est concentrée en degrés impairs,  $C(M)$  est appelée l'« algèbre extérieure de  $M$  », et notée  $\bigwedge^*(M)$ . Noter que l'idéal  $\mathcal{I}$  de la démonstration ci-dessus étant engendré par des éléments homogènes de longueur homogène, la notion de longueur conserve un sens dans  $C(M)$ , qui est donc bigraduée comme  $T(M)$ .

On vérifie facilement que les lemmes 4 et 5 restent valables si on restreint les catégories de modules et d'algèbres gradués aux objets concentrés en degrés pairs (resp. impairs).

**6 Exemple.** Si  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base d'un module  $M$  concentré en degrés pairs,  $S^*(M)$  n'est autre que l'algèbre des polynômes (commutative) en  $X_1, \dots, X_n$  à coefficients dans  $\Lambda$ . Le degré des polynômes au sens usuel est ici la longueur.

### 3 Bonus : La théorie du déterminant.

Intéressons-nous maintenant à l'algèbre extérieure. On suppose ici que  $\Lambda$  est intègre et que 2 est distinct de 0 dans  $\Lambda$ . Considérons d'abord l'algèbre  $\bigwedge^*(\Lambda)$ , c'est-à-dire l'algèbre extérieure de  $\Lambda$  vu comme un module sur lui-même, et concentré dans un degré impair quelconque  $i$ . On a clairement  $\bigwedge^0(\Lambda) = \bigwedge^1(\Lambda) = \Lambda$ , et pour  $p \geq 2$ , on a  $\bigwedge^p(\Lambda) = 0$ . En effet, tout élément de

$\bigwedge^p(\Lambda)$  est une combinaison linéaire de produits de la forme  $e \wedge \cdots \wedge e$  ( $p$  facteurs), où  $e$  est en fait  $1 \in \Lambda$ , qu'on note  $e$  pour éviter plus loin toute confusion avec l'unité de l'algèbre  $\bigwedge^*(\Lambda)$ . Or, comme  $e$  est de degré impair, on a  $e \wedge e = -e \wedge e$ . Comme  $\Lambda$  est intègre et  $2 \neq 0$  dans  $\Lambda$ , on voit que  $e \wedge e = 0$ . L'algèbre extérieure de  $\Lambda$  se résume donc à  $\bigwedge_0(\Lambda) \oplus \bigwedge_1(\Lambda)$ , c'est-à-dire un module libre sur deux générateurs,  $1$  (l'unité de l'algèbre) de longueur  $0$  (et de degré  $0$ ) et  $e$  de longueur  $1$  (et de degré impair  $i$ ), qui est tel que  $e \wedge e = 0$ . L'algèbre  $\bigwedge^*(\Lambda)$  est appelée l'« algèbre extérieure libre sur un générateur de degré (impair)  $i$  » (qui est bien sûr  $e$ ).

Comme adjoint à gauche, le foncteur  $\bigwedge^*$  préserve les colimites et en particulier les sommes. Or, dans la catégorie  $\mathcal{C}$  des algèbres graduées commutatives (unitaires), c'est le produit tensoriel qui est la somme. Il en résulte que  $\bigwedge^*(\Lambda^n) \simeq \bigwedge^*(\Lambda) \otimes \cdots \otimes \bigwedge^*(\Lambda)$  ( $n$  facteurs), puisque  $\Lambda^n$  est la somme de  $n$  exemplaires du module gradué  $\Lambda$ . Bien sûr, il en résulte que l'algèbre extérieure sur un module ayant une base à  $n$  éléments est isomorphe au produit tensoriel de  $n$  exemplaires de l'algèbre extérieure libre sur un générateur. Comme l'algèbre extérieure libre sur un générateur a une base à deux éléments, l'algèbre extérieure sur un module ayant une base à  $n$  éléments a une base à  $2^n$  éléments. Plus précisément, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $M$ , la famille des  $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$  avec  $0 \leq p \leq n$  et  $e_{i_1} < \cdots < e_{i_p}$  est une base de  $\bigwedge^*(M)$ . On voit même que le nombre d'éléments de cette base de  $\bigwedge^*(M)$  qui sont de longueur  $p$  est exactement  $C_n^p$  (le nombre de parties à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments). Autrement-dit,  $\bigwedge^p(M)$  est isomorphe à  $\Lambda^{C_n^p}$ .

Le cas particulier de  $\bigwedge^n(M)$  où  $M$  a une base à  $n$  éléments est intéressant. En effet, ce module a une base à  $C_n^n$  éléments, autrement-dit, il est isomorphe à  $\Lambda$ . Si  $f : M \rightarrow M$  est un endomorphisme de  $M$ , on a un morphisme d'algèbres  $\bigwedge^*(f) : \bigwedge^*(M) \rightarrow \bigwedge^*(M)$  et en particulier une application linéaire  $\bigwedge^n(f) : \bigwedge^n(M) \rightarrow \bigwedge^n(M)$ . Soit un isomorphisme  $\varphi : \bigwedge^n(M) \rightarrow \Lambda$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^n(M) & \xrightarrow{\bigwedge^n(f)} & \bigwedge^n(M) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Lambda & \xrightarrow{\bar{f}} & \Lambda \end{array}$$

dans lequel  $\bar{f}$  est bien déterminée. Si  $\psi : \Lambda \rightarrow \Lambda$  est un autre isomorphisme, on a aussi le

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\bar{f}} & \Lambda \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \Lambda & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Lambda \end{array}$$

Posons  $u = \psi(1)$ . Comme  $\psi$  est surjectif, il existe  $\lambda$  tel que  $\psi(\lambda) = 1$ . Mais  $\psi(\lambda) = \lambda\psi(1) = \lambda u$  et  $u$  est donc inversible. Par ailleurs  $\bar{f}(1)u = \bar{f}(1)\psi(1) = \psi(\bar{f}(1)) = \tilde{f}(u) = u\tilde{f}(1)$ . Comme  $u$  est inversible, on obtient  $\bar{f}(1) = \tilde{f}(1)$ . En conséquence,  $\bar{f}(1)$  est indépendant du choix de  $\varphi$  et ne dépend donc que de  $f$  (et il ne dépend pas non plus du choix d'une base de  $M$ ).

☞ **7 Définition.** L'élément  $\bar{f}(1)$  de  $\Lambda$  défini ci-dessus est appelé le « déterminant de  $f$  », et noté  $\det(f)$ .

Le simple fait que  $\bigwedge^n$  soit un foncteur implique immédiatement que  $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$  et que  $\det(1_M) = 1$ . En pratique, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $M$ , le vecteur de base  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  de  $\bigwedge^n(M)$  est envoyé par  $f : M \rightarrow M$  sur  $f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)$ . Le déterminant de  $f$  est alors tel que

$$f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n) = \det(f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

Si la matrice  $A = (a_{i,j})$  a pour colonnes les coordonnées dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  des vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ , le développement du produit extérieur  $f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)$  va donner

$$\left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \right) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

La formule entre parenthèses donne donc  $\det(f)$  à partir de la matrice  $A$  (qui est bien sûr la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ).

☞ **Exercice 1.** Soit  $f : M \rightarrow M$  un endomorphisme d'un module de base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Montrer que la matrice de  $\bigwedge^n(f) : \bigwedge^n(M) \rightarrow \bigwedge^n(M)$  dans la base associée à  $\mathcal{B}$ , est la comatrice  $\tilde{A}$  de la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . En déduire la formule de la comatrice

$${}^t \tilde{A} A = \det(A) 1$$

Soit  $M$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps commutatif  $K$ , et soit  $f : M \rightarrow M$  un endomorphisme de  $M$ . Via cet endomorphisme,  $M$  est un  $K[X]$ -module (à gauche). En effet, pour tout  $x \in M$  et tout polynôme  $P(X)$ , l'expression  $P(f)(x)$  est  $K$ -bilinéaire en  $P(X)$  et  $x$ . On a donc une multiplication externe  $K[X] \otimes_K M \rightarrow M$ , qui vérifie les axiomes des modules, puisque  $(P(X)Q(X))x = (P(f) \circ Q(f))(x) = P(f)(Q(f)(x)) = P(X)(Q(X)x)$  et

$1x = 1(f)(x) = x$ . On notera  $X : K[X] \rightarrow K[X]$  la multiplication par le polynôme  $X$ . Les flèches

$$K[X] \otimes_K M \xrightarrow{1 \otimes f - X \otimes 1} K[X] \otimes_K M \xrightarrow{\psi} M$$

(où  $\psi$  est l'unique application  $K[X]$ -linéaire telle que  $\psi(1 \otimes x) = x$ ) sont  $K[X]$ -linéaires, et leur composition est nulle, car

$$\psi(1 \otimes f - X \otimes 1)(1 \otimes x) = \psi(1 \otimes f(x)) - \psi(X \otimes x) = f(x) - f(x)$$

Appliquons maintenant le foncteur  $\bigwedge^n$  (sur l'anneau  $K[X]$ ) à ces flèches. La première flèche devient

$$\bigwedge^n(K[X] \otimes_K M) \xrightarrow{\chi_f(X)} \bigwedge^n(K[X] \otimes_K M)$$

c'est-à-dire la multiplication par le polynôme caractéristique de  $f$  (par définition du polynôme caractéristique). Soient maintenant  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs de  $M$ . Le produit extérieur  $(1 \otimes x_1) \wedge \dots \wedge (1 \otimes x_n)$  est un élément de  $\bigwedge^n(K[X] \otimes_K M)$ , dont l'image par la flèche ci-dessus peut s'écrire  $(\chi_f(X) \otimes x_1) \wedge (1 \otimes x_2) \wedge \dots \wedge (1 \otimes x_n)$ . En appliquant  $\bigwedge^n(\psi)$  à cette dernière expression, on obtient l'égalité

$$\chi_f(f)(x_1) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = 0$$

Si  $\chi_f(f)(x_1)$  n'est pas nul, il suffit de choisir  $x_2, \dots, x_n$  de façon que  $\chi_f(f)(x_1), x_2, \dots, x_n$  soit une base de  $M$  pour obtenir une contradiction. On vient donc de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.<sup>(5)</sup>

---

5. Cette démonstration est une version correcte de la « démonstration » archiconnue et bien sûr incorrecte qui consiste à écrire  $\det(f - \lambda \text{Id})(f) = \det(f - f) = 0$ .

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 19 mars 2012.

## 1 Modules sur un anneau principal.

☞ **1 Lemme.** *Si l'anneau  $\Lambda$  est principal, tout sous-module d'un  $\Lambda$ -module libre (pas nécessairement de type fini) est libre et de rang inférieur ou égal. <sup>(1)</sup>*

Donnons tout de suite un contre-exemple simple dans le cas où  $\Lambda$  n'est pas principal. Prenons  $\Lambda = \mathbb{Z}/4$ . Cet anneau qui est commutatif et dont tous les idéaux (à savoir  $0$ ,  $\{0, 2\}$  et  $\mathbb{Z}/4$ ) sont principaux, n'est pourtant pas principal car il n'est pas intègre ( $2 \times 2 = 4 = 0$ ). L'idéal  $\{0, 2\}$  est un sous-module du module libre  $\mathbb{Z}/4$ , qui n'est bien sûr pas libre (toujours parce que  $2 \times 2 = 0$ , où le premier  $2$  est un scalaire et le deuxième un vecteur).

*Démonstration.* Soit  $L$  un  $\Lambda$ -module libre de base  $(e_i)_{i \in I}$ , et  $M$  un sous-module de  $L$ . Le théorème de Zermelo permet de supposer que  $I$  est bien ordonné. Notons  $L_i$  le sous-module de  $L$  engendré par les  $e_j$  tels que  $j \leq i$ . Pour tout  $i \in I$ , notons  $p_i : L \rightarrow \Lambda$  la forme linéaire qui envoie  $e_i$  sur  $1$  et  $e_j$  sur  $0$  pour  $j \neq i$  (autrement-dit,  $p_i(x)$  est la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ ).  $p_i(L_i \cap M)$  est alors un sous-module de  $\Lambda$ , c'est-à-dire un idéal de  $\Lambda$ . Il est donc de la forme  $\alpha_i \Lambda$  pour un certain  $\alpha_i \in \Lambda$ . On pose

$$J = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$$

Pour tout  $j \in J$ , soit  $v_j$  un vecteur de  $L_j \cap M$  tel que  $p_j(v_j) = \alpha_j$ . On va montrer que  $(v_j)_{j \in J}$  est une base de  $M$ .

Supposons qu'on ait  $0 = a_1 v_{j_1} + \dots + a_k v_{j_k}$  avec  $k \geq 1$ ,  $j_1 < \dots < j_k$  et  $a_1, \dots, a_k \in \Lambda - \{0\}$ . Alors  $a_k \alpha_{j_k} = p_{j_k}(a_k v_{j_k}) = 0$ , car  $p_{j_k}$  est nul sur  $L_j$  pour  $j < j_k$ . Comme  $\Lambda$  est intègre et  $\alpha_{j_k} \neq 0$ , on a  $a_k = 0$ , ce qui est absurde. Le système  $(v_j)_{j \in J}$  est donc libre.<sup>(2)</sup>

Soit  $P$  le sous-module de  $M$  engendré par  $(v_j)_{j \in J}$ . Comme la réunion des  $L_i$  ( $i \in I$ ) est  $L$ , si  $P \neq M$ , l'ensemble

$$X = \{i \in I \mid L_i \cap (M - P) \neq \emptyset\}$$

---

1. Autrement-dit, si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $L$ , et  $M$  un sous-module de  $L$ , il existe une base  $(v_j)_{j \in J}$  de  $M$ , où  $J$  est un sous-ensemble de  $I$ .

2. Remarquer que jusqu'ici le bon ordre sur  $I$  n'est pas indispensable. Il sera utilisé de manière essentielle plus loin.

est non vide. Or, dans un ensemble bien ordonné, toute partie non vide a un plus petit élément. Soit donc  $i_0$  le plus petit élément  $X$ , et soit  $x \in L_{i_0} \cap (M - P)$ .

Si  $p_{i_0}(x) = 0$ , alors  $x \in L_i \cap (M - P)$  pour un certain  $i < i_0$ , ce qui ne se peut pas. On a donc  $p_{i_0}(x) \neq 0$ , ce qui implique  $i_0 \in J$  (puisque  $x \in M$ ), et on a  $p_{i_0}(x) = \lambda \alpha_{i_0}$  avec  $\lambda \neq 0$ . Posons  $y = x - \lambda v_{i_0}$ . On a alors  $p_{i_0}(y) = p_{i_0}(x) - \lambda \alpha_{i_0} = 0$ . Il en résulte que  $y \in L_i \cap M$  pour un certain  $i < i_0$ , donc que  $y \in P$ . Mais alors,  $x \in P$ , ce qui ne se peut pas. On a donc  $P = M$  et  $(v_j)_{j \in J}$  engendre  $M$ .  $\square$

On voit en particulier que tout sous-module d'un  $\mathbb{Z}$ -module libre est libre. Les modules sur les anneaux principaux ont d'autres propriétés importantes sur certaines desquelles on reviendra plus tard.

## 2 Homologie d'un module différentiel gradué.

Tous les modules sont maintenant  $\mathbb{Z}$ -gradués. On dira qu'un module gradué  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  est « positivement gradué » si  $M_i = 0$  pour tout  $i < 0$ . On dira que  $M$  est « négativement gradué » si  $M_i = 0$  pour tout  $i > 0$ .

**2 Convention.** La composante de degré  $i$  d'un module gradué  $M$  est notée  $M_i$  ou  $M^{-i}$ . Autrement-dit, quand le degré est indiqué en exposant, il doit être compté négativement. Par exemple,  $M^2$  est la composante homogène de degré  $-2$  de  $M$ . L'usage est de noter  $M_i$  les composantes homogènes des modules positivement gradués et  $M^i$  celles des modules négativement gradués, de façon à ce qu'indices et exposants soient toujours positifs.

**Exercice 1.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme homogène de degré  $k$  entre deux  $\Lambda$ -modules gradués. Montrer que  $f$  est bijectif (resp. injectif, resp. surjectif) si et seulement si chaque  $f_i : M_i \rightarrow N_{i+k}$  est bijectif (resp. injectif, resp. surjectif).

Une conséquence importante de cet exercice est que si  $f : M \rightarrow N$  est surjective, tout élément homogène de  $N$  a un antécédent homogène.

**3 Définition.** Soient  $M$  et  $N$  deux modules gradués. On définit les modules gradués  $M \otimes N$  et  $\text{Hom}(M, N)$  par

$$\begin{aligned} (M \otimes N)_i &= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M_p \otimes N_{i-p} \\ \text{Hom}(M, N)_i &= \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(M_p, N_{i+p}) \end{aligned}$$

Si  $f : M \rightarrow M'$  et  $g : N \rightarrow N'$  sont des morphismes homogènes, on définit

$$\begin{aligned} M \otimes N &\xrightarrow{f \otimes g} M' \otimes N' \\ \text{Hom}(M', N) &\xrightarrow{\text{Hom}(f, g)} \text{Hom}(M, N') \end{aligned}$$

par

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y)$$

$$\text{Hom}(f, g)(\varphi) = (-1)^{|f|(|\varphi|+|g|)} g \circ \varphi \circ f$$

Noter que le choix des signes dans ces définitions est imposé par la convention de Koszul. Par ailleurs, on voit que  $\text{Hom}(M, N)_i$  n'est rien d'autre que l'espace des morphismes homogènes de degré  $i$  de  $M$  vers  $N$ , puisqu'un tel morphisme a une composante  $M_p \rightarrow N_{p+i}$  pour chaque  $p \in \mathbb{Z}$ .

☞ **Exercice 2.** Montrer que  $(f \otimes g)(h \otimes k) = (-1)^{|g||h|} fh \otimes gk$  (quand ces compositions de morphismes homogènes ont un sens).

☞ **4 Définition.** Une « différentielle » ou « opérateur bord » sur un  $\Lambda$ -module gradué  $M$  est un morphisme  $\partial : M \rightarrow M$ , homogène de degré  $-1$ , tel que  $\partial \circ \partial = 0$ . Un  $\Lambda$ -module gradué  $M$  muni d'une différentielle est appelé un «  $\Lambda$ -module différentiel gradué » (en abrégé : DG-module ou DG- $\Lambda$ -module).<sup>(3)</sup>

Un « morphisme » de DG-modules de degré  $k$ ,  $f : M \rightarrow N$ , est un morphisme homogène de degré  $k$  tel que :

$$f \circ \partial = (-1)^{|f|} \partial \circ f$$

Noter qu'ici encore le choix du signe est imposé par la convention de Koszul.

Ainsi, dire que  $M$  est un DG-module, revient à dire qu'on a des applications  $\Lambda$ -linéaires

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{i-1}} M_{i-1} \xleftarrow{\partial_i} M_i \xleftarrow{\partial_{i+1}} M_{i+1} \xleftarrow{\partial} \cdots$$

telles que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on ait  $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ . Le plus souvent on écrira  $\partial$  au lieu de  $\partial_i$  dans les diagrammes comme ci-dessus. Bien sûr, la relation  $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$  est équivalente à  $\text{Im}(\partial_{i+1}) \subset \text{Ker}(\partial_i)$ . Les éléments de  $\text{Ker}(\partial_i)$  s'appellent des « cycles de degré  $i$  », et les éléments de  $\text{Im}(\partial_{i+1})$  s'appellent des « bords de degré  $i$  ».

☞ **5 Définition.** Soient  $M$  et  $N$  des DG-modules. On définit une structure de DG-module sur les modules gradués  $M \otimes N$  et  $\text{Hom}(M, N)$  en posant

$$\partial = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial \qquad \partial = \partial_* - \partial^*$$

On fera attention à ne pas confondre  $\partial \circ f$  avec  $\partial(f)$  qui est égal à  $\partial \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial$ .

Il est clair que ces opérateurs sont de degré  $-1$ . Il faut bien sûr vérifier qu'ils sont de carré nul.

---

3. On l'appelle aussi un « complexe de chaînes », pour une raison qui apparaîtra plus loin.

On a

$$\begin{aligned}
(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial) &= \partial^2 \otimes 1 + \partial \otimes \partial - \partial \otimes \partial + 1 \otimes \partial^2 \\
&= 0 \\
(\partial_* - \partial^*)(\partial_* - \partial^*) &= \partial_*^2 - \partial_* \partial^* - \partial^* \partial_* + \partial^{*2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car  $\partial_* \partial^*(f) = (-1)^{|f|} \partial f \partial = -\partial^*(f \partial) = -\partial^* \partial_*(f)$ .

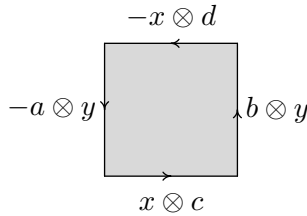
☞ **Exercice 3.** Montrer que  $\partial(g \circ f) = \partial(g) \circ f + (-1)^{|g|} g \circ \partial(f)$  (pour tous morphismes homogènes composables  $f$  et  $g$ ).

☞ **6 Remarque.** La définition  $\partial = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$  pour la différentielle de  $M \otimes N$ , donne

$$\partial(x \otimes y) = (\partial x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes (\partial y)$$

quand elle est appliquée à un tenseur  $x \otimes y$  de deux éléments homogènes. Ceci est en accord avec nos principes de simulation de la géométrie. Par exemple, si  $x$  et  $y$  représentent deux segments orientés (disons homéomorphes à  $[a, b]$  et  $[c, d]$ , orientés de  $a$  vers  $b$  et de  $c$  vers  $d$ , de telle sorte que  $\partial x = b - a$  et  $\partial y = d - c$ ),  $x \otimes y$  représente un carré, et on a (puisque  $|x| = 1$ )

$$\partial(x \otimes y) = (b - a) \otimes y - x \otimes (d - c) = b \otimes y - a \otimes y - x \otimes d + x \otimes c$$



Comme on le voit sur la figure, ces signes donnent une orientation cohérente au bord du carré. Le lecteur est convié à faire la même vérification avec un  $x$  de degré 2 et un  $y$  de degré 1.

La raison de la présence d'un signe  $-$  (moins) dans la définition  $\partial = \partial_* - \partial^*$  est la suivante. On souhaite tout simplement (comme le lecteur s'en doute sûrement) que le foncteur  $M \mapsto M \otimes N$  soit adjoint à gauche du foncteur  $P \mapsto \text{Hom}(N, P)$ . Il s'agit ici de foncteurs définis et à valeurs dans la catégorie des DG-modules. La co-unité de cette adjonction sera une flèche (« évaluateur »)

$$\text{Hom}(N, P) \otimes N \xrightarrow{\text{ev}} P$$

c'est-à-dire un morphisme de DG-modules, qui ne peut être que de degré 0, puisqu'il doit envoyer  $f \otimes x$  sur  $f(x)$ . On aura donc  $\partial \circ \text{ev} = \text{ev} \circ \partial$ . Soit  $f : M \otimes N \rightarrow P$  un morphisme de DG-modules. Il doit lui correspondre par l'adjonction un (unique) morphisme  $g : M \rightarrow \text{Hom}(N, P)$  tel que  $f = \text{ev} \circ (g \otimes 1)$ , c'est-à-dire tel que  $f(x \otimes y) = \text{ev}(g(x) \otimes y) = g(x)(y)$ , pour tous éléments homogènes  $x$  et  $y$ . On voit qu'on a nécessairement  $|f| = |g|$ , et on a donc

$$\begin{aligned}
\partial \circ f &= (-1)^{|g|} f \circ \partial \\
\partial f(x \otimes y) &= (-1)^{|g|} f \partial(x \otimes y) \\
\partial(g(x)(y)) &= (-1)^{|g|} f(\partial x \otimes y) + (-1)^{|g||x|} f(x \otimes \partial y) \\
&= (-1)^{|g|} g(\partial x)(y) + (-1)^{|g||x|} g(x)(\partial y)
\end{aligned}$$

On notera que  $f$  et  $g$  sont des morphismes de DG-modules (ils commutent à  $\partial$  avec le signe convenable), mais que ce n'est pas le cas en général de  $g(x) : N \rightarrow P$ , puisqu'il s'agit d'un élément arbitraire de  $\text{Hom}(N, P)$ . Ce qu'on cherche à calculer est  $\partial(g(x))$ , afin d'établir le signe correct dans la définition de la différentielle de  $\text{Hom}(N, P)$ .

Comme  $g$  est un morphisme de DG-modules, on a  $(-1)^{|g|}g(\partial x) = \partial(g(x))$ , donc  $(-1)^{|g|}g(\partial x)(y) = \partial(g(x))(y)$ . Par ailleurs, on a  $(-1)^{|g||x|}g(x)(\partial y) = (\partial^*(g(x)))(y)$  par définition de  $\partial^*$ , et  $\partial(g(x)(y)) = (\partial_*(g(x)))(y)$  par définition de  $\partial_*$ . On en déduit que

$$\partial(g(x))(y) = \partial_*(g(x))(y) - (\partial^*(g(x)))(y)$$

Ceci étant vrai pour tout  $y$ , on a la formule de la définition 5.<sup>(4)</sup>

☞ **7 Définition.** Soit  $M$  un DG-module. On définit, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  :

- le module des « cycles de degré  $i$  » de  $M$  :  $Z_i(M) = \text{Ker}(\partial_i)$ ,
- le module des « bords de degré  $i$  » de  $M$  :  $B_i(M) = \text{Im}(\partial_{i+1})$ ,
- l'« homologie de degré  $i$  » de  $M$  :  $H_i(M) = \frac{Z_i(M)}{B_i(M)}$ .

On pose également :

$$Z(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Z_i(M) \quad B(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i(M) \quad H(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(M)$$

$Z(M)$ ,  $B(M)$  et  $H(M)$  sont alors des modules gradués.  $H(M)$  est appelé l'« homologie de  $M$  ».

Autrement-dit, l'homologie est constitué des « cycles modulo les bords ». Si  $x$  est un cycle de degré  $i$  de  $M$ , on notera  $[x]$  sa classe d'équivalence (on dit plutôt sa « classe d'homologie ») dans le quotient  $H_i(M)$ .

☞ **8 Lemme.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de degré  $k$  entre DG-modules. Alors il existe un unique morphisme de degré  $k$ ,  $H(f) : H(M) \rightarrow H(N)$ , tel que  $H(f)([x]) = [f(x)]$  pour tout cycle  $x$  de  $M$ .  $H(f)$  s'appelle le « morphisme induit par  $f$  en homologie ».

$H$  est un foncteur (dit « foncteur homologie ») de la catégorie des DG- $\Lambda$ -modules vers celle des  $\Lambda$ -modules gradués.  $Z$  et  $B$  sont également des foncteurs parallèles à  $H$ .

*Démonstration.* La relation  $\partial f = (-1)^{|f|}f\partial$  entraîne que  $f$  envoie chaque cycle de  $M$  sur un cycle de  $N$  et chaque bord de  $M$  sur un bord de  $N$ .  $f$  se restreint donc aux cycles et passe au quotient par les bords.

Pour tout morphisme de DG-modules  $f : M \rightarrow N$  (quel que soit son degré), on a donc un morphisme de modules gradués (de même degré)  $H(f) : H(M) \rightarrow H(N)$ . Le fait qu'il s'agisse d'un foncteur est trivial, de même que la dernière assertion de l'énoncé.  $\square$

---

4. On voit que ce signe  $-$  vient du fait que le terme  $(-1)^{|g||x|}g(x)(\partial y)$  a dû passer d'un côté à l'autre de l'égalité, fait qui a pour cause que la currying  $f \mapsto g$  isole la variable  $x$ , alors que les deux variables  $x$  et  $y$  jouent des rôles semblables dans  $f(x \otimes y)$ .

L'homologie est un foncteur un peu capricieux en ce sens qu'il commute difficilement avec d'autres foncteurs. Une explication possible est le fait que l'homologie est un mélange de limite et de colimite. En effet, pour tout DG-module  $M$ , le module  $Z(M)$  des cycles de  $M$  est la limite (égaliseur) du diagramme de DG-modules

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{0} \end{array} M$$

et l'homologie  $H(M)$  de  $M$  est la colimite (somme amalgamée) du diagramme de DG-modules

$$0 \longleftarrow M \xrightarrow{\partial} Z(M)$$

On peut en effet vérifier facilement que le carré

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\partial} & Z(M) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ 0 & \longrightarrow & H(M) \end{array}$$

(où  $\pi$  est la projection canonique) est cocartésien. On verra plus tard que le foncteur homologie commute toutefois aux colimites sur une catégorie filtrante, ce qui est essentiellement dû au fait, que dans une catégorie « suffisamment algébrique », comme celle des DG-modules, les colimites filtrantes commutent aux limites finies (et bien sûr aux colimites).

### 3 Le lemme du serpent.

☞ **9 Théorème.** (*Lemme du serpent*) Soit

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{j} P \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de DG-modules. Alors on a la suite exacte « triangulaire » :

$$\begin{array}{ccc} H(M) & \xleftarrow{\partial_*} & H(P) \\ & \searrow H(i) & \nearrow H(j) \\ & H(N) & \end{array}$$

qui est telle que pour tout cycle homogène  $x$  de  $P$ , et pour tout  $u \in N$  homogène tel que  $j(u) = x$ , il existe un unique  $y \in M$  homogène, tel que  $i(y) = \partial(u)$ . On a alors  $\partial_*([x]) = [y]$ , quel que soit le choix de  $u$ .  $\partial_*$  s'appelle le « connectant » de la suite exacte ci-dessus.<sup>(5)</sup>

---

5. N. Bourbaki, qui n'aime pas les anglicismes, l'appelle « homomorphisme de liaison ».

Dans le cas où  $i$  et  $j$  sont de degré 0 (ce qui est très souvent le cas),  $\partial_*$  est de degré  $-1$ . En effet, dans ce cas, si  $x$  est de degré  $n$ ,  $u$  est aussi de degré  $n$ ,  $\partial(u)$  est de degré  $n-1$  et  $y$  est aussi de degré  $n-1$ . Si on réécrit la suite exacte triangulaire ci-dessus degré par degré, on obtient la suite exacte (qu'on appelle « suite exacte longue ») :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & & \\
 & & & \swarrow \partial_* & & \searrow \partial_* & \\
 H_{n+1}(M) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(N) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(P) & & \\
 & & \swarrow \partial_* & & \searrow \partial_* & & \\
 H_n(M) & \xrightarrow{i_*} & H_n(N) & \xrightarrow{j_*} & H_n(P) & & \\
 & & \swarrow \partial_* & & \searrow \partial_* & & \\
 H_{n-1}(M) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(N) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(P) & & \\
 & & \swarrow \partial_* & & \searrow \partial_* & & \\
 & & \cdots & & & & 
 \end{array}$$

qui, quand elle est disposée comme ci-dessus, ce qui est assez naturel, a une vague allure de serpent.

*Démonstration.* Commençons par décrire la construction du connectant. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{j} & P \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{j} & P \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Soit  $x$  un cycle homogène de  $P$ , c'est-à-dire que  $x \in Z_n(P) \subset P_n$ , pour un certain  $n \in \mathbb{Z}$ . On a  $\partial(x) = 0$  et comme  $j : N \rightarrow P$  est surjective, il existe  $u \in N$  (homogène, voir l'exercice 1 (page 2)) tel que  $j(u) = x$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & u & \xrightarrow{j} & x \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 y & \xrightarrow{i} & \partial(u) & \xrightarrow{j} & 0 \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \xrightarrow{i} & 0 & & 
 \end{array}$$

$u$  n'a aucune raison d'être un cycle, mais comme  $j(\partial(u)) = (-1)^{|j|} \partial(j(u)) = \pm \partial(x) = 0$ ,<sup>(6)</sup> on voit que  $\partial(u)$  est dans l'image de  $i$ , donc que  $\partial(u) = i(y)$  pour un certain  $y$  qui est unique car

---

6. Dans cette démonstration les signes n'ont pas d'importance. On écrira donc  $\pm$ , et les diagrammes qu'on dessine sont commutatifs au signe près..

$i$  est injective. Cet  $y$  est un cycle, car  $\partial(\partial(u)) = 0$  et  $i$  est injective. On voit donc que cette construction a envoyé le cycle  $x$  de  $P$  sur le cycle  $y$  de  $N$ .

Bien sûr,  $y$  dépend a priori du choix de  $u$  (le seul choix qu'on ait fait), mais sa classe d'homologie n'en dépend pas. En effet, voyons ce qu'il se passe si on choisit  $u'$  à la place de  $u$ , ce qui mène, en faisant la même construction que pour  $u$ , à un  $y'$  tel que  $i(y') = \partial(u')$ . On a  $j(u) = x = j(u')$ , donc  $u - u'$  est dans le noyau de  $j$ , c'est-à-dire dans l'image de  $i$ .

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{i} & u - u' & \xrightarrow{j} & 0 \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial & & \\ \partial(t) & \xrightarrow{i} & \partial(u) - \partial(u') & & \end{array}$$

On a donc  $t \in M$  tel que  $i(t) = u - u'$ . Mais alors  $i(\partial(t)) = \pm \partial(i(t)) = \pm \partial(u - u') = \pm(\partial(u) - \partial(u'))$ . Mais on a aussi  $i(y - y') = \partial(u) - \partial(u')$ . Comme  $i$  est injective, on voit que  $y - y' = \pm \partial(t) = \partial(\pm t)$ , autrement-dit que  $y$  et  $y'$  ont la même classe d'homologie, qui ne dépend donc que de  $x$ .

Mais on a mieux : la classe d'homologie de  $y$  ne dépend que de la classe d'homologie de  $x$ . En effet, supposons que  $x - x' = \partial(z)$ , et choisissons  $u$  et  $u'$  tels que  $j(u) = x$  et  $j(u') = x'$ . On a alors  $y$  et  $y'$  dans  $M$  tels que  $i(y) = \partial(u)$  et  $i(y') = \partial(u')$ . Soit  $w$  tel que  $j(w) = z$ .

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{j} & z \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \partial(w) & \xrightarrow{j} & x - x' \end{array}$$

On a  $j(\partial(w)) = \pm(x - x') = \pm j(u - u')$ , donc  $j(u - u' \pm \partial(w)) = 0$ . Il existe donc  $t \in M$  tel que  $i(t) = u - u' \pm \partial(w)$ .

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{i} & u - u' \pm \partial(w) & \xrightarrow{j} & 0 \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial & & \\ \partial(t) & \xrightarrow{i} & \partial(u) - \partial(u') & & \end{array}$$

On voit que  $i(\partial(t)) = \pm(\partial(u) - \partial(u')) = \pm i(y - y')$ . Comme  $i$  est injective, on a  $y - y' = \pm \partial(t)$ . Le connectant  $\partial_*$  est donc bien défini. C'est une application linéaire homogène, car si  $j(u) = x$  et  $j(u') = x'$ , on a  $j(u + \lambda u') = x + \lambda x'$ , etc... Le degré de  $\partial_*$  est clairement  $-1 - |i| - |j|$ .

En résumé, pour tout cycle  $x$  de  $P$ , un cycle  $y$  représentant  $\partial_*([x])$  est obtenu comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{j} & x \\ \partial \downarrow & & \\ y & \xrightarrow{i} & \partial(u) \end{array}$$

et le choix de  $u$  n'a pas d'importance.

Il reste donc à prouver que la suite triangulaire est exacte, autrement-dit que  $\text{Im}(H(i)) = \text{Ker}(H(j))$ ,  $\text{Im}(H(j)) = \text{Ker}(\partial_*)$  et  $\text{Im}(\partial_*) = \text{Ker}(H(i))$ .

Comme  $j \circ i = 0$ , on a  $H(j) \circ H(i) = 0$ , donc  $\text{Im}(H(i)) \subset \text{Ker}(H(j))$ . Soit maintenant  $[u] \in \text{Ker}(H(j))$  (donc avec  $u \in Z(N)$ ). On a  $j(u) \in B(P)$ . Il existe donc  $z \in P$  tel que  $\partial(z) = j(u)$ . Soit  $w$  tel que  $j(w) = z$ .

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{j} & z \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \partial(w) & \xrightarrow{j} & j(u) \end{array}$$

On a alors  $j(u - \partial(w)) = 0$  et il existe  $t \in M$  tel que  $i(t) = u - \partial(w)$ , autrement-dit, tel que  $H(i)([t]) = [u]$ , et  $[u] \in \text{Im}(H(i))$ .

Soit maintenant  $[x] \in \text{Im}(H(j))$ . On a  $x - \partial(z) = j(u)$  pour un certain  $z \in P$  et un  $u \in Z(N)$ . On a donc  $\partial(u) = 0$  puis  $y = 0$  (où  $i(y) = \partial(u)$ ), et donc  $\partial_*([x]) = 0$ . Réciproquement, si  $\partial_*([x]) = 0$ , on a  $t \in M$  tel que  $\partial(t) = y$ .

$$\begin{array}{ccc} t & & u \xrightarrow{\quad} x \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \xrightarrow{\quad} & \partial(u) \end{array}$$

donc  $\partial(i(t)) = \partial(u)$ . En conséquence,  $u - i(t)$  est un cycle de  $M$  tel que  $j(u - i(t)) = x$ .

Enfin, si  $[y] = \partial_*([x])$ , on a  $i(y) = \partial(u)$  (où  $j(u) = x$ ) et donc  $i_*(\partial_*([x])) = 0$ . Réciproquement, si  $i_*([y]) = 0$ , on a un  $w \in M$  tel que  $\partial(w) = i(y)$ , d'où il résulte que  $[y] = \partial_*([j(w)])$ .  $\square$

**Exercice 4.** Redémontrer le lemme des neuf (leçon du 12 mars) en utilisant le lemme du serpent.

**Exercice 5.** Soit  $M$  un DG-module,  $A$  et  $B$  des sous-DG-modules de  $M$  tels que  $B \subset A$ .

(a) Montrer que l'inclusion  $B \subset A$  induit un isomorphisme en homologie si et seulement si le morphisme canonique  $\frac{M}{B} \rightarrow \frac{M}{A}$  induit un isomorphisme en homologie.

(b) Montrer que l'inclusion  $A \subset M$  induit un isomorphisme en homologie si et seulement si le morphisme canonique  $\frac{A}{B} \rightarrow \frac{M}{B}$  induit un isomorphisme en homologie.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 21 mars 2012.

## 1 Homotopies.

Il existe une notion d'homotopie entre morphismes de DG-modules, qui « simule » l'homotopie entre applications continues. Pour en comprendre intuitivement la définition, revenons à l'idée qu'un élément homogène de degré  $n$  dans un DG-module  $M$  simule un objet de dimension  $n$  ayant éventuellement un bord et « vivant dans  $M$  ». Les images de  $x$  par deux morphismes parallèles  $f, g : M \rightarrow N$  sont donc deux objets de même nature que  $x$ , mais vivant dans  $N$ . Si  $h$  est une homotopie de  $f$  à  $g$ ,  $h(x)$  peut être vu comme un objet vivant dans  $N$  et ressemblant au produit de  $x$  par l'intervalle  $[0, 1]$ . Le bord d'un tel produit  $x \times [0, 1]$  est, d'après la formule de dérivation de Leibniz de la forme

$$\partial(x \times [0, 1]) = \partial(x) \times [0, 1] + x \times \{0, 1\}$$

Bien entendu,  $x \times \{0, 1\}$  doit être identifié à  $g(x) - f(x)$ , et  $\partial(x) \times [0, 1]$  à  $h(\partial(x))$ . On aura donc (aux signes près) la formule

$$\partial h + h \partial = g - f$$

Le choix des signes dans la formule ci-dessus est justifié plus loin. On pose donc :

**1 Définition.** Soient  $M$  et  $N$  deux DG-modules,  $f, g : M \rightarrow N$  deux morphismes de DG-modules tous deux de degré  $k$ . Une « homotopie » de  $f$  à  $g$  est une application linéaire homogène  $h : M \rightarrow N$  de degré  $k + 1$  telle que

$$\partial h + (-1)^k h \partial = g - f$$

Remarquer que  $h$  est un élément de  $\text{Hom}(M, N)_{k+1}$  et que  $\partial h + (-1)^k h \partial = \partial h - (-1)^{|h|} h \partial$  n'est autre que  $\partial(h)$  au sens de la définition de la différentielle sur  $\text{Hom}(M, N)$  (leçon du 19 mars, définition 5). Une homotopie de  $f$  à  $g$  est donc un élément de  $\text{Hom}(M, N)$  ayant  $g - f$  comme bord. C'est ce qui justifie le choix des signes.

On a donc un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & M_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & M_i & \xrightarrow{\partial} & M_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & \searrow h_{i+1} & \downarrow f_{i+1} & \downarrow g_{i+1} & \searrow h_i & \downarrow f_i & \downarrow g_i & \searrow h_{i-1} & \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & N_{i+1+k} & \xrightarrow{\partial} & N_{i+k} & \xrightarrow{\partial} & N_{i-1+k} & \xrightarrow{\partial} & \cdots
 \end{array}$$

Il est immédiat que si  $p : N \rightarrow P$  est un morphisme de DG-modules et  $h$  une homotopie de  $f$  à  $g$ , alors  $(-1)^{|p|}ph$  est une homotopie de  $pf$  à  $pg$ , puisque

$$(-1)^{|p|}(\partial ph - (-1)^{|p|+|h|}ph\partial) = p(\partial h - (-1)^{|h|}h\partial) = p(g - f) = pg - pf$$

La même chose est bien sûr vraie pour une composition à droite.

Par ailleurs la relation d'homotopie est une relation d'équivalence. Prendre  $h = 0$  pour prouver la réflexivité, remplacer  $h$  par  $-h$  pour prouver la symétrie et ajouter les homotopies pour prouver la transitivité.

**2 Lemme.** *Si les morphismes de DG-modules  $f, g : M \rightarrow N$  sont homotopes, les morphismes induits en homologie  $f_*, g_* : H(M) \rightarrow H(N)$  sont égaux.*

*Démonstration.* Soit  $x$  un cycle de  $M$ . On a  $g(x) - f(x) = \partial h(x) - (-1)^{|h|}h\partial(x) = \partial h(x)$ , ce qui montre que les cycles  $f(x)$  et  $g(x)$  représentent la même classe d'homologie.  $\square$

**3 Remarque.** Il y a une autre façon un peu plus sophistiquée d'aborder la notion d'homotopie, et qui est susceptible de nombreuses généralisations.<sup>(1)</sup> Considérons le  $\Lambda$ -module libre sur les trois éléments  $\underline{0}$ ,  $\underline{1}$  (de degré 0) et  $\underline{i}$  (de degré 1). Posons  $\partial(\underline{i}) = \underline{1} - \underline{0}$ . On obtient le DG-module

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} \Lambda[\underline{i}] \xrightarrow{\partial} \Lambda[\underline{0}, \underline{1}] \longrightarrow 0$$

qu'on notera  $I$ . C'est une simulation algébrique « minimaliste » de l'intervalle  $[0, 1]$ , l'élément  $\underline{i}$  représentant l'intervalle lui-même, les éléments  $\underline{0}$  et  $\underline{1}$  ses deux extrémités. Algébriquement, on peut simuler le produit cartésien par le produit tensoriel sur  $\Lambda$ . Le lecteur admettra provisoirement cette affirmation qui sera justifiée plus tard, et qui de toute façon ne nous sert pour le moment que de motivation. Rappelons que (par définition), si  $x \in I_i$  et  $y \in M_j$ , alors  $x \otimes y \in (I \otimes_\Lambda M)_{i+j}$ , et que le bord de  $x \otimes y$  est donné par la formule

$$\partial(x \otimes y) = \partial(x) \otimes y + (-1)^{|x|}x \otimes \partial(y)$$

En conséquence, si  $M$  simule un espace  $X$ , on considérera  $I \otimes_\Lambda M$  comme une simulation de  $[0, 1] \times X$ , et on verra donc une homotopie entre deux morphismes  $M \rightarrow N$  comme un morphisme  $I \otimes_\Lambda M \rightarrow N$ . Souvenons-nous que si  $h$  est une homotopie entre les applications continues  $f$

1. Cette façon de faire est particulièrement utile pour définir les notions d'homotopies d'ordre supérieur, ou lorsque les modules portent des structures additionnelles comme par exemple des structures d'algèbres.

et  $g$ ,  $f$  et  $g$  peuvent être retrouvées à partir de  $h$  en composant  $h$  avec les deux inclusions  $i_0 : M \rightarrow [0, 1] \times M$  et  $i_1 : M \rightarrow [0, 1] \times M$  définies par  $i_0(x) = (0, x)$  et  $i_1(x) = (1, x)$ . Ces deux inclusions sont simulées par les morphismes  $i_0, i_1 : M \rightarrow I \otimes_\Lambda M$  définis respectivement par  $i_0(x) = \underline{0} \otimes x$  et  $i_1(x) = \underline{1} \otimes x$ . En conséquence, un morphisme  $H : I \otimes_\Lambda M \rightarrow N$  doit être considéré comme une homotopie de  $Hi_0$  à  $Hi_1$ . Ceci constitue une nouvelle définition de l'homotopie entre deux morphismes de DG-modules.

☞ **Exercice 1.** Montrer que la notion d'homotopie définie dans la remarque 3 est équivalente à celle de la définition 1 (page 1).

## 2 Théories de chaînes.

La théorie de l'homologie et de la cohomologie s'est dégagée progressivement de travaux commencés par Poincaré vers 1895 et continués par Vietoris, de Rham, Alexander, Steenrod, Eilenberg et d'autres contributeurs. Ce n'est qu'en 1944 qu'une théorie essentiellement achevée (si on omet celle de de Rham qui est assez particulière car elle ne s'applique qu'aux variétés différentiables) est proposée par Eilenberg. Il s'agit de la théorie dite « singulière ». La théorie esquissée par Alexander vers 1935 a été complétée en 1948 par Spanier (cohomologie d'Alexander-Spanier). D'autres théories ont été introduites par la suite, comme la K-théorie topologique (Atiyah), le cobordisme (Thom),...

En 1951, Eilenberg et Steenrod ont proposé une présentation axiomatique des théories homologiques et cohomologiques,<sup>(2)</sup> à partir de laquelle on peut démontrer les théorèmes classiques de la topologie algébrique (théorème du point fixe de Brouwer, théorème de séparation de Jordan-Brouwer, théorème de Borsuk-Ulam, etc...), en admettant bien sûr l'existence d'au moins une telle théorie. Toutefois, cette manière de faire est rarement adoptée dans un ouvrage d'initiation à la topologie algébrique. La raison est sans doute qu'elle requiert de déduire de ces axiomes un certain nombre de propriétés standard, comme la suite exacte d'un triplet et les suites exactes de Mayer-Vietoris absolues et relatives, ce qui est un assez important travail de diagram chasing, dont les astuces ne sont pas toujours faciles à deviner, et dont le bénéfice est en définitive assez mince car ces mêmes propriétés se déduisent beaucoup plus facilement des propriétés des complexes de chaînes ou de cochaînes dans le cas particulier de chaque théorie.

Malgré tout, il est intéressant de s'affranchir de la dépendance à une théorie particulière, et c'est la raison pour laquelle nous proposons ici des axiomes pour une « théorie de chaînes ». Nous construirons une telle théorie (la théorie singulière) plus tard.

☞ **4 Définition.** Soit  $\Lambda$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $C_* : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{DG}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$  un foncteur (où  $\mathbf{DG}\text{-}\Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$  représente la catégorie des  $\Lambda$ -modules différentiels positivement gradués et homomorphismes de degré 0 entre eux). Pour tout espace  $X$ , on note  $H_*(X)$  (ou  $H_*(X; \Lambda)$ )

---

2. À ceci près que l'axiome dit « de la dimension » n'est pas nécessairement satisfait par les théories les plus récentes, comme par exemple le cobordisme. La tendance post-Eilenberg-Steenrod est de qualifier de théorie homologique une théorie qui satisfait les axiomes d'Eilenberg-Steenrod sauf éventuellement l'axiome de la dimension.

l'homologie de  $C_*(X)$  (qui pourra également être noté  $C_*(X; \Lambda)$ ).

$C_*$  est une « théorie de chaînes » (à coefficients dans  $\Lambda$ ) si :<sup>(3)</sup>

- (1) Pour toutes parties  $A$  et  $B$  d'un espace topologique  $X$ , le carré (dont les flèches sont induites par les inclusions)

$$\begin{array}{ccc} C_*(A \cap B) & \longrightarrow & C_*(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) \end{array}$$

est cartésien.

- (2) Pour toute famille  $\cap$ -stable  $\mathcal{U}$  de parties d'un espace  $X$  dont les intérieurs recouvrent  $X$ , le morphisme canonique

$$\text{colim}_{U \in \mathcal{U}} C_*(U) \longrightarrow C_*(X)$$

induit un isomorphisme en homologie.

- (3) Pour toutes applications continues homotopes  $f, g : X \rightarrow Y$ , les morphismes  $f_*, g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$  sont égaux.
- (4)  $H_n(\{*\}) = 0$  pour  $n \neq 0$ , et  $H_0(\{*\}) \simeq \Lambda$ .

☞ **5 Remarque.** En faisant  $A = B$  dans l'axiome (1), on voit que le morphisme  $i_* : C_*(A) \rightarrow C_*(X)$  induit par l'inclusion canonique  $i : A \rightarrow X$  est une injection. En effet, le carré cartésien obtenu montre que  $i_*$  est un monomorphisme (flèche simplifiable à gauche). Par ailleurs, tout monomorphisme de  $\text{DG-}\Lambda\text{-Mod}$  est une injection. Par la suite, pour tout  $A \subset X$ , on identifiera donc  $C_*(A)$  à un sous-DG-module de  $C_*(X)$ .

$A$  et  $B$  étant maintenant des parties quelconques de  $X$ , et  $C_*(A)$ ,  $C_*(B)$  et  $C_*(A \cap B)$  étant identifiés à des sous-DG-modules de  $C_*(X)$ , on voit par l'axiome (1) que  $C_*(A \cap B)$  n'est autre que  $C_*(A) \cap C_*(B)$ .

De même, on voit qu'après identification des  $C_*(U)$  à des sous-DG-module de  $C_*(X)$ , la colimite de l'axiome (2) s'identifie à la somme des  $C_*(U)$  comme sous-DG-modules de  $C_*(X)$ . En particulier, si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $X$  dont les intérieurs recouvrent  $X$ , il en est de même des intérieurs de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ ,  $C_*(A) + C_*(B) + C_*(A \cap B)$  est égal à  $C_*(A) + C_*(B)$  et l'inclusion  $C_*(A) + C_*(B) \rightarrow C_*(X)$  induit un isomorphisme en homologie.

Il résulte immédiatement de l'axiome (3) qu'une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie. Par conséquent, tout espace contractile a une homologie isomorphe à celle du point  $\{*\}$ .

Notons **Top2** la catégorie des paires d'espaces. Pour toute paire  $(X, A)$ , le morphisme de DG-modules  $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$  induit par l'inclusion est injectif. Le conoyau de ce morphisme sera

---

3. Ceci est encore à un stade expérimental et donc soumis à modification.

noté  $C_*(X, A)$ . On a la suite exacte de DG-modules

$$0 \longrightarrow C_*(A) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

et le lemme du serpent nous donne la « suite exacte longue de la paire  $(X, A)$  » :

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Bien sûr,  $C_*(X, A)$  est isomorphe à  $C_*(X)/C_*(A)$ . Soit maintenant  $(X, A, B)$  est un triplet d'espaces ( $B \subset A \subset X$ ). Le troisième théorème d'isomorphisme de Noether nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow C_*(A, B) \longrightarrow C_*(X, B) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

et le lemme du serpent donne la « suite exacte longue d'homologie du triplet  $(X, A, B)$  »

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

où les flèches anonymes sont induites par les inclusions entre paires d'espaces.

**6 Lemme.** (théorème d'« excision ») Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces, et  $U$  une partie de  $A$  dont l'adhérence est incluse dans l'intérieur de  $A$ . L'inclusion  $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induit un isomorphisme en homologie.

*Démonstration.* D'après la remarque 5, l'inclusion  $C_*(A) + C_*(X - U) \rightarrow C_*(X)$  induit un isomorphisme en homologie, et le quotient  $\frac{C_*(X)}{C_*(A) + C_*(X - U)}$  a donc une homologie nulle. On a par ailleurs la suite exacte (vérification facile) :

$$0 \longrightarrow \frac{C_*(X - U)}{C_*(A) \cap C_*(X - U)} \longrightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \longrightarrow \frac{C_*(X)}{C_*(A) + C_*(X - U)} \longrightarrow 0$$

Comme  $C_*(A - U) = C_*(A \cap (X - U)) = C_*(A) \cap C_*(X - U)$ , et comme  $\frac{C_*(X)}{C_*(A) + C_*(X - U)}$  a une homologie nulle, on a l'isomorphisme annoncé en homologie par le lemme du serpent.  $\square$

**7 Lemme.** Soient  $X, Y, A$  et  $B$  des parties ouvertes d'un espace  $E$ , telle que  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$ . On a la « suite exacte de Mayer-Vietoris » (dite « relative ») :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(X \cap Y, A \cap B) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ i_* \end{pmatrix}} & H_n(X, A) \oplus H_n(Y, B) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* & -i_* \end{pmatrix}} & H_n(X \cup Y, A \cup B) \\ & & & & & \swarrow \partial & \\ & & & & H_{n-1}(X \cap Y, A \cap B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

où toutes les flèches de nom  $i$  sont des inclusions canoniques. Cette suite est naturelle par rapport à  $(E, X, Y, A, B)$  et le connectant  $\partial : H_n(Y \cup X, B \cup A) \rightarrow H_{n-1}(Y \cap X, B \cap A)$  est l'opposé du connectant  $\partial : H_n(X \cup Y, A \cup B) \rightarrow H_{n-1}(X \cap Y, A \cap B)$ .

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & C_*(A \cap B) & \longrightarrow & C_*(A) \oplus C_*(B) & \longrightarrow & C_*(A) + C_*(B) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_*(X \cap Y) & \longrightarrow & C_*(X) \oplus C_*(Y) & \longrightarrow & C_*(X) + C_*(Y) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C_*(X \cap Y, A \cap B) & \longrightarrow & C_*(X, A) \oplus C_*(Y, B) & \longrightarrow & \frac{C_*(X) + C_*(Y)}{C_*(A) + C_*(B)} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

dont les trois colonnes et les deux premières lignes sont exactes. Il résulte du lemme des neuf que la dernière ligne est exacte. Par ailleurs, le morphisme canonique

$$\frac{C_*(X) + C_*(Y)}{C_*(A) + C_*(B)} \longrightarrow \frac{C_*(X \cup Y)}{C_*(A \cup B)}$$

induit un isomorphisme en homologie d'après la remarque **5** (page 4) et l'exercice **5** questions **(a)** et **(b)** de la leçon du 19 mars. La naturalité est claire. Enfin, échanger les rôles des paires  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  est équivalent à remplacer la matrice  $\begin{pmatrix} i_* & -i_* \end{pmatrix}$  par son opposée, ce qui a pour effet de changer le signe du connectant.  $\square$

Les utilisations les plus courantes de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondent au cas où  $A = B = \emptyset$  et au cas où  $X = Y$ . On a alors les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(X \cap Y) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ i_* \end{pmatrix}} & H_n(X) \oplus H_n(Y) & \xrightarrow{(i_* \quad -i_*)} & H_n(X \cup Y) \\
& & & & & & \downarrow \partial_* \\
& & & & & & H_{n-1}(X \cap Y) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(X, A \cap B) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ i_* \end{pmatrix}} & H_n(X, A) \oplus H_n(X, B) & \xrightarrow{(i_* \quad -i_*)} & H_n(X, A \cup B) \\
& & & & & & \downarrow \partial_* \\
& & & & & & H_{n-1}(X, A \cap B) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 26 mars 2012.

## 1 Suites exactes scindées.

☞ **1 Lemme.** Pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $g$  a une section,
- (2)  $f$  a une rétraction,
- (3)  $\text{Im}(f)$  ( $= \text{Ker}(g)$ ) est facteur direct de  $M$ .

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que la suite exacte courte est « scindée ».

*Démonstration.* (1) $\Rightarrow$ (3). Soit  $s : P \rightarrow M$  une section de  $g$  ( $gs = 1_P$ ). Alors  $\text{Im}(s) \cap \text{Ker}(g) = 0$ , car  $gs(x) = 0$  entraîne  $x = 0$ . De plus, tout élément  $x$  de  $M$  s'écrit  $x = sg(x) + (x - sg(x))$ , et comme  $g(x - sg(x)) = g(x) - gsg(x) = g(x) - g(x) = 0$ , on voit que  $M = \text{Im}(s) \oplus \text{Ker}(g)$ .

(3) $\Rightarrow$ (2). Soit  $K$  un supplémentaire de  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$  dans  $M$ . Comme  $f$  est injective, on obtient une rétraction  $r$  de  $f : \text{Im}(f) \oplus K \rightarrow N$  en envoyant tout élément de  $\text{Im}(f)$  sur son unique antécédent par  $f$  et tout élément de  $K$  sur 0.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit  $r : M \rightarrow N$  une rétraction de  $f$  ( $rf = 1_N$ ). Comme cela revient à dire que  $f$  est une section de  $r$ , on a, comme plus haut,  $M = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(r)$ , c'est-à-dire  $M = \text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(r)$ . Pour tout  $y$  dans  $P$  il existe donc un unique  $x \in \text{Ker}(r)$  tel que  $g(x) = y$ . Il suffit de poser  $s(y) = x$  pour avoir une section de  $g$ .<sup>(1)</sup>  $\square$

☞ **2 Exemple.** La suite exacte (de  $\mathbb{Z}$ -modules)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

---

1. On pourra s'étonner de la non symétrie de cette démonstration, alors que la situation de l'énoncé est très symétrique. Ceci est dû au fait qu'on utilise des éléments dans les modules. On peut généraliser la plupart des énoncés de cette section en remplaçant la catégorie des  $\Lambda$ -modules par une catégorie abélienne quelconque. On n'a alors plus d'éléments dans les objets, et les démonstrations sont un peu plus techniques. Par contre, elles deviennent parfaitement symétriques.

n'est pas scindée, alors que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

l'est.

**3 Remarque.** Il est immédiat que si la suite exacte courte  $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$  est scindée,

$$0 \longrightarrow N \otimes Q \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes Q \xrightarrow{g \otimes 1} P \otimes Q \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte scindée, pour tout module  $Q$ .

## 2 Homologie réduite.

Si  $X$  est un espace topologique, il existe une unique application (continue)  $X \rightarrow \{*\}$ . Elle induit un morphisme de DG-modules  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow C_*(\{*\})$  qui lui-même induit un morphisme de modules gradués  $\varepsilon : H_*(X) \rightarrow H_*(\{*\}) = \Lambda$ . Ces deux morphismes sont appelés « augmentation ». Notez que la flèche  $X \rightarrow \{*\}$  ayant une section si  $X$  n'est pas vide, les deux applications  $\varepsilon$  sont dans ce cas surjectives. Si au contraire  $X$  est vide, le second axiome des théories de chaînes montre que  $X$  a une homologie isomorphe à celle de la colimite d'un diagramme vide de DG-modules, et cette dernière ne peut être que nulle.<sup>(2)</sup> En conséquence  $H_i(\emptyset) = 0$  pour tout  $i$  (y compris  $i = 0$ ).

Noter que les graduations étant positives, on a  $C_0(X) = Z_0(X)$  (autrement-dit, tout élément de degré 0 est un cycle). Il en résulte une projection canonique  $C_0(X) \rightarrow H_0(X)$ , et en particulier une projection  $C_0(\{*\}) \rightarrow H_0(\{*\}) = \Lambda$ . Par composition avec  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow C_0(\{*\})$ , ceci nous donne une agmentation  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \Lambda$  pour tout espace topologique  $X$ .

Notons  $\tilde{C}_*(X)$  le noyau du morphisme de DG-modules  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \Lambda$ . L'homologie réduite d'un espace topologique  $X$  ou d'une paire topologique  $(X, A)$  est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_*(\emptyset) &= 0 \\ \tilde{H}_*(X) &= H(\tilde{C}_*(X)) && \text{(si } X \text{ n'est pas vide)} \\ \tilde{H}_*(X, \emptyset) &= \tilde{H}_*(X) \\ \tilde{H}_*(X, A) &= H_*(X, A) && \text{(si } A \text{ n'est pas vide)} \end{aligned}$$

Si  $X$  n'est pas vide,  $\varepsilon$  a une section et on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \tilde{C}_*(X) \longrightarrow C_*(X) \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \longrightarrow 0$$

Le lemme du serpent nous donne donc les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \tilde{H}_i(X) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{pour } i \neq 0)$$

---

2. Par contre, cet axiome ne nous dit rien sur  $C_*(\emptyset)$ , à part que son homologie est nulle.

La première étant scindée, on a un isomorphisme  $H_0(X) \simeq \tilde{H}_0(X) \oplus \Lambda$ , mais cet isomorphisme n'est pas naturel en  $X$ , car il dépend de la section choisie pour l'application  $X \rightarrow \{*\}$ . La seconde donne l'isomorphisme  $\tilde{H}_i(X) \simeq H_i(X)$  pour  $i \neq 0$

Si  $*$  est un point de  $X$ , comme l'inclusion  $i : \{*\} \rightarrow X$  a une rétraction, la suite exacte de la paire  $(X, \{*\})$  donne les isomorphismes  $H_i(X) \rightarrow H_i(X, \{*\})$  pour  $i \neq 0$ , et la suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow H_0(X, \{*\}) \longrightarrow 0$$

Comme le composé  $\Lambda \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda$  est l'identité de  $\Lambda$  (car induit par l'identité de  $\{*\}$ ), on voit que l'image de  $i_*$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(\varepsilon)$  dans  $H_0(X)$ . Il en résulte que  $\tilde{H}_0(X) \simeq \text{Ker}(\varepsilon) \simeq H_0(X)/\text{Im}(i_*) \simeq H_0(X, \{*\})$ .

Ainsi,  $\tilde{H}_i(X)$  est isomorphe à  $H_i(X, \{*\})$  pour tout  $i$ , et la suite exacte du triplet  $(X, A, \{*\})$  donne la suite exacte d'homologie réduite de la paire  $(X, A)$  dans le cas où  $A$  n'est pas vide :

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X, A) \longrightarrow 0$$

cette suite étant d'ailleurs trivialement exacte si  $A$  est vide.

On peut traiter de la même manière la suite exacte de Mayer-Vietoris. Par exemple, si  $X$  et  $Y$  sont des ouverts d'un espace  $E$ , et si  $X \cap Y$  n'est pas vide, on obtient la suite exacte

$$\begin{array}{c} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_1(X \cup Y) \\ \swarrow \partial_* \\ \tilde{H}_0(X \cap Y) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \oplus \tilde{H}_0(Y) \longrightarrow \tilde{H}_0(X \cup Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

cette dernière n'étant généralement pas exacte si  $X \cap Y$  est vide.

### 3 Homologie des sphères.

**4 Lemme.** *L'homologie réduite et l'homologie de la sphère  $\mathbb{S}^n$  à coefficients dans un anneau  $\Lambda$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n; \Lambda) &\simeq \begin{cases} \Lambda & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ H_i(\mathbb{S}^n; \Lambda) &\simeq \begin{cases} \Lambda \oplus \Lambda & \text{si } i = n = 0 \\ \Lambda & \text{si } i = 0 < n \text{ et si } 0 < i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas de l'homologie réduite, le cas de l'homologie non réduite s'en déduisant immédiatement. La sphère  $\mathbb{S}^0$  étant un espace réduit à deux points, son homologie

est  $\Lambda \oplus \Lambda$  concentrée en degré 0 et son homologie réduite est  $\Lambda$  concentrée en degré 0. Supposons maintenant  $n > 0$  et le résultat acquis pour la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Soient  $A$  et  $B$  les complémentaires du pôle nord et du pôle sud de la sphère  $\mathbb{S}^n$ .  $A$  et  $B$  sont contractiles, car homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$  par projection stéréographique, laquelle nous montre aussi que  $A \cap B$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  et a donc le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'homologie réduite nous donne pour tout  $i$  la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

ce qui résoud le cas de  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

**5 Proposition.** (*invariance topologique de la dimension*) Pour  $n \neq m$  ( $n$  et  $m$  entiers naturels),  $\mathbb{R}^n$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ .

*Démonstration.* Le cas  $n = 0$  étant trivial, on peut supposer  $n$  et  $m$  distincts de 0. Supposons qu'on ait un homéomorphisme  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Pour  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  induit un homéomorphisme  $\mathbb{R}^n - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{\varphi(a)\}$ , et donc un isomorphisme  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{a\}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^m - \{\varphi(a)\})$ . Mais  $\mathbb{R}^n - \{a\}$  a le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , et le lemme 4 montre qu'un tel isomorphisme n'existe que si  $n = m$ .  $\square$

**6 Proposition.** L'inclusion de la sphère  $\mathbb{S}^n$  dans le disque  $\mathbb{D}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$  n'a pas de rétraction continue.

*Démonstration.* Notons  $i$  cette inclusion et supposons qu'elle ait une rétraction  $r : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  continue. On a  $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^n}$ . En appliquant le foncteur  $\tilde{H}_n$  avec coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(\mathbb{D}^{n+1}) \\ & \searrow 1 & \downarrow r_* \\ & & \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \end{array} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow 1 & \downarrow \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

ce qui est impossible.  $\square$

**7 Théorème.** (*Théorème du point fixe de Brouwer*) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , toute application continue  $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  a un point fixe.

*Démonstration.* Ceci résulte de la proposition précédente et du lemme 1 de la leçon du 6 février.  $\square$

## 4 Le degré de Brouwer.

Si  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  est une application continue, on a le morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules  $f_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$ . Comme  $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ , l'application  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $f_*$  ne peut être que la multiplication par un entier relatif.

☞ **8 Définition.** Pour toute application continue  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , l'unique  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $f_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$  soit la multiplication par  $k$ , est appelé le « degré »<sup>(3)</sup> de  $f$ .

Évidemment, comme l'homologie est un foncteur, l'application identique de  $\mathbb{S}^n$  est de degré 1, de même que toute application homotope à l'application identique, et le degré du composé  $g \circ f$

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{f} \mathbb{S}^n \xrightarrow{g} \mathbb{S}^n$$

est le produit des degrés de  $f$  et de  $g$ . Bien sûr, le degré de  $f$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ . Toute application non surjective de  $\mathbb{S}^n$  vers  $\mathbb{S}^n$  est de degré 0, car elle se factorise par  $\mathbb{S}^n - \{a\}$  qui est contractile (où  $a$  est un point de  $\mathbb{S}^n$ ).

☞ **9 Lemme.** Le degré de l'application antipodale  $\mathbf{a} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  est  $(-1)^{n+1}$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 0$ , l'application antipodale échange les deux points (appelons-les  $a$  et  $b$ ) de  $\mathbb{S}^0$ . Or  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0)$  est le noyau de  $\varepsilon : C_0(\mathbb{S}^0) \rightarrow \mathbb{Z}$ , et on a  $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$ . Ce noyau est donc engendré par  $a - b$ . L'application induite sur l'homologie réduite par l'application antipodale envoie donc  $a - b$  sur  $b - a$ , et son degré est donc  $-1$ .

Supposons maintenant  $n \geq 1$ . La naturalité de la suite exacte de Mayer-Vietoris pour l'homologie réduite, appliquée aux deux ouverts  $U_N = \mathbb{S}^n - \{N\}$  et  $U_S = \mathbb{S}^n - \{S\}$  (où  $N$  et  $S$  sont les pôles nord et sud de  $\mathbb{S}^n$ ), et le fait que l'inclusion de  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $U_N \cap U_S$  commute avec  $\mathbf{a}$ , nous donnent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\simeq]{\partial_*} & \tilde{H}_{n-1}(U_N \cap U_S) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ \mathbf{a}_* \downarrow & & \downarrow \mathbf{a}_* & & \downarrow \mathbf{a}_* \\ \tilde{H}(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\simeq]{\partial_*} & \tilde{H}_{n-1}(U_S \cap U_N) & \xleftarrow[i_*]{} & \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

Nous arrivons maintenant à la seule subtilité de cette démonstration, qui est une affaire de signe. Noter que l'application antipodale  $\mathbf{a}$  échange les ouverts  $U_N$  et  $U_S$ , et c'est pourquoi le carré de gauche n'est commutatif que tel qu'il est écrit (avec  $U_N \cap U_S$  en haut et  $U_S \cap U_N$  en bas). Bien sûr, cet échange n'empêche pas le carré de droite d'être commutatif, puisque de toute façon  $U_S \cap U_N = U_N \cap U_S$ .

Comme l'inclusion de  $\mathbb{S}^{n-1}$  dans  $U_N \cap U_S$  est une équivalence d'homotopie,  $i_*$  est un isomorphisme. De plus, le connectant  $\partial_*$  de la suite exacte de Mayer-Vietoris change de signe quand on permute les deux ouverts (leçon du 21 mars). Les deux exemplaires de  $\partial_*$  dans le diagramme ci-dessus sont donc juste opposés l'un de l'autre. On en déduit que si  $\mathbf{a}_* : \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  est la multiplication par  $k$  ( $k = \pm 1$ ), alors  $\mathbf{a}_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$  est la multiplication par  $-k$ .  $\square$

☞ **Exercice 1.** (a) Montrer que la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  induit une application de degré  $-1$  sur  $\mathbb{S}^n$ .

---

3. Ou « degré de Brouwer ».

(b) Soit  $f$  une isométrie linéaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Montrer que  $f$  induit sur  $\mathbb{S}^n$  une application de degré  $\det(f)$ .

(c) En déduire une autre démonstration du lemme 9.

☞ **10 Corollaire.** *Si  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  n'a pas de point fixe, elle est homotope à l'application antipodale (et son degré est donc  $(-1)^{n+1}$ ).*

*Démonstration.* Si  $f$  n'a pas de point fixe,  $x$  et  $f(x)$  sont distincts pour tout  $x \in \mathbb{S}^n$ , autrement dit,  $f(x)$  n'est pas l'antipode de  $-x$ . Le segment de ligne droite reliant  $f(x)$  à  $-x$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ne passe donc pas par 0, et on peut le projeter sur la sphère à partir de 0. L'arc de grand cercle ainsi construit (reliant  $f(x)$  à  $-x$ ) est donc paramétré par la formule :

$$h_x(t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

Le membre de droite étant continu par rapport au couple  $(t, x)$ , on voit qu'on a une homotopie de  $f$  à  $\mathbf{a}$ , et donc que le degré de  $f$  est  $(-1)^{n+1}$ .  $\square$

On notera que la démonstration précédente est valable pour  $n = 0$ . De toute façon, il n'y a que 4 applications (toutes continues) de  $\mathbb{S}^0$  vers  $\mathbb{S}^0$ . Les deux applications constantes sont de degré 0, l'identité de degré 1, et l'échange des deux points de degré  $-1$ .

☞ **11 Corollaire.** *Il existe sur  $\mathbb{S}^n$  un champ continu de vecteurs tangents partout non nul si et seulement si  $n$  est impair.*

*Démonstration.* Si  $n$  est impair, posons  $n+1 = 2p$ . Les coordonnées d'un vecteur  $x$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  peuvent être écrites  $(a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)$ . L'application qui envoie tout  $x = (a_1, b_1, \dots, a_p, b_p) \in \mathbb{S}^n$  sur  $V_x = (-b_1, a_1, \dots, -b_p, a_p)$  est donc un champ de vecteurs tangent à la sphère, puisque  $\langle x, V_x \rangle = 0$ , et ce champ de vecteurs ne s'annule pas.

Réciproquement, Soit  $V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^n$  qui ne s'annule pas. Posons, pour tout  $x \in \mathbb{S}^n$  et tout  $t \in [0, 1]$  :

$$h(x, t) = \frac{x + tV_x}{\|x + tV_x\|}$$

Noter que  $x + tV_x$  ne peut pas être nul, car comme  $\langle x, V_x \rangle = 0$ , on aurait  $\|x\| + t^2\|V_x\| = 0$ . La formule ci-dessus définit donc une homotopie de l'application identique de  $\mathbb{S}^n$  (quand  $t = 0$ ) à l'application  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x + V_x}{\|x + V_x\|}$$

qui n'a pas de point fixe car  $x$  et  $V_x$  formant un système libre,  $x$  ne peut pas être colinéaire à  $x + V_x$ . On voit donc d'après le corollaire précédent que  $f$  est à la fois de degré 1 et de degré  $(-1)^{n+1}$ , ce qui implique que  $n$  est impair.  $\square$

☞ **12 Corollaire.** *Si  $n$  est pair et si le groupe discret  $G$  agit librement et continuellement sur  $\mathbb{S}^n$ , alors  $G$  est 0 ou est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $g \in G$ , l'application  $x \mapsto g.x$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^n$ . Son degré est donc inversible dans  $\mathbb{Z}$  et ne peut être que  $\pm 1$ . Mais si  $g$  n'est pas l'élément neutre de  $G$ , l'application  $x \mapsto g.x$  n'a pas de point fixe et son degré est donc  $(-1)^{n+1} = -1$ , puisque  $n$  est pair.  $G$  est donc envoyé dans le groupe  $\{-1, +1\}$  par un homomorphisme (vérification facile) qui envoie tous les éléments autres que l'élément neutre sur  $-1$ , et qui est donc injective puisque son noyau est réduit à l'élément neutre. Ceci n'est possible que si  $G$  a au plus deux éléments.  $\square$

**13 Remarque.** Bien sûr,  $\mathbb{Z}/2$  agit librement et continuellement sur  $\mathbb{S}^n$  (pour tout  $n$ ) par l'action antipodale. On peut déduire par exemple du lemme ci-dessus que toute application continue  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  telle que  $f^p = 1_{\mathbb{S}^{2n}}$  a un point fixe si  $p$  est un nombre premier impair. En effet, cette application détermine une action continue du groupe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur la sphère. D'après le lemme, elle ne saurait être libre, ce qui signifie qu'une au moins de ses orbites n'a pas  $p$  éléments. Mais le nombre d'éléments d'une orbite divise le cardinal du groupe qui agit (car toute orbite est en bijection avec le quotient du groupe par l'un de ses sous-groupes). Le nombre d'éléments d'une orbite ne peut donc être que  $p$  ou 1.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 28 mars 2012.

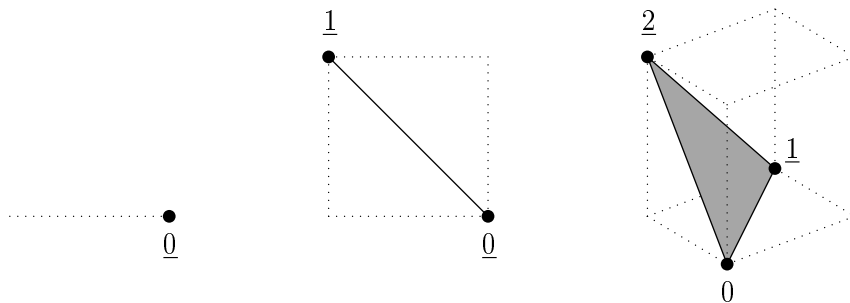
## 1 Chaînes singulières d'un espace topologique.

☞ **1 Définition.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le «  $n$ -simplexe topologique standard »,  $\Delta_n$ , est défini par :

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

Le point  $(t_0, \dots, t_n)$  tel que  $t_i = 1$  et  $t_j = 0$  pour  $j \neq i$  est appelé le «  $i^{\text{ième}}$  sommet » de  $\Delta_n$  et noté  $\underline{i}$ .

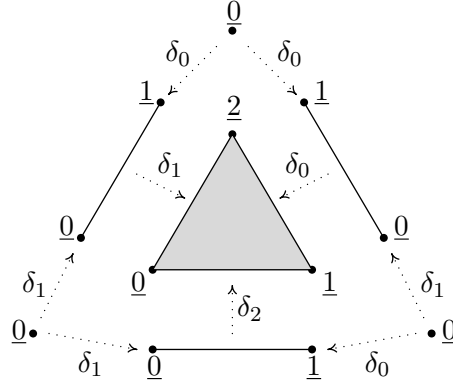
La figure ci-dessous représente  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ( $[0, 1]^{n+1}$  est figuré en pointillés) :



Bien sûr,  $\Delta_n$  est un espace compact et c'est l'enveloppe convexe (dans l'espace affine  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) de ses sommets. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n+1$ , il existe une unique application affine  $\delta_i : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$  telle que

$$\begin{cases} \delta_i(\underline{j}) = \underline{j} & \text{si } j < i \\ \delta_i(\underline{j}) = \underline{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

L'application  $\delta_i$  est appelée «  $i^{\text{ième}}$  face ». C'est en fait l'unique application affine qui induit sur les ensembles ordonnés de sommets une application strictement croissante dont l'image ne contient pas  $\underline{i}$ . La figure ci-dessous représente le 2-simplexe  $\Delta_2$ , trois exemplaires de  $\Delta_1$  et les trois applications  $\delta_0, \delta_1, \delta_2 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ , trois exemplaires de  $\Delta_0$  et trois fois les deux applications  $\delta_0, \delta_1 : \Delta_0 \rightarrow \Delta_1$ .

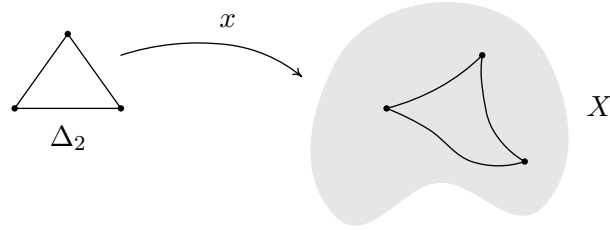


On remarque, qu'au moins dans le cas de la figure, on a les relations  $\delta_2 \circ \delta_1 = \delta_1 \circ \delta_1$ ,  $\delta_2 \circ \delta_0 = \delta_0 \circ \delta_1$  et  $\delta_1 \circ \delta_0 = \delta_0 \circ \delta_0$ .

**2 Définition.** Un «  $n$ -simplexe singulier » d'un espace topologique  $X$  est une application continue  $x : \Delta_n \rightarrow X$ . L'ensemble des  $n$ -simplexes singuliers de  $X$  est noté  $S_n(X)$ .

Pour tout anneau (commutatif unitaire)  $\Lambda$ , le  $\Lambda$ -module libre sur  $S_n(X)$  est noté  $C_n(X)$  (où  $C_n(X; \Lambda)$  s'il est nécessaire de préciser  $\Lambda$ ) et ses éléments sont appelés les «  $n$ -chaînes singulières de  $X$  (à coefficients dans  $\Lambda$ ) ».

La figure ci-dessous représente un 2-simplexe singulier d'un espace  $X$  (le triangle déformé étant l'image de  $x$ ).



$S_n(X)$  est évidemment en général un très gros ensemble, car, sauf dans des cas bien particuliers, il y a beaucoup d'applications continues de  $\Delta_n$  vers  $X$ . Noter que  $S_0(X)$  s'identifie canoniquement à l'ensemble sous-jacent à  $X$ , et que  $S_1(X)$  n'est autre que l'ensemble des chemins de  $X$ . Une  $n$ -chaîne singulière est donc « une combinaison linéaire formelle » de  $n$ -simplexes singuliers.<sup>(1)</sup>

**3 Remarque.** La notion d'application affine<sup>(2)</sup>  $f : \Delta_n \rightarrow X$  a un sens pour tout espace affine (réel)  $X$ , et une telle application est complètement déterminée par les images qu'elle donne des sommets de  $\Delta_n$ , lesquelles images peuvent être arbitraires. En effet, si pour tout  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ),  $f(i)$  est donné dans  $X$ , l'application  $f$  est donnée par

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0 f(0) + \dots + t_n f(n)$$

1. Rappelons qu'une combinaison linéaire fait toujours intervenir un nombre fini de vecteurs.

2. Une application affine est une application qui préserve les barycentres.

ce qui est un barycentre bien défini dans  $X$  puisque  $t_0 + \dots + t_n = 1$ . De plus, comme les  $t_i$  sont positifs ou nuls, les barycentres auxquels nous avons affaire sont des barycentres à coefficients positifs. Il en résulte que si  $X$  est maintenant un sous-ensemble convexe d'un espace affine, tout ce qui précède reste valable.

On a donc, dans le cas où  $X$  est un sous-ensemble convexe d'un espace affine, la notion de «  $n$ -simplexe singulier affine », et le module  $C_n(X)$  a dans ce cas un sous-module  $A_n(X)$  des «  $n$ -chaînes singulières affines ». C'est le cas en particulier quand  $X = \Delta_m$ , qui est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Dans ce cas particulier, on peut aller un peu plus loin et considérer les applications affines  $\Delta_n \rightarrow \Delta_m$  qui sont injectives et envoient les sommets de  $\Delta_n$  sur des sommets de  $\Delta_m$  en respectant l'ordre, autrement-dit, restreinte aux sommets, une telle application est strictement croissante. Elle est dite « simpliciale affine », et on a un sous-module  $SA_n(\Delta_m) \subset A_n(\Delta_m)$  des  $n$ -chaînes simpliciale affines de  $\Delta_m$ , dont nous ferons usage plus loin.

Les constructions  $S_n$  et  $C_n$  sont fonctorielles. Autrement-dit, elles ne s'appliquent pas seulement aux espaces topologiques mais aussi aux applications continues entre espaces topologiques, et elles respectent les identités et la composition. En effet, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, et si  $x : \Delta_n \rightarrow X$  est un  $n$ -simplexe singulier de  $X$ , le composé  $f \circ x : \Delta_n \rightarrow Y$  est un  $n$ -simplexe singulier de  $Y$ , qu'on notera  $S_n(f)(x)$  ou  $f_*(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{x} & X \\ & \searrow f_*(x) & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Ainsi,  $S_n(f)$  est une application de  $S_n(X)$  vers  $S_n(Y)$ . Bien sûr,  $S_n(f)$  détermine une unique application linéaire  $C_n(f) : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ . La vérification du fait que  $S_n$  et  $C_n$  sont des foncteurs est triviale.  $C_n(f)$  sera aussi notée  $f_*$ .

Il y a un  $n$ -simplexe singulier qui joue un rôle particulier. C'est l'application identique  $\Delta_n \rightarrow \Delta_n$ . Ce  $n$ -simplexe singulier de  $\Delta_n$  sera noté  $e_n$  et appelé le «  $n$ -simplexe singulier universel ». La raison de cette appellation est que pour tout  $n$ -simplexe singulier  $x$  de n'importe quel espace  $X$  il existe une unique application continue  $f : \Delta_n \rightarrow X$  telle que  $S_n(f)(e_n) = x$ . Cette égalité pouvant être écrite  $f \circ e_n = x$ , et comme  $e_n$  est l'application identique de  $\Delta_n$ , on voit qu'on a tout simplement  $f = x$ , autrement-dit, on a  $x = x_*(e_n)$ .

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \xrightarrow{x} & X \\ e_n \uparrow & \nearrow x_*(e_n) & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

En d'autres termes, le foncteur (covariant)  $S_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est représentable avec le couple  $(\Delta_n, e_n)$  pour classifiant.

L'existence d'un  $n$ -simplexe universel a pour conséquence que pour tout foncteur  $G : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{A-Mod}$ , toute transformation naturelle  $\varphi : C_n \rightarrow G$  est déterminée par l'élément  $\varphi_{\Delta_n}(e_n)$  (qui

appartient à  $G(\Delta_n)$ . En effet, la naturalité de  $\varphi$  appliquée à un  $n$ -simplexe singulier quelconque  $x : \Delta_n \rightarrow X$  d'un espace topologique quelconque  $X$ , donne le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{x_*} & C_n(X) \\ \varphi_{\Delta_n} \downarrow & & \downarrow \varphi_X \\ G(\Delta_n) & \xrightarrow{G(x)} & G(X) \end{array}$$

et on a donc  $\varphi_X(x) = \varphi_X(x_*(e_n)) = G(x)(\varphi_{\Delta_n}(e_n))$ .

Par ailleurs, comme les  $n$ -simplexes singuliers de  $X$  forment une  $\Lambda$ -base de  $C_n(X)$ , on voit que la donnée d'un élément quelconque  $a$  de  $G(\Delta_n)$  définit une unique transformation naturelle  $\varphi : C_n \rightarrow G$ . Il suffit en effet de la définir en posant pour tout  $n$ -simplexe singulier  $x$  de  $X$ ,  $\varphi_X(x) = G(x)(a)$ .<sup>(3)</sup>

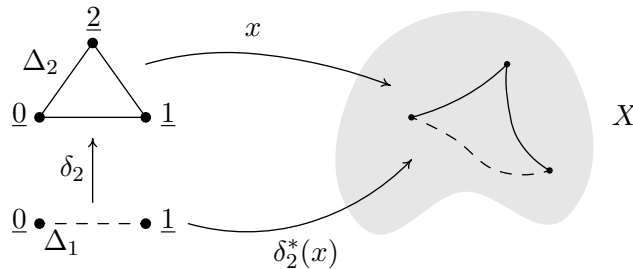
## 2 Le complexes des chaînes singulières.

Nous allons maintenant définir une notion de « bord » pour les chaînes singulières, et organiser les modules  $C_n(X)$  en un DG-module. On pose

$$C_*(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n(X)$$

$C_*(X)$  est donc un  $\Lambda$ -module (positivement) gradué, ses éléments homogènes de degré  $n$  étant ceux de  $C_n(X)$ .

L'application  $i^{\text{ième}}$  face  $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$  induit (par transposition) une application  $\delta_i^* : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  pour tout espace  $X$ . Il suffit en effet de poser  $\delta_i^*(x) = x \circ \delta_i$  (pour  $x \in S_n(X)$ ). Cette application s'étend de manière unique en une application  $\Lambda$ -linéaire  $\delta_i^* : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$



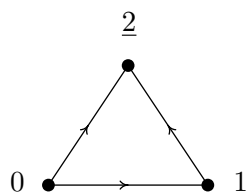
Dans la figure ci-dessus, le côté tireté du 2-simplexe singulier  $x$  est le 1-simplexe singulier  $\delta_2^*(x) = x \circ \delta_2$ . Le « bord » d'un simplexe singulier est intuitivement composé de la réunion de ses faces. Nous allons donc le définir dans ce cadre algébrique comme la somme de ses faces, en

3. Le phénomène mis en évidence ici est bien sûr une variante  $\Lambda$ -linéaire du lemme de Yoneda.

faisant attention à introduire les signes qui conviennent pour corriger les défauts d'orientation des faces. La formule qui convient pour définir le bord de  $x \in C_n(X)$  est :

$$\partial(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i^*(x)$$

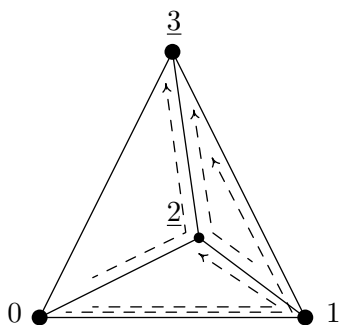
Cette formule ne tombe pas complètement du ciel. Il suffit en effet de dessiner  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  pour être convaincu que la formule ci-dessus est la bonne. Dans le cas de  $\Delta_2$ , on voit sur la figure ci-dessous comment les trois côtés sont orientés, l'orientation étant déterminée par l'ordre des sommets.



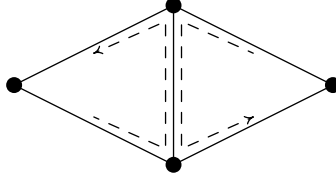
On voit que le côté opposé à  $\underline{1}$  est à une orientation incompatible avec celles des deux autres côtés. Il sera donc compté négativement, ce qui donnera

$$\partial(x) = \delta_0^*(x) - \delta_1^*(x) + \delta_2^*(x)$$

Dans le cas de  $\Delta_3$ , on a sur chaque face un sens de rotation qui est déterminé par l'ordre des trois sommets de cette face.



Si les faces étaient correctement orientées, en se plaçant au centre du simplexe, on devrait voir le même sens de rotation quand on regarde l'une quelconque des quatre faces. Or, ce n'est pas le cas. Quand on regarde les faces opposées à  $\underline{0}$  et à  $\underline{2}$ , la rotation se fait vers la droite, alors qu'elle se fait vers la gauche pour les faces opposées à  $\underline{1}$  et à  $\underline{3}$ . En fait, ceci n'a rien d'étonnant puisque si on considère deux triangles de même orientation ayant un côté commun, on voit que les deux triangles induisent des orientations opposées sur ce côté commun :



Si les faces de  $\Delta_3$  étaient d'emblée bien orientées, elles induiraient des orientations opposées sur les arêtes de  $\Delta_3$ , ce qui est bien sûr impossible puisque c'est l'ordre des sommets qui détermine l'orientation des arêtes.

Pour avoir des orientations cohérentes, il faut donc faire la somme alternée des faces. Bien entendu, les considérations ci-dessus ne démontrent rien. Elles servent juste à justifier la formule qui définit le bord.

Le bord  $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  défini par la formule ci-dessus est donc une application  $\Lambda$ -linéaire, et c'est une transformation naturelle de  $C_n$  vers  $C_{n-1}$ . En effet, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, on a, pour tout  $x \in C_n(X)$ ,  $\delta_i^*(f_*(x)) = f \circ x \circ \delta_i = f_*(\delta_i^*(x))$ , et donc  $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$ . En conséquence,  $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$  est complètement déterminé par l'élément  $\partial(e_n) \in C_{n-1}(\Delta_n)$ , et pour montrer que  $\partial \circ \partial = 0$ , il suffit donc de montrer que  $\partial(\partial(e_n)) = 0$ , car on aura alors, pour tout  $x \in S_n(X)$ ,  $\partial\partial(x) = \partial\partial(x_*(e_n)) = x_*(\partial\partial(e_n)) = 0$ .

$\partial\partial(e_n)$  est une combinaison linéaire des  $(n-2)$ -simplexes simpliciaux affines de  $\Delta_n$ . Chacun de ces  $(n-2)$ -simplexes est déterminé par ses  $n-1$  sommets. Dans le calcul de  $\partial\partial(e_n)$ , chacun est obtenu deux fois, puisqu'il y a deux manières de retirer successivement deux éléments donnés de l'ensemble ordonné  $\{0, \dots, n\}$ . Si on a  $i < j$ , et qu'on retire d'abord le sommet  $j$ , puis le sommet  $i$ , le terme obtenu aura pour signe  $(-1)^i(-1)^j$ . Si au contraire on retire d'abord le sommet  $i$ , le rang du sommet  $j$  se trouve diminué de 1, et le terme obtenu aura pour signe  $(-1)^i(-1)^{j-1}$ , qui est opposé au précédent. On voit donc que chaque  $(n-2)$ -simplexe est compté deux fois avec des signes opposés dans le calcul de  $\partial\partial(e_n)$  et on a donc  $\partial\partial(e_n) = 0$ .

On a donc construit pour chaque espace topologique  $X$  un DG-module qu'on notera  $C_*(X)$ , et cette construction est fonctorielle en  $X$ . On peut maintenant composer ce foncteur avec le foncteur homologie. On obtient ainsi un nouveau foncteur de la catégorie **Top** vers celle des  $\Lambda$ -modules gradués. Ce foncteur est appelé l'« homologie singulière ». L'homologie singulière de  $X$  est notée  $H_*(X)$ , ou  $H_*(X; \Lambda)$ .

On définit, pour tout espace  $X$ , une augmentation  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \Lambda$  en envoyant tout élément de  $S_0(X)$  sur 1. Il est facile de vérifier la naturalité de  $\varepsilon$ , sa surjectivité dans le cas où  $X$  n'est pas vide, et le fait que le composé

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda$$

est nul.

On va montrer dans les sections qui suivent que le foncteur  $C_*$  des chaînes singulières est une théorie de chaînes.

☞ **4 Lemme.** *Le foncteur  $C_*$  des chaînes singulières satisfait l'axiome (1) des théories de chaînes.*

*Démonstration.* Soit  $X$  un espace topologique,  $A$  et  $B$  deux parties de  $X$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n(A)$  et  $S_n(B)$  sont des sous-ensembles de  $S_n(X)$ , et leur intersection est  $S_n(A \cap B)$ . Il en résulte que  $C_*(A)$  et  $C_*(B)$  sont des sous-modules de  $C_*(X)$ , et même bien sûr des sous-DG-modules, puisqu'ils sont clairement stables par les opérations de faces. En conséquence  $C_*(A \cap B)$  est juste l'intersection des sous-DG-modules  $C_*(A)$  et  $C_*(B)$  de  $C_*(X)$ , et le carré de l'axiome (1) des théories de chaînes est cartésien.  $\square$

### 3 Le cas du singleton (axiome 4).

Réexaminons les constructions précédentes dans le cas où l'espace  $X = \{*\}$  est réduit à un seul point. Il y a bien sûr, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une unique application (continue)  $\Delta_n \rightarrow \{*\}$ . Par conséquent  $S_n(\{*\})$  est un singleton, et  $C_n(\{*\})$  est de dimension 1, c'est-à-dire isomorphe à  $\Lambda$ . La suite :

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow C_0(X) \xleftarrow{\partial} C_1(X) \xleftarrow{\partial} C_2(X) \xleftarrow{\partial} \dots \\ \dots \xleftarrow{\partial} C_n(X) \xleftarrow{\partial} C_{n+1}(X) \xleftarrow{\partial} \dots \end{aligned}$$

se réduit alors à la suite :

$$0 \longleftarrow \Lambda \xleftarrow{0} \Lambda \xleftarrow{1} \Lambda \xleftarrow{0} \Lambda \xleftarrow{1} \Lambda \longleftarrow \dots$$

dans laquelle 0 est la flèche nulle et 1 la flèche identité. En effet, en notant  $x_n$  l'unique vecteur de la base canonique de  $C_n(\{*\})$ , on a  $\partial(x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x_{n-1}$ , ce qui vaut 0 si  $n$  est impair et  $x_{n-1}$  si  $n$  est pair. Cette suite est exacte sauf en degré 0. L'homologie de ce DG-module est donc telle que  $H_0(\{*\}) \simeq \Lambda$  et  $H_i(\{*\}) = 0$  pour  $i \neq 0$ . Par ailleurs, l'isomorphisme  $H_0(\{*\}) \rightarrow \Lambda$  est canonique puisqu'il est induit par l'augmentation canonique  $\varepsilon : C_0(\{*\}) \rightarrow \Lambda$ .

☞ **5 Définition.** *Un espace topologique  $X$  est dit « acyclique » (ou «  $\Lambda$ -acyclique ») si l'unique application  $X \rightarrow \{*\}$  induit un isomorphisme en homologie.*

### 4 La méthode des modèles acycliques.

Par définition, le module  $C_n(X)$  des  $n$ -chaînes singulières de  $X$  est un module libre. Sa « base canonique »  $S_n(X)$  est l'ensemble des  $n$ -simplexes singuliers de  $X$ . Si on veut définir une application linéaire de  $C_n(X)$  vers un module  $G$ , il suffit donc de définir les images de ces vecteurs de base. Mais en fait, on a beaucoup mieux que cela, car on peut définir une application linéaire  $\varphi_X : C_n(X) \rightarrow G(X)$  pour tous les espaces  $X$  (où on suppose maintenant que  $G$  est un foncteur

parallèle à  $C_n$ ), d'une manière naturelle en  $X$ , et ceci en choisissant l'image d'un seul vecteur. En effet, si  $x : \Delta_n \rightarrow X$  est une application continue, on devra avoir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta_n) & \xrightarrow{\varphi_{\Delta_n}} & G(\Delta_n) \\ x_* \downarrow & & \downarrow x_* \\ C_n(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \end{array}$$

et on aura  $\varphi_X(x_*(e_n)) = x_*(\varphi_{\Delta_n}(e_n))$ , où  $e_n \in C_n(\Delta_n)$  est le  $n$ -simplexe universel de  $\Delta_n$ , c'est-à-dire l'application identique  $e_n = 1_{\Delta_n} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ . Mais alors, on a  $x_*(e_n) = x \circ e_n = x$ , et on voit que  $\varphi_X(x) = x_*(\varphi_{\Delta_n}(e_n))$ . Comme  $x$  est un vecteur arbitraire de la base canonique de  $C_n(X)$ , ceci définit l'application linéaire  $\varphi_X$  pour tout espace  $X$ , et il est facile de vérifier qu'elle est naturelle en  $X$ . En résumé, il y a exactement autant de transformations naturelles (linéaires)  $C_n \rightarrow G$  qu'il y a de choix pour  $\varphi_{\Delta_n}(e_n)$ , c'est-à-dire d'éléments dans  $G(\Delta_n)$ .<sup>(4)</sup>

Ainsi, l'introduction de la naturalité fait que  $C_n(X)$  est d'une certaine façon « naturellement libre sur une base faite d'un seul vecteur ». On peut maintenant passer de  $C_n$  à  $C_*$  (où  $C_*(X)$  sera juste vu comme un module gradué), ce qui ne change pas grand chose, puisque  $C_*(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n(X)$  est encore libre comme somme directe de modules libres. Mais cette fois-ci le « vecteur de base »  $e_n$  doit être remplacé par la « famille de vecteurs de base »  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On aura autant de transformations naturelles linéaires de degré 0  $C_* \rightarrow G$  (où cette fois  $G$  est un foncteur parallèle à  $C_*$ ) que de manières de choisir un élément dans chaque  $G_n(\Delta_n)$ .

La situation se complique un peu si on demande maintenant que la catégorie cible de  $C_*$  et  $G$  soit non plus celle des  $\Lambda$ -modules gradués, mais celle des DGA- $\Lambda$ -modules, car notre transformation naturelle  $\varphi : C_* \rightarrow G$  va devoir respecter les augmentations et commuter aux opérateurs bord  $\partial$ , et son existence même n'est plus garantie. On s'en tire toutefois très bien en construisant  $\varphi$  degré par degré par récurrence sur le degré (et en faisant une hypothèse d'« acyclicité » qui sera précisée plus loin). Pour commencer, c'est-à-dire pour construire  $\varphi : C_0(X) \rightarrow G_0(X)$  en degré 0, la seule contrainte est de respecter les augmentations. Autrement-dit, on devra avoir  $\varepsilon\varphi = \varepsilon$ . Comme on l'a vu, la composante de degré 0 de  $\varphi$  est déterminée (pour tous les espaces  $X$ ) par  $\varphi_{\Delta_0}(e_0)$ . Comme  $\varepsilon$  est surjectif, on peut choisir pour  $\varphi_{\Delta_0}(e_0)$  un élément tel que  $\varepsilon(\varphi_{\Delta_0}(e_0)) = 1 = \varepsilon(e_0)$ , ce qui par naturalité entraînera  $\varepsilon\varphi = \varepsilon$  pour tout espace  $X$ . Pour continuer, on suppose  $\varphi$  construit jusqu'au degré  $n-1$ , et on doit choisir convenablement  $\varphi_{\Delta_n}(e_n)$ . En fait, on doit juste le choisir tel que  $\partial(\varphi_{\Delta_n}(e_n)) = \varphi_{\Delta_n}(\partial(e_n))$ , ce qui suffira, toujours par naturalité, à assurer que  $\varphi$  commute aux bords pour tout espace  $X$ . On remarque que  $\partial(\varphi_{\Delta_n}(\partial(e_n))) = \varphi_{\Delta_n}(\partial(\partial(e_n))) = 0$ . Noter que ces égalités ont un sens car  $\varphi_{\Delta_n}$  n'y

---

4. Le lecteur aura bien sûr remarqué que je viens juste de redémontrer le lemme de Yoneda dans le cas particulier du foncteur représentable  $S_n$ .

intervient que sur des éléments de degré au plus  $n - 1$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
C_*(\Delta_n) & & e_n & \xrightarrow{\partial} & \partial(e_n) & \xrightarrow{\partial} & \partial\partial(e_n) = 0 \\
\downarrow \varphi_{\Delta_n} & & \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\
G(\Delta_n) & & \varphi_{\Delta_n}(e_n) & \xrightarrow{\partial} & \varphi_{\Delta_n}(\partial(e_n)) & \xrightarrow{\partial} & 0
\end{array}$$

Si maintenant on suppose que  $G(\Delta_n)$  est un DGA-module acyclique, on voit que  $\varphi_{\Delta_n}(\partial(e_n))$  est dans l'image de  $\partial : G_n(\Delta_n) \rightarrow G_{n-1}(\Delta_n)$ , et qu'il est donc possible de choisir  $\varphi_{\Delta_n}(e_n)$  satisfaisant l'égalité  $\partial(\varphi_{\Delta_n}(e_n)) = \varphi_{\Delta_n}(\partial(e_n))$ . On a ainsi construit une transformation naturelle  $\varphi : C_* \rightarrow G$  avec  $C_*$  et  $G$  à valeur dans les DGA- $\Lambda$ -modules.

Ce qui précède est en réalité une démonstration (esquissée) du théorème des modèles acycliques dans un cas particulier.<sup>(5)</sup> Nous allons bien sûr énoncer et prouver un théorème plus général, dans lequel le foncteur  $C_*$  est remplacé par un foncteur  $F$  quelconque ayant certaines des propriétés de  $C_*$ , c'est-à-dire « libre sur une sous-catégorie » (définition 6 ci-dessous). On montrera de plus, par la même méthode, que si on a deux transformations naturelles de  $F$  vers  $G$ , elles sont naturellement homotopes. Enfin, pour pouvoir prouver dans certaines situations l'unicité de la transformation naturelle construite par le théorème, on a besoin d'imposer aux éléments qui jouent le rôle que jouaient ci-dessus les  $\varphi_{\Delta_n}(e_n)$  d'appartenir à un certain sous-module du module qui va jouer le rôle de  $G(\Delta_n)$ . C'est ce sous-module qui doit être acyclique, et suffisamment naturel, pour que la construction puisse se faire.

## 5 Foncteurs libres sur une sous-catégorie.

**6 Définition.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $\mathcal{M}$  une petite sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ , et  $F$  un foncteur (covariant) de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des DGA- $\Lambda$ -modules. On se donne une famille  $e$  indexée par l'ensemble des objets de  $\mathcal{M}$ , telle que pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ ,  $e_M$  soit un élément homogène de  $F(M)$ . On dit que «  $F$  est libre sur  $(\mathcal{M}, e)$  », si pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  le  $\Lambda$ -module  $F(X)$  admet la famille

$$(f_*(e_M))_{M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M}), f \in \mathcal{C}(M, X)}$$

pour  $\Lambda$ -base, et si pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ , le sous-module de  $F(M)$  engendré par les  $f_*(e_N)$  tels que  $N \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$  et  $f \in \mathcal{C}(N, M)$  est un sous-DGA- $\Lambda$ -module de  $F(M)$ .

La dernière condition, que le module engendré par les éléments de la forme  $f_*(e_N)$  avec  $f$  dans  $\mathcal{M}$  soit un sous-DGA- $\Lambda$ -module de  $F(M)$ , se résume bien sûr à la stabilité de ce sous-module par  $\partial$  et au fait que la restriction de  $\varepsilon$  à ce sous-module soit surjective, fait que nous exprimerons en disant que ce sous-module est « stable par  $\varepsilon$  ».<sup>(6)</sup>

5. Les « modèles » en question sont dans l'exemple précédent les couples  $(\Delta_n, e_n)$ , et ces modèles sont « acycliques » car  $G(\Delta_n)$  est acyclique.

6. La définition des foncteurs libres qu'on trouvera le plus souvent dans la littérature ne fait pas mention de cette dernière condition, ni bien sûr des flèches de  $\mathcal{M}$ , qui se résume alors à un ensemble d'objets de  $\mathcal{C}$ , qu'on appelle des « modèles ». La définition plus sophistiquée donnée ici est utilisée pour démontrer le point (3) du théorème 8 ci-dessous.

☞ **7 Exemple.** L'exemple fondamental de foncteur libre sur une sous-catégorie est bien sûr le foncteur des chaînes singulières  $C_*$  dont on a parlé ci-dessus. On prend donc pour  $\mathcal{C}$  la catégorie **Top** des espaces topologiques et applications continues et pour  $\mathcal{M}$  n'importe quelle sous-catégorie de **Top** dont les objets sont les simplexes topologiques standard  $\Delta_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), et dont les flèches comportent au moins les opérations de faces  $\delta_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ . On prend pour  $e_{\Delta_n}$  (qu'on notera plutôt  $e_n$ ) le simplexe universel  $e_n = 1_{\Delta_n} : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ .

Pour tout espace topologique  $X$ , et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(X)$  est bien, de par sa définition même, un module libre sur les  $f_*(e_n)$  (où  $f$  parcourt **Top**( $\Delta_n, X$ )). De plus, pour tout élément de  $C_p(\Delta_n)$  de la forme  $f_*(e_p)$  où  $f : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$  est une flèche de  $\mathcal{M}$ ,  $\partial(f_*(e_p))$ , qui s'écrit encore  $f_*(\partial(e_p))$  est une combinaison linéaire de simplexes de la forme  $f_*(\delta_q)$ , où les  $\delta_q : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$  sont les opérations de faces. Les composés  $f \circ \delta_q$  étant dans  $\mathcal{M}$ , on voit que le sous-module engendré par les éléments de la forme  $f_*(e_p)$  avec  $f$  dans  $\mathcal{M}$ , est stable par  $\partial$ . Il est de même stable par  $\varepsilon$ , puisque  $\varepsilon(e_n) = 1$ .

Cet exemple admet des variations comme celle qui consiste à prendre pour  $\mathcal{C}$  la catégorie **Top**  $\times$  **Top** des paires d'espaces topologiques et pour  $F$  le foncteur  $(X, Y) \mapsto C_*(X) \otimes C_*(Y)$ . Dans ce cas, on prend pour  $\mathcal{M}$  une catégorie dont les objets sont les  $(\Delta_n, \Delta_m)$  ( $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ), et dont les flèches contiennent au moins les couples de faces. L'élément  $e_{(\Delta_n, \Delta_m)}$  est alors le tenseur  $e_n \otimes e_m$  (toujours avec  $e_n = 1_{\Delta_n}$ ). On raisonne de même que ci-dessus.

## 6 Énoncé et preuve du théorème des modèles acycliques.

☞ **8 Théorème.** (Théorème des modèles acycliques) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $F$  et  $G$  des foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \text{DGA-Mod}_\Lambda$ . Soit  $\mathcal{M}$  une petite sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ . On suppose que  $F$  est libre sur  $(\mathcal{M}, e)$  et qu'on a un foncteur  $A : \mathcal{M} \rightarrow \text{DGA-Mod}_\Lambda$  tel que  $A(M)$  soit un sous-DGA- $\Lambda$ -module acyclique de  $G(M)$ , naturel en  $M$ .<sup>(7)</sup> Alors :

- (1) il existe une transformation naturelle  $\varphi : F \rightarrow G$  telle que pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ ,  $\varphi(e_M) \in A(M)$ ,
- (2) entre deux telles transformations naturelles il existe une homotopie naturelle  $h$  telle que pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ ,  $h(e_M) \in A(M)$ .
- (3) si pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ ,  $A_{|e_M|+1}(M) = 0$ , la transformation dont l'existence est affirmée par (1) est unique.

*Démonstration.* (1) Notons pour commencer que le fait qu'il s'agisse ici de DGA-modules et non pas de DG-modules est essentiel. En effet, en l'absence d'augmentations surjectives  $\varepsilon : F_0(X) \rightarrow \Lambda$  et  $\varepsilon : G_0(X) \rightarrow \Lambda$ , la transformation nulle  $0 : F \rightarrow G$  ferait l'affaire et le point (1) du théorème serait sans intérêt. À cause de la présence de ces augmentations, on doit avoir le

---

7. Autrement-dit, pour toute flèche  $f : M \rightarrow N$  de  $\mathcal{M}$ ,  $f_* : G(M) \rightarrow G(N)$  envoie  $A(M)$  dans  $A(N)$ .

triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_0(X) & & \\ \varphi_X \downarrow & \searrow \varepsilon & \\ G_0(X) & \nearrow \varepsilon & \Lambda \end{array}$$

et le fait que  $\varepsilon : F_0(X) \rightarrow \Lambda$  soit surjective interdit  $\varphi_X = 0$ .

Pour tout entier  $i$ , on notera  $\mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$  l'ensemble des objets  $M$  de  $\mathcal{M}$  tels que  $|e_M| = i$ . Pour ne pas refaire pour  $i > 0$  une démonstration presque identique à celle qu'on ferait pour  $i = 0$ , on pose  $F_{-1}(X) = G_{-1}(X) = A_{-1}(X) = \Lambda$ , on renomme  $\varepsilon$  en  $\partial$ , et on définit  $\varphi_X : F_{-1}(X) \rightarrow G_{-1}(X)$  comme l'identité de  $\Lambda$ . On a donc amorcé une récurrence commençant à  $i = -1$ , et on peut maintenant supposer  $i \geq 0$ . Noter que par hypothèse la suite

$$\mathbf{9} \quad \cdots \xrightarrow{\partial} A_i(M) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} A_0(M) \xrightarrow{\partial} A_{-1}(M) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})$ .

On suppose donc maintenant  $i \geq 0$ , et la transformation naturelle  $\varphi$  construite pour tous les degrés strictement inférieurs à  $i$ . Précisément, notre hypothèse de récurrence est que pour tout  $j < i$  :

- $\varphi_X : F_j(X) \rightarrow G_j(X)$  est défini, linéaire et naturel en  $X$ ,
- $\varphi_X \partial = \partial \varphi_X : F_j(X) \rightarrow G_{j-1}(X)$ ,
- $\varphi_N(e_N) \in A_j(N)$  pour tout  $N \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_j$ .

Il en résulte, pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$ , qu'on a  $\varphi_M(\partial(e_M)) \in A_{i-1}(M)$ .<sup>(8)</sup> En effet, comme  $F$  est libre sur  $(\mathcal{M}, e)$  (definition **6** (page 9)),  $\partial(e_M)$  s'écrit comme une somme finie :

$$\mathbf{10} \quad \partial(e_M) = \sum_k \lambda_k(f_k)_*(e_{N_k})$$

avec  $N_k \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_{i-1}$  et  $f_k \in \mathcal{M}(N_k, M)$  (et non pas seulement  $f_k \in \mathcal{C}(N_k, M)$ !). On a donc

$$\varphi_M(\partial(e_M)) = \sum_k \lambda_k \varphi_M((f_k)_*(e_{N_k})) = \sum_k \lambda_k (f_k)_*(\varphi_{N_k}(e_{N_k}))$$

par naturalité de  $\varphi$  appliquée à  $f_k : N_k \rightarrow M$ . Mais  $\varphi_{N_k}(e_{N_k}) \in A_{i-1}(N_k)$  et comme  $f_k$  est une flèche de  $\mathcal{M}$ ,  $(f_k)_*(\varphi_{N_k}(e_{N_k})) \in A_{i-1}(M)$  (rappelons que  $A$  est un foncteur défini sur  $\mathcal{M}$ ).

Par linéarité, il suffit de définir  $\varphi_X(f_*(e_M))$  pour  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$  et  $f \in \mathcal{C}(M, X)$ . Comme  $\varphi$

---

8. Le raisonnement qui consisterait à dire que ceci est vrai parce que  $\varphi_M(\partial(e_M)) = \partial(\varphi_M(e_M))$  et parce que  $A(M)$  est stable par  $\partial$  est évidemment incorrect, puisqu'à ce stade  $\varphi_M(e_M)$  n'est pas encore défini.

doit être naturelle, on doit avoir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_i(M) & \xrightarrow{\varphi_M} & G_i(M) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ F_i(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G_i(X) \end{array}$$

et on voit que  $\varphi_X(f_*(e_M))$  ne peut être que  $f_*(\varphi_M(e_M))$  et qu'il suffit donc de définir  $\varphi_M(e_M)$ . Comme on l'a vu ci-dessus,  $\varphi_M(\partial(e_M)) \in A_{i-1}(M)$ . Comme on a  $\partial(\varphi_M(\partial(e_M))) = \varphi_M(\partial(\partial(e_M))) = 0$ , et comme la suite **9** (page 11) est exacte, il existe un élément  $a$  (pas nécessairement unique) dans  $A_i(M)$  tel que  $\partial(a) = \varphi_M(\partial(e_M))$ . Il suffit de poser  $\varphi_M(e_M) = a$  pour avoir  $\partial(\varphi_M(e_M)) = \varphi_M(\partial(e_M))$ . On a donc défini  $\varphi$  en degré  $i$ , et la vérification du fait que  $\varphi : F_i \rightarrow G_i$  ainsi définie est naturelle résulte (comme dans la démonstration du lemme de Yoneda) du calcul suivant (où  $g : X \rightarrow Y$  est une flèche quelconque de  $\mathcal{C}$ ) :

$$\begin{aligned} g_*(\varphi_X(f_*(e_M))) &= g_*(f_*(\varphi_M(e_M))) && \text{(définition de } \varphi_X) \\ &= (g \circ f)_*(\varphi_M(e_M)) \\ &= \varphi_Y((g \circ f)_*(e_M)) && \text{(définition de } \varphi_Y) \\ &= \varphi_Y(g_*(f_*(e_M))) \end{aligned}$$

Il reste juste pour compléter notre récurrence à vérifier que  $\varphi_X \partial = \partial \varphi_X : F_i(X) \rightarrow G_{i-1}(X)$ . Pour chaque  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$ , on a construit  $\varphi_M(e_M)$  de telle sorte que  $\partial(\varphi_M(e_M)) = \varphi_M(\partial(e_M))$ . Pour toute flèche  $f : M \rightarrow X$ , on a donc

$$\begin{aligned} \partial \varphi_X(f_*(e_M)) &= \partial f_*(\varphi_M(e_M)) && \text{(naturalité de } \varphi) \\ &= f_* \partial(\varphi_M(e_M)) && (f_* \text{ morphisme de DGA-modules}) \\ &= f_* \varphi_M(\partial(e_M)) && \text{(par construction de } \varphi_M(e_M)) \\ &= \varphi_X(f_*(\partial(e_M))) && \text{(naturalité de } \varphi) \\ &= \varphi_X(\partial(f_*(e_M))) && (f_* \text{ morphisme de DGA-modules}) \end{aligned}$$

(2) Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux transformations naturelles de  $F$  vers  $G$  telles que  $\varphi_M(e_M)$  et  $\psi_M(e_M)$  soient dans  $A(M)$  pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{M}$ , on construit une homotopie naturelle  $h$  de  $\varphi$  à  $\psi$  par récurrence sur le degré comme suit.  $h$  est bien sûr nulle en dimension  $-1$ . Soit donc  $i \geq 0$  et supposons  $h$  définie pour les degrés strictement inférieurs à  $i$ , précisément, supposons que pour tout  $j < i$  :

- $h_X : F_j(X) \rightarrow G_{j+1}(X)$  est définie, linéaire et naturelle en  $X$ ,
- $\partial h_X + h_X \partial = \varphi_X - \psi_X : F_j(X) \rightarrow G_j(X)$ ,
- $h_N(e_N) \in A_{j+1}(N)$  pour tout  $N \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_j$ .

Il résulte de ces hypothèses que pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$ , si on pose  $\alpha = h_M(\partial(e_M)) - \varphi_M(e_M) + \psi_M(e_M)$ , on a  $\alpha \in A_i(M)$ , car en réécrivant  $\partial(e_M)$  sous la forme **10** (page 11), on obtient

$$h_M(\partial(e_M)) = \sum_k \lambda_k f_* h_{N_k}(e_{N_k}) \in A_i(M) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

Bien sûr,  $\varphi_M(e_M)$  et  $\psi_M(e_M)$  sont dans  $A_i(M)$  par hypothèse.

Comme pour (1), par linéarité et naturalité, il suffit de définir  $h_M(e_M)$ . Par hypothèse de récurrence, comme  $|\partial(e_M)| < i$ , on a

$$\partial h_M(\partial(e_M)) + h_M(\partial\partial(e_M)) = \varphi_M(\partial(e_M)) - \psi_M(\partial(e_M))$$

c'est-à-dire  $\partial(\alpha) = 0$ . Comme tout ceci se passe dans  $A(M)$  qui est acyclique, il existe un élément qu'on notera  $h_M(e_M)$  dans  $A_{i+1}(M)$  tel que  $\partial(h_M(e_M)) = \alpha$ . Les vérifications du fait que  $h$  est naturelle et que  $\partial h + h\partial = \varphi - \psi$  sont similaires à celle du point (1) et sont laissées au lecteur.

(3) Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux transformations naturelles de  $F$  vers  $G$ . Elles sont égales en degré  $-1$ . Supposons qu'elles soient égales jusqu'au degré  $i-1$  et soit  $M$  un objet de  $\mathcal{M}$  tel que  $|e_M| = i$ . On a par hypothèse de récurrence  $\varphi_M(\partial(e_M)) = \psi_M(\partial(e_M))$  puisque  $|\partial(e_M)| < i$ . Mais comme  $A_{i+1}(M) = 0$ , la suite exacte **9** (page 11) montre que  $\partial : A_i(M) \rightarrow A_{i-1}(M)$  est injectif. Comme on a  $\partial(\varphi_M(e_M)) = \varphi_M(\partial(e_M)) = \psi_M(\partial(e_M)) = \partial(\psi_M(e_M))$ , on voit que  $\varphi_M(e_M) = \psi_M(e_M)$  pour tout  $M \in \mathbf{Ob}(\mathcal{M})_i$  et donc que  $\varphi = \psi$  jusqu'au degré  $i$ .  $\square$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 2 avril 2012.

Suite du cours précédent : nous montrons que la théorie des chaînes singulières satisfait les axiomes (2) et (3) des théories de chaînes.

## 1 Invariance homotopique (axiome 3).

☞ **1 Lemme.** Soit  $\mathcal{I}$  une catégorie,  $X, Y : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$  deux foncteurs. Pour tout  $i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})$ , soient  $f, g : X(i) \rightarrow Y(i)$  deux applications continues naturelles en  $i$  et soit  $H : [0, 1] \times X(i) \rightarrow Y(i)$  une homotopie de  $f$  à  $g$  naturelle en  $i$ . Alors les morphismes de DGA-modules  $f_*, g_* : C_*(X(i)) \rightarrow C_*(Y(i))$  (qui sont naturels en  $i$ ) sont homotopes naturellement en  $i$ , et  $f_* = g_* : H_*(X(i)) \rightarrow H_*(Y(i))$ .

*Démonstration.* Pour tout espace  $X$ , notons  $i_0$  et  $i_1$  les deux applications de  $X$  vers  $[0, 1] \times X$  définies respectivement par  $i_0(x) = (0, x)$  et  $i_1(x) = (1, x)$ , qui sont clairement naturelles en  $X$ .  $(i_0)_*$  et  $(i_1)_*$  sont donc des transformations de  $C_*(X)$  vers  $C_*([0, 1] \times X)$  naturelles en  $X$ . Or  $C_*$  est libre sur la sous-catégorie pleine  $\mathcal{M}$  de  $\mathbf{Top}$  qui a les simplexes affines standard  $\Delta_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) comme objets, et  $C_*([0, 1] \times \Delta_n)$  est acyclique car  $[0, 1] \times \Delta_n$  est contractile comme produit de deux espaces contractiles. Le théorème des modèles acycliques (avec  $A = G|_{\mathcal{M}}$ ) affirme donc que  $(i_0)_*$  et  $(i_1)_*$  sont naturellement homotopes.

Ceci implique que  $(i_0)_*$  et  $(i_1)_* : C_*(X(i)) \rightarrow C_*([0, 1] \times X(i))$  sont homotopes naturellement en  $i$ , puis, en composant avec  $H_*$ , que  $f_*$  et  $g_* : C_*(X(i)) \rightarrow C_*(Y(i))$  sont homotopes naturellement en  $i$ . Il en résulte que  $f_* = g_* : H_*(X(i)) \rightarrow H_*(Y(i))$ .<sup>(1)</sup>  $\square$

☞ **2 Corollaire.** Si  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sont homotopes,  $f_*, g_* : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$  sont homotopes et  $f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ .

*Démonstration.* On peut voir les paires  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  comme des foncteurs  $\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{Top}$  et l'homotopie  $H$  donnée de  $f$  à  $g$  est alors naturelle (par définition de l'homotopie dans le cas

---

1. Je me suis aperçu que l'axiome (3) tel qu'il est énoncé dans la leçon du 21 mars, ne permet pas de démontrer que si  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sont homotopes, alors  $H_*(f) = H_*(g)$ . Il convient donc de le remplacer par l'axiome qui dit que  $(i_0)_*$  et  $(i_1)_*$  sont naturellement homotopes. Cette axiomatique reste donc compatible avec la théorie des chaînes singulières, de même qu'avec la théorie des courants, mais ne l'est probablement plus avec la théorie des chaînes d'Alexander-Spanier. Il serait intéressant de trouver une formulation valable pour les trois théories.

des paires). Le lemme 1 montre que qu'il y a une homotopie naturelle  $h$  de  $f_*$  à  $g_*$ , ce qui dans le cas de la catégorie **2** signifie qu'on a juste le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_*(A) & \hookrightarrow & C_*(X) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ C_*(B) & \hookrightarrow & C_*(Y) \end{array}$$

Autrement-dit,  $h$  passe au quotient pour donner une homotopie de  $f_*$  à  $g_* : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$ . La dernière assertion en découle immédiatement.  $\square$

Bien sûr, dans le cas où  $A = B = \emptyset$  on obtient :

**3 Corollaire.** *Si  $f, g : X \rightarrow Y$  sont homotopes,  $f_*, g_* : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$  sont homotopes et  $f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ .*  $\square$

Les énoncés ci-dessus disent que le foncteur homologie est défini sur **HoTop** plutôt que sur **Top**, ou plus précisément qu'il se factorise à travers la projection canonique **Top**  $\rightarrow$  **HoTop**, et de même en remplaçant **Top** par une catégorie de diagrammes dans **Top**. Comme tout foncteur préserve les isomorphismes, on a :

**4 Corollaire.** *Si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une équivalence d'homotopie,  $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$  est un isomorphisme.*  $\square$

## 2 Le théorème des petites chaînes (axiome 2).

Soit  $X$  un espace topologique et soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$  dont les intérieurs recouvrent  $X$ . Un  $n$ -simplexe singulier  $x : \Delta_n \rightarrow X$  est dit « assujéti à  $\mathcal{U}$  » s'il existe  $i \in I$  tel que l'image de  $x$  soit contenue dans  $U_i$ . Une  $n$ -chaîne singulière  $\sum_j \lambda_j x_j$  de  $X$  est dite « assujéti

à  $\mathcal{U}$  » si tous les simplexes singuliers  $x_j$  sont assujétis à  $\mathcal{U}$ . On voit que les chaînes assujéties à  $\mathcal{U}$  sont celles qui sont composées de simplexes « assez petits ».

Les chaînes singulières de  $X$  assujéties à  $\mathcal{U}$  à coefficients dans  $\Lambda$  forment un sous- $\Lambda$ -module de  $C_*(X; \Lambda)$  qu'on notera  $C_*^{\mathcal{U}}(X)$  ou  $C_*^{\mathcal{U}}(X; \Lambda)$ . Le théorème des petites chaînes (théorème 9 ci-dessous) nous dit que ces « petites chaînes » suffisent pour calculer l'homologie de  $X$ .

On appelle «  $n$ -simplexe affine » l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points  $s_0, \dots, s_n$  affinement indépendants (qu'on appelle ses « sommets ») dans un espace euclidien.<sup>(2)</sup> Si  $D$  est un  $n$ -simplexe affine de sommets  $s_0, \dots, s_n$ , la face opposée à  $s_i$  est l'enveloppe convexe des points  $s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ . Noter que les faces d'un  $n$ -simplexe affine sont des  $(n - 1)$ -simplexes affines. Le centre de gravité de tout  $n$ -simplexe affine  $D$  sera noté  $G(D)$ . Il est le barycentre

---

2. On n'impose aucune condition métrique sur  $D$ , autrement-dit les distances entre ses sommets sont quelconques.

des  $n + 1$  sommets tous affectés du poids  $\frac{1}{n + 1}$ . Quand leur nom n'est pas précisé, les sommets d'un  $n$ -simplexe affine sont notés  $\underline{0}, \dots, \underline{n}$ .

☞ **5 Lemme.** *Le diamètre d'un  $n$ -simplexe affine est le maximum des distances entre deux de ses sommets.*

*Démonstration.* Notons  $s_0, \dots, s_n$  les sommets d'un  $n$ -simplexe affine  $D$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $D$ , on a  $y = \sum_{i=0}^n t_i s_i$  (avec  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ ), donc :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| x - \sum_{i=0}^n t_i s_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^n t_i (x - s_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \|x - s_i\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n t_i \sup_i \|x - s_i\| \\ &= \sup_i \|x - s_i\| \end{aligned}$$

et on voit que la distance de  $x$  à  $y$  est majorée par la distance de  $x$  à un sommet de  $D$  (celui qui est le plus éloigné de  $x$ ). Pour la même raison  $\|x - s_i\| \leq \|s_j - s_i\|$  pour un certain  $j$ .  $\square$

☞ **6 Lemme.** *Soit  $D$  un  $n$ -simplexe affine de diamètre  $d$ . La distance de  $G(D)$  à tout point de  $D$  est au plus  $\frac{nd}{n + 1}$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 0$  est trivial. Supposons  $n > 0$ . Soit  $D'$  la face opposée à  $\underline{0}$  dans  $D$ , et posons  $G = G(D)$  et  $G' = G(D')$ . On a :

$$G = \frac{1}{n + 1} \underline{0} + \frac{n}{n + 1} G'$$

par définition du centre de gravité. Un point quelconque  $P$  de  $D$  s'écrit  $P = (1 - t)\underline{0} + tQ$  où  $Q$  est un point de  $D'$ . La distance de  $G$  à  $P$  est la norme euclidienne du vecteur  $G - P$ , c'est-à-dire la norme de l'expression

$$f(t) = \left( \frac{1}{n + 1} - 1 + t \right) \underline{0} + \frac{n}{n + 1} G' - tx$$

Or  $t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$  est une fonction polynomiale du second degré de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  qui tend vers l'infini quand  $t$  tend vers l'infini, donc convexe, et son maximum sur l'intervalle  $[0, 1]$  est atteint en 0 ou en 1. On a  $f(0) = \frac{n}{n + 1} (G' - \underline{0})$  et la norme de  $f(0)$  est majorés par  $\frac{nd}{n + 1}$ . De même, la norme de

$$f(1) = \frac{1}{n + 1} \underline{0} + \frac{n}{n + 1} G' - x = \frac{1}{n + 1} (\underline{0} - x) + \frac{n}{n + 1} (G' - x)$$

est majorée par  $\frac{1}{n+1}d + \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n}d$  par hypothèse de récurrence. On a donc  $\|f(1)\| \leq \frac{1}{n+1}d + \frac{n-1}{n+1}d = \frac{nd}{n+1}$ .  $\square$

On définit les « simplexes barycentriques » d'un  $n$ -simplexe affine  $D$  (ce sont des simplexes singuliers affines de  $D$ ) comme le plus petit ensemble de simplexes tel que :

- (1) tout 0-simplexe affine  $D$  n'a qu'un seul simplexe barycentrique, qui est l'unique application  $\Delta_0 \rightarrow D$ ,
- (2) tout simplexe barycentrique d'une face d'un simplexe affine  $D$  est un simplexe barycentrique de  $D$ ,
- (3) pour tout  $p$ -simplexe barycentrique  $x$  d'une des faces d'un simplexe affine  $D$ , l'unique simplexe singulier affine  $h(x) : \Delta_{p+1} \rightarrow D$  tel que  $h(x)(\underline{0}) = G(D)$  et  $\partial_0(h(x)) = x$  est un simplexe barycentrique de  $D$ ,
- (4)  $G(D)$  est un 0-simplexe barycentrique de  $D$ .

Il est immédiat par récurrence sur  $n$ , qu'un  $n$ -simplexe affine n'a aucun  $p$ -simplexe barycentrique pour  $p > n$ .

**7 Lemme.** *Pour tout  $n$ -simplexe affine  $D$ , le sous-module  $\text{Bary}_*(D)$  de  $C_*(D)$  ayant pour base les simplexes barycentriques de  $D$  est un sous-DG-module acyclique.*

*Démonstration.* Si  $x$  est un simplexe barycentrique de  $D$ , il en est de même de toutes ses faces. C'est clair quand  $x$  a été construit par l'une des règles (1), (2) ou (4) (par récurrence dans le cas de (2)). Dans le cas où  $x$  est construit par la règle (3), c'est clair par construction pour la face opposée à  $\underline{0}$ . Quant aux autres faces, elles sont elles-mêmes obtenue par la règle (3), et on a  $\partial_i(h(x)) = h(\partial_{i-1}(x))$  pour  $i > 0$ .

On définit  $\varepsilon : \text{Bary}_*(D) \rightarrow \Lambda$  (où  $\Lambda$  est le DG-module  $\Lambda$  concentré en degré 0), en envoyant tout 0-simplexe barycentrique sur 1, et  $\eta : \Lambda \rightarrow \text{Bary}_*(D)$  en envoyant 1 sur le 0-simplexe  $G(D)$ . On a  $\varepsilon\eta = 1$ . Il suffit donc de prouver que  $x - \eta\varepsilon(x) = \partial h(x) + h(\partial x)$  pour tout simplexe barycentrique  $x$ . Il est immédiat que pour tout 0-simplexe barycentrique  $x$  de  $D$ , on a  $\partial(h(x)) = x - G(D) = x - \eta\varepsilon(x)$ . Si  $x$  est un  $p$ -simplexe barycentrique de  $D$  pour  $p > 0$ , il est obtenu soit par la règle (2), soit par la règle (3). S'il est obtenu par la règle (2), on a  $\partial h(x) + h(\partial(x)) = x$  par hypothèse de récurrence. S'il est obtenu par la règle (3), on a  $\partial(h(x)) = x + \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_i(h(x))$ .

Mais  $\partial_i(h(x)) = h(\partial_{i-1}(x))$ . On a donc encore  $x = \partial(h(x)) + h(\partial(x))$ . On a donc pour tout simplexe barycentrique  $x$  de  $D$ ,  $\partial(h(x)) + h(\partial(x)) = x - \eta\varepsilon(x)$ .  $\square$

**8 Lemme.** *Soit  $D$  un  $n$ -simplexe affine de diamètre  $d$ . Alors le diamètre de tout simplexe barycentrique de  $D$  est au plus  $\frac{dn}{n+1}$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur  $n$ . C'est immédiat si  $n = 0$  (règle (1)) et pour tout  $n$  pour tous les simplexes barycentriques obtenus par la règle (4). Supposons  $n > 0$ . Si  $x$  est obtenu

par la règle (2), on a par hypothèse de récurrence  $\text{diam}(x) \leq \frac{d(n-1)}{n} < \frac{dn}{n+1}$ . Enfin, si  $x$  est obtenu par la règle (3), on a le résultat d'après les lemmes **5** et **6** ci-dessus.  $\square$

**9 Théorème.** (*Théorème des petites chaînes*) Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$  dont les intérieurs recouvrent  $X$ . Alors, pour tout anneau  $\Lambda$ , l'inclusion canonique  $C_*^{\mathcal{U}}(X; \Lambda) \rightarrow C_*(X; \Lambda)$  induit un isomorphisme en homologie.

*Démonstration.* Comme le foncteur  $X \mapsto C_*(X)$  est libre sur les modèles  $(\Delta_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et que le sous-DG-module  $\text{Bary}_*(\Delta_n)$  des chaînes barycentriques de  $\Delta_n$  est acyclique, il existe d'après le théorème des modèles acycliques, point (1), une transformation naturelle  $\sigma : C_* \rightarrow C_*$  telle que  $\sigma(e_n) \in \text{Bary}_n(\Delta_n)$ . Noter que comme  $\text{Bary}_{n+1}(\Delta_n) = 0$ , cette transformation est unique d'après le point (3) du théorème. On l'appelle la « subdivision barycentrique ». D'après le point (2) du théorème, et parce que  $C_*(\Delta_n)$  est acyclique,  $\sigma$  est naturellement homotope à la transformation identique  $1 : C_* \rightarrow C_*$ . Il en résulte que pour tout entier  $k$ ,  $\sigma^k = \sigma \circ \dots \circ \sigma$  est naturellement homotope à 1.

Il suffit de montrer que l'homologie du quotient  $\frac{C_*(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(X)}$  est nulle, c'est-à-dire que toute  $n$ -chaîne singulière de  $X$  dont le bord est dans  $C_*^{\mathcal{U}}(X)$  est un bord modulo  $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ . Soit  $x = \sum_j \lambda_j x_j$  une telle chaîne. L'image réciproque de  $\mathcal{U}$  par  $x_j$  est une famille de parties de  $\Delta_n$  dont les intérieurs recouvrent  $\Delta_n$ . Comme  $(\frac{n}{n+1})^k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, il existe  $k_j$  tel que les simplexes de la chaîne  $\sigma^{k_j}(e_n)$  soient assujetis à ce recouvrement. Il en résulte que la chaîne  $\sigma^k(x_j)$  est assujetie à  $\mathcal{U}$  pour tout  $k \geq k_j$ .

Soit  $k$  un majorant des  $k_j$  (qui sont en nombre fini). La chaîne  $\sigma^k(x) = \sum_j \lambda_j \sigma^k(x_j)$  est alors assujetie à  $\mathcal{U}$ . Soit  $h$  une homotopie naturelle de  $\sigma^k$  à 1. On a  $x - \sigma^k(x) = \partial h(x) + h(\partial x)$ . Comme  $\partial(x) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$  et comme  $h$  est naturelle, on a  $h(\partial x) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ . On voit donc que  $x = \partial h(x)$  modulo  $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ .  $\square$

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

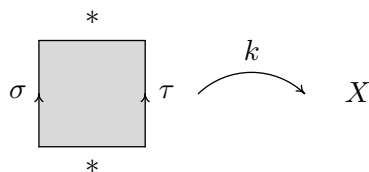
Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 4 avril 2012.

## 1 Comparaison de $\pi_1(X, *)$ avec $H_1(X; \mathbb{Z})$ .

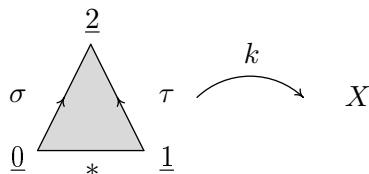
Soit  $(X, *)$  un espace pointé connexe par arcs. Soit  $*_n : \Delta_n \rightarrow X$  le  $n$ -simplexe tel que  $*_n(t) = *$  pour tout  $t \in \Delta_n$ . Noter que  $\partial(*_1) = *_0 - *_0 = 0$  et que  $\partial(*_2) = *_1 - *_1 + *_1 = *_1$ . Soit  $\sigma$  un lacet (standard) de  $(X, *)$ . Comme  $[0, 1]$  est homéomorphe à  $\Delta_1$ , on peut voir  $\sigma$  comme un 1-simplexe singulier de  $X$ , qu'on notera  $h(\sigma)$  (ou même plus simplement  $\sigma$ ). Le bord de  $h(\sigma)$  est  $\partial_0(h(\sigma)) - \partial_1(h(\sigma))$ , c'est-à-dire  $*_0 - *_0 = 0$ . On voit donc que  $h(\sigma)$  est un cycle.

Si  $\tau$  est un lacet homotope à  $\sigma$ , on a une application continue  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $k(t, 0) = k(t, 1) = *$ ,  $k(0, s) = \sigma(s)$  et  $k(1, s) = \tau(s)$ .



Comme le sous-ensemble  $[0, 1] \times \{1\}$  de ce carré (le coté supérieur) est envoyé sur  $*$ , l'application passe au quotient en une application (encore notée  $k$ )

$$D = \frac{[0, 1] \times [0, 1]}{[0, 1] \times \{1\}} \rightarrow X$$



Or,  $D$  est homéomorphe à  $\Delta_2$  et  $k$  peut être vu comme un 2-simplexe singulier de  $X$ , les sommets de  $\Delta_2$  étant numérotés comme sur la figure ci-dessus. Calculons maintenant le bord de

la 2-chaîne  $k - *_2$ . On a

$$\begin{aligned}\partial(k - *_2) &= \partial_0(k) - \partial_1(k) + \partial_2(k) - *_1 \\ &= h(\tau) - h(\sigma) + *_1 - *_1 \\ &= h(\tau) - h(\sigma)\end{aligned}$$

On voit donc que  $h(\tau) - h(\sigma)$  est un bord, autrement-dit que les deux cycles  $h(\tau)$  et  $h(\sigma)$  représentent la même classe d'homologie de  $X$ . En conséquence, on a une application bien définie

$$\pi_1(X, *) \xrightarrow{h} H_1(X; \mathbb{Z})$$

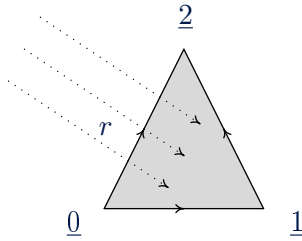
qu'on appelle « homomorphisme de Hurewicz ».<sup>(1)</sup>

Pour justifier l'appellation « homomorphisme » de cette application, il faut maintenant montrer que c'est un morphisme de groupes, ce qui va résulter du lemme suivant que nous réutiliserons aussi plus loin.

**1 Lemme.** *Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux chemins concaténables de  $X$  (c'est-à-dire tels que  $\sigma(1) = \tau(0)$ ). Alors il existe un 2-simplexe  $y$  de  $X$  tel que  $\partial_0(y) = \tau$ ,  $\partial_1(y) = \sigma \star \tau$  et  $\partial_2(y) = \sigma$ .*

Bien sûr, on s'autorise à voir un chemin comme un 1-simplexe. C'est pourquoi cet énoncé a un sens.

*Démonstration.* Sur la figure ci-dessous on a figuré une rétraction  $r$  (continue) de  $\Delta_2$  sur son sous-espace réunion de ses deux faces  $\partial_0(\Delta_2)$  et  $\partial_2(\Delta_2)$ .



Il s'agit juste de la projection sur ce sous-espace parallèlement à la médiane du triangle issue de 1. L'image par  $r$  du chemin  $\partial_1(\Delta_2)$  est la concaténation de chemins  $\partial_2(\Delta_2) \star \partial_0(\Delta_2)$ .

Les chemins concaténables  $\sigma$  et  $\tau$  déterminent une application continue de  $\partial_2(\Delta_2) \cup \partial_0(\Delta_2)$  vers  $X$ , l'application étant  $\sigma$  sur  $\partial_2(\Delta_2)$  et  $\tau$  sur  $\partial_0(\Delta_2)$ . En composant avec  $r$ , on obtient une application continue  $y : \Delta_2 \rightarrow X$ , avec la propriété que  $\partial_0(y) = \tau$ ,  $\partial_1(y) = \sigma \star \tau$  et  $\partial_2(y) = \sigma$ .  $\square$

On a donc dans le cas de deux lacets  $\sigma$  et  $\tau$  de  $X$ ,  $\partial(y) = h(\tau) - h(\sigma \star \tau) + h(\sigma)$ , ce qui prouve que  $h(\sigma \star \tau) = h(\sigma) + h(\tau)$  dans  $H_1(X; \mathbb{Z})$ , et  $h : \pi_1(X, *) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$  est un homomorphisme de groupes.

**2 Lemme.** *Soit  $\sigma$  un chemin de  $X$  et  $\sigma^{-1}$  le chemin opposé ( $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$ ). Alors il existe une 2-chaîne  $z$  telle que  $\partial(z) = \sigma + \sigma^{-1}$ .*

1. C'est en fait un cas particulier de l'homomorphisme de Hurewicz  $h : \pi_n(X, *) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \Delta_2 \rightarrow \Delta_1$  l'unique application affine telle que  $\varphi(\underline{0}) = \varphi(\underline{2}) = \underline{0}$  et  $\varphi(\underline{1}) = \underline{1}$ . Le composé  $y = \sigma \circ \varphi$  est alors un 2-simplexe de  $X$  tel que  $\partial_0(y) = \sigma^{-1}$ ,  $\partial_1(y) = *_1$  et  $\partial_2(y) = \sigma$ . On a donc  $\partial(y + *_2) = \sigma + \sigma^{-1}$ .  $\square$

**3 Théorème.** (Poincaré) *L'homomorphisme de Hurewicz  $h : \pi_1(X, *) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$  (où  $X$  est connexe par arcs) est surjectif et son noyau est le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1(X, *)$ .*

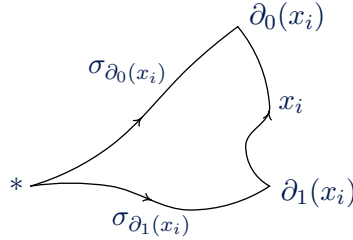
*Démonstration.* Soit  $x = \sum_i \lambda_i x_i$  un 1-cycle de  $X$ . L'ensemble  $A$  formé des  $\partial_0(x_i)$  et des  $\partial_1(x_i)$  est un ensemble fini de 0-simplexes de  $X$ . Pour chaque  $y \in A$ , soit  $\sigma_y$  un chemin de  $*$  à  $y$ , qu'on peut aussi voir comme un 1-simplexe tel que  $\partial_0(\sigma_y) = y$  et  $\partial_1(\sigma_y) = *$ . Comme  $\partial(x) = 0$ , on a  $\sum_i \lambda_i (\partial_0(x_i) - \partial_1(x_i)) = 0$ , donc aussi  $\sum_i \lambda_i (\sigma_{\partial_0(x_i)} - \sigma_{\partial_1(x_i)}) = 0$  (cela tient au fait que la restriction de  $\partial_0$  au sous-espace de  $C_1(X)$  engendré par les  $\sigma_y$  ( $y \in A$ ) est injective). On peut donc écrire

$$x = \sum_i \lambda_i (x_i - \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_1(x_i)})$$

Chaque  $x_i - \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_1(x_i)}$  est par ailleurs un 1-cycle. En effet, le calcul de son bord donne

$$\partial_0(x_i) - \partial_1(x_i) - \partial_0(x_i) + *_0 + \partial_1(x_i) - *_0$$

Pour montrer la surjectivité de  $h$  il suffit donc de montrer que le cycle  $x_i - \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_1(x_i)}$  est dans l'image de  $h$ .



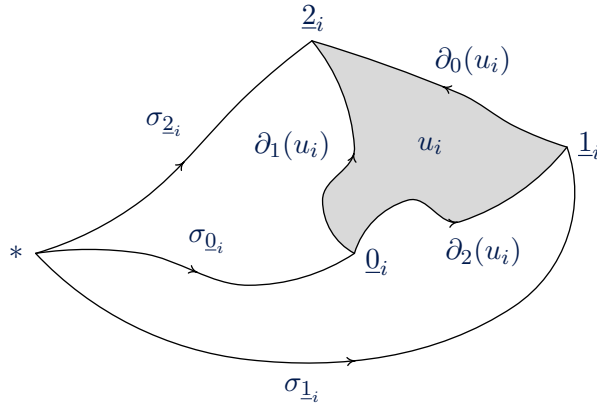
D'après le lemme 1 (page 2), il existe un 2-simplexe  $y$  tel que  $\partial_0(y) = x_i$ ,  $\partial_1(y) = \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i$  et  $\partial_2(y) = \sigma_{\partial_1(x_i)}$ . En réappliquant ce même lemme, on obtient un 2-simplexe  $z$  tel que  $\partial_0(z) = \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1}$ ,  $\partial_1(z) = \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i * \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1}$  et  $\partial_2(z) = \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i$ . Le lemme 2 (page 2) donne une 2-chaîne  $t$  telle que  $\partial(t) = \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \partial(z + y - t) &= \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1} - \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i * \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1} + \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i \\ &\quad + x_i - \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i + \sigma_{\partial_1(x_i)} \\ &\quad - \sigma_{\partial_0(x_i)} - \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1} \\ &= x_i - \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_1(x_i)} - \sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i * \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1} \end{aligned}$$

Autrement-dit, le cycle  $x_i - \sigma_{\partial_0(x_i)} + \sigma_{\partial_1(x_i)}$  représente la même classe d'homologie que le cycle  $\sigma_{\partial_1(x_i)} * x_i * \sigma_{\partial_0(x_i)}^{-1}$ , lequel est dans l'image de  $h$  puisque qu'il est composé d'un seul 1-simplexe qui est un lacet.

Comme le groupe  $H_1(X; \mathbb{Z})$  est abélien, le noyau de  $h$  contient le sous-groupe des commutateurs de  $\pi_1(X, *)$ . Il reste donc juste à montrer que tout élément du noyau de  $h$  appartient au sous-groupe des commutateurs. Soit donc  $x$  un lacet de  $(X, *)$  (qu'on peut voir comme un 1-cycle de  $X$ ) tel qu'il existe une 2-chaîne  $u = \sum_i \lambda_i u_i$  telle que  $\partial(u) = x$ .

Le 2-simplexe  $u_i$  a trois sommets qu'on notera  $\underline{0}_i$ ,  $\underline{1}_i$  et  $\underline{2}_i$ . Soit  $A$  l'ensemble (fini) des sommets de tous les  $u_i$ . Comme précédemment, pour  $y \in A$ , soit  $\sigma_y$  un chemin de  $*$  à  $y$ , donc tel que  $\partial_0(\sigma_y) = y$  et  $\partial_1(\sigma_y) = *_0$ . Dans le cas où  $y = *$  (ce qui arrive puisque  $x$  est un lacet), on pose  $\sigma_y = *_1$ .



Notons maintenant  $B$  l'ensemble des 1-simplexes singuliers qui sont face d'un  $u_i$ , et pour chaque  $z \in B$ , posons  $\gamma_z = \sigma_{\partial_1(z)} * z * (\sigma_{\partial_0(z)})^{-1}$ . Il est clair que  $\gamma_z$  est un lacet de  $(X, *)$ . Comme le chemin  $\partial_1(u_i)$  est homotope à  $\partial_2(u_i) * \partial_0(u_i)$ , on vérifie facilement que le lacet  $\gamma_{\partial_2(u_i)} * \gamma_{\partial_0(u_i)} * (\gamma_{\partial_1(u_i)})^{-1}$  est homotope au lacet constant. On a donc

$$\prod_i (\gamma_{\partial_2(u_i)} * \gamma_{\partial_0(u_i)} * (\gamma_{\partial_1(u_i)})^{-1})^{\lambda_i} = 1$$

modulo les commutateurs dans  $\pi_1(X, *)$ . On peut réordonner le produit ci-dessus sous la forme

$$\prod_{z \in B} \gamma_z^{k_z}$$

où les  $k_z$  sont des entiers relatifs. Or, comme  $\partial(u) = \sum_i \lambda_i (\partial_0(u_i) - \partial_1(u_i) + \partial_2(u_i))$ ,  $k_z$  est le coefficient de  $z$  dans le calcul de  $\partial(u)$ . C'est donc toujours 0 sauf dans le cas  $z = \gamma_x = *_1 * x * *_1$  où c'est 1. Il en résulte que  $x \sim 1$  modulo les commutateurs.  $\square$

## 2 Limites et colimites dans $\mathbf{Ab}$ et dans quelques catégories similaires.

Le calcul des limites dans la catégorie  $\mathbf{Ab}$  des groupes abéliens est semblable à celui des limites dans  $\mathbf{Ens}$ . C'est dû au fait que le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$  a un adjoint à gauche (celui qui envoie tout ensemble sur le groupe abélien libre sur cet ensemble) et préserve donc les limites. Par exemple, dans le cas d'un produit  $G \times H$  de deux groupes, l'ensemble sous-jacent à  $G \times H$  est le produit (dans  $\mathbf{Ens}$ ) des ensembles sous-jacents à  $G$  et à  $H$ . Autrement-dit  $U(G \times H) = U(G) \times U(H)$ . De ce fait, le calcul de  $G \times H$  se résume à déterminer la structure de groupe sur  $U(G) \times U(H)$ .

Le cas des colimites est plus délicat. D'abord, le foncteur d'oubli  $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$  ne préserve pas les colimites en général. Par exemple, la somme de deux groupes commutatifs  $G$  et  $H$  est le groupe  $G \times H$ , avec pour inclusions canoniques  $G \rightarrow G \times H$  et  $H \rightarrow G \times H$  les applications  $x \mapsto (x, 0)$  et  $y \mapsto (0, y)$  (en notation additive), alors que la somme des ensembles sous-jacents  $U(G)$  et  $U(H)$  est l'union disjointe de ces ensembles, généralement non isomorphe (dans  $\mathbf{Ens}$ ) à  $U(G \times H)$ . Malgré cela, toutes les petites colimites existent dans  $\mathbf{Ab}$ , et peuvent se décrire d'une manière analogue aux petites colimites de  $\mathbf{Ens}$ . La seule différence est que chaque élément de la colimite est représenté non pas comme dans le cas de  $\mathbf{Ens}$  par un élément dans l'un des ensembles du diagramme, mais par une somme formelle (finie) de tels éléments. Ceci résulte du fait que la colimite d'un diagramme de groupes abéliens est un quotient de la somme de tous les groupes du diagramme. Or dans cette somme (généralement appelée « somme directe »), tout élément est une somme finie d'éléments pris dans les divers termes de la somme.<sup>(2)</sup>

☞ **4 Lemme.** (a) Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une (petite) famille de groupes abéliens (notés additivement). La somme  $G$  de cette famille dans  $\mathbf{Ab}$  (notée  $\bigoplus_{i \in I} G_i$  et appelée la « somme directe des  $G_i$  ») a pour éléments les familles  $(x_i)_{i \in I}$  telles que  $x_i \in G_i$  et de support fini, c'est-à-dire telle que  $x_i = 0$  sauf pour un ensemble fini de valeurs de  $i$ . La somme de  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_i)_{i \in I}$  est  $(x_i + y_i)_{i \in I}$ . L'élément neutre est  $(0)_{i \in I}$ . Un élément  $x$  de  $G_i$  peut être vu comme l'élément  $[i, x] = (x_j)_{j \in I}$  de la somme tel que  $x_i = x$  et  $x_j = 0$  pour  $j \neq i$ .

(b) Soit  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un (petit) diagramme dans  $\mathbf{Ab}$ . Le sommet  $L$  d'un cocône colimite de ce diagramme est le quotient de  $\bigoplus_{i \in \mathbf{Ob}(\mathcal{I})} d(i)$  par le sous-groupe  $K$  engendré par tous les

$[i, x] - [j, d(\varphi)(x)]$  où  $\varphi : i \rightarrow j$  est une flèche quelconque de  $\mathcal{I}$  et  $x \in d(i)$ . Les arêtes  $d(i) \rightarrow L$  du cocône sont données par  $x \mapsto \overline{[i, x]}$ , où le surlignement représente la classe modulo  $K$ .

De plus, si  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des flèches d'un graphe qui engendre  $\mathcal{I}$ , tout élément du sous-groupe  $K$  s'écrit comme une somme finie d'éléments de la forme  $[i, x] - [j, d(\varphi)(x)]$ , où les  $\varphi$  sont des éléments distincts de  $\mathcal{F}$ .

---

2. Le fait qu'une colimite puisse se calculer comme un quotient (en fait un coégaliseur) de la somme des objets du diagramme est un fait général valable dans toute catégorie, pourvu que les objets mis en jeu existent. Voir mon cours de logique catégorique, proposition 30, page 123.

Pour tout  $i$ , l'application  $x \mapsto [i, x]$  de  $G_i$  vers  $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$  est appelée une « inclusion canonique ». Elle est clairement injective (elle a une rétraction). De plus, pour tout élément  $(x_i)_{i \in I}$  de  $G$  on a  $(x_i)_{i \in I} = \sum_{x_i \neq 0} [i, x_i]$ . Tout élément de  $G$  est donc une somme (finie) d'éléments appartenant aux images des inclusions canoniques, et ce d'une manière unique. Pour  $x = (x_i)_{i \in I}$  dans  $G$ , aussi bien  $x_i$  que  $[i, x_i]$  pourra être appelé «  $i^{\text{ième}}$  composante de  $x$  ».

*Démonstration.* (a) Soit  $(f_i : G_i \rightarrow H)_{i \in I}$  un cocône sur le diagramme (sans flèche) formé par les groupes  $G_i$ . Si on pose  $\theta((x_i)_{i \in I}) = \sum_{x_i \neq 0} f_i(x_i)$ , on a une application  $\theta : G \rightarrow H$  bien définie, qui est clairement un morphisme de groupes, et qui est la seule telle que pour tout  $x \in G_i$ ,  $\theta([i, x]) = f_i(x)$ .

(b) Soit  $(f_i : G_i \rightarrow H)_{i \in I}$  un cocône sur le diagramme  $d$ , donc tel que  $f_j(d(\varphi)(x)) = f_i(x)$  pour tout  $\varphi : i \rightarrow j$  et tout  $x \in G_i$ . D'après (a), on a un morphisme de groupes  $\theta : G \rightarrow H$  (où  $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ ), telle que  $\theta([i, x]) = f_i(x)$  pour tout  $x \in G_i$ . On a donc

$$\begin{aligned} \theta([i, x] - [j, d(\varphi)(x)]) &= \theta([i, x]) - \theta([j, d(\varphi)(x)]) \\ &= f_i(x) - f_j(d(\varphi)(x)) \\ &= f_i(x) - f_i(x) = 0 \end{aligned}$$

$\theta$  passe donc au quotient pour donner  $\bar{\theta} : G/K \rightarrow H$ , telle que  $\bar{\theta}(\overline{[i, x]}) = f_i(x)$ . L'unicité est claire.

Notons que l'opposé de  $[i, x] - [j, d(\varphi)(x)]$  est  $[i, -x] - [j, d(\varphi)(-x)]$  c'est-à-dire encore un élément de cette forme. Par ailleurs  $[i, x] - [j, d(\varphi)(x)] + [i, y] - [j, d(\varphi)(y)] = [i, x + y] - [j, d(\varphi)(x + y)]$ , et pour  $\varphi : i \rightarrow j$  et  $\psi : j \rightarrow k$ ,  $[i, x] - [k, d(\psi \circ \varphi)(x)]$  est égal à  $[i, x] - [j, d(\varphi)(x)] + [j, d(\varphi)(x)] - [k, d(\psi)(d(\varphi)(x))]$ . La dernière assertion en résulte.  $\square$

**Exercice 1.** On considère  $\mathbb{N}$ , muni de son ordre usuel, comme une catégorie. Soit  $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un diagramme, et soit  $x \in d(0)$ . Montrer que  $[0, x] = 0$  si et seulement si il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que l'image de  $x$  dans  $d(k)$  soit nulle.

En topologie algébrique, on utilise le plus souvent des groupes abéliens dont la structure est enrichie de diverses façons. Notre propos ici est d'étendre les propriétés démontrées ci-dessus à ces groupes abéliens enrichis. Le simple fait que la nouvelle structure, dont les objets et les morphismes vont former une catégorie  $\mathcal{C}$ , puisse être qualifiée d'enrichissement de la structure de groupe abélien, peut se traduire formellement par le fait qu'il y a un foncteur d'oubli  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Si ce foncteur a d'assez bonnes propriétés, certaines propriétés de  $\mathbf{Ab}$  peuvent se transmettre à  $\mathcal{C}$ . Ce qu'on souhaite essentiellement est que le calcul des limites et de colimites dans  $\mathcal{C}$  soit le même que celui de  $\mathbf{Ab}$ . En d'autres termes, on souhaite que le foncteur  $U$  « préserve » certaines limites et certaines colimites. On souhaite également qu'il reflète certaines propriétés, comme par exemple le fait d'être un isomorphisme, un monomorphisme ou un épimorphisme. On peut « dissoudre » ces questions dans une théorie générale des structures algébriques. Nous n'irons pas jusque là. Le lecteur vérifiera à la main et sans difficulté que les

limites et colimites dans les modules gradués et les modules différentiels gradués se calculent comme dans **Ab**.

### 3 Colimites filtrantes, limites inductives, limites projectives.

Une catégorie  $\mathcal{I}$  est dite « filtrante » si sur tout diagramme finiment engendré de  $\mathcal{I}$  il y a un cocône (qui n'est pas nécessairement une colimite). Une condition équivalente est de dire que sur toute paire d'objets il y a un cocône et que toute paire de flèche parallèles  $f, g : X \rightarrow Y$  peut être égalisée par la gauche (il existe  $h : Y \rightarrow Z$ , telle que  $h \circ f = h \circ g$ ).

Si  $\mathcal{I}$  est filtrante, un diagramme  $d : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  est dit « filtrant ». La colimite d'un tel diagramme (si elle existe) est appelée une « colimite filtrante ». Si de plus  $\mathcal{I}$  est un ensemble ordonné, une colimite filtrante d'un  $\mathcal{I}$ -diagramme est appelée une « limite inductive ». Dualelement, une catégorie est « cofiltrante » si sa duale est filtrante. On a donc la notion de « limite cofiltrante », et dans le cas où  $\mathcal{I}$  est un ensemble ordonné, on parle de « limite projective ».

Certaines catégories ont la propriété que les colimites filtrantes y commutent avec les limites finies (limites de diagrammes finiment engendrés). C'est le cas de **Ens**, de la catégorie **Ab** des groupes abéliens, des catégories de modules, de modules gradués et de modules différentiels gradués. Mais ce n'est pas le cas des catégories opposées. Autrement-dit, dans nos catégories usuelles, les colimites finies ne commutent généralement pas aux limites cofiltrantes. Comme calculer l'homologie d'un module différentiel gradué consiste essentiellement à prendre un égaliseur (pour fabriquer le module des cycles) puis un coégaliseur (pour fabriquer l'homologie), c'est-à-dire une limite finie suivie d'une colimite finie, et comme les colimites commutent entre elles, on comprend que « l'homologie commute aux limites inductives ».<sup>(3)</sup>

Par contre, la remarque ci-dessus suggère que l'homologie ne commute pas aux limites projective. On peut s'en assurer avec l'exemple suivant. Soit  $M$  le module différentiel gradué égal à  $\mathbb{Z}$  en degrés 0 et 1 et nul dans les autres degrés, avec la multiplication par 2 comme opérateur bord. Soit  $f : M \rightarrow M$  le morphisme de complexe qui multiplie chaque élément par 3. Il est facile de vérifier que la limite (projective) du diagramme

$$M \xleftarrow{f} M \xleftarrow{f} M \xleftarrow{f} M \xleftarrow{f} \dots$$

est 0, et donc que l'homologie de cette limite est 0, alors que la limite projective de l'image de ce diagramme par le foncteur d'homologie est  $\mathbb{Z}/2$  en degré 0.

Bien sûr, les limites préservent les monomorphismes (les injections dans le cas de nos catégories, **Ens**, **Ab**, ...), car on peut caractériser ces derniers par des carrés cartésiens (qui sont aussi des limites). Dualelement, les colimites préservent les épimorphismes (les surjections dans le cas de nos catégories). Les remarques ci-dessus montrent que les colimites filtrantes préservent aussi les monomorphismes (toujours dans nos catégories usuelles). Une variante de l'exemple ci-dessus

---

3. Une démonstration précise requiert quand même un peu de travail. Nous admettrons ce résultat dans cet exposé.

montre que les limites dans **Ens**, **Ab**, ... (même si elles sont cofiltrantes) ne préservent pas en général les épimorphismes.

Par ailleurs, le foncteur  $C_*$  des chaînes singulières commute aux limites inductives, comme on peut facilement le vérifier. Comme l'ensemble des parties compactes d'un espace localement compact  $X$  est un ensemble ordonné filtrant (ce qui revient juste à dire que la réunion de deux compacts est un compact), on voit que le complexe des chaînes singulières (resp. l'homologie) d'un tel espace est la limite inductive des complexes de chaînes singulières (resp. des homologies) de ses parties compactes. C'est pourquoi on dit que la théorie des chaînes singulières est « une théorie de chaînes à supports compacts ». De même, l'homologie singulière est une « théorie homologique à supports compacts ».

## 4 Théorème de séparation de Jordan-Brouwer.

**5 Théorème.** *Si la théorie de chaînes utilisée est à supports compacts, et si une partie  $A$  de  $\mathbb{S}^n$  est homéomorphe à  $[0, 1]^p$  ( $0 \leq p \leq n$ ), alors  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur  $p$ . Si  $p = 0$ ,  $A$  est un point et  $\mathbb{S}^n - A$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Supposons maintenant  $p \geq 1$ . Comme  $[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$ ,  $A$  est la réunion de deux compacts  $A'$  et  $A''$  tous deux homéomorphes à  $[0, 1]^p$  et tels que  $A' \cap A''$  soit homéomorphe à  $[0, 1]^{p-1}$ . Comme  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - (A' \cap A'')) = 0$  pour tout  $i$  par hypothèse de récurrence, la suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne l'isomorphisme

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_* \\ j_* \end{pmatrix}} \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A') \oplus \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A'')$$

Supposons que  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A)$  contienne un élément  $x$  non nul. Alors l'un au moins des deux éléments  $i_*(x)$  ou  $j_*(x)$  n'est pas nul. Disons que c'est  $i_*(x)$  et recommençons l'opération ci-dessus avec  $A'$  à la place de  $A$ . On obtient une suite décroissante de compacts  $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , tous homéomorphes à  $[0, 1]^p$ , tels que  $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$  soit homéomorphe à  $[0, 1]^{p-1}$  et tels que les

images successives de  $x$  dans tous les  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k)$  soient toutes non nulles. Il en résulte (exercice 1 (page 6)) que la colimite du diagramme de modules

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k) \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_{k+1}) \longrightarrow \dots$$

n'est pas nulle.

Comme la théorie de chaînes utilisée est à supports compacts, et comme  $\mathbb{S}^n - B$  est la colimite des  $\mathbb{S}^n - A_k$ , on a  $0 = \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - B) = \mathbf{colim}_k \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A_k)$  (4) ce qui est contradictoire.  $\square$

---

4. Le lecteur vérifiera que la commutation aux limites inductives vaut aussi pour l'homologie réduite.

☞ **6 Lemme.** *Si la théorie de chaînes utilisée est à supports compacts (et à coefficients dans  $\Lambda$ ), et si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{S}^n$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^k$ , avec  $0 \leq k \leq n-1$ , alors  $\tilde{H}_{n-k-1}(\mathbb{S}^n - A) \simeq \Lambda$  et  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A) = 0$  pour  $i \neq n-k-1$ .*

*Démonstration.* Par récurrence sur  $k$ . Le cas  $k = 0$  étant trivial (car  $\mathbb{S}^n - A$ , qui est  $\mathbb{S}^n$  privé de deux points, a alors le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ ), on suppose  $k \geq 1$ .  $\mathbb{S}^k$  étant la réunion de ses deux hémisphères fermés, on voit que  $A = A' \cup A''$ , où  $A'$  et  $A''$  sont homéomorphes à des disques (donc aussi à des cubes  $[0, 1]^k$ ) et où  $A' \cap A''$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^{k-1}$ . Comme  $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A') \oplus \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - A'') = 0$ , la suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne l'isomorphisme

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n - (A' \cap A'')) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^n - A)$$

ce qui prouve le lemme. □

Un sous-espace  $A$  de  $\mathbb{S}^3$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  est appelé un « nœud ». Le lemme ci-dessus montre que  $H_1(\mathbb{S}^3 - A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Par ailleurs,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - A, *)$  est appelé le « groupe du nœud ». Le théorème de Poincaré montre donc que l'abélianisé du groupe d'un nœud est toujours  $\mathbb{Z}$ .

☞ **7 Théorème.** *(théorème de séparation de Jordan-Brouwer) Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{S}^n$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ). Alors  $\mathbb{S}^n - A$  a deux composantes connexes ayant  $A$  comme frontière commune.*

*Démonstration.* Notons  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$  un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^{n-1}$  sur  $A$ . D'après le lemme précédent,  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n - A) \simeq \Lambda$ , ce qui signifie que  $\mathbb{S}^n - A$  a deux composantes connexes par arcs. Comme  $\mathbb{S}^n - A$  est localement connexe par arcs (c'est un ouvert de  $\mathbb{S}^n$ ),  $\mathbb{S}^n - A$  a deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$ . Les frontières de  $C_1$  et  $C_2$  sont clairement contenues dans  $A$ . Réciproquement, soit  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , et soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans tel que  $\mathbb{S}^{n-1} - U$  soit homéomorphe à  $\mathbb{D}^{n-1}$  (donc à  $[0, 1]^{n-1}$ ). Alors  $\tilde{H}_*(\mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^{n-1} - U)) = 0$  et  $\mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^{n-1} - U)$  est connexe par arcs. Il existe donc un chemin  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ , évitant  $f(\mathbb{S}^{n-1} - U)$ , et reliant un point de  $C_1$  à un point de  $C_2$ .  $\sigma^{-1}(A)$  est alors une partie compacte de  $[0, 1]$  (ne contenant ni 0 ni 1), dont on notera  $a$  et  $b$  la borne inférieure et la borne supérieure.  $\sigma(a)$  est alors un point de  $A - f(\mathbb{S}^{n-1} - U)$ , c'est-à-dire de  $f(U)$ , et il est adhérent à  $C_1$ . De même  $\sigma(b)$  est un point de  $f(U)$  adhérent à  $C_2$ . Il en résulte que tout voisinage ouvert de  $f(x)$  dans  $\mathbb{S}^n$ , parce qu'il contient un ensemble de la forme  $f(U)$ , rencontre l'adhérence de  $C_1$  et l'adhérence de  $C_2$ , donc que  $A$  est contenu dans la frontière de  $C_1$  et dans la frontière de  $C_2$ . Ainsi,  $A$  est la frontière commune de  $C_1$  et  $C_2$ . □

☞ **8 Théorème.** *(théorème de l'invariance du domaine) Toute partie de  $\mathbb{S}^n$  qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{S}^n$  est un ouvert de  $\mathbb{S}^n$ .*

Noter qu'on peut aussi bien énoncer ce théorème en y remplaçant  $\mathbb{S}^n$  par  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{S}^n$ , et  $f : A \rightarrow U$  un homéomorphisme de  $A$  vers un ouvert  $U$  de  $\mathbb{S}^n$ . Soit  $x \in A$ . Il existe une boule fermée  $B$  de centre  $f(x)$  (de rayon non nul) contenue dans  $U$ . Notons  $\partial(B)$  le bord de  $B$  (qui est homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1}$ ).  $f^{-1}(\partial(B))$  est une partie de  $\mathbb{S}^n$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1}$ .  $\mathbb{S}^n - f^{-1}(\partial(B))$  a donc deux composantes connexes, qui sont deux

ouverts de  $\mathbb{S}^n$ . Comme

$$\mathbb{S}^n - f^{-1}(\partial(B)) = f^{-1}(B - \partial(B)) \cup (\mathbb{S}^n - f^{-1}(B))$$

et comme  $f^{-1}(B - \partial(B))$  et  $\mathbb{S}^n - f^{-1}(B)$  sont connexes, ce sont les deux composantes connexes de  $\mathbb{S}^n - f^{-1}(\partial(B))$ . Ces composantes connexes étant des ouverts de  $\mathbb{S}^n$ , on voit que  $x \in f^{-1}(B - \partial(B)) \subset A$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

## I.

Soit  $\Lambda$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  un  $\Lambda$ -module différentiel gradué. On dit qu'il est « relativement libre » si chaque  $\Lambda$ -module  $M_i$  est libre. On dit qu'il est « borné inférieurement » s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $M_i = 0$  pour  $i < k$ .

(a) Montrer que si  $M$  est acyclique, relativement libre et borné inférieurement, le morphisme identique de  $M$  est homotope au morphisme nul.<sup>(1)</sup> (Procéder par récurrence sur le degré.)

Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de module différentiels gradués de degré  $k$  ( $|f| = k$ ). On définit le module gradué  $C(f)$  en posant  $C(f)_i = M_{i-k-1} \oplus N_i$  et on pose

$$\partial \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial(x) \\ f(x) + \partial(y) \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que  $C(f)$  est un module différentiel gradué.

(c) Montrer qu'on a la suite exacte courte de modules différentiels gradués

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & C(f) & \xrightarrow{v} & M \longrightarrow 0 \\ & & & & y \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} & & \\ & & & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x & & \end{array}$$

et montrer que le connectant de la suite exacte longue associée (lemme du serpent) est  $f_* : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$ .

(d) Montrer que si  $M$  et  $N$  sont relativement libres et bornés inférieurement, et si  $f$  induit un isomorphisme en homologie, alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.

## II.

Une partie de  $\mathbb{S}^3$  homéomorphe à  $[0, 1]^p$  sera appelée un «  $p$ -cube ». Un « cube » est une partie  $A$  de  $\mathbb{S}^3$  telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A$  soit un  $p$ -cube. L'ensemble des cubes est ordonné par inclusion et peut donc être vu comme une catégorie qu'on notera  $\mathcal{C}$ . On aura aussi à considérer

---

1. Il s'agit bien sûr ici d'« homotopies de chaînes ».

certaines sous-catégories  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). L'homologie est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . On note  $\mathbb{Z}$  le foncteur contravariant constant  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$  envoyant tout  $k$ -uplet de cubes sur  $\mathbb{Z}$  et toute flèche ( $k$ -uplet d'inclusions) sur l'identité de  $\mathbb{Z}$ .

(a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des  $p$ -cubes disjoints, on a un isomorphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$  naturel en  $A$  et  $B$ .<sup>(2)</sup> Montrer que  $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$ .

L'image de  $1 \in \mathbb{Z}$  par l'isomorphisme ci-dessus sera notée  $e_{AB}$ . ( $e_{AB}$ ) est donc une base du  $\mathbb{Z}$ -module  $H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$ , qu'on appellera sa « base canonique ».

(b) Montrer que pour tous cubes  $A$  et  $B$  disjoints, on a  $e_{AB} = -e_{BA}$ .

(c) Soient  $a$  et  $b$  deux cubes disjoints,  $\alpha$  et  $\beta$  deux cubes disjoints tels que  $\alpha \cup \beta \subset a \cup b$ . Montrer que l'homomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta)$$

induit par l'inclusion, envoie  $e_{ab}$  sur

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} & \text{si } \alpha \subset a \text{ et } \beta \subset b \\ 0 & \text{si } \alpha \subset a \text{ et } \beta \subset a \end{cases}$$

(d) Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre cubes deux à deux disjoints. Montrer que les inclusions canoniques induisent un isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D) \xrightarrow{\cong} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup C) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup D)$$

On notera encore  $e_{AB}$ ,  $e_{AC}$  et  $e_{AD}$  les éléments de  $H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D)$  dont les images par l'isomorphisme ci-dessus sont

$$\begin{pmatrix} e_{AB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ e_{AC} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_{AD} \end{pmatrix}$$

$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D)$  est ainsi muni d'une « base canonique » ( $e_{AB}, e_{AC}, e_{AD}$ ). Toutes les matrices envisagées ci-après sont relatives aux bases canoniques.

(e) Soient  $a$  et  $b$  deux 1-cubes disjoints. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les 0-cubes qui sont les deux extrémités de  $a$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  les 0-cubes qui sont les deux extrémités de  $b$ . Montrer que la matrice du morphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \xrightarrow{\varphi} H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$$

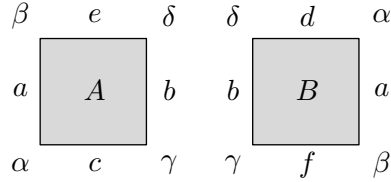
induit par l'inclusion, est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

2.  $\cup$  et  $\cap$  ont précedence sur  $-$ .  $\mathbb{S}^3 - A \cup B$  se lit donc  $\mathbb{S}^3 - (A \cup B)$ .

On considère deux 2-cubes  $A$  et  $B$  (autrement-dit des « carrés ») qui ont deux cotés opposés  $a$  et  $b$  en commun, et leurs quatre coins  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  en commun, comme l'indique la figure ci-dessous



et qui n'ont pas de points communs en dehors de ceux de  $a$  et  $b$ . Les quatre cotés restant ont été nommés  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ .

(f) Montrer que la matrice du morphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - d \cup f) \xrightarrow{\psi} H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$$

induit par les inclusions, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et montrer que  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$ .

(g) Montrer que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

complète les deux vecteurs colonnes de la matrice de la question (f) en une base de  $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$ , et que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont égaux modulo l'image de  $\psi$ .

(h) Dédurre de ce qui précède que le conoyau du morphisme

$$H_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \xrightarrow{\Theta} H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f)$$

induit par l'inclusion, est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(i) Dédurre de (h) qu'il n'existe aucune partie de  $\mathbb{S}^3$  homéomorphe à  $\mathbb{RP}^2$ . (Introduire un troisième carré  $C$  collé à  $A \cup B$  le long des cotés  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ .)



I.

(a) Il s'agit de construire une application linéaire homogène  $h : M \rightarrow M$  de degré  $+1$  telle que  $\partial \circ h + h \circ \partial = 1_M$ . On construit  $h$  par récurrence sur le degré. Pour  $i$  assez petit,  $M_i = 0$  et il suffit de poser  $h = 0$ . Supposons  $h$  construit jusqu'à un certain degré  $i - 1$ . On a le diagramme commutatif (en traits pleins)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & M_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & M_i & \xrightarrow{\partial} & M_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & M_{i-2} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\ & & \searrow h & & \downarrow 1 & \swarrow h & \downarrow 1 & \swarrow h & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & M_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & M_i & \xrightarrow{\partial} & M_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \end{array}$$

et il s'agit de construire  $h$  sur  $M_i$  de telle sorte que  $\partial \circ h = 1 - h \circ \partial$ . Comme  $M_i$  est un module libre, il suffit de trouver pour chaque vecteur  $e$  d'une base de  $M_i$  un vecteur  $x$  dans  $M_{i+1}$  tel que  $\partial(x) = x - h(\partial(x))$ , et pour cela, il suffit que  $x - h(\partial(x))$  soit dans l'image de  $\partial$ . Comme  $M$  est acyclique, il suffit que  $x - h(\partial(x))$  soit dans le noyau de  $\partial : M_i \rightarrow M_{i-1}$ . Mais on a  $\partial(x - h(\partial(x))) = \partial(x) - \partial(h(\partial(x))) = \partial(x) - \partial(x) + h(\partial(\partial(x))) = 0$ .

(b) Il faut vérifier que  $\partial$  est de degré  $-1$  et de carré nul. Si  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$ , on a  $x \in M_{i-k-1}$  et

donc  $f(x) \in N_{i-1}$ . On a par ailleurs  $\partial(x) \in M_{i-k-2}$  et  $\partial(y) \in N_{i-1}$ . On a donc  $\partial\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_{i-1}$ .

L'endomorphisme  $\partial : C(f) \rightarrow C(f)$  est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 & 0 \\ -(-1)^k f \partial + \partial f & \partial^2 \end{pmatrix} = 0$$

car  $f$  étant un morphisme de DG-modules de degré  $k$ , on a  $(-1)^k \partial f = f \partial$ .

(c) Il faut d'abord vérifier que  $u$  et  $v$  sont des morphismes de DG-modules.  $u$  est clairement de degré 0, et si  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$ , alors  $x \in M_{i-k-1}$ , donc  $v$  est de degré  $-(k+1)$ . On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial u(y) &= \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial y \end{pmatrix} = u(\partial y) \\ (-1)^{k+1} \partial v(x, y) &= (-1)^{k+1} \partial x \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= v(\partial(x, y)) \end{aligned}$$

et la suite est trivialement exacte.

Le connectant de la suite exacte longue associée est  $\partial_* = f_* : H(M) \rightarrow H(N)$ . En effet, partant avec un cycle  $x$  de  $N$ , on peut lui prendre  $(x, 0)$  comme antécédent par  $v$  et cet antécédent a  $(0, f(x))$  comme bord, lequel a  $f(x)$  comme antécédent par  $u$ .

(d) Comme  $f$  induit un isomorphisme en homologie, la suite exacte longue précédente montre que  $C(f)$  est acyclique et la question (a) montre que  $1_{C(f)}$  est homotope à 0, autrement-dit qu'il existe  $h : C(f) \rightarrow C(f)$  de degré +1 tel que  $\partial h + h\partial = 1_{C(f)}$ . On peut écrire  $h$  matriciellement :

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

On remarque que  $\alpha$  et  $\delta$  doivent être de degré +1, et que si  $k$  est le degré de  $f$ ,  $\gamma$  devra être de degré  $k + 2$  et  $\beta$  de degré  $-k$ .

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \beta \partial &= (-1)^{-k} \partial \beta \\ (-1)^{k+1} (\alpha \partial + \partial \alpha) &= 1 - \beta f \\ \delta \partial + \partial \delta &= 1 - f \beta \end{aligned}$$

Autrement-dit  $\beta : N \rightarrow M$  est un morphisme de DG-modules,  $(-1)^{k+1} \alpha$  est une homotopie de 1 à  $\beta f$  et  $\delta$  est une homotopie de 1 à  $f \beta$ .  $f$  est donc une équivalence d'homotopie d'inverse  $\beta$ .

## II.

(a) On a la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_3(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_3(\mathbb{S}^3 - B) \longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - B)$$

D'après le théorème 5 du cours du 4 avril,  $H_i(\mathbb{S}^3 - A)$  et  $H_i(\mathbb{S}^3 - B)$  sont nuls pour  $i \neq 0$ . On a donc un isomorphisme  $H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$  qui est naturel en  $A$  et  $B$  par naturalité de la suite de Mayer-Vietoris. Dans le cas où  $A \cap B = \emptyset$ , on a l'isomorphisme  $H_3(\mathbb{S}^3) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$ , toujours naturel en  $A$  et  $B$ , ce qui signifie que si  $A \subset A'$  et  $B \subset B'$ , on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_3(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{S}^3 - A' \cup B') \\ \downarrow 1 & & \downarrow \\ H_3(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est l'identité. Le foncteur  $(A, B) \mapsto H^3(\mathbb{S}^3)$  est donc constant et isomorphe au foncteur  $\mathbb{Z}$ . On choisit une fois pour toutes un isomorphisme (transformation

naturelle qui un isomorphisme pour chaque paire  $(A, B)$  de cubes disjoints) entre ces deux foncteurs, et on a le résultat annoncé.<sup>(3)</sup> La dernière assertion résulte du même théorème 5 via la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{H}_2(\mathbb{S}^3) &\longrightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - B) = 0 \\ 0 = \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3) &\longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - B) = 0 \end{aligned}$$

(b) On a les deux suites exactes de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - B) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow H_3(\mathbb{S}^3 - B \cap A) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\mathbb{S}^3 - B \cup A) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

dans lesquelles les deux morphismes  $\partial_* : H_3(\mathbb{S}^3 - A \cap B) \rightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B)$  sont opposés (cours du 21 mars, lemme 7), ce qui donne le résultat.

(c) Si  $\alpha \subset a$  et  $\beta \subset b$ , on a le diagramme commutatif (naturalité de la suite de Mayer-Vietoris)

$$\begin{array}{ccc} H_3(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \\ \downarrow 1 & & \downarrow \\ H_3(\mathbb{S}^3) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta) \end{array}$$

qui montre que le morphisme de l'énoncé envoie  $e_{ab}$  sur  $e_{\alpha\beta}$ . Si  $\alpha \subset a$  et  $\beta \subset a$ , on a les flèches

$$H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - a) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - (\alpha \cup \beta))$$

induites par inclusion. Comme  $H_2(\mathbb{S}^3 - a) = 0$ , on voit que le morphisme de l'énoncé est nul et envoie donc  $e_{ab}$  sur 0.

(d) Une première application de la suite de Mayer-Vietoris donne (en tenant compte du fait que  $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A$ )

$$H_3(\mathbb{S}^3 - A) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \xrightarrow{\theta_1} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup C) \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - A)$$

Comme  $H_i(\mathbb{S}^3 - A) = 0$  pour  $i = 2, 3$ , la flèche centrale est un isomorphisme. De la même manière on a l'isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C \cup D) \xrightarrow{\theta_2} H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - A \cup D)$$

induit par les inclusions. Le composé  $(\theta_1 \oplus 1) \circ \theta_2$  est l'isomorphisme annoncé. Noter que les flèches sont bien celles qui sont induites par les inclusions et non pas leurs opposées compte tenu des conventions adoptées dans l'énoncé du lemme 7 du cours du 21 mars.

---

3. Noter que comme  $\mathbb{Z}$  n'a que deux automorphismes, à savoir l'identité et son opposée, il y a deux choix d'isomorphisme naturel entre nos deux foncteurs constants. Un tel choix consiste à choisir une orientation de  $\mathbb{S}^3$ .

(e) Le composé de  $\varphi$  avec l'isomorphisme de la question précédente (où  $A, B, C$  et  $D$  sont remplacés par  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ ) a trois composantes

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) &\longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta) \\ H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) &\longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \gamma) \\ H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) &\longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \delta) \end{aligned}$$

La question (c) montre que les images de  $e_{ab}$  par ces trois morphismes sont respectivement 0,  $e_{\alpha\gamma}$  et  $e_{\alpha\delta}$ , d'où la matrice annoncée.

(f) Comme précédemment, on applique le résultat de la question (c). Comme  $\alpha \subset c$  et  $\beta \subset e$ , le premier coefficient en haut à gauche de la matrice est 1. Les cinq autres se traitent de la même manière. C'est une simple vérification.

La dernière assertion résulte de la dernière assertion de la question (a) via la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 = \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - a \cup b) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A) \oplus \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - B) = 0$$

(g) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a un déterminant inversible (dans  $\mathbb{Z}$ ), à savoir  $-1$ . Il en résulte qu'elle est inversible avec pour inverse une matrice à coefficients entiers. En conséquence les vecteurs colonnes de cette matrice forment une base du  $\mathbb{Z}$ -module  $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta)$ . Par ailleurs, si on soustrait au vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les deux premières colonnes de la matrice précédente (lequel appartient à l'image de  $\psi$ ), on obtient le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(h) On a le diagramme commutatif (naturalité de la suite de Mayer-Vietoris, compte tenu du

fait que  $A \cap B = a \cup b$ ) dont les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccc}
& & H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) = 0 \\
& & \downarrow \\
0 & & H_2(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_2(\mathbb{S}^3 - d \cup f) \\
\downarrow & & \downarrow \psi \\
\mathbb{Z} \simeq H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b) & \xrightarrow{\varphi} & H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \partial_* \\
H_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) & \xrightarrow{\Theta} & H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) \simeq \mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup e) \oplus H_1(\mathbb{S}^3 - d \cup f) = 0
\end{array}$$

Les zéros de la colonne de gauche résultent du théorème 5 du cours du 4 avril. Le zéro en haut à droite résulte du lemme 6 de ce même cours, car  $c \cup d \cup e \cup f$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  (obtenu comme concaténation de quatre segments). De ce même lemme résulte l'isomorphisme  $H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f) \simeq \mathbb{Z}$ .

Le conoyau de  $\Theta$  est égal à celui de  $\partial_* \circ \varphi$ . Or,  $e_{ab}$ , qui est un générateur de  $H_2(\mathbb{S}^3 - a \cup b)$ , a pour image par  $\varphi$  le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

modulo l'image de  $\psi$  qui est le noyau de  $\partial_*$ . Comme  $\partial_*$  est surjectif, il donne un isomorphisme

$$H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta) / \text{Ker}(\partial_*) \xrightarrow[\simeq]{\overline{\partial_*}} H_1(\mathbb{S}^3 - c \cup d \cup e \cup f)$$

Or, d'après la première partie de la question (g), le quotient  $H_2(\mathbb{S}^3 - \alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta) / \text{Ker}(\partial_*)$  est engendré par la classe du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

étant (au signe près) le double du précédent, on voit que le conoyau de  $\partial_* \circ \varphi$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(i) Le plan projectif  $\mathbb{RP}^2$  est par définition le quotient de la sphère  $\mathbb{S}^2$  par l'action antipodale. On peut remplacer  $\mathbb{S}^2$  par le bord d'un cube  $[0, 1]^3$  (qui lui est homéomorphe), lequel est un

collage de six carré (un cube ordinaire a six faces !) Ces faces étant disjointes des faces opposées (antipodales), on voit que  $\mathbb{RP}^2$  est le résultat du collage de trois carrés. Le collage de deux d'entre eux seulement donne une bande de Möbius  $M$ . C'est le collage des carrés  $A$  et  $B$  de l'énoncé. Ce qu'on a démontré dans la question (h) est que si on note  $\partial M$  le bord de la bande de Möbius  $M$  (c'est-à-dire  $c \cup d \cup e \cup f$ ) plongée dans  $\mathbb{S}^3$ , alors le morphisme

$$H_1(\mathbb{S}^3 - M) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^3 - \partial M)$$

induit par inclusion est isomorphe à la multiplication par 2 de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$ , fait qui est d'ailleurs visuellement évident.

Notons  $C$  le troisième carré constituant  $\mathbb{RP}^2$ . On a la suite exacte de Mayer-Vietoris (on a simplifié les sommes directes en enlevant les modules nuls)

$$\tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - A \cup B) \xrightarrow{\Theta} \tilde{H}_1(\mathbb{S}^3 - (A \cup B) \cap C) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B) = 0$$

où le zéro de droite résulte de la dernière assertion de la question (f).

Ceci montre que  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - A \cup B \cup C) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ce qui est bien sûr impossible, puisqu'un  $\tilde{H}_0(X; \mathbb{Z})$  est toujours un  $\mathbb{Z}$ -module libre. Ainsi, notre collage de trois carrés ne peut pas être réalisé dans  $\mathbb{S}^3$ , ce qui montre qu'aucun sous-ensemble de  $\mathbb{S}^3$  n'est homéomorphe à  $\mathbb{RP}^2$ .



# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 30 avril 2012.

## 1 Le cône d'un morphisme de DG-modules.

**1 Définition.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de DG-modules de degré  $k$ . On note  $C(f)$  et on appelle « cône de  $f$  », le DG-module défini par

$$\begin{aligned} C(f)_i &= M_{i-k-1} \oplus N_i \\ \partial \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial x \\ f(x) + \partial y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut vérifier que  $\partial$  est de degré  $-1$  et de carré nul. Si  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$ , on a  $x \in M_{i-k-1}$  et donc  $f(x) \in N_{i-1}$ . On a par ailleurs  $\partial(x) \in M_{i-k-2}$  et  $\partial(y) \in N_{i-1}$ . On a donc  $\partial \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_{i-1}$ . Comme  $C(f)$  est une somme directe de deux sous-modules, on peut représenter tout endomorphisme de  $C(f)$  par une matrice  $2 \times 2$ . Par exemple, l'endomorphisme  $\partial : C(f) \rightarrow C(f)$  est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2 & 0 \\ -(-1)^k f \partial + \partial f & \partial^2 \end{pmatrix} = 0$$

car  $f$  étant un morphisme de DG-modules de degré  $k$ , on a  $(-1)^k \partial f = f \partial$ .

**2 Lemme.** Pour tout morphisme de DG-modules  $f : M \rightarrow N$  de degré  $k$ , on a la suite exacte courte de DG-modules

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow N &\xrightarrow{u} C(f) \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0 \\ y &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto x \end{aligned}$$

où  $u$  est de degré 0 et  $v$  de degré  $-(k+1)$ .

*Démonstration.* Il faut d'abord vérifier que  $u$  et  $v$  sont des morphismes de DG-modules.  $u$  est clairement de degré 0, et si  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(f)_i$ , alors  $x \in M_{i-k-1}$ , donc  $v$  est de degré  $-(k+1)$ . On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \partial u(y) &= \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial y \end{pmatrix} = u(\partial y) \\ (-1)^{k+1} \partial v(x, y) &= (-1)^{k+1} \partial x \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= v(\partial(x, y)) \end{aligned}$$

et la suite est trivialement exacte.  $\square$

**3 Corollaire.** *Un morphisme de DG-modules  $f : M \rightarrow N$  induit un isomorphisme en homologie si et seulement si l'homologie de  $C(f)$  est nulle.*

*Démonstration.* Le lemme du serpent appliqué à la suite exacte courte du lemme 2 nous donne la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H(M) \xrightarrow{\partial_*} H(N) \xrightarrow{u_*} H(C(f)) \xrightarrow{v_*} H(M) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

La description du connectant (lemme du serpent) montre que  $\partial_* = f_* : H(M) \rightarrow H(N)$ . En effet, partant avec un cycle  $x$  de  $N$ , on peut lui prendre  $(x, 0)$  comme antécédent par  $v$  et cet antécédent a  $(0, f(x))$  comme bord, lequel a  $f(x)$  comme antécédent par  $u$ . Le corollaire en résulte.  $\square$

**4 Définition.** *Un module différentiel gradué  $M$  est dit « inessentiel », si l'identité de  $M$  est homotope à 0.*

Autrement-dit,  $M$  est inessentiel s'il existe  $h : M \rightarrow M$  (de degré +1) tel que  $\partial \circ h + h \circ \partial = 1_M$ .

**5 Lemme.** *Tout module différentiel gradué relativement libre, borné inférieurement et d'homologie nulle est inessentiel.*

*Démonstration.* Soit  $M$  un module différentiel gradué relativement libre, borné inférieurement et d'homologie nulle. On définit  $h : M \rightarrow M$  par récurrence sur le degré en commençant à un degré assez bas pour qu'on puisse poser  $h = 0$  à ce degré. Supposons maintenant  $h$  défini sur  $M_i$  pour tout  $i < n$ , et tel que  $\partial(h(x)) + h(\partial x) = x$  pour tout  $x$  de degré strictement inférieur à  $n$ . Soit  $(e_j)_j$  une base de  $M_n$ . Comme  $|\partial e_j| < n$ , on a  $\partial(e_j - h(\partial e_j)) = \partial e_j - \partial e_j + \partial(h(\partial e_j)) - \partial(h(\partial e_j)) = 0$ . Comme l'homologie de  $M$  est nulle,  $e_j - h(\partial e_j)$  est dans l'image de  $\partial : M_{n+1} \rightarrow M_n$ . On a donc un élément  $h(e_j) \in M_{n+1}$  tel que  $e_j = \partial(h(e_j)) + h(\partial e_j)$ . Ceci définit une application linéaire  $h : M_n \rightarrow M_{n+1}$  telle que  $\partial \circ h + h \circ \partial = 1_M$ .  $\square$

**6 Lemme.** *Un morphisme de DG-modules  $f : M \rightarrow N$  dont le cône  $C(f)$  est inessentiel est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration.* Dire que  $C(f)$  est inessentiel est dire qu'il existe  $h : C(f) \rightarrow C(f)$  de degré  $+1$  tel que  $\partial h + h\partial = 1$ . On peut écrire  $h$  matriciellement :

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

On remarque que  $\alpha$  et  $\delta$  doivent être de degré  $+1$ , et que si  $k$  est le degré de  $f$ ,  $\gamma$  devra être de degré  $k+2$  et  $\beta$  de degré  $-k$ .

On a alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-1)^k \partial & 0 \\ f & \partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \beta \partial &= (-1)^{-k} \partial \beta \\ (-1)^{k+1} (\alpha \partial + \partial \alpha) &= 1 - \beta f \\ \delta \partial + \partial \delta &= 1 - f \beta \end{aligned}$$

Autrement-dit  $\beta : N \rightarrow M$  est un morphisme de DG-modules,  $(-1)^{k+1} \alpha$  est une homotopie de 1 à  $\beta f$  et  $\delta$  est une homotopie de 1 à  $f \beta$ .  $\square$

**7 Corollaire.** *Un morphisme de modules différentiels gradués relativement libres et bornés inférieurement qui induit un isomorphisme en homologie est une équivalence d'homotopie.*  $\square$

**8 Lemme.** *Soit  $M$  un module différentiel gradué tel que  $M = A \oplus B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux modules gradués, et tel que la matrice de la différentielle de  $M$  (relativement à la décomposition  $M = A \oplus B$ ) soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

*Alors si  $b : A \rightarrow B$  est bijectif, l'homologie de  $M$  est nulle.*

*Démonstration.* En écrivant que le carré de la matrice ci-dessus est 0, on obtient  $a^2 = 0$ ,  $c^2 = 0$  et  $ba + cb = 0$ . Autrement-dit,  $A$  et  $B$  sont des modules différentiels gradués avec  $a$  et  $c$  pour différentielles respectives, et  $b : A \rightarrow B$  est un morphisme de module différentiels gradués de degré  $-1$ .  $M$  est alors isomorphe à  $C(b)$  comme module différentiel gradué. Comme  $b$  est un isomorphisme, il induit un isomorphisme en homologie, et l'homologie de  $C(b)$  est nulle.  $\square$

**9 Lemme.** *Si  $\Lambda$  est un anneau principal, et si  $M$  est un  $\Lambda$ -module différentiel gradué relativement libre et acyclique, alors  $M$  est isomorphe au cône de l'identité de  $Z(M)$ .*

*Démonstration.* Pour chaque  $n$ , on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n(M) \longrightarrow M_n \xrightarrow{\partial} B_n(M) \longrightarrow 0$$

qui est scindée car  $B_n(M)$  est libre comme sous-module de  $M_n$ . Il en résulte que  $Z_n(M)$  est facteur direct de  $M_n$ . Ceci étant valable pour tout  $n$ , et si on ne tient pas compte des différentielles, on a la décomposition  $M = N \oplus Z(M)$  de  $M$  comme module gradué. La différentielle

de  $M$  relativement à cette décomposition est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, pour tout  $x$  de  $M$ , donc a fortiori de  $N$ , on a  $\partial x \in B(M) = Z(M)$ , et  $\partial$  est nulle sur  $Z(M)$ . L'homologie de  $C(a)$  est donc celle de  $M$ , laquelle est nulle. Il en résulte que  $a : N \rightarrow Z(M)$  induit un isomorphisme en homologie, quand ces deux modules sont munis des différentielles qui sont sur la diagonale de la matrice précédente, c'est-à-dire 0.  $a$  est donc un isomorphisme, et  $M$  est isomorphe à  $C(1_{Z(M)})$ .  $\square$

**10 Lemme.** *Soient  $M$  et  $N$  deux module différentiels gradués sur l'anneau principal  $\Lambda$ . Si  $M$  est relativement libre et acyclique,  $M \otimes N$  est acyclique.*

*Démonstration.* D'après le lemme 9, on peut supposer que  $M = A \oplus B$  et que la matrice de la différentielle de  $M$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a : A \rightarrow B$  est un isomorphisme (de degré  $-1$ ) de modules gradués. On a alors  $M \otimes N \simeq (A \otimes N) \oplus (B \otimes N)$ , et la différentielle de ce module a pour matrice dans cette décomposition

$$\begin{pmatrix} 1 \otimes \partial & 0 \\ a \otimes 1 & 1 \otimes \partial \end{pmatrix}$$

En effet, pour  $x \in A$  et  $y \in N$ , on a  $\partial(x \otimes y) = a(x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y$ , et pour  $x \in B$  et  $y \in N$ , on a  $\partial(x \otimes y) = (-1)^{|x|} x \otimes \partial y$ . Or,  $a$  étant un isomorphisme, il en est de même de  $a \otimes 1$ , et on voit que  $M \otimes N$  est le cône d'un isomorphisme de modules différentiels gradués, ce qui implique que son homologie est nulle.  $\square$

## 2 Résolutions, Tor et Ext.

Un  $\Lambda$ -module  $M$  a de nombreuses « résolutions libres », qui sont des DG-modules, et qui sont en fait des sortes de « présentations » de  $M$ , analogues aux présentations d'un groupe par générateurs et relations. Le phénomène tout à fait remarquable est que deux résolutions libres quelconques de  $M$  sont homotopiquement équivalentes (lemme 13 (page 6)). Comme la notion d'équivalence d'homotopie entre DG-modules est de nature équationnelle, elle est préservée par tout foncteur  $F$  entre catégories de modules. L'homologie de l'image d'une résolution libre par un tel foncteur  $F$  est donc indépendante de la résolution choisie et constitue une nouvelle famille d'invariants du module  $M$ . C'est ainsi qu'on construit les « Tor » et les « Ext », ainsi que de nombreux autres foncteurs qu'on appelle « foncteurs dérivés ».

**11 Définition.** *Soit  $\Lambda$  un anneau (unitaire, non nécessairement commutatif), et soit  $M$  un  $\Lambda$ -module à droite, qu'on verra comme un DG-module concentré en dimension 0. Soit  $P_*$  un DG- $\Lambda$ -module. Un morphisme de DG-modules  $P_* \rightarrow M$  est appelé une « résolution » de  $M$  s'il*

induit un isomorphisme en homologie. Une telle résolution est dite « libre », si chaque  $P_i$  est un  $\Lambda$ -module libre.

Noter qu'une résolution  $P_* \rightarrow M$  de  $M$  n'est rien d'autre qu'une suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} P_2 \xrightarrow{\partial} P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

En effet, ce diagramme peut être redessiné comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & P_n & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & P_2 & \xrightarrow{\partial} & P_1 & \xrightarrow{\partial} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & 0 & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & 0 & \xrightarrow{\partial} & 0 & \xrightarrow{\partial} & 0 & \xrightarrow{\partial} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

c'est-à-dire sous la forme d'un morphisme de DG-modules  $\rho : P_* \rightarrow M$ , et il suffit de remarquer que l'exactitude de la première suite signifie que l'homologie de  $P_*$  est nulle pour toutes les dimensions strictement positives et que  $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$  induit un isomorphisme  $H_0(P_*) \rightarrow H_0(M) = M$ . Ceci est équivalent à dire que  $\rho$  induit un isomorphisme  $H_*(P_*) \rightarrow H_*(M)$ .

**12 Lemme.** Soit  $\rho : P_* \rightarrow M$  un morphisme de DG-modules où les  $P_i$  sont libres (c'est-à-dire que  $P_*$  est relativement libre), et soit  $\theta : Q_* \rightarrow M$  une résolution de  $M$ . Alors  $\rho$  se relève le long de  $\theta$ .

*Démonstration.* Dire qu'on a un relèvement de  $\rho$  le long de  $\theta$  est dire qu'on a un morphisme de DG-modules  $f : P_* \rightarrow Q_*$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Q_* \\ & \nearrow f & \downarrow \theta \\ P_* & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

soit commutatif. Comme  $M$  est concentré en dimension 0, ceci est équivalent à dire qu'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & P_n & \xrightarrow{\partial} & P_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & P_1 & \xrightarrow{\partial} & P_0 & \xrightarrow{\rho_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow 1 & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & Q_n & \xrightarrow{\partial} & Q_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \xrightarrow{\partial} & Q_1 & \xrightarrow{\partial} & Q_0 & \xrightarrow{\theta_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On va construire  $f_n$  par récurrence sur  $n$ . Comme  $\theta : Q_* \rightarrow M$  est une résolution, la suite horizontale inférieure est exacte (ce qui n'est pas nécessairement le cas de la suite horizontale supérieure, dans laquelle toutefois la composition de deux flèches successives (y compris  $\rho_0 \circ \partial$ ) est nulle), et  $\theta_0$  est donc surjectif. Comme  $P_0$  est libre,  $\rho_0$  se relève le long de  $\theta_0$  pour donner  $f_0$  rendant commutatif le carré de droite. Supposons maintenant les  $f_i$  construits pour  $i < n$  (avec  $n > 0$ ). Comme  $\partial f_{n-1} \partial = f_{n-2} \partial \partial = 0$  ( $\theta_0 f_0 \partial = \rho_0 \partial = 0$  dans le cas  $n = 1$ ), et comme

la suite inférieure est exacte, on voit que l'image de  $f_{n-1}\partial$  est dans l'image de  $\partial : Q_n \rightarrow Q_{n-1}$ . Comme  $P_n$  est libre,  $f_{n-1}\partial$  se relève le long de  $\partial$  en une flèche  $f_n$  telle que  $\partial f_n = f_{n-1}\partial$ .  $\square$

**13 Lemme.** *Deux résolutions libres d'un même module  $M$  sont homotopiquement équivalentes.*

*Démonstration.* Considérons ces deux résolutions comme des module différentiels gradués, qui sont alors acycliques, relativement libres et bornés inférieurement. D'après le lemme 12, il existe un morphisme  $f$  du premier vers le second, et comme  $f$  induit nécessairement un isomorphisme entre leurs homologies (qui s'identifie à l'identité de  $M$ ), c'est une équivalence d'homotopie (lemme 7 (page 3)).  $\square$

**14 Définition.** *Soit  $F$  un foncteur covariant (resp. contravariant) de la catégorie des  $\Lambda$ -modules vers elle-même. Soit  $M$  un module et  $P_* \rightarrow M$  une résolution libre de  $M$ . La correspondance fonctorielle  $M \mapsto H_n(F(P_*))$  (resp.  $M \mapsto H^n(F(P_*))$ ) est appelé  $n^{\text{ième}}$  foncteur dérivé de  $F$ .*

*Le  $n^{\text{ième}}$  foncteur dérivé de  $M \mapsto M \otimes N$  est noté  $M \mapsto \text{Tor}_n(M, N)$  (ou  $M \mapsto \text{Tor}_n^\Lambda(M, N)$ ), et le  $n^{\text{ième}}$  foncteur dérivé de  $M \mapsto \text{Hom}(M, N)$  est noté  $M \mapsto \text{Ext}^n(M, N)$  (ou  $M \mapsto \text{Ext}_\Lambda^n(M, N)$ ).*

Remarquer que si le foncteur  $F$  est contravariant (ce qui est le cas de  $M \mapsto \text{Hom}(M, N)$ ),  $F(P_*)$  est négativement gradué, et il en est de même de  $H^*(F(P_*))$ , ce qui justifie que  $n$  soit en exposant (et non en indice) dans la notation  $\text{Ext}^n$ .  $\text{Ext}^n(M, N)$  est donc de degré  $-n$ .

Comme les foncteurs  $M \mapsto M \otimes N$ ,  $M \mapsto \text{Hom}(M, N)$  et le foncteur homologie commutent avec les sommes directes finies, il en est de même des foncteurs  $M \mapsto \text{Tor}_n(M, N)$  et  $M \mapsto \text{Ext}^n(M, N)$ .

**15 Lemme.** *Soit  $F$  un foncteur de la catégorie des  $\Lambda$ -modules vers elle-même, covariant et préservant les colimites finies (resp. contravariant et transformant les colimites finies en limites finies) Alors le foncteur dérivé  $M \mapsto H_0(F(P_*))$  (resp.  $M \mapsto H^0(F(P_*))$ ) est isomorphe à  $F$ .*

*Démonstration.* Soit  $P_* \rightarrow M$  une résolution libre d'un module  $M$ . Comme  $F$  préserve les coégaliseurs, on a la suite exacte

$$F(P_1) \longrightarrow F(P_0) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$

qui donne immédiatement le résultat. On traite de même le cas d'un foncteur contravariant.  $\square$

Le lemme ci-dessus s'applique au foncteur (covariant)  $M \mapsto M \otimes N$  et (comme on va le voir plus loin) au foncteur (contravariant)  $M \mapsto \text{Hom}(M, N)$ . On a donc  $\text{Tor}_0(M, N) \simeq M \otimes N$  et  $\text{Ext}^0(M, N) \simeq \text{Hom}(M, N)$ .

**16 Exemple.** Dans le cas où  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , tout module  $M$  a une résolution libre  $L_*$  dans laquelle  $L_n = 0$  pour  $n \geq 2$ . En effet, on a la résolution

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \longrightarrow \mathbb{Z}[M] \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

où  $f$  envoie tout élément de  $M$  sur lui-même. C'est dû au fait que  $\text{Ker}(f)$  est libre comme

sous-module d'un module libre sur un anneau principal. En conséquence, pour les  $\mathbb{Z}$ -modules, seuls  $\text{Tor}_0(M, N)$ ,  $\text{Ext}^0(M, N)$ ,  $\text{Tor}_1(M, N)$  et  $\text{Ext}^1(M, N)$  sont significatifs. Par exemple, on a la  $\mathbb{Z}$ -résolution libre suivante de  $\mathbb{Z}/n$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur de tensorisation par  $\mathbb{Z}/m$ , on obtient le  $DG$ -module

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/m \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}/m$$

dont l'homologie est constituée du conoyau de la multiplication par  $n$  (dimension 0) et de son noyau (dimension 1). On voit donc que  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) \simeq \{x \in \mathbb{Z}/m \mid nx = 0\}$ . Par ailleurs,  $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) \simeq (\mathbb{Z}/m)/n \simeq \mathbb{Z}/\text{PGCD}(n, m) \simeq \mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m$ .

☞ **17 Lemme.** *Si  $k$  est un corps commutatif et si  $T$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de torsion de type fini, on a  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(T, k) \simeq T \otimes_{\mathbb{Z}} k$ .*

*Démonstration.*  $T$  est isomorphe à une somme directe finie de  $\mathbb{Z}$ -modules de la forme  $\mathbb{Z}/n_i$ . Il suffit donc de montrer le lemme dans le cas où  $T = \mathbb{Z}/n$  ( $n \geq 2$ ). Dans ce cas, partant de la résolution

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

on obtient par tensorisation par  $k$  le  $DG$ -module

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\times n} k$$

Si la caractéristique de  $k$  est 0, la multiplication par  $n$  est bijective. S'il est de caractéristique  $p$ , la multiplication par  $n$  est bijective si  $p$  ne divise pas  $n$  et est nulle sinon. Dans tous les cas,  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(T, k)$  et  $T \otimes_{\mathbb{Z}} k$  sont tous les deux 0 ou tous les deux  $k$ .  $\square$

### 3 Cohomologie.

☞ **18 Définition.** *Soit  $G$  un  $\Lambda$ -module, qu'on verra aussi comme un  $\Lambda$ -module différentiel gradué concentré en degré 0. Soit  $X$  un espace topologique. On pose  $C^*(X; G) = \text{Hom}(C_*(X), G)$ , et  $H^*(X; G) = H(C^*(X; G))$ . Le  $\Lambda$ -module gradué  $C^*(X; G)$  est appelé le « complexe des cochaînes de  $X$  à coefficients dans  $G$  », et  $H^*(X; G)$  est appelé la « cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $G$  ».*

On écrit éventuellement  $C^*(X)$  et  $H^*(X)$  au lieu de  $C^*(X; G)$  et  $H^*(X; G)$ .

Comme on a posé  $C^*(X; G) = \text{Hom}(C_*(X), G)$ , comme  $C_*(X)$  est positivement gradué et  $G$  concentré en degré 0, on voit que  $C^*(X; G)$  est négativement gradué, de même que  $H^*(X; G)$ . Noter que bien que ces deux  $DG$ -modules soient gradués négativement, on écrira quand même  $C^i(X; G)$  et  $H^i(X; G)$  pour leurs composantes homogènes de degré  $-i$  (convention 2 du cours du 19 mars).

La différentielle  $\partial$  de  $C^*(X)$  est donnée par la formule de la définition 5 du cours du 19 mars, qui stipule que la différentielle de  $\text{Hom}(M, N)$  est  $\partial_* - \partial^*$ . Dans le cas présent,  $N$  est réduit à  $G$  (concentré en degré 0), et la différentielle de  $C^*(X)$  est donc juste  $-\partial^*$ . En pratique, si  $x \in C^*(X)$ , on a donc  $\partial x = -(-1)^{|x|}(x \circ \partial)$ . Bien sûr, la différentielle de  $C^*(X)$  étant de degré  $-1$ , elle envoie  $C^m(X)$  (cochaînes de degré  $-n$ ) dans  $C^{m+1}(X)$  (cochaînes de degré  $-n-1$ ).

On a une application (linéaire) d'« évaluation »<sup>(1)</sup> :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X; G) \otimes C_*(X) & \xrightarrow{\text{ev}} & G \\ \xi \otimes x & \longmapsto & \xi(x) \end{array}$$

qui est homogène de degré 0, puisque non nulle seulement sur les tenseurs  $\xi \otimes x$  tels que  $|\xi| = -|x|$ .  $\xi(x)$  sera éventuellement plus suggestivement noté  $\langle \xi, x \rangle$ .

L'évaluateur a une propriété de naturalité qui s'exprime, pour toute flèche  $\varphi : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ , par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^*(Y; G) \otimes C_*(X) & \xrightarrow{\varphi^* \otimes 1} & C^*(X; G) \otimes C_*(X) \\ \downarrow 1 \otimes \varphi & & \downarrow \text{ev} \\ C^*(Y; G) \otimes C_*(Y) & \xrightarrow{\text{ev}} & G \end{array}$$

puisque  $\xi(\varphi(x))$  peut être lu  $\varphi^*(\xi)(x)$ , c'est-à-dire  $\langle \varphi^*(\xi), x \rangle = \langle \xi, \varphi(x) \rangle$ . On appliquera cette propriété dans le cas où  $\varphi$  est induite par une application continue  $f : X \rightarrow Y$ .

Rappelons qu'on a défini, pour toute paire topologique  $(X, A)$ , le module différentiel gradué  $C_*(X, A)$  comme le conoyau de la flèche  $C_*(A) \rightarrow C_*(X)$  induite par l'inclusion. On a a priori deux façons de définir  $C^*(X, A)$ . On peut le définir comme le dual de  $C_*(X, A)$  ou comme le noyau de la flèche  $C^*(X) \rightarrow C^*(A)$  induite par l'inclusion. Dans le cas de la théorie des chaînes singulière, les deux définitions donnent des modules différentiels gradués isomorphes. En effet, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_*(A) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

est relativement scindée, car  $C_n(A)$  est facteur direct de  $C_n(X)$ . En passant au dual, on a encore une suite exacte

$$0 \longrightarrow C^*(X, A) \longrightarrow C^*(X) \longrightarrow C^*(A) \longrightarrow 0$$

ce qui montre que le dual de  $C_*(X, A)$  est bien isomorphe canoniquement au noyau de la flèche  $C^*(X) \rightarrow C^*(A)$ .

On a donc un nouveau foncteur  $(X, A) \mapsto C^*(X, A)$ , et bien entendu, en appliquant le lemme du serpent, une « suite exacte longue de cohomologie de la paire  $(X, A)$  » :

$$\dots \longrightarrow H^n(X, A) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(A) \xrightarrow{\partial^*} H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

---

1. Aussi appelée « produit de Kronecker ».

Notez que si  $G$  est une  $\Lambda$ -algèbre, les DG- $\Lambda$ -modules  $C^*(X; G)$  et  $H^*(X; G)$  sont aussi des DG- $G$ -modules, et que les morphismes  $f^* : C^*(Y; G) \rightarrow C^*(X; G)$  et  $f^* : H^*(Y; G) \rightarrow H^*(X; G)$  induits par un morphisme ( $\Lambda$ -linéaire)  $f : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$  sont  $G$ -linéaires.

Notons  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\Lambda$ -modules différentiels gradués. Le foncteur (contravariant) de « dualisation à valeurs dans  $G$  »  $M \mapsto \text{Hom}(M; G) = M_G^*$  (de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$ ) est « auto-adjoint à droite », ce qui signifie qu'on a un isomorphisme

$$\mathcal{C}(M, N_G^*) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(N, M_G^*)$$

naturel en  $M$  et  $N$ . Cet isomorphisme est une conséquence immédiate de l'isomorphisme naturel  $\mathcal{C}(M, N_G^*) \simeq \mathcal{C}(M \otimes N, G)$  et de la symétrie (naturelle) du produit tensoriel. En fait, on peut réécrire l'isomorphisme ci-dessus comme ceci

$$\mathcal{C}^{op}(N_G^*, M) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(N, M_G^*)$$

ce qui montre qu'en réalité,  $*_G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  admet son opposé  $^{*op}_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$  comme adjoint à gauche, ces deux foncteurs étant maintenant covariants. Il en résulte que  $*_G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  préserve les limites, autrement-dit que le foncteur contravariant  $*_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  transforme les colimites en limites, et en particulier les coégaliseurs en égaliseurs, ce qui donne le résultat suivant :

☞ **19 Lemme.** *Si*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

*est une suite exacte de modules différentiels gradués, il en est de même de*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, G) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(N, G) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M, G)$$

□

Par contre, le foncteur  $*_G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  ne préserve pas les colimites en général, autrement-dit le foncteur contravariant  $*_G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ne transforme généralement pas les limites en colimites. En particulier, il ne transforme généralement pas les monomorphismes en épimorphismes. Par exemple, dans la catégorie des  $\mathbb{Z}$ -modules, la multiplication par 2 de  $\mathbb{Z}$  vers lui-même, qui est injective, a pour transposée la multiplication par 2 de  $\mathbb{Z}^* \simeq \mathbb{Z}$  vers lui-même qui n'est pas surjective. On devine donc qu'il y a peu de chance que le foncteur de dualisation commute à l'homologie, et de fait :

☞ **20 Lemme.** *Soit  $\Lambda$  un anneau principal,  $M$  un  $\Lambda$ -module différentiel gradué relativement libre et  $G$  un  $\Lambda$ -module. On a la suite exacte courte naturelle en  $M$  :*

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1_\Lambda(H_{n-1}(M), G) \rightarrow H_{-n}(\text{Hom}(M, G)) \rightarrow \text{Hom}(H_n(M), G) \rightarrow 0$$

*De plus, cette suite exacte est scindée, mais le scindement n'est pas naturel.*

*Démonstration.* On a la suite exacte courte de DG-modules

$$0 \longrightarrow Z(M) \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} B(M) \longrightarrow 0$$

et comme  $M$  est relativement libre et  $\Lambda$  principal, chaque  $B_n(M)$  est un module libre et cette suite exacte courte est scindée en chaque degré (mais le scindement ne commute pas en général avec les différentielles). Il en résulte qu'on a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(B(M, G)) \xrightarrow{\partial^*} \text{Hom}(M, G) \longrightarrow \text{Hom}(Z(M), G) \longrightarrow 0$$

Comme les différentielles de  $\text{Hom}(B(M, G))$  et  $\text{Hom}(Z(M), G)$  sont nulles, le lemme du serpent nous donne la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{-n}(\text{Hom}(M, G)) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_n(M), G) & & \\ & & & & \searrow & & \\ & \text{Hom}(B_n(M), G) & \longrightarrow & H_{-n-1}(\text{Hom}(M, G)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et la description du connectant montre que la flèche  $\text{Hom}(Z_n(M), G) \rightarrow \text{Hom}(B_n(M), G)$  n'est autre que celle qui est induite par l'inclusion  $i : B_n(M) \hookrightarrow Z_n(M)$ , et qu'on notera donc  $i^*$ . On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(i^*)_{-n+1} \longrightarrow H_{-n}(\text{Hom}(M, G)) \longrightarrow \text{Ker}(i^*)_{-n} \longrightarrow 0$$

Par ailleurs, on a la suite exacte de  $\Lambda$ -modules

$$0 \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow Z_n(M) \longrightarrow H_n(M) \longrightarrow 0$$

qui est une résolution de  $H_n(M)$  par des  $\Lambda$ -module libres (avec  $Z_n(M)$  en degré 0 et  $B_n(M)$  en degré 1). L'homologie du DG-module

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(Z_n(M), G) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(B_n(M), G) \longrightarrow 0$$

est donc  $\text{Ker}(i^*)_{-n} = \text{Hom}(H_n(M), G)$  en degré 0 et  $\text{Coker}(i^*)_{-n} = \text{Ext}_{\Lambda}^1(H_n(M), G)$  en degré  $-1$ , et on a la suite exacte de l'énoncé.

Voyons maintenant pourquoi cette dernière est scindée. Comme l'application  $\partial : M_n \rightarrow B_{n-1}(M)$  a une section  $s$ , on a une rétraction  $s^* : \text{Hom}(M_n, G) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}(M), G)$  pour  $\partial^*$ . Elle envoie bien sûr les cycles de  $\text{Hom}(M_n, G)$  dans  $\text{Hom}(B_{n-1}(M), G)$ . Si  $\varphi : M_n \rightarrow G$  est un bord de  $\text{Hom}(M_n, G)$ , c'est qu'il existe  $\psi : M_{n-1} \rightarrow G$  tel que  $\varphi = \partial^*(\psi) = \psi \circ \partial$ . Mais alors  $\psi \circ \partial \circ s$  est juste la restriction de  $\psi$  à  $B_{n-1}(M)$  et c'est l'image par la flèche  $i^* : \text{Hom}(Z_{n-1}(M), G) \rightarrow \text{Hom}(B_{n-1}(M), G)$  de la restriction de  $\psi$  à  $Z_{n-1}(M)$ . Il en résulte que l'image de  $\varphi$  par  $s^*$  est dans l'image de  $i^*$ , donc que  $s^*$  induit une application bien définie de  $H_{-n}(\text{Hom}(M, G))$  vers  $\text{Coker}(i^*)_{-n+1}$  qui est une rétraction pour la flèche  $\text{Coker}(i^*)_{-n+1} \rightarrow H_{-n}(\text{Hom}(M, G))$  induite par  $\partial^*$ . Compte tenu du fait que  $s$  est construite par l'axiome du choix, la rétraction obtenue n'a aucune raison d'être naturelle en  $M$ .  $\square$

En remplaçant  $M$  par  $C_*(X, A)$ , on obtient :

☞ **21 Théorème.** (Théorème des coefficients universels pour la cohomologie) Si  $C_*$  est la théorie des chaînes singulières, si  $\Lambda$  est un anneau principal et  $G$  un  $\Lambda$ -module, alors pour toute paire topologique  $(X, A)$ , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^1(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow H^n(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X, A), G) \rightarrow 0$$

qui est de plus scindée, mais non naturellement.  $\square$

☞ **22 Exemple.** On sait que l'homologie de  $\mathbb{RP}^2$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}$  en degré 0,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  en degré 1, et 0 dans tous les autres degrés. Le théorème des coefficients universels donne la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

qui montre que  $H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq 0$  et la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

qui montre que  $H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Enfin, le théorème donne  $H^n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = 0$  pour  $n \geq 3$ . Bien sûr, on a  $H^0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  (qu'on peut aussi obtenir en appliquant le théorème).

## 4 La diagonale d'Alexander-Whitney, le cup-produit et le cap-produit.

La « diagonale d'Alexander-Whitney » est une transformation (de degré 0)  $\Delta : C_*(X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$  entre modules différentiels gradués augmentés, naturelle en  $X$ . Pour la définir, il suffit de dire ce qu'elle vaut sur le simplexe universel  $e_n$  (pour chaque  $n$ ), puis de vérifier qu'elle respecte les augmentations et les différentielles. Pour des raisons de commodité de notation, nous représentons les simplexes simpliciaux affines de  $\Delta_n$  par la liste de leurs sommets. Par exemple,  $e_n$  est  $[0, \dots, n]$ . Les points de suspension entre deux entiers signifient que tous les entiers entre ces deux là sont des sommets du simplexe. Si un entier est absent de la liste il est écrit avec un chapeau. Par exemple,  $[0, \dots, \hat{i}, \dots, p]$  est le simplexe  $[0, \dots, i-1, i+1, \dots, p]$ . Les virgules seront éventuellement omises.

☞ **23 Définition.** La « diagonale d'Alexander-Whitney » est définie par la formule :

$$\Delta([0, \dots, n]) = \sum_{p=0}^n [0, \dots, p] \otimes [p, \dots, n]$$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned} \Delta([0]) &= [0] \otimes [0] \\ \Delta([01]) &= [0] \otimes [01] + [01] \otimes [1] \\ \Delta([012]) &= [0] \otimes [012] + [01] \otimes [12] + [012] \otimes [2] \\ &\text{etc.} \dots \end{aligned}$$

Cette formule et la condition que  $\Delta$  soit naturelle définissent une unique transformation naturelle de degré 0 entre les modules gradués  $C_*(X)$  et  $C_*(X) \otimes C_*(X)$ . Que  $\Delta$  commute aux augmentations canoniques résulte immédiatement de  $\varepsilon([0]) = 1 = (\varepsilon \otimes \varepsilon)([0] \otimes [0])$  (et bien sûr, pour des simplexes singuliers quelconques, de la naturalité de l'augmentation). La commutation aux différentielles est plus calculatoire. Dans le calcul de  $(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)([0, \dots, p] \otimes [p, \dots, n])$  apparaissent deux sortes de tenseurs, d'une part ceux qui sont de la forme  $[\dots, p] \otimes [p, \dots]$  qu'on appellera « contigus », et ceux qui sont de la forme  $[\dots, p] \otimes [q, \dots]$ , avec  $p < q$ , qu'on appellera « non contigus ». La première chose à constater est que tous les tenseurs non contigus se tuent deux à deux dans le calcul de  $(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)(\Delta([0, \dots, n]))$ . En effet, un tel tenseur est nécessairement de la forme  $[0, \dots, p] \otimes [p+1, \dots, n]$  et il ne peut provenir que de deux sources, à savoir  $((-1)^{p+1} \partial_{p+1} \otimes 1)([0, \dots, p+1] \otimes [p+1, \dots, n])$  et  $(1 \otimes \partial_0)([0, \dots, p] \otimes [p, \dots, n])$ . Dans le premier cas il est accompagné du signe  $(-1)^{p+1}$ , et dans le second cas du signe  $(-1)^p$ , car  $[0, \dots, p]$  est de degré  $p$ . Il ne reste donc que les tenseurs contigus et on va voir que ce sont les mêmes que dans le calcul de  $\Delta(\partial([0, \dots, n]))$  (avec les mêmes signes).

Les tenseurs contigus du calcul de  $(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)(\Delta([0, \dots, n]))$  sont d'une part  $(-1)^i [0, \dots, \hat{i}, \dots, p] \otimes [p, \dots, n]$  (avec  $0 \leq i < p$ ) et (comme  $p + (i - p) = i$ )  $(-1)^i [0, \dots, p] \otimes [p, \dots, \hat{i}, \dots, n]$  (avec  $p < i \leq n$ ),  $p$  variant bien sûr de 0 à  $n$ . Or si on applique  $\Delta$  à la  $i^{\text{ième}}$  face de  $[0, \dots, n]$ , c'est-à-dire à  $[0, \dots, \hat{i}, \dots, n]$ , on obtient la somme de tous les précédents pour la valeur de  $i$  qui a été fixée. On a donc le résultat annoncé pour des simplexe singuliers quelconques, compte tenu de la naturalité de la différentielle.

Si  $x : \Delta_n \rightarrow X$  est un  $n$ -simplexe singulier de  $X$ , on notera  $_{[p]}x$  le  $p$ -simplexe qui est le composé  $\Delta_p \xrightarrow{i} \Delta_n \xrightarrow{x} X$ , où  $i$  envoie les  $p+1$  sommets de  $\Delta_p$  sur les  $p+1$  premiers sommets de  $\Delta_n$  (en respectant l'ordre). De même, on notera  $x_{[n-p]}$  le composé  $\Delta_{n-p} \xrightarrow{j} \Delta_n \xrightarrow{x} X$  où  $j$  envoie les  $n-p+1$  sommets de  $\Delta_{n-p}$  sur les  $n-p+1$  derniers sommets de  $\Delta_n$  (en respectant l'ordre). Par naturalité, on a donc, pour tout  $n$ -simplexe singulier  $x$  d'un espace quelconque  $X$  :<sup>(2)</sup>

$$\Delta(x) = \sum_{p=0}^n {}_{[p]}x \otimes x_{[n-p]}$$

Noter que la naturalité de  $\Delta$  s'exprime par la formule  $(f_* \otimes f_*)\Delta = \Delta f_*$  (pour toute application continue  $f : X \rightarrow Y$ ).

Il est immédiat qu'on a  $(\varepsilon \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \varepsilon)\Delta = 1$ , où  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \Lambda$  est l'augmentation canonique. En d'autres termes,  $\varepsilon$  est une co-unité bilatérale pour  $\Delta$ .

On vient donc de construire explicitement une transformation naturelle  $\Delta : C_*(X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$ . Comme le foncteur  $X \mapsto C_*(X)$  est libre sur les modèles  $(\Delta_n, e_n)$ , et comme  $C_*(\Delta_n) \otimes C_*(\Delta_n)$  est acyclique (utiliser le lemme 10 (page 4)), le point (2) du théorème des modèles acycliques montre que  $\Delta$  est unique à homotopie près. Noter que le point (3) du théorème des modèles acycliques est inapplicable ici. En effet,  $T \circ \Delta$  (où  $T$  est défini par  $T(x \otimes y) =$

---

2. Les auteurs de langue anglaise emploient les expressions “front- $p$ -face of  $x$ ” et “back- $q$ -face of  $x$ ” quand ils parlent des simplexes  $_{[p]}x$  et  $x_{[q]}$ .

$(-1)^{|x||y|}y \otimes x$ ) est une autre transformation naturelle qui n'est clairement pas égale à  $\Delta$ . En d'autres termes,  $\Delta$  n'est pas commutative. Elle l'est par contre à homotopie près. Le même argument de modèles acycliques montre que  $\Delta$  est associative à homotopie près. En fait,  $\Delta$  est associative, comme on peut le vérifier facilement.<sup>(3)</sup>

À l'aide de la diagonale d'Alexander-Whitney  $\Delta$ , on peut définir deux opérations binaires appelées « cup-produit » et « cap-produit », et notées respectivement  $\smile$  et  $\frown$ . La première s'applique à deux cochaînes et produit une cochaîne, la seconde à une cochaîne et une chaîne et produit une chaîne.

$$\begin{aligned} C^p(X) \otimes C^q(X) &\xrightarrow{\smile} C^{p+q}(X) \\ C^p(X) \otimes C_n(X) &\xrightarrow{\frown} C_{n-p}(X) \end{aligned}$$

Les indications de degrés donnés ci-dessus sont bien sûr équivalentes à l'affirmation que  $\smile$  et  $\frown$  sont de degré 0.<sup>(4)</sup>

**24 Définition.** Soit  $X$  un espace topologique. Soient  $x \in C^p(X)$ ,  $y \in C^q(X)$  et  $z \in C_n(X)$ . On pose (pour tout  $(p+q)$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ ) :

$$\begin{aligned} (x \smile y)(\sigma) &= (-1)^{pq} x([p]\sigma) y(\sigma_{[q]}) \\ x \frown z &= (-1)^{p(n-p)} x(z_{[p]})_{[n-p]} z \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} (x \smile y)(\sigma) &= (x \otimes y)\Delta(\sigma) \\ x \frown z &= (1 \otimes x)\Delta(z) \end{aligned}$$

**25 Remarque.** Les signes dans ces formules suivent la convention de Koszul. En effet, dans le cas de la première,  $y$  (de degré  $q$ ) a été interverti avec la partie  $[p]\sigma$  (de degré  $p$ ) de  $\sigma$ . Dans le cas de la seconde, les deux parties  $[p]z$  et  $z_{[n-p]}$  de  $z$  (de degrés respectifs  $p$  et  $n-p$ ) ont été interverties. En fait, il est immédiat que ces signes sont ceux qui conviennent pour qu'on puisse écrire  $(x \smile y)(\sigma) = (x \otimes y)(\Delta(\sigma))$  et  $x \frown z = (x \otimes 1)T(\Delta(z))$  (car  $x$  et  $y$  sont nuls sur tous les simplexes qui ne sont pas de même degré qu'eux). Remarquer que  $x \frown z = (1 \otimes x)\Delta(z)$ , car  $(x \otimes 1)T = 1 \otimes x$ . On peut se demander à quoi sert l'interversion  $T$  dans le cas du cap-produit. La réponse est donnée dans la démonstration du lemme qui suit. Sans cette interversion, on ne peut pas obtenir la troisième égalité.

L'augmentation canonique  $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \Lambda$  qui associe  $1 \in \Lambda$  à chaque élément de  $S_0(X)$  et est nulle pour les degrés différents de 0, est une 0-cochaîne, et même un 0-cocycle. Ce cocycle sera noté 1, de même que sa classe de cohomologie. Cette notation est justifiée par le fait que cet élément est neutre pour le cup-produit.

3. C'est en fait évident, puisque cela revient à dire que pour couper un segment en trois morceaux il revient au même, après l'avoir coupé en deux, de recouper le morceau de gauche ou le morceau de droite. Mais on verra plus loin un autre argument, utilisant le point (3) du théorème des modèles acycliques.

4. Remarquons au passage que si on avait décidé que les éléments de  $C^p(X)$  étaient de degré  $p$  et non pas  $-p$ , le cap-produit n'aurait même pas été homogène. On voit donc ici que les définitions adoptées plus haut sont beaucoup plus que des conventions.

☞ **26 Lemme.** Pour  $x \in C^*(X)$ ,  $y \in C^*(X)$  et  $z \in C_*(X)$ , on a :

$$\begin{aligned} (x \smile y) \smile z &= x \smile (y \smile z) \\ 1 \smile x &= x = x \smile 1 \\ (x \smile y) \frown z &= x \frown (y \frown z) \\ 1 \frown z &= z \end{aligned}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} ((x \smile y) \smile z)(\sigma) &= ((x \smile y) \otimes z)\Delta(\sigma) \\ &= (x \otimes y \otimes z)(\Delta \otimes 1)\Delta(\sigma) \\ &= (x \otimes y \otimes z)(1 \otimes \Delta)\Delta(\sigma) \\ &= (x \smile (y \smile z))(\sigma) \\ (1 \smile x)(\sigma) &= (\varepsilon \otimes x)\Delta(\sigma) \\ &= x(\varepsilon \otimes 1)\Delta(\sigma) \\ &= x(\sigma) \\ (x \smile y) \frown z &= (1 \otimes (x \smile y))\Delta(z) \\ &= (1 \otimes x \otimes y)(1 \otimes \Delta)\Delta(z) \\ &= (1 \otimes x \otimes y)(\Delta \otimes 1)\Delta(z) \\ &= (1 \otimes x)\Delta(1 \otimes y)\Delta(z) \\ &= x \frown (y \frown z) \\ 1 \frown z &= (1 \otimes \varepsilon)\Delta(z) \\ &= z \end{aligned}$$

□

Le lemme précédent montre que  $C^*(X)$  est une algèbre graduée associative (on va voir plus loin (lemme 28) que c'est aussi une algèbre différentielle graduée), et que  $C_*(X)$  est un module (graduée) à gauche sur cette algèbre.

☞ **27 Lemme.** (Naturalité du cup-produit et du cap-produit) Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On a

$$\begin{aligned} f^*(x \smile y) &= f^*(x) \smile f^*(y) \\ f_*(f^*(x) \frown z) &= x \frown f_*(z) \end{aligned}$$

pour tous  $x \in C^*(X)$ ,  $y \in C^*(X)$  et  $z \in C_*(X)$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (f^*(x \smile y))(\sigma) &= (x \smile y)(f_*(\sigma)) \\ &= (x \otimes y)\Delta(f_*(\sigma)) \\ &= (x \otimes y)(f_* \otimes f_*)\Delta(\sigma) \\ &= (f^*(x) \otimes f^*(y))\Delta(\sigma) \\ &= (f^*(x) \smile f^*(y))(\sigma) \\ x \frown f_*(z) &= (1 \otimes x)\Delta(f_*(z)) \\ &= (1 \otimes x)(f_* \otimes f_*)\Delta(z) \\ &= f_*(1 \otimes f^*(x))\Delta(z) \\ &= f_*(f^*(x) \frown z) \end{aligned}$$

□

La première affirmation du lemme ci-dessus implique que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue,  $f^* : C^*(Y) \rightarrow C^*(X)$  est un morphisme d'algèbres graduées, donc un isomorphisme d'algèbres graduées dans le cas où  $f$  induit un isomorphisme en cohomologie (ou en homologie ; utiliser la naturalité de la suite exacte du théorème des coefficients universels), et en particulier dans le cas où  $f$  est une équivalence d'homotopie.

☞ **28 Lemme.** Pour  $x \in C^*(X)$ ,  $y \in C^*(X)$  et  $z \in C_*(X)$ , on a :

$$\begin{aligned}\partial(x \smile y) &= \partial x \smile y + (-1)^{|x|} x \smile \partial y \\ \partial(x \frown z) &= \partial x \frown z + (-1)^{|x|} x \frown \partial z\end{aligned}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\partial(x \smile y)(\sigma) &= -(-1)^{|x|+|y|}(x \smile y)(\partial\sigma) \\ &= -(-1)^{|x|+|y|}(x \otimes y)\Delta(\partial\sigma) \\ &= -(-1)^{|x|+|y|}(x \otimes y)(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)\Delta(\sigma) \\ &= (\partial x \otimes 1)\Delta(\sigma) + (-1)^{|x|}(x \otimes \partial y)\Delta(\sigma) \\ &= (\partial x \smile y + (-1)^{|x|} x \smile \partial y)(\sigma) \\ (-1)^{|x|}(x \frown \partial z) &= (-1)^{|x|}(1 \otimes x)\Delta(\partial z) \\ &= (-1)^{|x|}(1 \otimes x)(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial)\Delta(z) \\ &= (\partial \otimes 1)(1 \otimes x)\Delta(z) - (1 \otimes \partial x)\Delta(z) \\ &= \partial(x \frown z) - \partial x \frown z\end{aligned}$$

□

Le dernier lemme ci-dessus entraîne que  $\smile$  et  $\frown$  passent à l'homologie/cohomologie. On obtient donc un cup-produit et un cap-produit :

$$\begin{aligned}H^*(X) \otimes H^*(X) &\xrightarrow{\smile} H^*(X) \\ H^*(X) \otimes H_*(X) &\xrightarrow{\frown} H_*(X)\end{aligned}$$

qui ont les propriétés énoncées dans les lemmes **26** et **27**, plus la suivante :

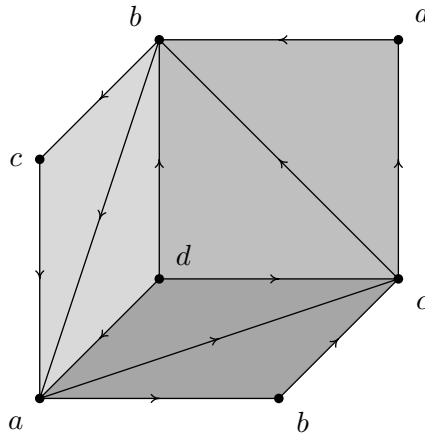
$$x \smile y = (-1)^{|x||y|} y \smile x$$

puisque la diagonale d'Alexander-Whitney  $\Delta$  est homotopiquement commutative (autrement-dit  $\Delta$  est homotope à  $T\Delta$ ). Ainsi,  $H^*(X)$  est une algèbre graduée associative et commutative, et  $H_*(X)$  est un module gradué à gauche sur  $H^*(X)$ .

☞ **29 Exemple.** Nous allons calculer « à la main » l'algèbre  $H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$ . On sait déjà que  $H^i(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2$  pour  $i = 0, 1, 2$  et nul pour toute autre valeur de  $i$ . La question est de déterminer la structure d'algèbre de  $H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$ . L'un des moyens les plus efficaces pour calculer cette structure est sans doute la suite exacte de Gysin (qui donne aussi l'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ , et qui fera partie du cours si on a le temps), mais dans

cet exemple nous souhaitons stimuler l'intuition du lecteur en examinant des cycles et cocycles de manière tout à fait explicite.

Le plan projectif  $\mathbb{RP}^2$  est le quotient de la sphère  $\mathbb{S}^2$  par l'identification des antipodes. À homéomorphisme près, on peut voir  $\mathbb{S}^2$  comme le bord du cube  $[-1, 1]^3$ . Ce polyèdre a la propriété d'être invariant par la symétrie centrale (antipodale), contrairement par exemple au tétraèdre, lui aussi homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ . Ceci permet de voir  $\mathbb{RP}^2$  comme un assemblage (collage) de trois carrés. La figure ci-dessous est une telle représentation de  $\mathbb{RP}^2$ ,



dans laquelle chacun des trois carrés a été divisé en deux triangles. Comme le cube a huit sommets, il n'y en a que quatre dans le quotient ( $a, b, c$  et  $d$ ), ce qui nous permet de nommer les segments (1-simplexes) de la figure par leurs deux extrémités et les triangles (2-simplexes) par leur trois sommets. Par exemple, on a le 1-simplexe  $[ab]$  et le 2-simplexe  $[abc]$ . On a orienté (de manière plus ou moins arbitraire, mais compatible avec l'identification des antipodes) les segments de la figure. Remarquer que ces 1-simplexes sont orientés de telle façon qu'on peut numéroter les sommets de chacun des six triangles pour les identifier à des 2-simplexes. Précisément, chaque triangle a un sommet  $\underline{0}$ , un sommet  $\underline{1}$  et un sommet  $\underline{2}$ , tels que les orientations des trois cotés donnés par l'ordre des sommets soit celles de la figure.

La figure ci-dessus représente donc un ensemble fini de simplexes singuliers de  $\mathbb{RP}^2$ . On définit un 1-cocycle  $\alpha$  sur  $\mathbb{RP}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2$ , en posant  $\alpha(x) = 0$  pour  $x = [ac], [cb], [ba]$  (autrement-dit les trois « diagonales »), et  $\alpha(x) = 1$  pour les autres 1-simplexes de la figure. Si on s'en tient aux simplexes de la figure,  $\alpha$  est un cocycle. En effet, pour tout 2-simplexe  $\sigma$  (de la figure), on vérifie facilement que  $\partial(\alpha)(\sigma) = \alpha(\partial\sigma) = \alpha(\partial_0\sigma) - \alpha(\partial_1\sigma) + \alpha(\partial_2\sigma) = 0$  (ce qui se résume au fait que pour chaque 2-simplexe  $[012]$ , la valeur de  $\alpha$  sur  $[02]$  est la somme de ses valeurs sur  $[01]$  et  $[12]$ ). La raison pour laquelle  $\alpha$  se prolonge en un 1-cocycle défini sur  $C_1(\mathbb{RP}^2)$  tout entier est le fait que l'inclusion  $C'_*(\mathbb{RP}^2) \hookrightarrow C_*(\mathbb{RP}^2)$  (où  $C'_*(\mathbb{RP}^2)$  est le sous-module différentiel gradué de  $C_*(\mathbb{RP}^2)$  engendré par les simplexes de la figure) est une équivalence d'homotopie.<sup>(5)</sup>

5. Ceci résulte des propriétés de l'homologie cellulaire, qui par manque de temps n'ont pas été exposées dans ce cours.

On a par ailleurs la 2-chaîne qui est la somme des six 2-simplexes de la figure (les signes n'ont pas d'importance puisque les coefficients sont dans  $\mathbb{Z}/2$ ) et qu'on notera  $\omega$ . Cette chaîne est clairement un 2-cycle, et sa classe d'homologie, qui appartient à  $H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$ , est appelée la « classe fondamentale ». Nous allons calculer le scalaire  $\langle \alpha \smile \alpha, \omega \rangle$ . Notons  $[012]$  un 2-simplexe de la figure. On a  $(\alpha \smile \alpha)([012]) = \alpha([01])\alpha([12])$ . Cette expression vaut 1 pour les trois triangles « extérieurs » de la figure (ceux pour lesquels  $\alpha$  associe 1 aux faces opposées à 0 et 2), et vaut 0 sur les trois autres triangles (ceux qui ont  $d$  pour sommet). Il en résulte immédiatement en faisant la somme des six valeurs que  $\langle \alpha \smile \alpha, \omega \rangle = 1$ .

Ceci implique que les classes de (co)homologie de  $\omega$ ,  $\alpha \smile \alpha$ , et  $\alpha$  sont non nulles. Ce sont donc les générateurs respectifs de  $H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$ ,  $H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$  et  $H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$  (tous isomorphes à  $\mathbb{Z}/2$ ). On en déduit immédiatement que le morphisme d'algèbres  $\varphi : (\mathbb{Z}/2)[t] \rightarrow H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2)$  qui envoie  $t$  sur  $\alpha$  est surjectif et que son noyau est l'idéal engendré par  $t^3$ . On a donc :

$$H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2) \simeq \frac{(\mathbb{Z}/2)[t]}{(t^3)}$$

**☞ 30 Exemple.** Il peut arriver que deux espaces ayant des types d'homotopie différents aient des module gradués d'homologie et de cohomologie isomorphes. En voici un exemple, pour lequel les cohomologies des deux espaces, bien qu'isomorphes comme modules gradués, ne le sont pas comme algèbres (ce qui implique que les deux espaces n'ont pas le même type d'homotopie). On prend les coefficients dans  $\mathbb{Z}/2$ .

Le premier espace est  $X = \mathbb{RP}^2$ , dont on vient de calculer l'algèbre de cohomologie ci-dessus, le second est le bouquet  $Y = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris montre facilement que  $X$  et  $Y$  ont même homologie et cohomologie quand on oublie la structure d'algèbre. On a bien sûr une inclusion canonique  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$  et une rétraction  $r : Y \rightarrow \mathbb{S}^1$  pour  $i$  (envoyant les points de  $\mathbb{S}^2$  sur le point de base). Il en résulte que  $r^* : H^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^1(Y)$  est injective, donc que le générateur de  $u \in H^1(\mathbb{S}^1)$  a pour image le générateur de  $\beta \in H^1(Y)$ . Mais comme  $u \smile u = 0$  (car  $H^2(\mathbb{S}^1) = 0$ ), on doit avoir  $\beta \smile \beta = 0$ , ce qui montre que l'algèbre de cohomologie de  $Y$  n'est pas isomorphe à celle de  $X$ .

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 2 mai 2012.

## 1 Cup-produit relatif et cross-produit (cas particulier).

Notre objectif étant d'établir la suite exacte de Thom-Gysin, nous n'avons besoin que d'un cas particulier du cross-produit cohomologique. Nous avons également besoin de l'une des versions relatives du cup-produit. Les versions générales de ces deux notions seront traitées dans un autre document.

Soit  $(X, A)$  une paire topologique. Notons  $i$  l'inclusion canonique de  $A$  dans  $X$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux cochaînes définies sur  $X$  (autrement-dit, deux éléments homogènes de  $C^*(X)$ ), on a  $i^*(x \smile y) = i^*(x) \smile i^*(y)$ . Ainsi, si  $i^*(x) = 0$  ou si  $i^*(y) = 0$ , autrement-dit si  $x$  ou  $y$  est nulle sur les chaînes incluses dans  $A$ , on a  $i^*(x \smile y) = 0$ , autrement-dit, il en est de même de  $x \smile y$ . Ainsi, comme  $C^*(X, A)$  est juste le sous-module de  $C^*(X)$  des cochaînes qui s'annulent sur les chaînes de  $A$ , on a les cup-produits (dit « relatifs »)

$$\begin{aligned} C^*(X) \otimes C^*(X, A) &\xrightarrow{\smile} C^*(X, A) \\ C^*(X, A) \otimes C^*(X) &\xrightarrow{\smile} C^*(X, A) \end{aligned}$$

En fait, ces cup-produits sont juste des restrictions du cup-produit défini dans la leçon du 30 avril. Ils ont donc des propriétés analogues, et en particulier sont naturels par rapport à la paire  $(X, A)$ .

Considérons maintenant un espace  $Y$ . La paire  $(X \times Y, A \times Y)$  (c'est-à-dire  $(X, A) \times Y$ ) admet la projection  $p_1 : (X \times Y, A \times Y) \rightarrow (X, A)$ .<sup>(1)</sup> Par ailleurs, on a aussi une projection  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ . On définit le « cross-produit »  $\times : C^*(X, A) \otimes C^*(Y) \rightarrow C^*(X \times Y, A \times Y)$  en demandant que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X, A) \otimes C^*(Y) & \xrightarrow{\times} & C^*(X \times Y, A \times Y) \\ p_1^* \otimes p_2^* \downarrow & & \downarrow 1 \\ C^*(X \times Y, A \times Y) \otimes C^*(X \times Y) & \xrightarrow{\smile} & C^*(X \times Y, A \times Y) \end{array}$$

---

1. Par contre, la projection  $p_2 : (X \times Y, A \times Y) \rightarrow Y$  n'existe pas, car elle devrait envoyer  $A \times Y$  dans  $\emptyset$ .

Autrement-dit, on a la formule  $x \times y = p_1^*(x) \smile p_2^*(y)$ . Bien entendu, on peut refaire ce qu'on vient de faire avec  $H^*$  à la place de  $C^*$  et on a les mêmes résultats en cohomologie.

Noter que pour  $x \in H^*(X, A)$  et  $1 \in H^0(Y)$ , on a  $x \times 1 = p_1^*(x) \smile p_2^*(1) = p_1^*(x) \smile 1 = p_1^*(x)$ , où  $p_1$  est la projection de  $(X \times Y, A \times Y)$  sur  $(X, A)$ .

## 2 Cup-produit et connectants.

**1 Lemme.** Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On note  $i$  l'inclusion de  $A$  dans  $X$ . Soit  $\partial^* : H^*(A) \rightarrow H^*(X, A)$  le connectant de la suite exacte de cohomologie de la paire  $(X, A)$ . Soient  $x \in H^*(X)$  et  $y \in H^*(A)$ . On a

$$\partial^*(i^*(x) \smile y) = (-1)^{|x|} x \smile \partial^*(y)$$

Le cup-produit dans le membre de gauche est  $\smile : H^*(A) \otimes H^*(A) \rightarrow H^*(A)$ , et celui du membre de droite est  $\smile : H^*(X) \otimes H^*(X, A) \rightarrow H^*(X, A)$ .

*Démonstration.* La suite exacte de la paire  $(X, A)$  est obtenue via le lemme du serpent à partir de la suite exacte courte de modules différentiels gradués :

$$0 \longrightarrow C^*(X, A) \longrightarrow C^*(X) \xrightarrow{i^*} C^*(A) \longrightarrow 0$$

Soit  $a \in C^*(X)$  un cocycle représentant  $x$  et soit  $b \in C^*(A)$  un cocycle représentant  $y$ . Soit  $b'$  un antécédent de  $b$  par  $i^*$ . Alors le cobord de  $b'$  provient d'un unique cocycle  $b'' \in C^*(X, A)$  représentant  $\partial^*(y)$  :

$$\begin{array}{ccc} b' & \xrightarrow{\quad} & b \\ \downarrow & & \\ b'' & \xrightarrow{\quad} & \partial b' \end{array}$$

$i^*(a) \smile b$  a  $a \smile b'$  comme antécédent par  $i^*$ , et comme  $a$  est un cocycle,  $\partial(a \smile b') = (-1)^{|x|} a \smile \partial b'$ , et  $a \smile \partial b'$  provient d'un cocycle  $u \in C^*(X, A)$  tel que  $(-1)^{|x|} u$  représente  $\partial^*(i^*(x) \smile y)$ .

$$\begin{array}{ccc} a \smile b' & \xrightarrow{\quad} & i^*(a) \smile b \\ \downarrow & & \\ (-1)^{|x|} u & \xrightarrow{\quad} & (-1)^{|x|} a \smile \partial b' \end{array}$$

Mais par ailleurs l'image de  $a \smile b'' \in C^*(X, A)$  dans  $C^*(X)$  est  $a \smile \partial b'$ , car on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) \otimes C^*(X, A) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & C^*(X, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^*(X) \otimes C^*(X) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & C^*(X) \end{array}$$

par naturalité du cup-produit (où les flèches verticales sont induites par inclusion). On a donc  $u = a \smile b''$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

**2 Lemme.** Soient  $A$  et  $B$  des ouverts d'un espace  $X$ . Soit  $i$  l'inclusion de  $A \cap B$  dans  $A \cup B$ , et soit  $\partial^* : H^*(A \cap B) \rightarrow H^*(A \cup B)$  le connectant de la suite exacte de Mayer-Vietoris pour la cohomologie. Alors, pour  $x \in H^*(A \cup B)$  et  $y \in H^*(A \cap B)$ , on a

$$\partial^*(i^*(x) \smile y) = (-1)^{|x|} x \smile \partial^*(y)$$

et pour  $x \in H^*(A \cap B)$  et  $y \in H^*(A \cup B)$ , on a

$$\partial^*(x \smile i^*(y)) = \partial^*(x) \smile y$$

*Démonstration.* La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H^*(A) \oplus H^*(B) \rightarrow H^*(A \cap B) \xrightarrow{\partial^*} H^*(A \cup B) \rightarrow H^*(A) \oplus H^*(B) \rightarrow \cdots$$

est obtenue via le lemme du serpent à partir de la suite exacte courte de modules différentiels gradués

$$0 \longrightarrow (C_*(A) + C_*(B))^* \xrightarrow{\varphi} C^*(A) \oplus C^*(B) \xrightarrow{\psi} C^*(A \cap B) \longrightarrow 0$$

où les flèches  $\varphi$  et  $\psi$  sont induites par les inclusions accompagnées de signes convenables. Soit  $a \in C^*(A \cup B)$  un cocycle représentant  $x$ , et soit  $a'$  sa restriction à  $A$  (qui est encore un cocycle). La restriction  $a''$  de  $a$  à  $A \cap B$  est un cocycle représentant  $i^*(x)$ . Soit  $b \in C^*(A \cap B)$  un cocycle représentant  $y$ . On peut construire un cocycle représentant de  $\partial^*(y)$  en prenant d'abord un antécédent  $(b'_A, b'_B)$  de  $b$  par  $\psi$ , puis l'unique antécédent  $b''$  de  $(\partial b'_A, \partial b'_B)$  par  $\varphi$  :

$$\begin{array}{ccc} (b'_A, b'_B) & \xrightarrow{\psi} & b \\ \downarrow & & \\ b'' & \xrightarrow{\varphi} & (\partial b'_A, \partial b'_B) \end{array}$$

Si on fait de même en partant de  $a'' \smile b$ , on a, en remarquant que  $\psi(a', 0) = a''$  et en utilisant le fait que  $a'$  est un cocycle (et bien sûr le fait que le cup produit est bilinéaire, ce qui donne  $\psi(a' \smile b'_A, 0 \smile b'_B) = a'' \smile b$ ) :

$$\begin{array}{ccc} (a' \smile b'_A, 0) & \xrightarrow{\psi} & a'' \smile b \\ \downarrow & & \\ (-1)^{|x|} a \smile b'' & \xrightarrow{\varphi} & ((-1)^{|x|} a' \smile \partial b'_A, 0) \end{array}$$

(on a  $|x| = |a| = |a'|$ ). On a donc  $\partial^*(i^*(x) \smile y) = (-1)^{|x|} x \smile \partial^*(y)$ . L'autre affirmation se traite de même.  $\square$

### 3 Un cas (très) particulier de la formule de Künneth.

On dira qu'une suite exacte longue est « spéciale », si elle est isomorphe à une somme directe de suite exactes courtes scindées (prolongées par des 0). Le produit tensoriel d'une suite exacte longue spéciale par un module quelconque est encore une suite exacte (longue spéciale).

☞ **3 Lemme.** *Soit  $X$  un espace topologique. Le cross-produit*

$$H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times} H^*(X \times \mathbb{S}^n)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Cet énoncé est une conséquence immédiate de la formule de Künneth, que nous n'avons pas démontrée (mais qui sera exposée dans un autre document). Nous en donnons ici une démonstration « à la main ».

On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , notons  $a$  et  $b$  les deux points de  $\mathbb{S}^0$ , et  $i_a : \{*\} \rightarrow \mathbb{S}^0$  l'application telle que  $i_a(*) = a$ . On a le carré commutatif (la naturalité du cross-produit découlant de suite de celle du cup-produit)

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^0) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times \mathbb{S}^0) \\ 1 \otimes i_a^* \downarrow & & \downarrow (1 \times i_a)^* \\ H^*(X) \otimes H^*(\{*\}) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times \{*\}) \end{array}$$

Pour  $x \in H^*(X)$  et  $1 \in H^*(\{*\})$ , on a  $x \times 1 = p_1^*(x)$ . Comme  $p_1$  est dans ce cas une équivalence d'homotopie, et comme 1 engendre  $H^*(\{*\})$ , on voit que le cross-produit inférieur du diagramme ci-dessus est un isomorphisme. Noter qu'on a le même résultat en remplaçant  $\{*\}$  par un espace contractile, ce qui va nous servir plus loin. En faisant de même avec le point  $b$ , et en tenant compte du fait que la cohomologie d'une union disjointe est canoniquement isomorphe à la somme directe des cohomologies, on obtient (les détails sont laissés au lecteur) que le cross-produit supérieur du diagramme ci-dessus est un isomorphisme.

Supposons maintenant  $n \geq 1$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée aux deux ouverts  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{S}^n$  obtenus en supprimant l'un ou l'autre des pôles, nous donne la suite exacte longue spéciale (ceci requiert un peu d'attention pour  $*$  = 0) :

$$\dots \longrightarrow H^*(A) \oplus H^*(B) \longrightarrow H^*(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^*(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^*(A) \oplus H^*(B) \longrightarrow \dots$$

et on a une suite exacte de Mayer-Vietoris analogue (appliquées aux ouverts  $X \times A$  et  $X \times B$ )

$$\dots \longrightarrow H^*(X \times A) \oplus H^*(X \times B) \longrightarrow H^*(X \times \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^*(X \times \mathbb{S}^n) \longrightarrow \dots$$

On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^*(X) \otimes H^*(A) \oplus H^*(X) \otimes H^*(B) & \longrightarrow & H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{1 \otimes \partial^*} & H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \times \oplus \times & & \downarrow \times & & \downarrow \times \\
\cdots & \longrightarrow & H^*(X \times A) \oplus H^*(X \times B) & \longrightarrow & H^*(X \times \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\partial^*} & H^*(X \times \mathbb{S}^n) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

à lignes exactes, qui est commutatif par naturalité du cross-produit, sauf peut-être en ce qui concerne le carré faisant intervenir les connectants. On a, pour  $x \in H^*(X)$  et  $y \in H^*(\mathbb{S}^{n-1})$ , et en notant  $i$  l'inclusion de  $X \times \mathbb{S}^{n-1}$  dans  $X \times \mathbb{S}^n$  :

$$\begin{aligned}
\partial^*(x \times y) &= \partial^*(p_1^*(x) \smile p_2^*(y)) \\
&= \partial^*(i^*(p_1^*(x)) \smile p_2^*(y)) \\
&\quad \text{(lemme 2 (page 3))} \\
&= (-1)^{|x|} p_1^*(x) \smile \partial^* p_2^*(y) \\
&= (-1)^{|x|} p_1^*(x) \smile p_2^*(\partial^*(y)) \\
&= (-1)^{|x|} x \times \partial^*(y) \\
&= \times \circ (1 \otimes \partial^*)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Comme  $A$  et  $B$  sont contractiles, on voit par récurrence et en utilisant le lemme des cinq que  $H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times} H^*(X \times \mathbb{S}^n)$  est un isomorphisme.  $\square$

**4 Lemme.** Pour tout espace  $X$ , le cross-produit

$$H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\times} H^*(X \times \mathbb{D}^n, X \times \mathbb{S}^{n-1})$$

est un isomorphisme ( $n \geq 1$ ).

*Démonstration.* On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{D}^n) & \longrightarrow & H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{1 \otimes \partial^*} & H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \\
\downarrow \times & & \downarrow \times & & \downarrow \times & & \downarrow \times \\
H^*(X \times \mathbb{D}^n, X \times \mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & H^*(X \times \mathbb{D}^n) & \longrightarrow & H^*(X \times \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\partial^*} & H^*(X \times \mathbb{D}^n, X \times \mathbb{S}^{n-1})
\end{array}$$

dont la ligne supérieure est exacte car c'est le produit tensoriel par  $H^*(X)$  d'une suite exacte longue spéciale. Le diagramme est commutatif par naturalité du cross-produit, sauf peut-être en ce qui concerne le carré faisant intervenir les connectants. Pour celui-ci, on a pour  $x \in H^*(X)$  et  $y \in H^*(\mathbb{S}^{n-1})$  (et en notant  $i$  l'inclusion de  $X \times \mathbb{S}^{n-1}$  dans  $X \times \mathbb{D}^n$ ) :

$$\begin{aligned}
\partial^*(x \times y) &= \partial^*(p_1^*(x) \smile p_2^*(y)) \\
&= \partial^*(i^*(p_1^*(x)) \smile p_2^*(y)) \\
&= (-1)^{|x|} p_1^*(x) \smile \partial^*(p_2^*(y)) \\
&= (-1)^{|x|} p_1^*(x) \smile p_2^*(\partial^*(y)) \\
&= (-1)^{|x|} x \times \partial^*(y) \\
&= \times \circ (1 \otimes \partial^*)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le lemme précédent et le lemme des cinq.  $\square$

## 4 L'isomorphisme de Thom.

On a vu la définition des revêtements dans la leçon du 13 février. Nous avons besoin ici d'une notion similaire, celle de « fibré vectoriel ».

☞ **5 Définition.** Une application continue  $\pi : E \rightarrow B$  est un « fibré vectoriel (réel) » de dimension  $n \in \mathbb{N}$  si chaque fibre  $\pi^{-1}(x)$  ( $x \in B$ ) est un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , et s'il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  de  $B$  et pour chaque  $i$  un homéomorphisme  $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi \quad \swarrow p_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

soit commutatif, et tel que pour tout  $x \in U_i$ , le composé  $\pi^{-1}(x) \xrightarrow{\psi_i} \{x\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^n$  soit un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Un « morphisme de fibrés vectoriel au dessus de  $B$  » de  $\pi : E \rightarrow B$  vers  $\pi' : E' \rightarrow B$  est une application continue  $f : E \rightarrow E'$ , envoyant linéairement  $\pi^{-1}(x)$  dans  $\pi'^{-1}(x)$  pour tout  $x \in B$ . Bien sûr, la projection canonique  $p_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$  est un fibré vectoriel. Tout fibré vectoriel isomorphe au précédent est dit « trivial ». Tout fibré vectoriel est donc d'après la définition ci-dessus « localement trivial ».

Notons comme d'habitude  $\Lambda$  l'anneau des coefficients pour la cohomologie. Une  $\Lambda$ -orientation d'un espace vectoriel  $F$  de dimension  $n$  est déterminée par le choix d'un générateur de  $H^n(F, F - 0; \Lambda)$ . Si  $f : F \rightarrow G$  est un isomorphisme (linéaire) entre deux espaces vectoriels de dimension  $n$ , il induit un isomorphisme  $f^* : H^n(G, G - 0; \Lambda) \rightarrow H^n(F, F - 0; \Lambda)$ , et établit donc une correspondance bijective entre orientations de  $F$  et orientations de  $G$ . On dira que  $f$  « envoie » l'orientation  $\theta_F \in H^n(F, F - 0; \Lambda)$  sur l'orientation  $\theta_G \in H^n(G, G - 0; \Lambda)$  si  $f^*(\theta_G) = \theta_F$ . On note qu'un espace vectoriel  $F$  a de multiples  $\mathbb{R}$ -orientations, a deux  $\mathbb{Z}$ -orientations et une seule  $\mathbb{Z}/2$ -orientation.

Une orientation d'un fibré trivial  $\pi : E \rightarrow B$  est la donnée pour chaque  $x \in B$  d'une orientation  $\theta_x$  de  $\pi^{-1}(x)$  telles que, un isomorphisme  $\psi$  avec  $p_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$  étant donné, les restrictions de  $p_2 \circ \psi$  à chaque  $\pi^{-1}(x)$  envoient tous les  $\theta_x$  sur la même orientation de  $\mathbb{R}^n$ . Une orientation d'un fibré vectoriel quelconque  $\pi : E \rightarrow B$  est la donnée pour chaque  $x \in B$  d'une orientation  $\theta_x$  de  $\pi^{-1}(x)$  de telle façon que pour tout ouvert  $U$  de  $B$  au dessus duquel  $\pi$  est trivial, les  $\theta_x$  ( $x \in U$ ) définissent une orientation de  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ . Tout fibré vectoriel a clairement une unique  $\mathbb{Z}/2$ -orientation. Un fibré vectoriel peut par contre ne pas être  $\mathbb{Z}$ -orientable. C'est le cas par exemple de la bande de Möbius, vue comme un fibré de dimension 1 sur le cercle.

Tout fibré vectoriel a une « section nulle » (continue),  $s_0 : B \rightarrow E$ , définie par  $s_0(x) = 0_{\pi^{-1}(x)}$  (le zéro de l'espace vectoriel  $\pi^{-1}(x)$ ). On a bien sûr  $\pi \circ s_0 = 1_B$ . Le complémentaire de l'image de  $s_0$  dans  $E$  sera noté  $E - s_0$ . Si  $U$  est un ouvert de  $B$ ,  $\pi^{-1}(U)$  sera aussi noté  $\bar{U}$ , et  $\pi^{-1}(U) - s_0(U) =$

$\overline{U} \cap (E - s_0)$  sera aussi noté  $\overline{U}_0$ .

**6 Théorème.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de dimension  $n$  orienté par la famille des  $\theta_x \in H^n(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x) - 0)$  ( $x \in B$ ). Alors il existe un unique  $\theta \in H^n(E, E - s_0)$  (dit « classe de Thom » pour cette orientation) dont la restriction à chaque  $(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x) - 0)$  est  $\theta_x$ , et l'application (de degré  $-n$ )

$$\begin{array}{ccc} H^*(B) & \xrightarrow{\tau} & H^*(E, E - s_0) \\ x \mapsto & \longrightarrow & \pi^*(x) \smile \theta \end{array}$$

est un isomorphisme (« isomorphisme de Thom »).

*Démonstration.* Nous nous contenterons du cas où  $B$  peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts trivialisant  $\pi$ , ce qui sera le cas dans les applications proposées ci-dessous, où  $B$  est un espace projectif de dimension finie.

Traisons d'abord le cas d'un fibré trivial, qu'on peut supposer être  $\pi = p_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ . Par hypothèse, il existe une orientation  $\theta_{\mathbb{R}^n} \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$  telle que pour chaque  $x \in B$ , on ait  $p_2^*(\theta_{\mathbb{R}^n}) = \theta_x$  (avec  $p_2 : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ). Posons  $\theta = p_2^*(\theta_{\mathbb{R}^n})$  avec cette fois-ci  $p_2 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Noter que c'est la seule façon d'obtenir que la restriction de  $\theta$  à chaque  $(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(x) - 0)$  soit  $\theta_x$ . D'après le lemme 4 (page 5), le cross-produit

$$H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \xrightarrow{\times} H^*(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - 0))$$

est un isomorphisme. Comme  $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$  est isomorphe à  $\Lambda$  engendré par  $\theta_{\mathbb{R}^n}$ , on a un isomorphisme  $H^*(B) \rightarrow H^*(B \times \mathbb{R}^n, B \times (\mathbb{R}^n - 0)) = H^*(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n - s_0)$  donné par  $x \mapsto x \times \theta_{\mathbb{R}^n} = p_1^*(x) \smile p_2^*(\theta_{\mathbb{R}^n}) = \pi^*(x) \smile \theta$ .

Supposons maintenant qu'on ait deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $B$  tels que le théorème soit vrai pour les restrictions de  $\pi$  au dessus de  $U$ , de  $V$  et de  $U \cap V$ . On va montrer que le théorème est vrai aussi pour la restriction de  $\pi$  au dessus de  $U \cup V$ . Pour chaque ouvert  $U$  on notera  $\theta_U \in H^n(\overline{U}, \overline{U}_0)$  la classe de Thom correspondante. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} H^*(U) \oplus H^*(V) & \longrightarrow & H^*(U \cap V) & \xrightarrow{\partial^*} & H^*(U \cup V) & \longrightarrow & H^*(U) \oplus H^*(V) \\ \tau \oplus \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \oplus \tau \downarrow \\ H^*(\overline{U}, \overline{U}_0) \oplus H^*(\overline{V}, \overline{V}_0) & \xrightarrow{\psi} & H^*(\overline{U \cap V}, \overline{U \cap V}_0) & \xrightarrow{\partial^*} & H^*(\overline{U \cup V}, \overline{U \cup V}_0) & \longrightarrow & H^*(\overline{U}, \overline{U}_0) \oplus H^*(\overline{V}, \overline{V}_0) \end{array}$$

L'image du couple  $(\theta_U, \theta_V)$  par la flèche  $\psi$  étant 0 (car  $\theta_U$  et  $\theta_V$  ont la même restriction au dessus de  $U \cap V$ <sup>2</sup>), l'exactitude de la ligne inférieure (prolongée sur la gauche) montre qu'il existe  $\theta_{U \cup V} \in H^n(\overline{U \cup V}, \overline{U \cup V}_0)$  dont les restrictions au dessus de  $U$  et  $V$  sont  $\theta_U$  et  $\theta_V$ . L'unicité de  $\theta_{U \cup V}$  résulte du fait que  $H^{n-1}(\overline{U \cap V}, \overline{U \cap V}_0) \simeq H^{-1}(U \cap V) = 0$ .

La commutativité du diagramme résulte de la naturalité de  $\tau$  sauf en ce qui concerne le carré

---

2. On utilise pour obtenir ce résultat des conventions de signes similaires à celles de la leçon du 21 mars concernant la suite exacte de Mayer-Vietoris.

faisant intervenir les connectants, dont la commutativité résulte du calcul :

$$\begin{aligned}
\partial^*(\tau(x)) &= \partial^*(\pi^*(x) \smile \theta_{U \cap V}) \\
&= \partial^*(\pi^*(x) \smile i^*(\theta_{U \cup V})) \\
&= \partial^*(\pi^*(x)) \smile \theta_{U \cup V} \\
&= \pi^*(\partial^*(x)) \smile \theta_{U \cup V} \\
&= \tau(\partial^*(x))
\end{aligned}$$

Le lemme des cinq permet alors de conclure que  $\tau : H^*(U \cup V) \rightarrow H^*(\overline{U \cup V}, \overline{U \cup V}_0)$  est un isomorphisme.

$B$  étant recouvert par un nombre fini d'ouverts trivialisants, on termine facilement la preuve du théorème par récurrence sur le nombre d'ouverts, en tenant compte du fait que si  $\pi$  est trivial au dessus de  $U_k$ , il l'est aussi au dessus de  $(U_1 \cup \dots \cup U_{k-1}) \cap U_k$ .  $\square$

**7 Définition.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel orienté par la classe de Thom  $\theta \in H^n(E, E - s_0)$ . Soit  $j : E \rightarrow (E, E - s_0)$  l'inclusion canonique. On pose  $e = s_0^*(j^*(\theta)) \in H^n(B)$ .  $e$  est appelé la « classe d'Euler » du fibré orienté  $\pi$ .

**8 Théorème.** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel orienté et  $e \in H^n(B)$  sa classe d'Euler. On a la suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\smile e} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+n}(E - s_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

dite « suite exacte de Gysin », dans laquelle la flèche notée  $\smile e$  est  $x \mapsto x \smile e$ .

*Démonstration.* On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i(B) & \xrightarrow{\smile e} & H^{i+n}(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i+n}(E - s_0) & \xrightarrow{\psi} & H^{i+1}(B) \\
\tau \downarrow & & \pi^* \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \tau \\
H^{i+n}(E, E - s_0) & \xrightarrow{j^*} & H^{i+n}(E) & \longrightarrow & H^{i+n}(E - s_0) & \xrightarrow{\partial^*} & H^{i+n+1}(E, E - s_0)
\end{array}$$

dans lequel la suite inférieure est la suite exacte de la paire  $(E, E - s_0)$ . La flèche  $\psi$  est obtenue en composant  $\partial^*$  avec l'inverse de l'isomorphisme  $\tau$ .  $\pi^*$  est un isomorphisme car  $\pi : E \rightarrow B$  est une équivalence d'homotopie. Il y a donc juste à montrer que le diagramme est commutatif.

Pour le carré de gauche, on a

$$\begin{aligned}
\pi^*(x \smile e) &= \pi^*(x \smile s_0^* j^*(\theta)) \\
&= \pi^*(x) \smile j^*(\theta) \\
&\quad (\text{car } s_0 \text{ est inverse homotopique de } \pi : E \rightarrow B) \\
&= j^*(\pi^*(x) \smile \theta) \\
&\quad (\text{naturalité du cup-produit}) \\
&= j^*(\tau(x))
\end{aligned}$$

La commutativité du carré central est triviale et le carré de droite est commutatif par construction.  $\square$

## 5 L'algèbre de cohomologie d'un espace projectif.

Sur l'espace projectif  $\mathbb{RP}^n$ , il y a un fibré vectoriel de dimension 1 canonique. En effet,  $\mathbb{RP}^n$  est juste l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'ensemble des couples  $(D, x)$  où  $D$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $x$  un point de  $D$  est un nouvel espace topologique  $E$ . L'application  $(D, x) \mapsto D$  est une application continue  $E \rightarrow \mathbb{RP}^n$  et c'est en fait un fibré vectoriel de dimension 1, qu'on notera  $\gamma$  et qui est appelé le « fibré en droites canonique sur  $\mathbb{RP}^n$  ». Ce fibré n'est pas orientable, mais il a quand même une classe de Thom quand les coefficients sont pris dans  $\mathbb{Z}/2$ . Il a donc aussi une classe d'Euler  $e_\gamma \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ .

**9 Lemme.** *L'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$  est isomorphe à  $\frac{(\mathbb{Z}/2)[t]}{(t^{n+1})}$ , le générateur  $t$  correspondant à la classe d'Euler  $e_\gamma \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ .*

*Démonstration.* L'algèbre de cohomologie de  $\mathbb{RP}^1 \simeq \mathbb{S}^1$  étant triviale, on peut supposer  $n \geq 2$ . Soit  $E$  l'espace total du fibré canonique  $\gamma$ . Le sous-espace  $E - s_0$  de  $E$  s'identifie à  $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ . Sa cohomologie est donc celle de la sphère  $\mathbb{S}^n$ . La suite exacte de Gysin (à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2$  et avec  $e = e_\gamma$ )

$$H^i(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^i(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^{i+1}(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{S}^n)$$

donne donc des isomorphismes  $\smile e : H^i(\mathbb{RP}^n) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{RP}^n)$  pour  $1 \leq i \leq n-2$  et pour  $i \geq n+1$ , et on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^0(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^1(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^1(\mathbb{S}^n) = 0$$

$\mathbb{S}^n$  et  $\mathbb{RP}^n$  étant connexes par arcs, la première flèche  $\pi^*$  à gauche est un isomorphisme. Il en résulte l'isomorphisme  $\smile e : H^0(\mathbb{RP}^n) \rightarrow H^1(\mathbb{RP}^n)$ . On voit donc que  $H^i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$  pour  $i \leq n-1$ . Or  $H^{n+1}(\mathbb{RP}^n) = 0$ . Ceci se montre facilement par récurrence sur  $n$  avec la suite exacte de Mayer-Vietoris car  $\mathbb{RP}^n$  peut être recouvert par deux ouverts dont l'un est contractile, l'autre a le type d'homotopie de  $\mathbb{RP}^{n-1}$  et dont l'intersection a le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\psi} H^n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\smile e} 0$$

On voit que  $H^n(\mathbb{RP}^n)$  ne peut pas être nul. Comme  $\psi$  est surjective, il ne peut donc qu'être isomorphe à  $\mathbb{Z}/2$ , ce qui implique que la flèche injective  $\smile e$  est bijective.

L'unique morphisme d'algèbres  $f : (\mathbb{Z}/2)[t] \rightarrow H^*(\mathbb{RP}^n)$  qui envoie  $t$  sur  $e$ , est clairement surjectif et envoie  $t^i$  sur  $e^i$  pour tout  $i$ . Ce qui précède montre que  $e^n$  n'est pas nul et que  $e^{n+1}$  est nul. Il en résulte que le noyau de  $f$  est l'idéal engendré par  $t^{n+1}$ .  $\square$

Borsuk-Ulam !

On peut refaire ce qu'on vient de faire dans le cas des espaces projectifs complexes (nous laissons le cas des espaces quaternionniens au lecteur). On a à nouveau un fibré en droites

canonique sur  $\mathbb{CP}^n$ , mais comme il s'agit de droites complexes, c'est un fibré de dimension (réelle) 2, qui sera encore noté  $\gamma$ . De plus un tel fibré est toujours orientable. C'est dû au fait que tout automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire d'un espace vectoriel complexes induit un automorphisme de déterminant positif sur l'espace réel sous-jacent.<sup>(3)</sup> Le fibré  $\gamma$  a donc une classe d'Euler  $e = e_\gamma$  appartenant à  $H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$ .

☞ **10 Lemme.** *L'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\frac{\mathbb{Z}[t]}{(t^{n+1})}$ , le générateur  $t$  correspondant à la classe d'Euler  $e_\gamma \in H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ , on peut supposer  $n \geq 2$ . Soit  $E$  l'espace total du fibré  $\gamma$ .  $E - s_0$  s'identifie à l'ensemble des vecteurs non nuls de  $\mathbb{CP}^{n+1}$  et a donc le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^{2n+1}$  ( $2n+1$  est au moins 5). La suite exacte de Gysin (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) donne

$$\dots \longrightarrow H^i(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\smile e} H^{i+2}(\mathbb{CP}^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+2}(\mathbb{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{CP}^n) \longrightarrow \dots$$

nous donne les isomorphismes  $H^i(\mathbb{CP}^n) \rightarrow H^{i+2}(\mathbb{CP}^n)$  pour  $i = -1, 0, \dots, 2n-2$ . Le cas  $i = -1$  montre que  $H^1(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) = 0$ . On a donc  $H^i(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) = 0$  pour tous les  $i$  impairs inférieurs à  $2n$ , et  $H^i(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \simeq H^0(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  pour tous les  $i$  pairs inférieurs ou égaux à  $2n$ . On admettra que  $H^i(\mathbb{CP}^n) = 0$  pour  $i > 2n$ .<sup>(4)</sup> On conclut comme dans le lemme précédent.  $\square$

---

3. Le lecteur pourra vérifier que si  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme complexe, et si  $f_{\mathbb{R}}$  est l'endomorphisme réel sous-jacent, on a  $\det(f_{\mathbb{R}}) = |\det(f)|^2$ .

4. Il est probable qu'on aura le temps de le démontrer avant la fin du cours.

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 7 mai 2012.

## 1 Rétracts absolus de voisinage.

Rappelons que si  $A$  est un sous-espace de  $X$ , une « rétraction » de  $X$  sur  $A$  est une application continue  $r : X \rightarrow A$  telle que  $r(x) = x$  pour tout  $x \in A$ . Il revient au même de dire que l'inclusion canonique  $i : A \rightarrow X$  a un inverse à gauche ( $r \circ i = 1_A$ ). S'il y a une rétraction de  $X$  sur  $A$ , on dit que  $A$  est un « rétract » de  $X$ . Noter que si  $A$  est un rétract de  $X$ , alors  $A$  est fermé dans  $X$ , puisque  $A = \{x \in X \mid r(x) = x\}$ .

La définition et les principales propriétés des espaces normaux sont exposées dans l'appendice **A** (page 9).

☞ **1 Définition.** Un espace topologique  $R$  est appelé un « rétract absolu » si pour tout espace normal  $X$ , tout sous-espace fermé  $A$  de  $X$  homéomorphe à  $R$  est un rétract de  $X$ .

☞ **2 Remarque.** Bien sûr, tout espace homéomorphe à un rétract absolu est un rétract absolu. On sait que  $\mathbb{S}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) n'est pas un rétract absolu (par exemple,  $\mathbb{D}^{n+1}$ , qui est normal, ne se rétracte pas sur son sous-espace fermé  $\mathbb{S}^n$ ).

☞ **3 Lemme.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace  $[0, 1]^n$  est un rétract absolu.

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie fermée d'un espace normal  $X$  et  $f : A \rightarrow [0, 1]^n$  un homéomorphisme.  $f$  a  $n$  composantes  $f_1, \dots, f_n$  à valeurs dans  $[0, 1]$ . Il résulte du théorème de Tietze-Urysohn **16** (page 10) qu'il existe des applications continues  $g_1, \dots, g_n$  de  $X$  vers  $[0, 1]$  prolongeant les  $f_i$ . En composant l'application  $g : X \rightarrow [0, 1]^n$  dont les composantes sont les  $g_i$  avec  $f^{-1}$ , on obtient une rétraction continue de  $X$  sur  $A$ .  $\square$

☞ **4 Définition.** Un espace topologique  $R$  est appelé un « rétract absolu de voisinage »<sup>(1)</sup> si pour tout espace normal  $X$ , tout sous-espace fermé  $A$  de  $X$  homéomorphe à  $R$  est un rétract de l'un de ses voisinages dans  $X$ .

☞ **5 Lemme.** Un espace normal  $R$  est un rétract absolu de voisinage si et seulement si pour tout espace normal  $X$  et toute partie fermée  $A$  de  $X$ , toute fonction continue  $f : A \rightarrow R$  a une extension continue à un voisinage de  $A$  dans  $X$ .

---

1. En Anglais : absolute neighborhood retract, ou "ANR".

*Démonstration.* Notons  $S$  l'espace obtenu en faisant l'union disjointe de  $X$  et de  $R$ , puis en quotientant cette union disjointe par la relation d'équivalence engendrée par l'identification de tout  $x \in A$  avec son image  $f(x) \in R$ .<sup>(2)</sup> On a les application continues représentées sur le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & R \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

L'application  $j$  du diagramme ci-dessus est injective. En effet, soient  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $R$ . Si l'un des deux n'est pas dans l'image de  $f$ , il n'est identifié qu'avec lui-même par la relation d'équivalence et les images de  $x$  et  $y$  par  $j$  sont alors distinctes. Sinon, on a  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$ , où  $a$  et  $b$  sont distincts. La relation d'équivalence n'identifie pas  $a$  et  $b$ , car elle n'identifie que des points ayant même image par  $f$ . Ainsi, les images de  $a$  et  $b$  par  $g$  sont distinctes, mais ce sont aussi les images de  $x$  et  $y$  par  $j$ .

Comme  $j$  est injective, on peut identifier  $R$  à un sous-espace de  $S$ , et ce sous-espace est fermé, car ses images réciproques par  $j$  et  $g$ , qui sont respectivement  $R$  et  $A$ , forment un fermé dans l'union disjointe de  $X$  et  $R$ .

On va maintenant montrer que  $S$  a la propriété d'extension de Tietze. Soit  $F$  une partie fermée de  $S$  et  $\varphi : F \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Posons  $F_R = j^{-1}(F)$ . Comme  $F_R$  est fermé dans  $R$  et  $R$  normal,  $\varphi \circ j$  se prolonge à  $R$  en une application continue  $\psi : R \rightarrow [0, 1]$ . On a alors l'application continue  $\psi \circ f : A \rightarrow [0, 1]$ , et l'application continue  $\varphi \circ g : F_X = g^{-1}(F) \rightarrow [0, 1]$  qui s'accordent sur l'intersection des deux fermés  $A$  et  $F_X$ , définissant une application continue du fermé  $A \cup F_X$  vers  $[0, 1]$ , qui se prolonge à  $X$  en une application continue  $\theta : X \rightarrow [0, 1]$ . On a alors  $\psi \circ f = \theta \circ i$ , ce qui implique que l'application de l'union disjointe de  $X$  et  $R$  vers  $[0, 1]$  qui est  $\theta$  sur  $X$  et  $\psi$  sur  $R$  passe au quotient pour donner une application continue  $\Theta : S \rightarrow [0, 1]$  prolongeant  $\varphi$ .<sup>(3)</sup>

Pour chaque  $x \in S$ ,  $\{x\}$  est fermé dans  $S$ . En effet, chaque classe d'équivalence est une partie fermée de  $U$ , et le complémentaire de cette partie fermée est l'image réciproque du complémentaire de  $\{x\}$ , qui est donc ouvert. Comme les singletons de  $S$  sont fermés, et comme  $S$  a la propriété d'extension de Tietze, on voit que  $S$  est séparé, donc normal.

Comme  $R$  est un rétract absolu de voisinage, et comme  $R$  est une partie fermée dans  $S$  qui est normal, il existe un voisinage  $W$  de  $R$  dans  $S$  qui se rétracte sur  $R$  via  $r : W \rightarrow R$ .  $g^{-1}(W)$  est alors un voisinage de  $A$  dans  $X$ , et  $r \circ g : g^{-1}(W) \rightarrow R$  est une extension continue de  $f$  à un voisinage de  $A$  dans  $X$ .

Réciproquement, si on a un homéomorphisme  $\varphi : R \rightarrow A \subset X$  où  $A$  est fermé dans l'espace normal  $X$ , l'application  $f^{-1} : A \rightarrow R$  se prolonge à un voisinage  $W$  de  $A$  dans  $X$ , ce qui signifie que  $R$  est un rétract absolu de voisinage.  $\square$

2.  $S$  est la « somme amalgamée » de  $X$  et  $R$  au dessus de  $A$ .

3. On peut faire plus simple avec des arguments catégoriques, puisqu'il s'agit de la propriété caractéristique des sommes amalgamées.

☞ **6 Lemme.** *Si  $R$  est un rétract absolu de voisinage, et si  $S$  est une partie de  $R$  dont un voisinage (dans  $R$ ) se rétracte sur  $S$ , alors  $S$  est un rétract absolu de voisinage.*

En particulier, on voit que tout ouvert d'un rétract absolu de voisinage est un rétract absolu de voisinage.<sup>(4)</sup>

*Démonstration.* Soit  $X$  un espace normal,  $A$  une partie de  $X$  et  $h : A \rightarrow S \subset R$  un homéomorphisme. Comme  $R$  est un rétract absolu de voisinage, il existe un voisinage  $U$  de  $A$  dans  $X$  et un prolongement continu  $\bar{h} : U \rightarrow R$  de  $h$ . Soit  $V$  un voisinage de  $S$  dans  $R$  qui se rétracte sur  $S$ . Alors  $W = \bar{h}^{-1}(V)$  est un voisinage de  $A$  dans  $U$ . En composant la restriction de  $\bar{h}$  avec une rétraction de  $V$  sur  $S$ , on obtient une application continue  $W \rightarrow S$  qui prolonge  $h$ .  $\square$

## 2 Polyèdres.

☞ **7 Définition.** *Soit  $S$  un ensemble. Un « polyèdre formel  $P$  à sommets dans  $S$  » est un ensemble de parties finies non vides de  $S$ , tel que si  $x \in P$  et  $\emptyset \neq y \subset x$  alors  $y \in P$ , et qui contient tous les singletons de  $S$ .*

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux polyèdres formels finis (l'ensemble  $S$  de sommets de la définition ci-dessus est fini). Un élément  $x$  de  $P$  qui a  $n+1$  éléments est appelé un «  $n$ -simplexe (formel) de  $P$  ».

Soit  $P$  un polyèdre formel fini. Considérons une famille  $(a_s)_{s \in S}$  de points affinement indépendants d'un espace euclidien réel. Pour chaque  $x \in P$ , notons  $\bar{x}$  l'enveloppe convexe des points  $a_s$  tels que  $s \in x$ .  $\bar{x}$  est appelé la « réalisation géométrique de  $x$  ». La réunion

$$\bar{P} = \bigcup_{x \in P} \bar{x}$$

est appelée la « réalisation géométrique de  $P$  ». Il est facile de vérifier que le type d'homéomorphisme de  $\bar{P}$  ne dépend pas du choix des points  $a_s$  ( $s \in S$ ) pourvu bien sûr qu'ils soient affinement indépendants. La réalisation géométrique d'un polyèdre formel est appelée un « polyèdre ». Il est clair que si  $P$  est un polyèdre formel fini,  $\bar{P}$  est un espace compact.

☞ **8 Exemple.** L'exemple fondamental est celui où  $S = \{0, 1, \dots, n\}$  et où  $P$  est l'ensemble de toutes les parties non vides de  $S$ . Ce polyèdre formel est noté  $\Delta_n$  et appelé le «  $n$ -simplexe formel standard ». Sa réalisation géométrique est homéomorphe au  $n$ -simplexe topologique standard  $\Delta_n$  qu'on a rencontré dans la construction de la théorie des chaînes singulières.

Tout polyèdre fini  $P$  à  $n+1$  sommets est clairement un sous-polyèdre de  $\Delta_n$  (ajouter à  $P$  toutes les parties non vides de l'ensemble des sommets). S'il n'est pas égal à  $\Delta_n$ , il existe un simplexe  $x$  de  $\Delta_n$  de dimension minimale qui n'est pas dans  $P$ . En ajoutant ce simplexe  $x$  à  $P$ , on obtient un nouveau polyèdre formel  $P+x$  qui est encore un sous-polyèdre de  $\Delta_n$ . Comme  $\Delta_n$  n'a qu'un

---

4. Ceci n'est pas vrai pour les fermés. Par exemple, l'image d'une suite convergente de  $\mathbb{R}$  ne forme généralement pas avec sa limite un rétract absolu de voisinage.

nombre fini de simplexes, on voit que  $\Delta_n$  peut être obtenu à partir de tout polyèdre formel fini à  $n + 1$  sommets par l'ajout d'un nombre fini de simplexes, de telle sorte qu'à chaque ajout d'un simplexe, on ait encore un polyèdre.

☞ **9 Lemme.** *Soit  $P \subset \Delta_n$  un polyèdre formel fini, et soit  $x$  un simplexe de dimension minimale de  $\Delta_n - P$ . Alors il existe un point  $g \in \overline{P+x}$  tel que  $\overline{P+x} - \{g\}$  se rétracte continument sur  $\overline{P}$ .*

*Démonstration.* Le centre de gravité  $g$  de  $\overline{x}$  est le barycentre des points  $a_s$  ( $s \in x$ ) tous affectés du même poids  $\frac{1}{p+1}$ , où  $p$  est la dimension de  $x$ . La fonction  $\mu : \overline{x} \rightarrow [0, 1]$  qui associe à chaque  $t = \sum_{s \in x} \lambda_s a_s \in \overline{x}$  la valeur  $\mu(t) = \inf_{s \in x} \lambda_s$  est continue. On définit une rétraction  $r$  de  $\overline{x} - \{g\}$  vers le bord de  $\overline{x}$  en posant

$$r(t) = \frac{t - (p+1)\mu(t)g}{1 - (p+1)\mu(t)}$$

Noter que pour  $t \neq g$ , on a  $\mu(t) < \frac{1}{p+1}$  et donc que  $r$  est bien définie. Par ailleurs, si  $s$  est tel que  $\lambda_s = \mu(t)$  (ce qui arrive pour au moins une valeur de  $s$  par définition de  $\mu$ ), le poids correspondant à l'indice  $s$  pour  $r(t)$  est  $\lambda_s - (p+1)\mu(t)\frac{1}{p+1} = 0$ , ce qui signifie que  $r(t)$  est sur le bord de  $\overline{x}$ . Si  $t$  lui-même est sur le bord de  $\overline{x}$ , on a  $\mu(t) = 0$ , et donc  $r(t) = t$ .<sup>(5)</sup> Ainsi, en prolongeant  $r$  par l'identité sur  $\overline{P}$ , on a construit une rétraction de  $\overline{P+x} - \{g\}$  sur  $\overline{P}$ .  $\square$

☞ **10 Lemme.** *Tout espace homéomorphe à un polyèdre fini est un rétract absolu de voisinage.*

*Démonstration.* Notons d'abord que si un polyèdre de la forme  $\overline{P+x}$  est un rétract absolu de voisinage, alors  $\overline{P}$  est un rétract absolu de voisinage. En effet, il existe d'après le lemme 9 un voisinage  $U$  de  $\overline{P}$  dans  $\overline{P+x}$  qui se rétracte sur  $\overline{P}$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme 6 (page 3). Comme  $\Delta_n$  est un rétract absolu de voisinage, et peut être obtenu à partir d'un polyèdre  $P$  à  $n + 1$  sommet par l'ajout d'un nombre fini de simplexes, de telle façon qu'à chaque ajout on ait encore un polyèdre, on voit que tout polyèdre fini est un rétract absolu de voisinage.  $\square$

### 3 Plongements propres (au sens d'Alexander).

Soit  $A$  une partie dans un espace  $X$ , et soit  $\mathcal{V}_A$  la famille de tous les voisinages de  $A$  dans  $X$  (pas seulement ceux qui sont ouverts).  $\mathcal{V}_A$  est un ensemble ordonné cofiltrant, et par conséquent la famille des  $H^*(V)$  pour  $V \in \mathcal{V}_A$  muni des flèches induites par les inclusions est un diagramme filtrant de modules gradués. La question est de savoir si la flèche canonique

$$\text{colim}_{V \in \mathcal{V}_A} H^*(V) \longrightarrow H^*(A)$$

est un isomorphisme.

---

5. Bien sûr,  $r$  n'est rien d'autre que la projection à partir de  $g$  de  $\overline{x} - \{g\}$  sur le bord de  $\overline{x}$ .

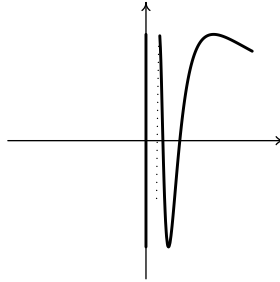
La réponse est non en général (on va voir un contre-exemple ci-dessous), mais elle est oui dans de nombreux cas. Quand elle est oui, on dit que  $A$  est « proprement plongé (au sens d'Alexander) dans  $X$  ».<sup>(6)</sup> En fait, elle est oui en particulier, comme on va le montrer plus bas, dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  et où  $A$  est homéomorphe à un polyèdre fini. Les sphères, les espaces projectifs, et de nombreux autres espaces d'usage courant sont homéomorphes à des polyèdres finis. La réponse est clairement aussi oui si  $A$  est ouvert, ou si  $A$  a une base de voisinages ouverts tels que l'inclusion de  $A$  dans chacun de ces voisinages soit une équivalence d'homotopie.

Quoi qu'il en soit, on pose pour toute partie  $A$  de  $X$  :

$$\check{H}^*(A) = \mathbf{colim}_{V \in \mathcal{V}_A} H^*(V)$$

La notation suggère que  $\check{H}^*(A)$  ne dépend que de  $A$ . C'est vrai au moins dans le cas où  $A$  est paracompact, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

☞ **11 Exemple.** Voici un exemple de partie compacte de  $\mathbb{R}^2$  pour laquelle on n'a pas l'isomorphisme proposé ci-dessus. Considérons le graphe  $G$  de la fonction  $x \mapsto \sin(1/x)$  restreint à l'intervalle  $]0, 1]$ , et soit  $\overline{G}$  son adhérence dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui revient à ajouter à  $G$  le segment de ligne droite allant de  $(0, -1)$  à  $(0, +1)$ .



Comme  $G$  est connexe (et même connexe par arcs), il en est de même de  $\overline{G}$ . Toutefois, il est facile de vérifier que  $\overline{G}$  n'est pas connexe par arcs. Comme  $\overline{G}$  est connexe, il existe des voisinages ouverts connexes de  $\overline{G}$  aussi petits qu'on veut (des réunions de boules ouvertes assez petites dont les centres sont dans  $\overline{G}$ ). Pour un tel voisinage  $U$ , qui est connexe par arcs (et non vide), on a  $H^0(U) \simeq \mathbb{Z}$  (cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ). Comme la famille de ces voisinages est co-initiale dans celle de tous les voisinages de  $\overline{G}$ , on voit que  $\check{H}^0(\overline{G}) \simeq \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, comme  $\overline{G}$  a deux composantes connexes par arcs, on a  $H^0(\overline{G}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

☞ **12 Théorème.** *Toute partie fermée d'un rétract absolu de voisinage binormal,<sup>(7)</sup> qui est elle-même un rétract absolu de voisinage est proprement plongée.*

En particulier, on voit (lemme 10 (page 4)) que toute partie  $K$  (compacte) de  $\mathbb{R}^n$  homéomorphe à un polyèdre fini est proprement plongée.

6. En Anglais : “tautly embedded”.

7.  $X$  est « binormal » si  $X \times [0, 1]$  est normal. Tout espace binormal est normal (comme partie fermée d'un espace normal).

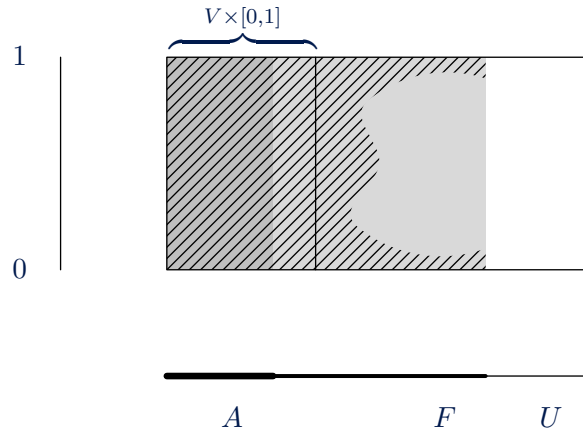
*Démonstration.* Soit  $A$  une partie fermée de l'espace binormal  $X$ , où  $A$  et  $X$  sont des rétracts absolus de voisinage. Soit  $U$  un voisinage de  $A$  dans  $X$ , et  $r : U \rightarrow A$  une rétraction de  $U$  sur  $A$ . La flèche  $i^* : H^*(U) \rightarrow H^*(A)$  induite par l'inclusion est alors surjective (puisque'elle a  $r^*$  pour section), ce qui entraîne que la flèche canonique  $\check{H}^*(A) \rightarrow H^*(A)$  est surjective.

Pour montrer que cette flèche est injective, il suffit de montrer que si un  $x \in H^*(U)$ , où  $U$  est un voisinage de  $A$  dans  $X$ , a 0 pour image dans  $H^*(A)$ , alors il existe un voisinage plus petit  $V$  de  $A$  ( $A \subset V \subset U$ ) tel que  $x$  ait 0 pour image dans  $H^*(V)$ , et pour qu'il en soit ainsi, il suffit qu'on ait une rétraction  $r : V \rightarrow A$ , telle que le diagramme de gauche ci-dessous soit homotopiquement commutatif.

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & U \\ & \nearrow r & \nwarrow \\ & V & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^*(A) & \longleftarrow & H^*(U) \\ & \searrow r^* & \swarrow \\ & H^*(V) & \end{array}$$

Le diagramme de droite sera alors commutatif, ce qui démontrera notre assertion.

Comme les voisinages ouverts de  $A$  forment une partie co-initiale de l'ensemble des voisinages de  $A$ , on peut supposer  $U$  ouvert dans  $X$ . Comme  $A$  (fermé dans  $X$ ) est un rétract absolu de voisinage et comme  $X$  est normal, il existe un voisinage  $F$  de  $A$  inclus dans  $U$  et une rétraction (continue)  $r : F \rightarrow A$ . Par normalité de  $X$ , on peut supposer  $F$  fermé dans  $X$ . Il reste juste à construire  $V$  et l'homotopie en question.



On pose  $(Y = F \times \{0, 1\}) \cup (A \times [0, 1])$ . On définit  $\rho : Y \rightarrow U$  en posant

$$\rho(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } (x, t) \in F \times \{0\} \\ x & \text{si } (x, t) \in A \times [0, 1] \\ r(x) & \text{si } (x, t) \in F \times \{1\} \end{cases}$$

$\rho$  est une application continue. Comme  $F \times [0, 1]$  est un espace normal (car fermé dans  $X \times [0, 1]$ ), comme  $Y$  est fermé dans  $F \times [0, 1]$ , et comme  $U$  est un rétract absolu de voisinage (car c'est un

ouvert de  $X$ ), on voit (lemme 5 (page 1)) que  $\rho$  peut être étendu à un voisinage  $W$  (hachuré sur la figure) de  $Y$  dans  $F \times [0, 1]$ . La projection  $F \times [0, 1] \rightarrow F$  étant ouverte, il existe un voisinage  $V$  de  $A$  contenu dans  $F$  tel que  $V \times [0, 1] \subset W$ . Notons  $h : V \times [0, 1] \rightarrow U$  la restriction de  $\rho$  à  $V \times [0, 1]$ . On a, pour tout  $x \in V$ ,  $h(x, 0) = x$  et  $h(1, x) = r(x)$ .  $\square$

## 4 Cap-produit et connectants.

☞ **13 Lemme.** Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts d'un espace  $X$ ,  $K$  et  $L$  deux fermés de  $X$  tels que  $K \subset U$  et  $L \subset V$ . On a les inclusions :

$$\begin{aligned} (U \cap V, U \cap V - K \cap L) &\xrightarrow{i} (U \cup V, U \cup V - K \cap L) \\ (U \cup V, U \cup V - K \cup L) &\xrightarrow{j} (U \cup V, U \cup V - K \cap L) \end{aligned}$$

et les connectants de suites exactes de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} H^q(U \cap V) &\xrightarrow{\partial^*} H^{q+1}(U \cup V) \\ H_{n-q}(U \cup V, U \cup V - K \cap L) &\xrightarrow{\partial_*} H_{n-q}(U \cup V, U \cup V - K \cup L) \end{aligned}$$

Soient  $x \in H^q(U \cap V)$ ,  $z \in H_n(U \cup V, U \cup V - K \cup L)$  et  $u \in H_n(U \cap V, U \cap V - K \cap L)$ , tels que  $j_*(z) = i_*(u)$ . Alors

$$\partial_* i_*(x \frown u) = \partial^* x \frown z$$

*Démonstration.* Dans les calculs qui suivent, toutes les chaînes sont considérées comme des chaînes de  $U \cup V$ , et toutes les cochaînes sont étendues (arbitrairement, ce qui est possible) à  $U \cup V$  tout entier. Bien entendu, l'extension d'un cocycle n'est généralement pas un cocycle. Pour démontrer une égalité ayant lieu dans  $C_*(A, B)$  (pour  $B \subset A \subset U \cup V$ ), on démontre une égalité dans  $C_*(U \cup V)$  modulo les chaînes de  $C_*(B)$  (et pour simplifier, on écrira « modulo  $B$  »).

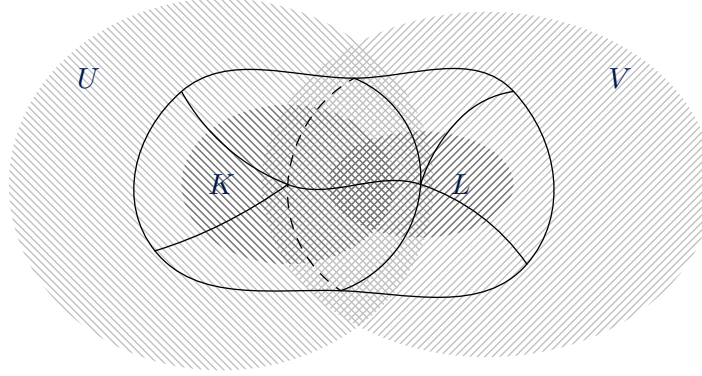
Comme les ouverts  $U \cap V$ ,  $U - L$ ,  $V - K$  et  $U \cup V - K \cup L$  recouvrent  $U \cup V$ , l'inclusion canonique :<sup>(8)</sup>

$$\frac{C_*(U \cap V) + C_*(U - L) + C_*(V - K) + C_*(U \cup V - K \cup L)}{C_*(U \cup V - K \cup L)} \hookrightarrow \frac{C_*(U \cup V)}{C_*(U \cup V - K \cup L)}$$

induit un isomorphisme en homologie (théorème des petites chaînes), et on peut représenter  $z$  par une chaîne de la forme  $\omega = a + b + c$ , avec  $a \in C_*(U \cap V)$ ,  $b \in C_*(U - L)$  et  $c \in C_*(V - K)$ , puisqu'on calcule modulo  $C_*(U \cup V - K \cup L)$ . Noter que  $a$ ,  $b$  et  $c$  peuvent tous être considérés comme des éléments de  $C_*(U \cup V)$ , mais bien sûr, compte tenu de nos conventions, on n'a pas  $\partial\omega = 0$ , mais  $\partial\omega \in C_*(U \cup V - K \cup L)$ . La figure ci-dessous représente  $U$ ,  $V$ ,  $K$  et  $L$ , ainsi que la chaîne  $\omega$  (ici une 2-chaîne). (La raison pour laquelle deux 1-simplexes sont représentés en tireté est expliquée plus loin.)

---

8. Attention, il s'agit bien de  $U - L$  et  $V - K$  et non pas de  $U - K$  et  $V - L$ .



Sur les huit 2-simplexes qui forment  $\omega$  sur la figure, les deux du centre sont dans  $U \cap V$  et constituent  $a$ , les trois plus à gauche dans  $U - L$  et constituent  $b$  et les trois plus à droite dans  $V - K$  et constituent  $c$ . Remarquer également que  $\partial\omega$  est dans  $U \cup V - K \cup L$ .

On a la suite exacte courte de module différentiels gradués :

$$0 \longrightarrow (C_*(U) + C_*(V))^* \longrightarrow C^*(U) \oplus C^*(V) \longrightarrow C^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

et un cocycle  $\beta$  représentant  $\partial^*x$  est obtenu à partir d'un cocycle  $\alpha \in C^*(U \cap V)$  représentant  $x$  en faisant :

$$\begin{array}{ccc} (\alpha, 0) & \longmapsto & \alpha \\ \downarrow & & \\ \beta & \longmapsto & (\partial\alpha, 0) \end{array}$$

Comme la restriction de  $\beta$  à  $C_*(U) + C_*(V)$  est un cocycle, et comme  $\omega$  est un cycle (assujéti au recouvrement de  $U \cup V$  par  $U$  et  $V$ ) modulo  $U \cup V - K \cup L$ , il en est de même de  $\beta \frown \omega$ , qui représente donc  $\partial^*x \frown z$ .

Par ailleurs, le connectant  $\partial_*$  est celui de la suite exacte de Mayer-Vietoris obtenue à partir de

$$0 \rightarrow \frac{C_*(U \cup V)}{C_*(U \cup V - K \cup L)} \rightarrow \frac{C_*(U \cup V)}{C_*(U \cup V - K)} \oplus \frac{C_*(U \cup V)}{C_*(U \cup V - L)} \rightarrow \frac{C_*(U \cup V)}{C_*(U \cup V - K) + C_*(U \cup V - L)} \rightarrow 0$$

Comme  $a$  est un cycle de  $U \cap V$  modulo  $U \cap V - K \cap L$  qui représente  $u$  (à cause de l'hypothèse  $j_*(z) = i_*(u)$ ),  $x \frown u$  est représenté par  $\alpha \frown a$ , et  $i_*(x \frown u)$  est représenté par  $\alpha \frown i_*(a) = \alpha \frown a$ . Mais il est tout aussi bien représenté par  $\alpha \frown (a + b)$  puisque  $b$  est dans  $U \cup V - K \cap L$ . On calcule un représentant  $\gamma$  de  $\partial_* i_*(x \frown u)$  en faisant :

$$\begin{array}{ccc} (\alpha \frown (a + b), 0) & \longmapsto & \alpha \frown (a + b) \\ \downarrow & & \\ \gamma & \longmapsto & (\partial(\alpha \frown (a + b)), 0) \end{array}$$

$a$  est un cycle modulo  $U \cup V - K \cap L$ , mais n'en est pas un modulo  $U \cup V - K$ . Sur la figure précédente,  $\partial a$  modulo  $U \cup V - K$  est constitué des deux 1-simplexes en tireté. Par contre, on

voit très bien sur la figure que  $\partial(a+b) = 0$  modulo  $U \cup V - K$ .<sup>(9)</sup> Plus formellement, on a  $\partial(a+b) = -\partial c$  modulo  $U \cup V - K \cup L$ , donc  $\partial(a+b) = 0$  modulo  $U \cup V - K$ , car  $\partial c$  est dans  $U \cup V - K$ . On a donc  $\partial(\alpha \frown (a+b)) = \partial\alpha \frown (a+b)$  (modulo  $U \cup V - K$ ).

On a  $\beta \frown \omega = \beta \frown (a+b+c) = \partial\alpha \frown (a+b)$  modulo  $U \cup V - K$ , car  $\partial\alpha$  est la restriction de  $\beta$  à  $U$  et  $U \cup (U \cup V - K) = U \cup V$ . De même, on a  $\beta \frown \omega = 0$  modulo  $U \cup V - L$  car la restriction de  $\beta$  à  $V$  est nulle. On voit donc que  $\gamma = \beta \frown \omega$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

## A Espace normaux.

☞ **14 Définition.** *Un espace topologique  $X$  est dit « normal » s'il est séparé et si pour tous fermés disjoints  $F$  et  $F'$  de  $X$ , il existe des ouverts disjoints  $U$  et  $U'$  tels que  $F \subset U$  et  $F' \subset U'$ .*

☞ **15 Lemme.** (Lemme d'Urysohn) *Soit  $X$  un espace normal,  $F$  et  $F'$  deux fermés disjoints de  $X$ . Alors il existe une fonction continue  $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 0 en tout point de  $F$  et 1 en tout point de  $F'$ .*

*Démonstration.* On note  $I$  l'ensemble des éléments de  $[0, 1]$  s'écrivant sous la forme  $p/2^q$  avec  $p$  et  $q$  entiers naturels ( $I$  est l'ensemble des rationnels « dyadiques » de  $[0, 1]$ ).  $I$  est bien sûr dense dans  $[0, 1]$ . On va utiliser les éléments de  $I$  comme indices. Si  $i \in I$ ,  $F_i$  représentera un fermé de  $X$  et  $U_i$  un ouvert de  $X$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ , et supposons que  $F_a$  soit un fermé de  $X$  et  $U_b$  un ouvert de  $X$  tels que  $F_a \subset U_b$ . Alors les fermés  $F_a$  et  $X - U_b$  étant disjoints, il existe des ouverts  $A$  et  $B$  disjoints tels que  $F_a \subset A$  et  $X - U_b \subset B$ . En posant  $A = U_{\frac{a+b}{2}}$  et  $X - B = F_{\frac{a+b}{2}}$ , on a

$$F_a \subset U_{\frac{a+b}{2}} \subset F_{\frac{a+b}{2}} \subset U_b$$

Comme  $a < \frac{a+b}{2} < b$ , on a maintenant deux paires  $(F_a, U_{\frac{a+b}{2}})$  et  $(F_{\frac{a+b}{2}}, U_b)$  auxquelles on peut appliquer la même construction. Posons  $U_0 = \emptyset$ ,  $F_0 = F$ ,  $U_1 = X - F'$  et  $F_1 = X$ . En commençant avec la paire  $(F_0, U_1)$  et en itérant le procédé ci-dessus, on obtient successivement

$$\begin{aligned} U_0 \subset F_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset F_{\frac{1}{2}} \subset U_1 \subset F_1 \\ U_0 \subset F_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset F_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset F_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset F_{\frac{3}{4}} \subset U_1 \subset F_1 \\ \text{etc.} \dots \end{aligned}$$

On a donc construit (par récurrence) une famille indexée par  $I$  de paires  $(U_i, F_i)$  avec  $U_i$  ouvert,  $F_i$  fermé et  $U_i \subset F_i$ . Noter que pour  $i < j$ , on a  $U_i \subset F_i \subset U_j \subset F_j$ .

Pour tout  $x \in X$ , on pose  $\varphi(x) = \inf_{x \in U_i} i$ . Comme  $F = F_0 - U_0$ , les éléments de  $F$  sont envoyés sur la borne inférieure de l'ensemble des rationnels dyadiques non nuls, qui est 0. Comme  $F' = F_1 - U_1$ , on voit que  $\varphi$  prend la valeur 1 sur  $F'$ . Il reste donc juste à montrer que  $\varphi$  est continue.

---

9. C'est bien sûr la raison pour laquelle il fallait ajouter  $b$ .

Soit  $x_0 \in X$  tel que  $\varphi(x_0) \in ]0, 1[$ , soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $B$  la boule de l'espace métrique  $[0, 1]$  de centre  $\varphi(x_0)$  et de rayon  $\varepsilon$ . Il s'agit de trouver un ouvert  $A$  de  $X$  tel que  $x_0 \in A$  et  $\varphi(A) \subset B$ . Soient  $i$  et  $j$  deux éléments de  $I$  tels que  $\varphi(x_0) - \varepsilon < i < \varphi(x_0) < j < \varphi(x_0) + \varepsilon$ . Il est clair que l'ouvert  $A = U_j - F_i$  fait l'affaire. Les cas  $\varphi(x_0) = 0$  et  $\varphi(x_0) = 1$  se traitent de manière semblable.  $\square$

**16 Théorème.** (théorème d'extension de Tietze-Urysohn) Soit  $A$  une partie fermée d'un espace normal  $X$ , et soit  $f : A \rightarrow [a, b]$  une fonction continue à valeurs dans un intervalle compact (non vide) de  $\mathbb{R}$ . Alors il existe une extension continue de  $f$  à  $X$ , c'est-à-dire une fonction continue  $g : X \rightarrow [a, b]$  telle que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in A$ .

*Démonstration.* Le cas d'un intervalle de la forme  $[a, a]$  étant trivial, on peut supposer  $a < b$  et même  $[a, b] = [-1, +1]$ . On va définir par récurrence une suite  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues de  $X$  vers  $[-1, +1]$ , telle que  $|f_n(x)| \leq (2/3)^{n+1}$  pour tout  $x \in X$ , et, en posant pour tout  $x \in A$ ,  $h_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x)$ , telle que  $|h_n(x)| \leq (2/3)^{n+1}$  (pour tout  $x \in A$ ).

On définit  $f_0$  de la façon suivante. On pose  $B_0 = f^{-1}([1/3, 1])$  et  $C_0 = f^{-1}([-1, -1/3])$ .  $B_0$  et  $C_0$  sont deux fermés disjoints de  $X$  (parce que  $A$  est fermé dans  $X$ ) et le lemme d'Urysohn nous donne donc une fonction continue  $f_0 : X \rightarrow [-1/3, +1/3]$  qui vaut  $1/3$  sur  $B_0$  et  $-1/3$  sur  $C_0$ . Si  $x \in B_0$ , on a  $f(x) \geq 1/3$  et  $f_0(x) = 1/3$ , donc  $|h_0(x)| = |f(x) - f_0(x)| \leq 2/3$ . Même chose pour  $x \in C_0$ . Pour les autres  $x \in A$ , on a  $|f(x)| \leq 1/3$  et  $|f_0(x)| \leq 1/3$ , donc  $|h_0(x)| \leq 2/3$ .

Supposons qu'on ait construit les fonctions continues  $f_0, \dots, f_{n-1}$ , telles que  $|f_i(x)| \leq (2/3)^{i+1}$  et  $|h_i(x)| \leq (2/3)^{i+1}$  pour  $x \in A$ . On pose  $B_n = h_{n-1}^{-1}([2^n/3^{n+1}, 1])$  et  $C_n = h_{n-1}^{-1}([-1, -2^n/3^{n+1}])$ .  $B_n$  et  $C_n$  sont deux fermés disjoints de  $X$  (contenus dans  $A$ ). Le lemme d'Urysohn nous donne une fonction continue  $f_n : X \rightarrow [-2^n/3^{n+1}, 2^n/3^{n+1}]$  qui vaut  $2^n/3^{n+1}$  sur  $B_n$  et  $-2^n/3^{n+1}$  sur  $C_n$ . Si  $x \in B_n$ , on a  $f_n(x) = 2^n/3^{n+1}$  et  $2^n/3^{n+1} \leq h_{n-1}(x) \leq 2^n/3^n$ , donc

$$0 = \frac{2^n}{3^{n+1}} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \leq h_{n-1}(x) - f_n(x) \leq \frac{2^n}{3^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

ce qui donne  $|h_n(x)| \leq 2^{n+1}/3^{n+1}$ . On a le même résultat pour  $x \in C_n$ , et pour les autres  $x$  de  $A$ , on a  $|h_n(x)| \leq 2^n/3^{n+1} + 2^n/3^{n+1} = 2^{n+1}/3^{n+1}$ .

Comme la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n/3^{n+1}$  est  $\frac{1/3}{1 - (2/3)} = 1$ , la série de fonctions continues

$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  est uniformément convergente et sa somme  $g$  est inférieure ou égale à 1. On a donc une fonction continue  $g : X \rightarrow [-1, +1]$ . Par ailleurs, si  $x \in A$ , on a  $|h_n(x)| \leq (2/3)^{n+1}$ , valeur qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Il en résulte que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in A$ .  $\square$

Tout espace normal  $X$  a donc la « propriété d'extension de Tietze », à savoir que pour toute partie fermée  $A$  de  $X$ , toute application continue de  $A$  vers  $[0, 1]$  se prolonge en une application continue définie sur  $X$  tout entier. Réciproquement, tout espace séparé  $X$  qui a la propriété d'extension de Tietze est normal. En effet, soient  $F$  et  $F'$  deux fermés disjoints de  $X$ . En

envoyant tout élément de  $F$  sur 0 et tout élément de  $F'$  sur 1, on définit une application continue du fermé  $F \cup F'$  vers  $[0, 1]$ , qu'on peut prolonger à  $X$  en une fonction continue  $\varphi$ . Il suffit alors de poser  $U = \varphi^{-1}([0, 1/2[)$ , et  $U' = \varphi^{-1}(]1/2, 1])$  pour obtenir deux ouverts  $U$  et  $U'$  disjoints contenant respectivement  $F$  et  $F'$ .

☞ **Exercice 1.** (a) Montrer que tout sous-espace fermé d'un espace normal est normal.<sup>(10)</sup>

(b) Montrer que tout espace compact est normal.

(c) Montrer que tout espace métrique est normal.

---

10. Il existe des espaces normaux qui ont des sous-espaces ouverts non normaux. Voir par exemple la « planche de Tychonoff ».

# Topologie Algébrique

Alain Prouté

Master 1 de l'Université Denis Diderot-Paris 7  
2011-2012

Notes du cours du 9 mai 2012.

## 1 Dualité d'Alexander.

Soit  $K$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $B$  une boule fermée de rayon assez grand pour contenir  $K$  dans son intérieur. On a l'inclusion  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  et donc une flèche  $i_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$ . Le  $\Lambda$ -module  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$  est isomorphe à l'anneau des coefficients  $\Lambda$  et on peut choisir (une fois pour toutes) un générateur  $\omega_B$  de ce module. Son image par  $i_*$  sera notée  $\omega_K$ . Il est facile de vérifier que  $\omega_K$  ne dépend pas du choix de  $B$ . Comme  $H_*(U, U - K)$  est isomorphe à  $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  par excision, il correspond à  $\omega_K$  un unique élément  $\omega_K^U \in H_n(U, U - K)$  par cet isomorphisme.

Soit maintenant  $U$  un voisinage ouvert de  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On a le cap-produit

$$H^q(U) \otimes H_n(U, U - K) \xrightarrow{\cap} H_{n-q}(U, U - K)$$

On pose  $\gamma_K^U(x) = x \cap \omega_K^U$ . On a donc défini  $\gamma_K^U : H^q(U) \rightarrow H_{n-q}(U, U - K)$ . On a également la flèche  $\theta_* : H_{n-q}(U, U - K) \rightarrow H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  induite par l'inclusion canonique  $\theta : (U, U - K) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$ .

Supposons maintenant que  $K \subset U \subset U'$ , où  $U$  et  $U'$  sont des ouverts, et notons  $\lambda : U \rightarrow U'$  l'inclusion canonique. On a les flèches  $\lambda^* : H^q(U') \rightarrow H^q(U)$  et  $\lambda_* : H_*(U, U - K) \rightarrow H_*(U', U' - K)$ , donc, pour  $x \in H^q(U')$  et  $y \in H_n(U, U - K)$ , on a l'égalité  $\lambda_*(\lambda^*(x) \cap y) = x \cap \lambda_*(y)$ . Si l'image de  $y$  dans  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  est  $\omega_K$ , il en est de même de celle de  $\lambda_*(y)$ . On a donc

$$\lambda_*(\lambda^*(x) \cap \omega_K^U) = x \cap \omega_K^{U'}$$

et par conséquent  $\gamma_K^U(\lambda^*(x)) = \gamma_K^{U'}(x)$ .

Autrement-dit, les flèches  $\theta_* \gamma_K^U$  sont les arêtes d'un cocône de sommet  $H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  sur le diagramme formé par les  $H^q(U)$  avec entre eux les flèches induites par les inclusions, où  $U$  varie sur l'ensemble des voisinages ouverts de  $K$ . On a donc une unique flèche

$$\check{H}^q(K) = \mathbf{colim}_U H^q(U) \xrightarrow{\Gamma_K} H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$$

telle que  $\Gamma_K([x, U]) = \theta_* \gamma_K^U(x)$ , pour tout représentant  $x \in H^q(U)$  de  $[x, U] \in \check{H}^q(K)$ .

☞ **1 Lemme.** Soient  $K$  et  $L$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\Gamma_K$ ,  $\Gamma_L$  et  $\Gamma_{K \cap L}$  soient des isomorphismes. Alors  $\Gamma_{K \cup L}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* On a le diagramme (où  $X = \mathbb{R}^n$ ) :

$$\begin{array}{ccc}
\check{H}^q(K) \oplus \check{H}^q(L) & \xrightarrow[\simeq]{\Gamma_K \oplus \Gamma_L} & H_{n-q}(X, X - K) \oplus H_{n-q}(X, X - L) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\check{H}^q(K \cap L) & \xrightarrow[\simeq]{\Gamma_{K \cap L}} & H_{n-q}(X, X - K \cap L) \\
\downarrow \partial^* & & \downarrow \partial_* \\
\check{H}^{p+1}(K \cup L) & \xrightarrow{\Gamma_{K \cup L}} & H_{n-q-1}(X, X - K \cup L) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\check{H}^{p+1}(K) \oplus \check{H}^{p+1}(L) & \xrightarrow[\simeq]{\Gamma_K \oplus \Gamma_L} & H_{n-q-1}(X, X - K) \oplus H_{n-q-1}(X, X - L)
\end{array}$$

dont les colonnes sont exactes. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que ce diagramme est commutatif.

La commutativité des carrés ne faisant pas intervenir de connectant résulte de la naturalité du cap-produit. Par ailleurs, le carré faisant intervenir les connectants est lui aussi commutatif. En effet, soit  $[x, W] \in \check{H}^q(K \cap L)$  (on a donc  $x \in H^q(W)$ , où  $W$  est un voisinage ouvert de  $K \cap L$  dans  $X$ ). Comme  $K \cap L$  est compact, et  $X - W$  fermé, la distance  $d$  de  $K \cap L$  à  $X - W$  n'est pas nulle. Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $K$  dont tous les points sont à une distance de  $K$  inférieure à  $d/2$ , et de même  $V$  pour  $L$ . Alors  $U \cap V$  est un voisinage ouvert de  $K \cap L$  contenu dans  $W$ . On peut donc remplacer  $W$  par  $U \cap V$ . Comme par définition,  $\partial^*([x, U \cap V]) = [\partial^*(x), U \cup V]$ , et par naturalité de  $\partial_*$  vis-à-vis des inclusions  $\theta$ , il suffit de démontrer que  $x \in H^q(U \cap V)$  a la même image par les deux chemins du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
H^q(U \cap V) & \xrightarrow{i_* \gamma_{K \cap L}^{U \cap V}} & H_{n-q}(U \cup V, U \cup V - K \cap L) \\
\downarrow \partial^* & & \downarrow \partial_* \\
H^{p+1}(U \cup V) & \xrightarrow{\gamma_{K \cup L}^{U \cup V}} & H_{n-q-1}(U \cup V, U \cup V - K \cup L)
\end{array}$$

où  $i$  est l'inclusion de  $(U \cap V, U \cap V - K \cap L)$  dans  $(U \cup V, U \cup V - K \cap L)$ . Or ceci résulte immédiatement du lemme 13 de la leçon du 7 mai (avec  $z = \omega_{K \cup L}^{U \cup V}$  et  $u = \omega_{K \cap L}^{U \cap V}$ ).  $\square$

☞ **2 Théorème.** Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_K : \check{H}^q(K) \rightarrow H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Tout compact de  $\mathbb{R}^n$  étant l'intersection d'une suite décroissante de réunions finies de compacts convexes, il suffit de procéder aux trois étapes suivantes : (1) Démontrer le théorème pour  $K$  compact convexe. (2) Démontrer le théorème pour une réunion finie de compacts convexes. (3) Démontrer le théorème pour l'intersection d'une suite décroissante de compacts satisfaisant tous le théorème.

(1) Supposons d'abord que  $K$  est vide. Alors  $\emptyset$  est un voisinage de  $K$  qui constitue à lui tout seul une partie co-initiale de la famille des voisinages de  $K$ . On a donc  $\check{H}^*(K) = H^*(\emptyset) = 0$ . Par ailleurs,  $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = 0$ . Supposons maintenant que  $K$  est un compact convexe non vide. Soit  $x \in K$  et soit  $B$  une boule ouverte de centre  $x$  contenant  $K$ . Alors les inclusions canoniques

$$\mathbb{R}^n - K \longleftarrow \mathbb{R}^n - B \longrightarrow \mathbb{R}^n - x$$

sont des équivalences d'homotopie. Il en résulte (par la suite exacte d'homologie d'une paire et le lemme des cinq) que l'inclusion  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$  induit un isomorphisme en homologie. On a donc le diagramme commutatif (où  $U$  est une petite boule ouverte centrée en  $x$ ) :

$$\begin{array}{ccccc} \check{H}^*(K) & \xrightarrow{\cong} & \check{H}^*(\{x\}) & \xrightarrow{\cong} & H^*(U) \\ \Gamma_K \downarrow & & \downarrow \Gamma_{\{x\}} & & \downarrow \gamma_{\{x\}}^U \\ H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H_*(U, U - \{x\}) \end{array}$$

et il suffit de montrer que  $\gamma_{\{x\}}^U$  est un isomorphisme. Or  $H^*(U)$  est le  $\Lambda$ -module libre engendré par 1, et  $H^*(U, U - \{x\})$  est le  $\Lambda$ -module libre engendré par  $\omega_{\{x\}}^U$ , et on a  $\gamma_{\{x\}}^U(1) = 1 \smallfrown \omega_{\{x\}}^U = \omega_{\{x\}}^U$ .

(2) Soit  $K_1, \dots, K_p$  ( $p \geq 2$ ) une suite finie de compacts convexes de  $\mathbb{R}^n$ . Par hypothèse de récurrence,  $K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}$  satisfait l'énoncé du théorème, de même que  $K_p$  et que  $(K_1 \cup \dots \cup K_{p-1}) \cap K_p$ , car ce dernier est la réunion des  $p-1$  compacts convexes  $K_1 \cap K_p, \dots, K_{p-1} \cap K_p$ . On conclut en utilisant le lemme 1.

(3) Ce point est conséquence de la naturalité en  $K$  de  $\Gamma_K$  et du fait que  $\check{H}^*$  et  $H_*$  commutent aux limites inductives.  $\square$

En composant  $\Gamma_K$  avec l'isomorphisme  $\partial_* : H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \rightarrow \check{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - K)$ , on obtient :

**3 Corollaire.** (Dualité d'Alexander) Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a un isomorphisme  $\check{H}^q(K) \rightarrow \check{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - K)$ , et si  $K$  est homéomorphe à un polyèdre (nécessairement fini), on a l'isomorphisme  $H^q(K) \rightarrow \check{H}_{n-q-1}(\mathbb{R}^n - K)$ .  $\square$

**4 Exemple.** Supposons que  $A \subset \mathbb{R}^n$  soit homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1}$  (qui est homéomorphe à un polyèdre). Alors  $\Lambda \simeq H^{n-1}(A) \simeq \check{H}_0(\mathbb{R}^n - A)$ , ce qui redémontre la première affirmation du théorème de séparation de Jordan-Brouwer.

Supposons que  $A \subset \mathbb{R}^3$  soit homéomorphe à  $\mathbb{RP}^2$  (qui est homéomorphe à un polyèdre). Alors,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H^2(A; \mathbb{Z}) \simeq \check{H}_0(\mathbb{R}^3 - A; \mathbb{Z})$ , ce qui est impossible. Même chose pour la bouteille de Klein.

## 2 Conclusion.

Nous sommes rendus à la fin de ce cours de topologie algébrique, composé de 26 leçons, et qui aurait pu en contenir d'autres si le temps imparti l'avait permis. Un certain nombre de sujets

importants n'ont pas été abordés. Toutefois, le cours est déjà assez copieux pour une initiation, censée être assimilée en un semestre. Il est très incomplet mais donne, je l'espère, une idée assez précise des méthodes de la topologie algébrique.

Un certain nombre de lemmes des dernières leçons devaient être utilisés pour prouver la dualité de Poincaré. Le manque de temps ne l'a pas permis. Dès que possible, je compléterai cette dernière leçon pour y inclure cette dualité et quelques applications.

# Topologie Algébrique

A. Prouté, H. Mourtada.

Paris-Diderot 2011-2012

Master 1 (31UDMT42)

Examen du 29 mai 2012.

## I.

On considère les deux fonctions  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  définies par

$$f(s) = (f_1(s), f_2(s)) = \begin{cases} (2s, 0) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ (1, 2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$g(s) = (g_1(s), g_2(s)) = \begin{cases} (0, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ (2s - 1, 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que  $f$  et  $g$  sont des chemins (continus) de même origine et de même extrémité, et donner une formule explicite pour une homotopie de  $f$  à  $g$ .

Soit  $G$  un groupe topologique (noté multiplicativement) connexe et localement connexe par arcs. On prend l'élément neutre  $1 \in G$  (qu'on notera aussi  $*$ ) comme point de base.

(b) Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux lacets de  $(G, *)$ . Montrer que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $(\sigma \star \tau)(s) = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$ . En déduire une homotopie explicite du lacet  $\sigma \star \tau$  au lacet  $\tau \star \sigma$ .

(c) Montrer que tous les revêtements d'espace total connexe au dessus de  $G$  sont principaux.

Pour tous lacets  $\sigma$  et  $\tau$  de  $(G, *)$ , on note  $\sigma\tau$  le lacet défini par  $(\sigma\tau)(s) = \sigma(s)\tau(s)$ . On rappelle que pour tout lacet  $\sigma$  on note  $[\sigma]$  l'élément qu'il représente dans le groupe fondamental.

(d) Montrer que l'application  $\theta : \pi_1(G, *) \times \pi_1(G, *) \rightarrow \pi_1(G, *)$  envoyant  $([\sigma], [\tau])$  sur  $[\sigma\tau]$  est la multiplication du groupe fondamental  $\pi_1(G, *)$ . En déduire que si  $\iota : G \rightarrow G$  est définie par  $\iota(x) = x^{-1}$ , alors  $\pi_1(\iota) : \pi_1(G, *) \rightarrow \pi_1(G, *)$  est l'application  $[\sigma] \mapsto [\sigma]^{-1}$  ( $= [\sigma^{-1}]$ ).

(e) Soit  $\pi : E \rightarrow G$  un revêtement tel que  $E$  soit connexe, et soit  $*$   $\in E$ , tel que  $\pi(*) = *$ . Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur  $E$  faisant de  $E$  un groupe topologique d'élément neutre  $*$  et telle que  $\pi$  soit un morphisme de groupes.<sup>(1)</sup>

## II.

L'homologie est à coefficients dans un anneau commutatif unitaire  $\Lambda$ . On suppose  $n \geq 1$ .

(a) Montrer que si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H_q(\mathbb{R}^n - K) = 0$  pour  $q \geq n$ .

(b) Montrer que si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H_q(U) = 0$  pour  $q \geq n$ .

---

1. On aura à montrer que la structure obtenue sur  $E$  satisfait les axiomes des groupes. On se contentera de le faire pour l'un des axiomes des groupes, la méthode étant la même pour les autres.

### III.

Dans cet exercice, la cohomologie est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . On a vu en cours (2 mai) que le cross-produit  $H^*(X) \otimes H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times} H^*(X \times \mathbb{S}^n)$  est un isomorphisme. On suppose qu'on a des applications continues  $m : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  (« multiplication ») et  $\eta : \{*\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  (« unité ») faisant de  $\mathbb{S}^n$  un monoïde à homotopie près.

(a) Montrer que le composé  $H^*(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{m^*} H^*(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\times^{-1}} H^*(\mathbb{S}^n) \otimes H^*(\mathbb{S}^n)$  est un morphisme d'algèbres graduées. Ce composé sera noté  $\Delta$ .

On désigne par  $\alpha$  un générateur de  $H^n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ .

(b) Montrer que la composante de  $\Delta(\alpha)$  dans  $H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n)$  est  $\alpha \otimes 1$  (où 1 est l'unité de l'algèbre de cohomologie  $H^*(\mathbb{S}^n)$ ), et en déduire l'expression de  $\Delta(\alpha)$ . (Aide : Utiliser (entre autres choses) la naturalité du cross-produit et un diagramme qui exprime le fait que  $\eta$  est neutre pour  $m$  à homotopie près.)

(c) Dans l'algèbre  $H^*(\mathbb{S}^n) \otimes H^*(\mathbb{S}^n)$ , calculer les produits  $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \alpha)$  et  $(1 \otimes \alpha)(\alpha \otimes 1)$ .

(d) En utilisant les deux questions précédentes, calculer le carré de  $\Delta(\alpha)$ .

(e) En déduire que  $n$  est impair.



I.

(a) La formule définit  $f$  sur  $[0, 1/2]$  et sur  $[1/2, 1]$ , deux fermées qui recouvrent  $[0, 1]$ , par deux formules continues en  $s$ , qui s'accordent sur leur intersection  $\{1/2\}$ . Elle est donc continue. On a  $f(0) = (0, 0)$  et  $f(1) = (1, 1)$ , et il en est de même de  $g$ . Comme  $[0, 1]^2$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ , on obtient une homotopie  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  de  $f$  à  $g$  en posant  $h(t, s) = (1 - t)f(s) + tg(s)$ .

(b) Pour  $s \in [0, 1/2]$ , on a  $(\sigma \star \tau)(s) = \sigma(2s) = \sigma(f_1(s)) \times 1 = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$ . Pour  $s \in [1/2, 1]$ , on a  $(\sigma \star \tau)(s) = \tau(2s - 1) = 1 \times \tau(2s - 1) = \sigma(f_1(s))\tau(f_2(s))$ . De la même manière, on a  $(\tau \star \sigma)(s) = \sigma(g_1(s))\tau(g_2(s))$ . En posant  $\psi(x, y) = \sigma(x)\tau(y)$ , on a  $\sigma \star \tau = \psi \circ f$  et  $\tau \star \sigma = \psi \circ g$ . Il en résulte que  $\psi \circ h$  est une homotopie de  $\sigma \star \tau$  à  $\tau \star \sigma$ .

(c) La question (b) entraîne que  $\pi_1(G, *)$  est commutatif et donc que tous ses sous-groupes sont distingués. Si  $\pi : E \rightarrow B$  est un revêtement, c'est un homéomorphisme local, et  $E$  est donc localement connexe par arcs. Le théorème 1 de la leçon du 29 février montre donc que  $\pi$  est un revêtement principal.

(d) En reprenant l'homotopie  $h$  de la question (a), on voit que  $h(1/2, s) = \frac{f(s) + g(s)}{2} = (s, s)$ . On a donc  $(\psi \circ h)(1/2, s) = \sigma(s)\tau(s) = (\sigma\tau)(s)$ . Autrement-dit, au temps  $t = 1/2$ , l'homotopie  $\psi \circ h$  a amené le lacet  $\sigma \star \tau$  sur le lacet  $\sigma\tau$ . Il en résulte que  $[\sigma \star \tau] = [\sigma\tau]$ , donc que  $\theta$  est la multiplication de  $\pi_1(G, *)$ .

(e) L'élément neutre devant être  $*$ , la structure de groupe est déterminée par sa multiplication  $m : E \times E \rightarrow E$ . Comme  $\pi$  doit être un morphisme de groupes, on doit avoir le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{m} & E \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

(où  $\mu$  désigne la multiplication de  $G$ ), qui montre que  $m$  (qui doit être continue) est un relèvement de  $\mu \circ (\pi \times \pi)$  le long de  $\pi$ . Un tel relèvement est unique puisque  $E \times E$  est connexe (lemme 1 du 15 février).

Pour ce qui est de l'existence, notons qu'un lacet de  $E \times E$  est juste une paire  $(\sigma, \tau)$  de lacets de  $E$ , et que son image par  $\mu \circ (\pi \times \pi)$  est  $(\pi \circ \sigma)(\pi \circ \tau)$ . Mais d'après la question (d), ce dernier lacet est homotope à  $(\pi \circ \sigma) \star (\pi \circ \tau)$  dont la classe d'homotopie se trouve dans le sous-groupe de  $\pi_1(G, *)$  qui est l'image de  $\pi_* : \pi_1(E, *) \rightarrow \pi_1(G, *)$ . Il résulte donc du lemme 8 du 15 février que le relèvement (continu) de  $\mu \circ (\pi \times \pi)$  le long de  $\pi$  existe.

Il reste à construire une application continue  $i : E \rightarrow E$ , et à montrer les axiomes des groupes, c'est-à-dire les relations  $m \circ (1 \times *) = m \circ (* \times 1) = 1$ ,  $m \circ (m \times 1) = m \circ (1 \times m)$  et  $m \circ (1 \times i) = m \circ (i \times 1) = *$  (où  $*$  :  $E \rightarrow E$  est l'application constante  $x \mapsto *$ ). Comme

$\pi$  doit être un morphisme de groupes, on doit avoir le diagramme commutatif (qui dit que  $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G & \xrightarrow{\iota} & G \end{array}$$

Comme précédemment, en utilisant le résultat de la question (d), on voit que  $\iota \circ \pi$  se relève le long de  $\pi$ , et que ce relèvement est unique car on doit avoir  $i(*) = *$ .

On vérifie maintenant les axiomes des groupes, par exemple l'associativité. On a  $\pi \circ m \circ (m \times 1) = \mu \circ (\pi \times \pi) \circ (m \times 1) = \mu \circ (\mu \times 1) \circ (\pi \times \pi \times \pi)$ . Comme  $\mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$ , on a  $\pi \circ m \circ (m \times 1) = \pi \circ m \circ (1 \times m)$ , donc le résultat par unicité du relèvement (noter que  $m \circ (m \times 1)$  et  $m \circ (1 \times m)$  envoient  $(*, *, *)$  sur  $*$ ). Les autres axiomes se traitent de la même manière.

## II.

(a) On a la suite exacte :

$$H_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \longrightarrow H_q(\mathbb{R}^n - K) \longrightarrow H_q(\mathbb{R}^n) = 0$$

Comme  $H_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) = 0$  (par dualité d'Alexander, car il est isomorphe à  $\check{H}^{n-q-1}(K)$ , qui est nul comme limite inductive de modules qui sont nuls parce que  $n - q - 1 < 0$ ), on voit que  $H_q(\mathbb{R}^n - K) = 0$  pour  $q \geq n$ .

(b) Supposons d'abord que  $U$  soit un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $V$  le complémentaire dans  $\mathbb{R}^n$  d'une boule fermée dont l'intérieur contient  $U$ . On  $U \cap V = \emptyset$  et la suite exacte ( $q \geq n$ ) :

$$0 = H_q(\emptyset) \longrightarrow H_q(U) \oplus H_q(V) \longrightarrow H_q(U \cup V)$$

Comme  $U \cup V$  est le complémentaire d'un compact, on a  $H_q(U \cup V) = 0$ . Comme on a aussi  $H_q(V) = 0$  (car  $V$  est lui aussi le complémentaire d'un compact), on voit que  $H_q(U) = 0$ .

Pour terminer, comme  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

## III.

(a)  $m^*$  est un morphisme d'algèbres graduées, car il est induit par l'application continue  $m$ . Il reste donc juste à montrer que  $\times^{-1}$  est un morphisme d'algèbres, ou encore que le cross-produit est un morphisme d'algèbres, autrement-dit que  $(x \times y) \smile (u \times v) = (-1)^{|y||u|}(x \smile u) \times (y \smile v)$ . Or, compte tenu de l'associativité, de la commutativité et de la naturalité du cup-produit :

$$\begin{aligned} (x \times y) \smile (u \times v) &= p_1^*(x) \smile p_2^*(y) \smile p_1^*(u) \smile p_2^*(v) \\ &= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x) \smile p_1^*(u) \smile p_2^*(y) \smile p_2^*(v) \\ &= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x \smile u) \smile p_2^*(y \smile v) \\ &= (-1)^{|y||u|} p_1^*(x \smile u) \smile p_2^*(y \smile v) \\ &= (-1)^{|y||u|} (x \smile u) \times (y \smile v) \end{aligned}$$

(b) On a le diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times \{*\} & \xrightarrow{1 \times \eta} & \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \\ & \searrow p_1 & \downarrow m \\ & & \mathbb{S}^n \end{array}$$

(où  $p_1$  est la projection canonique, qui est ici un homéomorphisme). La naturalité du cross-produit et la définition de  $\Delta$  nous donnent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^n(\mathbb{S}^n) & & \\ & \swarrow \Delta & \downarrow m^* & \searrow p_1^* & \\ H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\times} & H^n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) & & \\ \downarrow 1 \otimes \eta^* & & \downarrow (1 \times \eta)^* & & \\ H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\{*\}) & \xrightarrow{\times} & H^n(\mathbb{S}^n \times \{*\}) & & \end{array}$$

Comme  $H^0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ , tout élément de  $H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n)$  s'écrit  $\beta \otimes 1$  d'une manière unique. On définit donc  $\beta$  en posant  $\Delta(\alpha) = \beta \otimes 1$ , et, comme  $\eta^*(1) = 1$ , le diagramme ci-dessus montre que  $\beta \times 1 = p_1^*(\alpha)$ . Par ailleurs,  $\beta \times 1 = p_1^*(\beta) \smile p_2^*(1) = p_1^*(\beta) \smile 1 = p_1^*(\beta)$ . Comme  $p_1^*$  est bijectif, on voit que  $\beta = \alpha$ .

Symétriquement, la composante de  $\Delta(\alpha)$  dans  $H^0(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n)$  est  $1 \otimes \alpha$ . Comme il n'y a pas d'autre composante, on voit que  $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$ .

(c) Par définition du produit dans un produit tensoriel d'algèbres graduées, on a  $(x \otimes y)(u \otimes v) = (-1)^{|y||u|}xu \otimes yv$ . Comme le degré de 1 est 0, on obtient  $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \alpha) = \alpha \otimes \alpha$  et  $(1 \otimes \alpha)(\alpha \otimes 1) = (-1)^{|\alpha||\alpha|}\alpha \otimes \alpha = (-1)^n\alpha \otimes \alpha$ .

(d) Il résulte de la question (c) que  $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$ . On a donc  $\Delta(\alpha)^2 = \alpha^2 \otimes 1 + \alpha \otimes \alpha + (-1)^n\alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha^2$ . Comme  $\alpha^2 = 0$  (car  $H^{2n}(\mathbb{S}^n) = 0$ ), on voit que  $\Delta(\alpha)^2 = 2\alpha \otimes \alpha$  si  $n$  est pair et  $\Delta(\alpha)^2 = 0$  si  $n$  est impair.

(e) Comme  $\Delta$  est un morphisme d'algèbres (question (b)), on a  $\Delta(\alpha)^2 = \Delta(\alpha^2) = \Delta(0) = 0$ . Comme  $\alpha \otimes \alpha \in H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$  ne peut pas être nul (c'est même un générateur),  $2\alpha \otimes \alpha$  n'est pas nul, et il résulte de la question précédente que l'égalité  $\Delta(\alpha)^2 = 2\alpha \otimes \alpha$  est impossible et donc que  $n$  est impair.



# Topologie Algébrique

A. Prouté, H. Mourtada.

Paris-Diderot 2011-2012

Master 1 (31UDMT42)

Questions posées aux oraux des 25 et 26 juin 2012.  
(seconde session)

☞ **Exercice 1.** (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \neq 0$ . Soit  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  une application continue dont le degré de Brouwer est  $n$ . Calculer l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de l'espace topologique  $X$  qui est la colimite du diagramme

$$\mathbb{D}^3 \xleftarrow{i} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{S}^2$$

où  $i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{D}^3$  est l'inclusion canonique.

(b) Calculer la cohomologie de l'espace précédent  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

☞ **Exercice 2.** On considère l'application (continue)  $i_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  définie par

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n, 0)$$

On note  $\mathbb{S}^\infty$  la limite inductive du diagramme

$$\mathbb{S}^0 \xrightarrow{i_0} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{i_2} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{i_3} \dots$$

Calculer l'homologie de  $\mathbb{S}^\infty$  à coefficients dans un anneau (commutatif unitaire)  $\Lambda$  quelconque.

☞ **Exercice 3.** (a) Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Montrer que le cross-produit

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y)$$

est un morphisme d'algèbres graduées.

(b) Donner une description complète de l'algèbre de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de l'espace  $\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{S}^3$ .

☞ **Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  une application continue injective, et soit  $*$   $\in \mathbb{S}^3 - \text{Im}(f)$ . Montrer que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \text{Im}(f), *)$  est un groupe infini.

☞ **Exercice 5.** Soit  $C$  une  $\mathbb{Z}$ -coalgèbre graduée associative (dont le coproduit est noté  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ ), et  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre graduée associative (dont le produit est noté  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ ). Soit  $t : C \rightarrow A$  une application linéaire homogène de degré  $-1$ , telle que  $\mu(t \otimes t)\Delta = 0$  (où la juxtaposition est la composition).

(a) Montrer que  $C \otimes A$  (graduée de la manière usuelle) muni de la différentielle  $\partial_t$  définie par

$$\partial_t = (1 \otimes \mu)(1 \otimes t \otimes 1)(\Delta \otimes 1)$$

est un module différentiel gradué (qu'on notera  $C \otimes_t A$ ).

(b)  $C \otimes A$  est un  $A$ -module à droite gradué dont le produit externe  $(C \otimes A) \times A \rightarrow C \otimes A$  est donné par  $(x \otimes a)b = (x \otimes ab)$ . Montrer que  $\partial_t$  est  $A$ -linéaire.

On suppose désormais que l'algèbre  $A$  est unitaire (avec  $1 \in A_0$ ) et positivement graduée.

(c) Montrer que la composante de  $\partial_t$  qui envoie  $C_i \otimes A_j$  dans  $C_i \otimes A_{j-1}$  est nulle.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose désormais que  $C_0 \simeq C_{2n+1} \simeq \mathbb{Z}$  et que  $C_i = 0$  pour  $i \neq 0, 2n+1$ .

(d) Montrer que  $\partial_t$  est nul sur  $C_0 \otimes A$ , et que  $\partial_t$  envoie  $C_{2n+1} \otimes A_j$  dans  $C_0 \otimes A_{2n+j}$ .

(e) On suppose de plus que l'homologie de  $C \otimes_t A$  est celle d'un point. Montrer que  $A$  est isomorphe à l'algèbre de polynômes  $\mathbb{Z}[X]$ , où  $X$  est une variable de degré  $2n$ .

☞ **Exercice 6.** On choisit arbitrairement un point de base dans  $\mathbb{S}^n$ . On considère le bouquet infini

$$X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^5 \vee \dots$$

Rappeler la définition précise d'un tel bouquet et calculer l'homologie de  $X$  (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ).

☞ **Exercice 7.** (a) Montrer que  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$  et  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p \neq 0$ ).

(b) Soit  $X$  un espace topologique dont l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est nulle sauf dans les dimensions 0, 1, 2, 3 et 6, où elle est respectivement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}$ . Montrer que ces données déterminent complètement l'algèbre de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

☞ **Exercice 8.** Soit  $\mathcal{U}$  une famille filtrante d'ouverts contractiles recouvrant  $\mathbb{RP}^n$ . Montrer que  $n = 0$ .

☞ **Exercice 9.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 1$ . Soit  $(f_i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n)_{1 \leq i \leq p}$  une famille finie d'applications continues injectives. On suppose que pour tous  $i$  et  $j$  tels que  $i \neq j$ , les images de  $f_i$  et  $f_j$  sont disjointes. Calculer le nombre de composantes connexes du complémentaire (dans  $\mathbb{S}^n$ ) de la réunion des images des  $f_i$ .

☞ **Exercice 10.** Soit  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre positivement graduée commutative. Soit  $x \in A$  de degré strictement positif, tel que la multiplication par  $x$  soit une application injective de  $A$  dans  $A$  (dont l'image, qui est un idéal de  $A$ , est notée  $xA$ ). On suppose que la projection canonique  $\pi : A \rightarrow A/xA$  admet une section  $s$  qui est un morphisme d'algèbres. Montrer que  $A$  est isomorphe comme algèbre à l'algèbre de polynômes  $(A/xA)[X]$ .

☞ **Exercice 11.** Soit  $X$  un espace topologique. On note  $\Sigma(X)$  sa suspension (non réduite). Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux classes de cohomologie de  $\Sigma(X)$  de degrés strictement positifs, le cup-produit  $x \smile y$  est nul. (Utiliser un résultat de la leçon du 2 mai.)

☞ **Exercice 12.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois  $\mathbb{Z}$ -modules. Montrer que les  $\mathbb{Z}$ -modules

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B), C) \quad \text{et} \quad \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B, C))$$

sont isomorphes.

☞ **Exercice 13.** (a) Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules différentiels gradués, et soit  $P$  un  $\mathbb{Z}$ -module différentiel gradué. Montrer qu'on a un isomorphisme de modules différentiels gradués

$$C(f) \otimes P \simeq C(f \otimes 1_P)$$

(où  $C(f)$  est le cône de  $f$ ).

(b) Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : P \rightarrow Q$  deux morphismes homogènes entre  $\mathbb{Z}$ -modules différentiels gradués relativement libres. Montrer que si  $f$  et  $g$  induisent des isomorphismes en homologie, il en est de même de  $f \otimes g : M \otimes P \rightarrow N \otimes Q$ .

(c) En utilisant le module différentiel gradué  $M$  suivant :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

montrer que l'hypothèse que les modules sont relativement libres dans la question (b) n'est pas superflue.

☞ **Exercice 14.** Soit  $P(z)$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n > 0$ .

(a) Montrer que l'application  $z \mapsto P(z)$  se prolonge en une application continue unique  $f_{P(z)}$  de  $\mathbb{CP}^1$  vers lui-même.

(b) Montrer que les applications  $f_{P(z)}$  et  $f_{z^n}$  de  $\mathbb{CP}^1$  vers lui-même sont homotopes.

(c) Soit  $\varphi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  un homéomorphisme. Calculer le degré de  $\varphi \circ f_{P(z)} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

(d) En déduire une preuve du théorème de D'Alembert.

☞ **Exercice 15.** Soit  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ , et soit  $f : X \rightarrow X$  un homéomorphisme. Montrer que  $(0, 0, 0)$  est un point fixe de  $f$ .

☞ **Exercice 16.** Soit  $f : \mathbb{S}^p \vee \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application continue injective. Calculer l'homologie (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) de  $\mathbb{S}^n - \text{Im}(f)$ .

☞ **Exercice 17.** Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application continue de degré de Brouwer 2. Montrer que  $f$  a un point fixe.

☞ **Exercice 18.** Montrer que toute application continue  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  homotope à l'application identique de  $\mathbb{S}^{2n}$  a un point fixe.

☞ **Exercice 19.** (a) En recouvrant  $\mathbb{S}^n$  par deux ouverts bien choisis et invariants par l'action antipodale, montrer qu'on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_i(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_i(\mathbb{RP}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_i(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

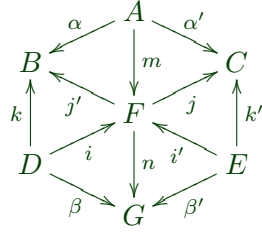
où  $\pi$  est la projection canonique et  $i$  l'inclusion canonique (donnée en coordonnées homogènes par  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$ ).

(b) Montrer par récurrence sur  $n$  que (homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) :

- $H_i(\mathbb{RP}^n) = 0$  pour  $i > n$ ,
- $H_{2n}(\mathbb{RP}^{2n}) \simeq 0$  ( $n > 0$ ) et  $H_{2n+1}(\mathbb{RP}^{2n+1}) \simeq \mathbb{Z}$ ,
- le conoyau de  $\pi_* : H_{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \rightarrow H_{2n+1}(\mathbb{RP}^{2n+1})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(c) Soit  $f : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$  une application continue telle que pour tout  $x \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , on ait  $f(x) = f(-x)$ . Montrer que le degré de Brouwer de  $f$  est pair.

☞ **Exercice 20.** Soit le diagramme commutatif d'applications  $\Lambda$ -linéaires



où  $k$  et  $k'$  sont des isomorphismes, et où  $\text{Ker}(j) = \text{Im}(i)$  et  $\text{Ker}(j') = \text{Im}(i')$ . Montrer que  $nm = \beta k^{-1}\alpha + \beta' k'^{-1}\alpha'$ .

☞ **Exercice 21.** Soit  $X$  un espace topologique.

(a) Montrer que l'application  $\gamma : H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  définie par  $\gamma(x) = x \smile x$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -linéaire.

(b) Déterminer les éléments idempotents (c'est-à-dire, les  $x$  tels que  $x = x^2$ ) de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , montrer que pour tous  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , on a  $(x + y)^2 = (x - y)^2$ , et montrer que si  $x$  et  $y$  sont égaux modulo 2, alors  $x^2 = y^2$ .

(c) On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{c} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où  $c$  est la projection canonique. Montrer qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{c_*} \text{Hom}(C_*(X), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

(d) Le lemme du serpent appliqué à la suite exacte précédente donne le connectant  $\beta : H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Montrer que  $\beta = \gamma$ .

☞ **Exercice 22.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $1 \leq n < m$ , et soit  $f : \mathbb{RP}^m \rightarrow \mathbb{RP}^n$  une application continue. Soit  $*$  un point de  $\mathbb{RP}^m$ . Montrer que  $f_* : \pi_1(\mathbb{RP}^m, *) \rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^n, f(*))$  est le morphisme nul.