

Algèbre en PC ou PC*

S. Sidaner

Niveau : BAC+2

Difficulté : ★ à ★★★★★

Durée : Variable

Rubrique(s) : Algèbre linéaire .

La petite histoire...

Ce polycopié recouvre la partie algèbre du programme de mathématiques de PC et PC*. Il est constitué pour chaque chapitre du programme d'un résumé de cours suivi d'exercices. Le programme de PCSI est supposé acquis, notamment les notions suivantes :

- les nombres complexes ,
- les espaces vectoriels,
- les applications linéaires,
- les matrices et les déterminants,
- l'espace vectoriel des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$ ou complexes $\mathbb{C}[X]$,
- les espaces euclidiens ou préhilbertiens réels,
- les suites réelles ou complexes,
- les séries numériques,
- les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes,
- Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2 à coefficients constants.

Les notations suivantes sont utilisées :

- $\Re$: partie réelle d'un complexe,
 - $\Im$: partie imaginaire d'un complexe,
 - $[\cdot]$: la partie entière d'un réel,
 - $< \cdot, \cdot >$: le produit scalaire
 - $\mathbb{R}_n[X]$: l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n ,
 - $\mathbb{C}_n[X]$: l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n ,
 - A^T : transposée de la matrice A .
 - $\llbracket a, b \rrbracket$ avec (a et b entiers) : les entiers naturels de l'intervalle $[a, b]$,
 - $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices de taille (p, q) (à p lignes et q colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
 - $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre p (à p lignes et p colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
 - I_n : la matrice identité carrée d'ordre n .
-

Table des matières

Algèbre en PC ou PC*	1
1 Espaces vectoriels	4
I. Résumé de cours :	4
1. Rappels sur les espaces vectoriels :	4
2. Produit et somme d'espaces vectoriels	6
3. Déterminants de matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	8
4. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme	10
II. Exercices sur les espaces vectoriels	11
1. Espaces vectoriels	11
2. Applications linéaires	13
3. Calcul matriciel	16
4. Trace d'une matrice	19
2 Réduction des matrices et des endomorphismes	22
I. Résumé de cours sur la réduction	22
1. Stabilité de sous-espaces :	22
2. Éléments propres :	23
3. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie :	25
4. Trigonalisation.	26
II. Exercices sur la réduction	26
1. Sous-espaces stables	26
2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice	28
3. Réduction d'endomorphismes, de matrices et applications	32
4. Application : racines carrées d'un endomorphisme	35
3 Espaces vectoriels euclidiens	37
I. Résumé de cours :	37
1. Rappel de résultats de première année :	37

2.	Isométries vectorielles :	38
3.	Matrices orthogonales.	39
4.	Isométries vectorielles d'un plan euclidien	40
5.	Endomorphismes symétriques :	40
II.	Exercices sur les espaces vectoriels euclidiens	42
1.	Endomorphismes orthogonaux	42
2.	Endomorphismes symétriques et applications	46
3.	Déterminant de Gram	50
Indications		53
Corrections		58

Chapitre 1

Espaces vectoriels

I. Résumé de cours :

Le corps de base noté $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Rappels sur les espaces vectoriels :

Les notions de première année sont supposées acquises et notamment les définitions d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels engendrés par une famille finie d'éléments, de deux sous-espaces supplémentaires, applications linéaires et les propriétés qui en découlent. Ce paragraphe en reprend cependant des propriétés importantes.

(i) Familles libres finies

Définition : Soit J un ensemble fini. Une famille $(e_i)_{i \in J}$ d'éléments de E est une **famille libre** si et seulement si

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^J, \quad \sum_{i \in J} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in J, \lambda_i = 0.$$

Propriété : Une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.

Remarque : Soit I un ensemble d'indices. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une **famille libre** si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

(ii) Espaces vectoriels de dimension finie :

Définition : $\mathcal{G} = (e_i)_{i \in I}$ avec I fini est une **famille génératrice** de E si et seulement si $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.

Théorème de la base extraite : De toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul, on peut extraire une base de E .

Théorème de la base incomplète : Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Complément : les éléments complétant cette famille libre peuvent être extraits d'une famille génératrice de l'espace vectoriel.

Théorème-définition : Tout espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ admettant une famille génératrice finie admet des bases finies et toutes les bases de cet espace ont le même cardinal n appelé **dimension de E** . On pose par extension $\dim\{0_E\} = 0$.

Propriétés : Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie n .

- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E comportant r éléments alors $r \geq n$. De plus, toute famille génératrice minimale est une base (c'est-à-dire si $r = n$, $\mathcal{G}$ est une base de E).
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E comportant p éléments alors $p \leq n$. De plus, toute famille libre maximale est une base (c'est-à-dire si $p = n$, $\mathcal{L}$ est une base de E).
- Tout sous-espace vectoriel F de E , espace vectoriel de dimension finie n , est de dimension finie r qui vérifie $r \leq n$ et il y a égalité si et seulement si $E = F$. Cette propriété demeure si $n = 0$.

Définition : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Une base de E est une **base adaptée à F** si et seulement si elle est constituée d'une base de F complétée en une base de E .

(iii) **Premières propriétés des applications linéaires :**

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. u application de E dans F est **linéaire** si et seulement si

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

Propriétés :

- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de F . Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$; autrement dit une application linéaire est entièrement caractérisée par la donnée d'une base de l'espace de départ et son image.

- $\mathcal{L}(E, F)$ ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont de dimension finie, il en est de même de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \dim F$.
- La composée d'applications linéaires est linéaire.
- $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Théorème d'isomorphisme induit : Si u est une application linéaire de E sur F , u induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau de u sur l'image de u .

et son corollaire ($\text{rg } u$ est la dimension de $\text{Im}(u)$) :

Théorème du rang : Si u est une application linéaire de E de dimension finie sur F (de dimension finie ou non),

$$\dim(E) = \text{rg } u + \dim \text{Ker } u.$$

2. Produit et somme d'espaces vectoriels

(i) Produit fini d'espaces vectoriels :

Théorème-définition : Soient E_i avec $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ un ensemble de p $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Le **produit de ces espaces vectoriels** noté $\prod_{i=1}^p E_i$ formé des éléments $x = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel.

Propriété : Si les espaces vectoriels E_i sont de dimension finie,

$$\dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

(ii) Somme finie de sous-espaces :

Définition : Soit E un espace vectoriel et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ un ensemble de p sous-espaces vectoriels de E . Leur **somme** est définie par

$$\sum_{i=1}^p E_i = \{x \in E, \exists (x_i)_i \in E_1 \times \cdots \times E_p, x = \sum_{i=1}^p x_i\}.$$

Autrement dit, $\sum_{i=1}^p E_i$ est l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p E_i &\mapsto E \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto \sum_{i=1}^p x_i \end{aligned}.$$

Propriété : $\sum_{i=1}^p E_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant

$$\bigcup_{i=1}^p E_i.$$

(iii) **Somme directe et caractérisation.**

Définition : $\sum_{i=1}^p E_i$ est une somme directe notée $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ si et seulement si tout élément de cette somme admet une unique écriture sous la forme $\sum_{i=1}^p x_i$ où $x_i \in E_i$.

Remarque : La définition équivaut à dire que l'application

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^p E_i &\mapsto \bigoplus_{i=1}^p E_i \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto \sum_{i=1}^p x_i \end{aligned} \text{ est bijective.}$$

Théorème de caractérisation d'une somme directe :

Une somme $\sum_{i=1}^p E_i$ de sous-espaces vectoriels est directe si et seulement si elle vérifie l'une des caractérisations suivantes :

1. $\forall (x_i) \in \prod_{i=1}^p E_i, \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i, x_i = 0_E,$
2. $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0_E\},$
3. $\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0_E\},$
4. Toute famille $(x_i)_{i \in J}$ avec $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ d'éléments non nuls, tels que pour tout i $x_i \in E_i$, est libre.

(iv) **Cas de la dimension finie**

Définition : Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, une base adaptée à cette décomposition est une base obtenue par concaténation de bases $\mathcal{B}_i$ des E_i .

Propriétés :

- Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- Formule de Grassmann : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels

de dimension finie de E

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Théorème : Soit $S = \sum_{i=1}^p E_i$ sous-espace de E de dimension finie.
 Alors $\dim S \leq \sum_{i=1}^p \dim E_i$ et il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

3. Déterminants de matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Rappels :

Définition : Le déterminant est l'unique application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (1) $\det$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
- (2) $\det$ est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
- (3) $\det(I_n) = 1$.

Propriétés :

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et on a alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

(ii) Calcul de déterminants

Rappel de l'effet des opérations élémentaires :

- Echanger deux colonnes (respectivement lignes) multiplie le déterminant par -1 ;
- Multiplier une rangée (ligne ou colonne) par λ multiplie le déterminant par λ ;
- Ajouter à une colonne (respectivement ligne) une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

Propriété : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

Définition : Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n . On désigne par **mineur d'ordre** (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice d'ordre

$n - 1$ obtenue à partir de A en enlevant la ligne i et la colonne j et par **cofacteur** de $a_{i,j}$ le nombre $a_{i,j}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Théorème du développement en ligne ou en colonne : Pour tout couple (i, j) , on a

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \Delta_{i,k} a_{i,k}}_{\text{Dvt ligne } i} = \underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} \Delta_{k,j} a_{k,j}}_{\text{Dvt colonne } j}$$

(iii) **Matrices définies par blocs**

Définition : La matrice M à $n = r + s$ lignes et $m = p + q$ colonnes peut être décrite **en blocs** $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où les matrices A, B, C et D sont de taille respectives (r, p) , (r, q) , (s, p) et (s, q) par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \leq r \text{ et } j \leq p \\ b_{i,j-p} & \text{si } i \leq r \text{ et } j > p \\ c_{i-r,j} & \text{si } i > r \text{ et } j \leq p \\ d_{i-r,j-p} & \text{si } i > r \text{ et } j > p \end{cases}.$$

Les calculs sur les matrices en blocs (addition, multiplication par un scalaire, produit) se font comme pour les calculs matriciels entre coefficients (si les tailles des matrices le permettent).

Propriété : Calcul d'un déterminant en blocs :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C).$$

(iv) **Déterminant de Vandermonde.**

Soient $x_1, \dots, x_n$ n scalaires donnés et $\mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $v_{i,j} = x_j^{i-1}$ et de déterminant $V(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème (déterminant de Vandermonde) :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & x_j^{i-1} & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exemple d'application Polynômes de Lagrange :

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ $n + 1$ scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ éléments de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$. (voir exercice 4).

(v) Matrices carrées semblables.

Définition : Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

B est dite semblable à A si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriétés :

- la relation "être semblable" est une relation d'équivalence.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont même déterminant.
- Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , f un endomorphisme de E et A et A' les matrices de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors $\det(A) = \det(A')$.

Définition : Le déterminant d'un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie est le déterminant des matrices de cet endomorphisme dans les bases de E .

Propriétés : si E est un espace vectoriel de dimension finie et f et g des endomorphismes de E :

- $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- $f \in \text{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$ et on a alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

4. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme**(i) Trace d'une matrice carrée.**

Définition : Si A est une matrice carrée d'ordre n , sa **trace** est le scalaire

$$\sum_{i=1}^n a_{i,i} \text{ et est noté } \text{tr}(A).$$

Propriétés :

- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.

(ii) **Trace d'un endomorphisme.**

Théorème-définition : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$ et est appelé **trace de l'endomorphisme u** .

Propriétés : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.
- Si f et g sont deux endomorphisme de E , $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$.

II. Exercices sur les espaces vectoriels

Sauf mention contraire tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ (sous-corps de $\mathbb{C}$) précisé si nécessaire.

Les indications pour certains de ces exercices débutent page 53.

1. Espaces vectoriels

La correction de ces exercices commence page 58.

Exercice 1.

Soit $E_n = \{P \in \mathbb{C}[X], (X^n + 1)P = P(X^2)\}$

1. Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Que dire du degré de P élément de E_n ? En déduire la dimension de E_n et conclure.

[Correction](#)

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension quelconque. Soit $(\mathcal{S}_1)$ un système de n_1 vecteurs de rang s_1 dont on extrait un système $\mathcal{S}_2$ de n_2 vecteurs de rang s_2 , prouver que $n_1 - s_1 \geq n_2 - s_2$.

[Correction](#)

Exercice 3.

On se place dans l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Démontrer l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(f_k)_{k \in [0,p]}$ avec $f_k : x \mapsto e^{kx}$.
2. $(f_n)_{n \in [0,2p]}$ avec $f_{2k} : x \mapsto \cos(kx)$ et $f_{2k-1} : x \mapsto \sin(kx)$.

3. $(g_a)_{a \in L}$ avec $g_a : x \mapsto |x - a|$ et $L = \{a_1, \dots, a_p\} \subset \mathbb{R}$, les a_i étant deux à deux distincts.

[Correction](#)

Exercice 4 (Polynômes de Lagrange).

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ $n + 1$ scalaires de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Soient $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ éléments de $\mathbb{K}^{n+1}$. En utilisant le déterminant de Vandermonde, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$.

2. Soit i fixé avec $0 \leq i \leq n$. Déterminer le polynôme L_i de degré au plus n tel que pour tout j , $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ c'est à dire 1 si $i = j$ et 0 sinon.

3. Prouver que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner les coordonnées d'un polynôme P de degré au plus n dans cette base.

[Correction](#)

Exercice 5.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ de dimension $n \geq 1$.

1. Montrer que E admet une base formée de polynômes de même degré.

2. Prouver qu'il existe une base de polynômes $(P_1, \dots, P_n)$ telle que $(\deg(P_k))_{1 \leq k \leq n}$ est une suite strictement croissante.

[Correction](#)

Exercice 6.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Montrer que E possède une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension p avec $1 \leq p \leq n - 1$.

2. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tous différents de E . Prouver que $\bigcup_{i=1}^p E_i \neq E$.

Enoncé équivalent (obtenu par contraposition) : Montrer que si $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E de dimension finie tels que $\bigcup_{i=1}^p E_i = E$, l'un des sous-espaces est E .

[Correction](#)

Exercice 7.

Soient H, K deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\dim H = \dim K$ si et seulement si H et K ont un supplémentaire commun.

[Correction](#)

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et H l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E . Soit f une application de H dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (F, G) \in H^2, F + G = F \oplus G \implies f(F + G) = f(F) + f(G).$$

Déterminer f .

[Correction](#)

2. Applications linéaires

La correction de ces exercices commence page 63.

Exercice 9.

Soient deux projecteurs p et q d'un espace E de dimension n , tels que $p \circ q = 0$. Montrer $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leq n$ puis que $p + q - q \circ p$ est un projecteur dont on donnera image et noyau.

[Correction](#)

Exercice 10.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

Prouver qu'il existe un endomorphisme g tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \\ g = g \circ f \circ g \\ f = f \circ g \circ f \end{cases}.$$

[Correction](#)

Exercice 11.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels (de dimension finie ou non), $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose alors $w = v \circ u$.

Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si v est surjective, u est injective et $F = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v)$.

[Correction](#)

Exercice 12.

Soit Δ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1.

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ de noyau $\mathbb{R}$.

b. Soit $n \geq 1$ et Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$; montrer que $\text{Im}(\Delta_n)$ est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en déduire que Δ est surjective.

2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = X\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}$; en déduire que pour tout polynôme Q il existe un unique polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$.

3.

a. On pose pour $d \geq 1$, $A_d = \frac{X(X-1) \cdots (X-d+1)}{d!}$ et $A_0 = 1$. Calculer $\Delta(A_d)$.

b. vérifier que pour $n \in \mathbb{Z}$, $A_d(n) \in \mathbb{Z}$.

c. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \in \mathbb{Z}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $n+1$ -uplet $(a_0, \dots, a_n)$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X+n+1) = \sum_{k=0}^n a_k P(X+k)$$

et le calculer.

[Correction](#)

Exercice 13.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie (*) si et seulement si

$$u \circ v \circ u = u \text{ et } v \circ u \circ v = v.$$

1. Montrer que si v vérifie (*), $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$ et $F = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u)$.

2. Soient E_1 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\text{Im}(u)$ dans F . Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant (*) et tel que $E_1 = \text{Im}(v)$ et $F_1 = \text{Ker}(v)$

[Correction](#)

Exercice 14.

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim E = n$. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

1.

a. Montrer que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

b. Dans cette question, $E = F$. On suppose de plus que $u+v$ est inversible et $v \circ u = 0$. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$.

2. Vérifier que $\text{rg}(u+v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ si et seulement si $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$ et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E$.

3. Montrer que

$$\dim(\text{Ker}(u+v)) \leq \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)).$$

Correction

Exercice 15 (Endomorphismes nilpotents).

Un endomorphisme f de E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est dit nilpotent si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1. Soit f un endomorphisme non nul d'un espace E de dimension n , tel que $f^2 = 0$.

a. Montrer que $\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}$. Soit r un entier tel que $r \leq \frac{n}{2}$; trouver un endomorphisme de E de rang r vérifiant $f^2 = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme
$$\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & I_r \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} & 0_{n-2r,r} \\ 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

c. Soit $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$ le commutant de f . Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$ en étudiant les matrices des éléments du commutant dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Soit p l'indice de nilpotence de f (c'est à dire le plus petit indice k tel que $f^k = 0$).

a. Prouver qu'il existe un élément x de E tel que la famille $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est libre. En déduire que si n désigne la dimension de E , $f^n = 0$.

b. Lorsque $p = n$, prouver l'existence d'une base dans laquelle f a pour

$$\text{matrice } N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{3. Soient } a \in \mathbb{R} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- b. A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1} . Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

[Correction](#)

Exercice 16 (Noyaux et images itérés).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ou non et u un endomorphisme de E . On note $u^0 = id_E$ et $u^{k+1} = u \circ u^k = u^k \circ u$ lorsque $k \in \mathbb{N}$ et on pose $N_k = \text{Ker}(u^k)$ et $I_k = \text{Im}(u^k)$.

1.
 - a. Montrez que (N_k) croît (au sens de l'inclusion) et que (I_k) décroît.
 - b. Montrez que (N_k) est soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'à un certain rang p à partir duquel elle est constante.
2. On suppose à présent que E est de dimension finie n . Posons $d_k = \dim(N_k)$.
 - a. Montrez que $d_{k+1} \leq d_k + d_1$.
 - b. Montrez que la suite $(d_k)_k$ est strictement croissante jusqu'à un certain rang $p \leq n$ à partir duquel elle est constante. Vérifiez que $E = N_p \oplus I_p$.
3.
 - a. On suppose dans cette question que E est de dimension 3 et $u \in L(E)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Déterminez la dimension de N_k et I_k et comparez ces espaces. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b. On revient au cas général et on suppose qu'il existe q tel que $u^q = 0$ avec $u^{q-1} \neq 0$. Montrer que $q \leq n$. Prouver l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec que des zéros sur sa diagonale (soit $a_{i,j} = 0$ si $j \geq i$).

[Correction](#)

3. Calcul matriciel

La correction de ces exercices commence page 74.

Exercice 17.

Chercher les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[Correction](#)

Exercice 18.

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Trouver } x.$$

[Correction](#)

Exercice 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer

BA .

[Correction](#)

Exercice 20.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ de matrice L dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont assimilés à des matrices unicolonnes.

1. Soit l'application $h : \begin{matrix} \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ X + iY & \mapsto & \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{matrix}$. Vérifier que h est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

2. Soit $\Phi = h^{-1} \circ f \circ h$. Montrer que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

- Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel
- Il existe deux matrices A et B carrées d'ordre n telles que $L = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$
- L commute avec $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$

[Correction](#)

Exercice 21 (Calcul de déterminants).

1. Soient $n \geq 1$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et Δ_n le déterminant d'une matrice tridiagonale A_n de terme général $a_{i,j}$ défini par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } |j - i| > 1 \\ a & \text{si } i = j \\ b & \text{si } j = i + 1 \\ c & \text{si } j = i - 1 \end{cases}$$

soit $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & (0) \\ c & \ddots & \ddots \\ (0) & c & a \end{vmatrix}$. Calculer Δ_n en fonction de α et β racines de l'équation $x^2 - ax + bc = 0$.

2. Soit $n \geq 2$. Calculer D_n le déterminant de la matrice A_n carrée d'ordre n de terme général $|i - j|$ soit

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ une famille de $2n$ réels avec $n \geq 2$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \dots & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \dots & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

4. Soit $n \geq 2$. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ réels tels que pour tout couple (i, j) $a_j + b_i \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice M_n de terme général en ligne i et colonne j $\frac{1}{a_j + b_i}$.

5. Soit $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}.$

a. Montrer que pour tout a réel :

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & (x-a)^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & (x-a)^3 Q_1(x) \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & (x-a)^2 Q_2(x) \\ 1 & y & y^2 & y^3 & (y-a)^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & (y-a)^3 Q_1(y) \end{vmatrix}$$

où Q_1 et Q_2 sont des fonctions polynomiales de x . Donner Q_1 .

b. Calculer $D(x, y)$.

6. Prouver que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^k & \dots & x^n \\ 1 & 2x & \dots & (k+1)x^k & \dots & (n+1)x^n \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 1 & 2^{n-1}x & \dots & (k+1)^{n-1}x^k & \dots & (n+1)^{n-1}x^n \\ 1 & y & \dots & y^k & \dots & y^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} k! \right) x^{\frac{n(n-1)}{2}} (y-x)^n.$$

[Correction](#)

Exercice 22.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.

On pose $J = \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det J$.

2. Prouver que si M est une matrice carrée, $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.

3. Montrer qu'il existe C_1 et C_2 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $P = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$ vérifie $MJ = JP$. En déduire que $\det M \geq 0$. Que peut-on dire de ce déterminant si A et B commutent ?

[Correction](#)

Exercice 23.

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ avec $p \neq q$.

1. Déterminer $\det(AB) \det(BA)$.

2. Montrer que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.

[Correction](#)

4. Trace d'une matrice

La correction de ces exercices commence page 82.

Exercice 24.

Soit Φ une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout couple (A, B) de matrices $\Phi(AB) = \Phi(BA)$. Prouver que Φ est proportionnelle

à la trace.

[Correction](#)

Exercice 25.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre $X + X^T = \text{tr}(X)A$ et donner la dimension de l'ensemble des solutions.

[Correction](#)

Exercice 26.

Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les matrices M vérifiant

$$M + \text{tr}(M)A = B.$$

[Correction](#)

Exercice 27 (Endomorphismes de rang 1).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a. Montrer qu'il existe C et L dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ respectivement tels que $A = C \times L$.

b. Soient L, L' dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C, C' dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $CL \neq 0$ et $CL + C'L' = 0$. Montrer qu'il existe un scalaire λ non nul tel que $C' = \lambda C$ et $L' = \frac{1}{\lambda}L$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

b. Fabriquer une base de $\mathcal{M}_n(K)$ formée de matrices de projecteurs de rang 1 en utilisant les matrices élémentaires $E_{i,j}$.

3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E de rang 1.

a. Montrer que, soit $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, soit $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

b. Montrer que A , carrée d'ordre n et de rang 1 est semblable soit à $E_{2,1}$ soit à $kE_{1,1}$ (avec $k \neq 0$).

c. Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

[Correction](#)

Exercice 28 (Matrices de trace nulle et matrices nilpotentes).

Soit n un entier naturel non nul et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant qu'un 1 en place (i, j) et des 0 partout ailleurs.

1.

a. Soit D une matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont distincts deux à deux. On définit l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mapsto & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & MD - DM \end{array} .$$

Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

b. Montrer que si a est un endomorphisme de E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, non nul et distinct d'une homothétie (c'est à dire qu'il n'existe pas λ tel que $a = \lambda \text{id}_E$), il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que u et $a(u)$ soient linéairement indépendants. En déduire qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

c. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$ si et seulement si il existe un couple (U, V) tel que $A = UV - VU$.

2. Une matrice A est dite nilpotente si et seulement si il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

a. En utilisant les résultats vus en dernière question de l'exercice sur les noyaux imbriqués page 16, montrer que $A^n = 0$ et que A est de trace nulle.

b. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A + B$ et AB sont nilpotentes.

3. Soit l'espace vectoriel $\mathcal{N}$ intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contiennent les matrices nilpotentes.

a. Montrer que A est élément de $\mathcal{N}$ si et seulement si A est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

b. Soient i et j distincts. Montrer que $E_{i,j}$ et $E_{i,i} - E_{j,j}$ appartiennent à $\mathcal{N}$.

c. Prouver que $\mathcal{N}$ est le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.

[Correction](#)

Chapitre 2

Réduction des matrices et des endomorphismes

I. Résumé de cours sur la réduction

1. Stabilité de sous-espaces :

(i) Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Définition : F sous-espace vectoriel de E est **stable** par u endomorphisme de E si et seulement si $u(F) \subset F$ c'est à dire

$$\forall x \in F, u(x) \in F .$$

Remarque : si u est un endomorphisme de E , $\{0\}$, E , $\text{Im}(u)$ l'image de u et $\text{Ker}(u)$ son noyau sont des sous-espaces stables par u .

Propriétés :

- Si F est stable par u , u induit un endomorphisme $u|_F$ sur F et $\text{Ker}(u|_F) = \text{Ker}(u) \cap F$.
- Si deux sous-espaces sont stables par un endomorphisme, il en est de même de leur intersection et de leur somme.
- Si u laisse tous les sous-espaces vectoriels de E stables, il existe α tel que $u = \alpha \text{id}_E$.
- Si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un deux sont des sous-espaces stables par l'autre.

(ii) Endomorphismes stabilisant un sous-espace vectoriel.

Propriétés :

- L'ensemble des endomorphismes stabilisant un sous-espace donné est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F . F est stable par l'endomorphisme u si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

(iii) **Endomorphisme stabilisant des sous-espaces.**

Propriétés :

- Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, u stabilise chaque E_i si et seulement si dans une base adaptée à la somme directe la matrice de u est diagonale en blocs.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. u stabilise chaque E_i si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$. u stabilise chaque F_i si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire inférieure.

2. Éléments propres :

(i) **Définition des éléments propres**

Une droite de vecteur directeur x_0 est stable par un endomorphisme u si et seulement si $(u(x_0), x_0)$ est une famille liée.

Définitions : Soit u un endomorphisme de E . λ est **valeur propre** de u si et seulement si il existe un vecteur *non nul* x tel que $u(x) = \lambda x$. x est un **vecteur propre** associé à λ . Le **sous-espace propre** de l'endomorphisme u associé à λ est $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u et est noté $\text{Sp}(u)$.

Définitions : Soit A une matrice carrée d'ordre n . λ est **valeur propre** de A si et seulement si il existe un vecteur *non nul* X de $\mathbb{K}^n$ tel que $AX = \lambda X$. X est un **vecteur propre** associé à λ . Le **sous-espace propre** de la matrice A associé à λ est $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé **spectre** de A .

(ii) **Famille de vecteurs propres.**

Propriété : Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un des deux sont stables par l'autre.

Théorème : Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre.

Corollaire : La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres d'un endomorphisme est une somme directe.

(iii) **Définition du polynôme caractéristique.**

Théorème-définition : Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E .

La fonction $\chi_u : x \mapsto (-1)^n \det(u - x \text{id}_E) = \det(x \text{id}_E - u)$ est une fonction polynomiale unitaire de degré n . Le polynôme associé est appelé **polynôme caractéristique** de u .

Définition : De même, le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A est le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xI_n - A)$.

Propriétés :

- Le terme en X^{n-1} de χ_u est $-\text{tr}(u)$ et le terme constant est $(-1)^n \det(u)$.
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
- Si le polynôme caractéristique est scindé de racines $s_1, \dots, s_n$ (distinctes ou non), on a $\det(u) = \prod_{k=1}^n s_k$ et $\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n s_k$.
- Si F est stable par u , le polynôme caractéristique de $u|_F$ est un diviseur du polynôme caractéristique de u .

(iv) **Multiplicité d'une valeur propre.**

Définition : La **multiplicité d'une valeur propre** de u est sa multiplicité comme racine de χ_u .

Remarque : lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$ (ou que le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$), la somme des multiplicités des valeurs propres est $n = \dim E$. Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égal à la dimension de l'espace.

Théorème : Soit u un endomorphisme de E , λ une valeur propre de multiplicité $\nu_u(\lambda)$ et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. On a alors $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \nu_u(\lambda)$.

(v) **Valeurs propres complexes d'une matrice réelle.**

Soit A une matrice réelle. Si λ est une valeur propre complexe de A , $\bar{\lambda}$ l'est aussi. De plus, ces deux valeurs propres ont même multiplicité et les sous-espaces propres associés ont même dimension.

Si $AV = \lambda V$, $A\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$, le plan réel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $V_1 = \frac{V + \bar{V}}{2}$ et $V_2 = \frac{V - \bar{V}}{2i}$ est stable par A .

3. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie :

(i) **Définition d'un endomorphisme, d'une matrice diagonalisable.**

Définition : Un **endomorphisme** u d'un espace vectoriel de dimension finie est dit **diagonalisable** si et seulement si il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Cette définition équivaut à dire que u admet une base de vecteurs propres.

Définition : Une **matrice carrée** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé est diagonalisable.

A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

(ii) **Critères de diagonalisation.**

Théorème : u est diagonalisable si et seulement si E est la somme des sous-espaces propres de u .

Remarque : Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ où chaque E_i est stable par u et $u|_{E_i}$ est une homothétie de rapport λ_i (avec pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$), alors les E_i sont les sous-espaces propres de u et u est diagonalisable.

Théorème : u , endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n , est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .

Corollaire : Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et admet n racines distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

Théorème : u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé et pour chaque valeur propre λ , la dimension du sous-espace propre associé est égal à sa multiplicité soit

$$\dim(E_\lambda(u)) = \nu_u(\lambda) .$$

(iii) **Applications de la diagonalisation :**

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre p à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique admet p racines distinctes.

4. Trigonalisation.

(i) Endomorphisme ou matrice trigonalisable :

Définition : Un **endomorphisme** u d'un espace vectoriel de dimension finie est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Une **matrice carrée** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème : Un endomorphisme (respectivement une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Remarque : Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

(ii) Etude de récurrences linéaires d'ordre 2 :

On retrouve le résultat suivant :

Soit une suite vérifiant la relation $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec a non nul.

On lui associe son équation caractéristique $(E_c) : as^2 + bs + c = 0$.

- Si E_c a deux racines s_1 et s_2 dans le corps $\mathbb{K}$, il existe deux scalaires α et β tel que $\forall n, u_n = \alpha s_1^n + \beta s_2^n$.
- Si E_c a une racine double s_1 dans le corps $\mathbb{K}$, il existe deux scalaires α et β tel que $\forall n, u_n = (\alpha + \beta n)s_1^n$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E_c a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, il existe deux réels α et β tel que $\forall n, u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$.

II. Exercices sur la réduction

Sauf mention contraire tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ (sous-corps de $\mathbb{C}$) précisé si nécessaire.

Les indications pour certains de ces exercices débutent page 55.

1. Sous-espaces stables

La correction de ces exercices commence page 88.

Exercice 29.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Prouver l'existence d'un vecteur x tel que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E . En déduire le rang de f .

2. Prouver que la seule droite stable par f est $D = \text{Vect}(f^2(x))$.
3. Soit P un plan stable par f . Démontrer l'existence d'un vecteur y tel que $(y, f(y))$ est une base de P . En déduire que $f^2(y) = 0$.
4. Quels sont les sous-espaces stables par f ?

[Correction](#)

Exercice 30.

Soient E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E tel que $u^n = Id_E$ et V un sous espace stable par u .

Soit p un projecteur tel que $\text{Im}(p) = V$ et $q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $\text{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\}$.
2. Montrer que q commute avec u et tous les u^i où $i \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\text{Im}(q)$ est inclus dans V . En déduire que $p \circ q = q$.
4. Montrer que q est un projecteur tel que $q \circ p = p$.
5. Montrer que $\text{Ker}(q)$ est un supplémentaire de V stable par u .

[Correction](#)

Exercice 31.

Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension $n \geq 3$ et f un endomorphisme de E tel que : $f \neq 0$ et $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.
2. Vérifier que $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{id}) \geq 1$. Soit x non nul tel que $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id})$, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$.
3. On suppose dans cette question que E est de dimension 3.
 - a. Déterminer la dimension de $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{id})$.
 - b. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- c. Trouver le commutant de f défini par $C_f = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$. En déduire les éléments $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = f$.

[Correction](#)

Exercice 32.

Soit E de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme qui n'admet pas de droite stable et tel que $u^2 + au + bId = 0$.

1. Prouver que n est pair.
2. Vérifier que pour tout x non nul, $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u .
3. Montrer que E est la somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u . En déduire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale en blocs carrés de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & \ell \end{pmatrix}$ en précisant les valeurs de k et ℓ .

[Correction](#)

Exercice 33.

Soient $n \geq 3$ et S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. Pour tout $\sigma \in S_n$, on désigne par u_σ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

1. Déterminer 4 sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par toutes les applications u_σ lorsque σ décrit S_n et préciser leur dimension.
2. Trouver l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ qui sont stables par toutes les applications u_σ lorsque σ décrit S_n .

[Correction](#)

2. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

La correction de ces exercices commence page 93.

Exercice 34.

On rappelle que $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Après avoir déterminé leur rang, donner les valeurs propres avec les dimensions des sous-espaces propres associés des matrices suivantes et leur polynôme caractéristique :

1. A matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{i,j} = ij$;
2. B_α matrice carrée d'ordre $n \geq 3$ de terme général $b_{i,j} = \alpha + i + j$ où α est un réel donné.

[Correction](#)

Exercice 35.

Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A définie par $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On commencera par chercher les valeurs propres réelles.

Est-elle diagonalisable ?

[Correction](#)

Exercice 36.

Soit $n \geq 3$ et a et b deux complexes distincts. On considère la matrice suivante

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}.$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\frac{a(X+b)^n - b(X+a)^n}{a-b}.$

2. A est-elle diagonalisable ?

[Correction](#)

Exercice 37.

Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $M = CC^T$.

a. Chercher le rang de M . En déduire le polynôme caractéristique de M .

b. M est-elle diagonalisable ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b. Prouver la relation suivante liant les polynômes caractéristiques de AB et BA :

$$X^p \det(XI_n - AB) = X^n \det(XI_p - BA)$$

En déduire que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n , AB et BA ont même polynôme caractéristique $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

c. Retrouver ainsi le polynôme caractéristique de la matrice M de la première question.

[Correction](#)

Exercice 38.

Soient $u, n \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie p , u inversible, n nilpotent (c'est à dire qu'il existe q tel que $n^q = 0$), avec $u \circ n = n \circ u$.

1. Chercher le polynôme caractéristique de n . En déduire que $\det(\text{id}_E + n) = 1$.
2. Démontrer que $\det(u + n) = \det u$.

[Correction](#)

Exercice 39 (Polynômes annulateurs).

1. Soit A une matrice vérifiant $A^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j A^{k-1-j} = 0$. Montrer que toute

valeur propre de A est racine du polynôme $P(X) = X^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^{k-1-j}$.

2. Soit A de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Trouver le polynôme caractéristique de A inversible d'ordre 5, telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\text{tr } A = 8$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^3 = 2A^2 - A$. Prouver que $\text{tr } A \in \mathbb{N}$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.
6. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$, n est pair et $\text{tr}(A)$ est un entier relatif.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$. Calculer la trace et le déterminant de A . Donner une matrice vérifiant une telle équation.

[Correction](#)

Exercice 40 (Matrices stochastiques).

Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice carrée réelle d'ordre n telle que pour tout couple (i, j) , $a_{i,j} > 0$ et pour tout i , $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

2. Prouver que si λ complexe est valeur propre, alors $|\lambda| \leq 1$.

3. Prouver que 1 est la seule valeur propre de module 1.

[Correction](#)

Exercice 41.

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$.

1. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun en traitant successivement les cas :

a. $\alpha = \beta = 0$

b. $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, commencer par prouver que $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace stable par v non réduit à $\{0\}$.

c. α et β non nuls.

2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires.

[Correction](#)

Exercice 42.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , p un projecteur de rang r non nul et distinct de n ; soit l'application Φ endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\Phi(f) = -p \circ f + f \circ p.$$

Déterminer les valeurs propres de Φ et les dimensions des sous-espaces propres associés. Φ est-il diagonalisable ?

[Correction](#)

Exercice 43.

Soit E l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit T l'application de E dans lui-même telle que

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right).$$

Le but de l'exercice est de rechercher les valeurs propres de T et de donner des précisions sur les sous-espaces propres.

1. Vérifier que $T \in \mathcal{L}(E)$ et que son noyau n'est pas réduit à la fonction nulle. Qu'en déduire pour le spectre de T ?

2. Exprimer $T^n(f)(x)$ pour $f \in E$, $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

3.

- a. Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(0)$ puis $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(x)$ pour $x \in]0, 1]$.
- b. 1 est-il valeur propre de T ? Si oui préciser le sous-espace propre associé.
- c. Soit un réel λ tel que $|\lambda| > 1$. Est-il valeur propre de T ?
- d. Soit λ une valeur propre autre que 1 et f une application du sous-espace propre associé. Vérifier que $\int_0^1 T(f)(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 0$.

4.

- a. Exprimer $(T(f))'$.
- b. En déduire que si λ est une valeur propre de T autre que 1, 2λ est aussi valeur propre. Prouver alors que $\text{Sp}(T) \subset \{1\} \cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\frac{1}{2}$ appartient-il au spectre de T ? Si oui préciser le sous-espace propre associé.

5. On pose $I_n =]-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}[$.

- a. Montrer que pour tout entier naturel n , $\text{Sp}(T) \subset \bigcup_{p=0}^n \{\frac{1}{2^p}\} \cup I_n$.
- b. Déterminer le spectre de T et prouver que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres autres que 0 sont des droites.

[Correction](#)

3. Réduction d'endomorphismes, de matrices et applications

La correction de ces exercices commence page 106.

Exercice 44.

Soit $A \in \mathcal{M}_n \mathbb{C}$ (avec $n \geq 2$) une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux vérifient $a_{p,p} = e^{\frac{(2p-1)i\pi}{n}}$. Calculer A^n .

[Correction](#)**Exercice 45.**

Soit (a, b, c, d, e, f) six réels et A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que la matrice A soit diagonalisable.

[Correction](#)

Exercice 46.

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}$. Soient p sous-espaces stables par u tels que $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si les restrictions de u à chacun des E_i sont diagonalisables.

2. Soient deux nombres a_1 et a_2 du corps $\mathbb{K}$ et la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_2 soit diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3. Soient n nombres $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ du corps $\mathbb{K}$ et la matrice A_n de terme général a_j si $i + j = n + 1$ et 0 sinon, soit en utilisant le symbole de Kronecker $a_{i,j} = a_j \delta_{i,n+1-j}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_n soit diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[Correction](#)

Exercice 47.

On définit trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ par $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ et pour tout entier naturel n

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n) \end{cases}.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$. A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que (A^n) converge vers Q représentant un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera le noyau et l'image.

3. Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ convergent et donner leurs limites.

[Correction](#)

Exercice 48 (Déterminants circulants).

1. On introduit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$, soit $b_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$

ou $(i, j) = (n, 1)$ et 0 sinon. Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soient $(a_1, \dots, a_n)$ n complexes et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_2 & & & & a_1 \end{pmatrix}$$

le terme général ligne i colonne j de cette matrice est donc a_{j-i+1} si $j \leq i$ et $a_{n+j-i+1}$ si $i < j$. Écrire la matrice A en fonction de B et de ses puissances.

En déduire le déterminant de A en introduisant le polynôme $P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$.

3. Donner une expression réelle de $\det A$ lorsque $a_k = k$.

[Correction](#)

Exercice 49.

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On pourra étudier au préalable les cas $n = 1$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$

a. Donner les éléments propres de B en fonction de ceux de A .

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable ?

3. Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

[Correction](#)

Exercice 50.

Soit f un endomorphisme diagonalisable de E espace vectoriel complexe de dimension n . Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(i) il existe un élément x de E tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ engendre E ;

(ii) la famille $id_E, f, \dots, f^{n-1}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$;

(iii) f a n valeurs propres distinctes.

[Correction](#)

Exercice 51.

Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même vérifiant :

$$\forall x > 0, f \circ f(x) + f(x) - 6x = 0.$$

[Correction](#)**4. Application : racines carrées d'un endomorphisme****Exercice 52.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $a \in \mathcal{L}(E)$. On se propose d'étudier l'équation :

$$u^2 = a \quad (*)$$

où u est un endomorphisme de E .

Première partie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1. Montrer que l'équation $(*)$ peut avoir une infinité de solutions en donnant un exemple.

2. Soit l'endomorphisme a de $\mathbb{K}^n$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'équation $(*)$ n'admet pas de solution.

3. Soit u un endomorphisme non nul. Montrer que $u^2 = 0$ si et seulement si il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$ avec $r \leq \frac{n}{2}$.

Deuxième partie : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

4. Montrer que si $a = \alpha \text{id}_E$ avec $\alpha \neq 0$, toute solution de $(*)$ est diagonalisable.

5. On suppose que a admet n valeurs propres distinctes. Montrer que $(*)$ admet un nombre fini $N(a)$ (qui dépend de a) de solutions. Quelles sont les valeurs possibles de $N(a)$?
6. On suppose que a est diagonalisable.
- Montrer que $(*)$ admet au moins une solution.
 - Donner un exemple d'endomorphisme a tel qu'il existe des solutions u de $(*)$ non diagonalisables.
 - Montrer que si $\text{Ker}(a)$ est de dimension 0 ou 1, toute solution de $(*)$ est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?
7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Résoudre $X^2 = A$ où $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Troisième partie : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

8. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que les solutions de $u^2 = \alpha \text{id}_E$ soient diagonalisables.
- 9.
- On suppose que a admet n valeurs propres distinctes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(*)$ admette des solutions et prouver qu'alors toute solution est diagonalisable.
 - Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
10. Soit u telle que $u^2 = -\text{id}_E$. Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E où u admet pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
11. On suppose que a est diagonalisable. Prouver que l'équation $(*)$ a des solutions si et seulement si tout sous-espace propre de a associé à une valeur propre strictement négative est de dimension paire.

[Correction](#)

Chapitre 3

Espaces vectoriels euclidiens

I. Résumé de cours :

Dans ce chapitre, E est un espace euclidien, c'est à dire un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ défini en première année. La norme associée à ce produit scalaire est noté $\|.\|$.

1. Rappel de résultats de première année :

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. Alors pour tout couple (x, y) de E ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

- *Existence du projeté orthogonal* : Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour tout x de E , il existe un unique élément y de F tel que $x - y$ soit orthogonal à F . Cet élément est le projeté orthogonal de x sur F et si $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F , on a

$$y = p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i.$$

- *Distance à un sous-espace* : Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. La distance de x à F définie par $d(x, F) = \inf_{y \in F} (\|x - y\|)$ est atteinte

en un unique élément de F qui est $p_F(x)$. Ainsi

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

- Dans un espace vectoriel euclidien E , l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F en est un supplémentaire soit $E = F \oplus F^\perp$.
- Un espace vectoriel euclidien admet des bases orthonormales.

2. Isométries vectorielles :

(i) Définition

Définition : Soit u un endomorphisme de E . u est une **isométrie vectorielle** si et seulement si u conserve la norme c'est à dire pour tout x de E , $\|u(x)\| = \|x\|$.

u isométrie vectorielle est un endomorphisme bijectif ; les isométries vectorielles sont aussi appelées des **automorphismes orthogonaux**.

Propriété : Les symétries orthogonales sont des automorphismes orthogonaux. Les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans s'appellent des réflexions.

(ii) Caractérisation

Théorème : u endomorphisme de E est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si u vérifie l'une des propriétés suivantes :

- u conserve le produit scalaire c'est à dire

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- u transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.
- u transforme une base orthonormale donnée en une base orthonormale.

(iii) Quelques propriétés :

- Si a et b sont des vecteurs unitaires, il existe une réflexion qui transforme a en b .
- Si un sous-espace vectoriel F est stable par u isométrie vectorielle, il en est de même de $F^\perp$ son orthogonal.

Théorème-définition : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ appelé **groupe orthogonal de E** .

3. Matrices orthogonales.

(i) Définition

Définition : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.

Remarque : si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, P est orthogonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Théorème (Différentes caractérisations) :

- Une matrice A est orthogonale si et seulement si $AA^T = I_n$ si et seulement si $A^T A = I_n$.
- u endomorphisme de E est un automorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une (toute) base orthonormale est une matrice orthogonale.
- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale si et seulement si $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale.

(ii) Groupe orthogonal :

Propriété : L'ensemble des matrices orthogonales forment un groupe noté $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe orthogonal d'ordre n** .

Propriété : Le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1 .

Définition : $SO(n) = \{A \in O(n), \det A = 1\}$ est un sous-groupe de $O(n)$ appelé **groupe spécial orthogonal d'ordre n** .

(iii) Orientation d'un espace vectoriel euclidien

Théorème : La relation $\mathcal{B}'\mathcal{R}\mathcal{B}$ définie sur les bases orthonormales de E par "la matrice de changement de bases de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ appartient au groupe spécial orthogonal" est une relation d'équivalence possédant deux classes d'équivalence.

Définition : **Orienter** un espace vectoriel euclidien est choisir comme référence l'une des deux classes d'équivalence définies précédemment.

4. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

(i) Matrices orthogonales

Théorème : Les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$SO_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif de $O_2(\mathbb{R})$.

(ii) Caractérisation de $O(E)$ où E est un plan euclidien

Les endomorphismes orthogonaux d'un plan euclidien sont des rotations si leur déterminant vaut 1 ou des symétries par rapport à des droites si leur déterminant vaut -1 .

Théorème : Si r est une rotation d'un plan euclidien orienté, il existe un nombre α (unique modulo 2π) tel que dans toute base orthonormale directe, $\text{Mat}_B(u) = R_\alpha$. α est l'**angle de la rotation**.

Propriété : Si r est une rotation d'angle α , l'écriture complexe de cette transformation est $z \mapsto e^{i\alpha}z$.

5. Endomorphismes symétriques :

(i) Définition

Définition : Un endomorphisme u est dit **symétrique** (ou auto-adjoint) si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Propriété : Les endomorphismes symétriques constituent un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété : Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice symétrique.

(ii) Projecteurs et symétries orthogonales

Propriété : Un projecteur est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

Propriété : Soit p un projecteur. p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E , $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Propriété : Soit f un endomorphisme de E . Deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :

- (a) f est un endomorphisme orthogonal
- (b) f est un endomorphisme symétrique
- (c) $f \circ f = \text{id}_E$ (autrement dit, f est une symétrie)

(iii) Réduction des endomorphismes symétriques.

Lemme : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Théorème spectral : Un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E admet une base orthonormale de vecteurs propres

Corollaire : pour toute matrice symétrique réelle A , il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Application : Si deux endomorphismes symétriques commutent, ils admettent une base de vecteurs propres communs.

(iv) Endomorphismes symétriques positifs

Ce paragraphe est hors programme mais néanmoins intervient régulièrement dans les concours. Il fait l'objet d'une des sections d'exercices dont le premier exercice est la démonstration des résultats énoncés dans ce paragraphe.

Définition : Un endomorphisme symétrique u est dit positif (respectivement défini positif) si et seulement si pour tout x de E , $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (respectivement pour tout x non nul de E , $\langle u(x), x \rangle > 0$).

Théorème : u endomorphisme symétrique u est positif (respectivement défini positif) si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{R}^{+*}$).

Définition : Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n . On désigne par $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n telles $\forall X, X^TAX \geq 0$. On désigne par $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n telles $\forall X \neq 0, X^TAX > 0$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$A \in \mathcal{S}_n^+ \iff A \in \mathcal{S}_n \text{ et } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$$

$$A \in \mathcal{S}_n^{++} \iff A \in \mathcal{S}_n \text{ et } \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*} \iff A \in \mathcal{S}_n^+ \text{ et } \det A \neq 0$$

II. Exercices sur les espaces vectoriels euclidiens

Les indications pour certains de ces exercices débutent page 57.

1. Endomorphismes orthogonaux

La correction de ces exercices commence page 120.

Isométries vectorielles en dimension 2 ou 3

Exercice 53.

Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit m un réel.

1. Soit f_m de matrice dans la base $\mathcal{B}$ de matrice

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} m^2 - 1 & -m + 2 + \sqrt{2} \\ 2(m - 1 - \sqrt{2}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de m f_m est un endomorphisme orthogonal. Préciser alors la nature de f_m .

2. Mêmes questions avec $A_m = \begin{pmatrix} m - \frac{1}{4} & m + \frac{1}{2} \\ m + \frac{1}{2} & -m + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

[Correction](#)

Exercice 54.

Soit E un plan euclidien orienté.

- Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs unitaires. Combien d'isométries vectorielles f vérifie $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$? Parmi elles, combien y-a-t-il de rotations?
- Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale de E , m un réel donné et $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + m\vec{j}$. Déterminer les réels m pour lesquels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme. Pour chacune de ces valeurs, trouver l'unique symétrie vectorielle s qui échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et l'unique rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$ (On donnera les matrices de ces isométries dans la base $\mathcal{B}$).
- Prouver que toute isométrie de E s'écrit comme le produit d'au plus deux symétries par rapport à des droites. Cette écriture est-elle unique?
- Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites vectorielles distinctes.
 - Combien d'isométries vectorielles f vérifie $f(\Delta_1) = \Delta_2$? Parmi elles, combien y-a-t-il de rotations?

b. Soit r une rotation telle que $r(\Delta_1) = \Delta_2$ et s_i la symétrie orthogonale par rapport à Δ_i . Ecrire $s_2 \circ s_1$ puis $s_1 \circ s_2$ comme puissances de r .

[Correction](#)

Exercice 55.

Reconnaître les transformations de $\mathbb{R}^3$ de matrices

$$A = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 6 & 12 \\ -6 & 12 & -4 \end{pmatrix} \text{ puis } B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

[Correction](#)

Exercice 56.

Soit f la transformation de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est une isométrie vectorielle.
2. Vérifier que 1 est la seule valeur propre de f et donner un vecteur propre unitaire $\vec{w}$ associé à la valeur propre 1 de première coordonnée positive.
3. Soit $\mathcal{P}$ l'orthogonal de la droite engendrée par $\vec{w}$. Montrer que ce plan est stable par u . Caractériser la restriction de f à $\mathcal{P}$.

[Correction](#)

Exercice 57 (Classification des isométries en dimension 3).

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Pour toute isométrie f de E , on pose $F_f = \text{Ker}(f - id_E)$ et $G_f = \text{Ker}(f + id_E)$.

1. Montrer que $F_f, F_f^\perp, G_f, G_f^\perp$ sont stables par f . Démontrer que la restriction de f à $F_f^\perp$ n'admet pas d'élément fixe autre que 0_E .
2. Démontrer que F_f ou G_f n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
3. Dans cette question, on suppose que $\dim(F_f) = 3$. Que pouvez vous dire de f ?
4. Dans cette question, on suppose que $\dim(F_f) = 2$. Prouver alors que $F_f^\perp = G_f$. Caractériser f .
5. Dans cette question, on suppose que $\dim(F_f) = 1$.
 - a. Montrer que la restriction de f à $F_f^\perp$ est une rotation r .
 - b. On suppose que E est orienté. Soit $\vec{w}$ un vecteur unitaire de F_f . Une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan $F_f^\perp$ est dite directe dans le plan orienté par $\vec{w}$

si et seulement si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{w})$ est une base directe de E . Si θ est l'angle de la rotation r , f est appelée rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{w})$ d'angle θ . Quelle est la trace de f ?

c. Caractériser l'endomorphisme f de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. Dans cette question, on suppose que $\dim(F_f) = 0$.

a. Montrer que G_f est de dimension 1 ou 3. Que dire de f si G_f est de dimension 3.

Dans la suite, on suppose G_f de dimension 1.

b. Vérifier que $G_f = \text{Ker}(f^2 - \text{id}_E)$.

c. Soit $P = G_f^\perp$. Prouver que $f = s_P \circ \rho$ où ρ est une rotation d'axe G_f . Vérifier que s_P et ρ commutent.

d. La décomposition de u sous la forme $s_P \circ \rho = \rho \circ s_P$ avec P un plan et ρ une rotation est-elle unique ?

[Correction](#)

Isométries vectorielles en dimension $n > 1$

Exercice 58.

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in O(E)$.

Montrer que $\text{Im}(Id_E - u)^\perp = \text{Ker}(Id_E - u)$.

[Correction](#)

Exercice 59.

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice orthogonale de $O(n)$. Prouver que

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n.$$

Quand y-a-t-il égalité ?

[Correction](#)

Exercice 60 (Décomposition QR d'une matrice).

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. En utilisant un procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer qu'il existe une matrice orthogonale U et une matrice triangulaire supérieure T telle que $M = UT$. Le résultat demeure-t-il si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

[Correction](#)

Exercice 61.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall x \in E, f(x) = x + \alpha \langle a | x \rangle a.$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un endomorphisme orthogonal et caractériser f dans ce(s) cas.
3. On choisit $E = \mathbb{R}^3$. Donner la matrice de s réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

[Correction](#)

Exercice 62.

Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel euclidien.

1. Montrer que deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :

- $f^2 = -id_E$.
- $f \in O(E)$.
- $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$

2. Prouver que si un tel endomorphisme existe, E est de dimension paire.

[Correction](#)

Exercice 63.

Soit $G = \{M_1, \dots, M_n\}$ un ensemble stable par produit de n matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversibles et distinctes.

1. Soit $M_i \in G$; montrer que $\phi_i(M) = MM_i$ définit une application de G dans G bijective. En déduire que G est sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $Q(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle M_k X, M_k Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ pour lequel toute matrice M_i est une matrice orthogonale.

3. Soit $P = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k$. Vérifier que P est une matrice de projection. L'endomorphisme associé est-il un projecteur orthogonal pour Q ?

[Correction](#)

Exercice 64.

Soit $u \in O(E)$ où E est un espace euclidien.

1. Montrer que 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles de u .

2. Montrer que l'orthogonal d'un sous-espace G stable par u est stable par u .
3. Soient $E_+ = \text{Ker}(u - id_E)$, $E_- = \text{Ker}(u + id_E)$ et $F = (E_+ \oplus E_-)^\perp$. Vérifier que F est de dimension paire et que

$$E = E_+ \oplus E_- \oplus F.$$

4. Si E est de dimension paire et que u n'a pas de valeur propre réelle, prouver qu'il existe un plan stable par u . Que pouvez-vous dire de la restriction de u à ce plan ?

5. Prouver l'existence d'une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de

$$u \text{ est diagonale par blocs de la forme } \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta)$ est la matrice habituelle de la rotation plane d'angle θ et où p, q et r sont des entiers naturels (éventuellement nuls).

[Correction](#)

2. Endomorphismes symétriques et applications

La correction de ces exercices commence page 131.

Endomorphismes et matrices réelles symétriques

Exercice 65.

Étudier l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille $n \geq 1$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

[Correction](#)

Exercice 66.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les valeurs propres de $A^T A - A A^T$ soient réelles et positives. Montrer que $A^T A = A A^T$.

[Correction](#)

Exercice 67.

Soit E un espace euclidien,

1. Soit p un projecteur orthogonal de E . Prouver que pour tout élément y de E , $\langle y, p(y) \rangle = \|p(y)\|^2$.
2. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs orthogonaux. Montrer que le spectre de $p_1 \circ p_2 \circ p_1$ est inclus dans $[0, 1]$.

[Correction](#)

Exercice 68.

Calculer de manière géométrique (en prouvant l'existence de ces nombres) :

1. $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} (x^2 - ax - b)^2 dx$
2. $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 dt$

[Correction](#)

Exercice 69.

1. Montrer rapidement que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 (fg + f'g)'$ est un produit scalaire sur l'ensemble $E = \mathcal{C}^2([0, 1])$ des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$.

2. Vérifier que $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' - f = 0\}$ sont de sous-espaces de E supplémentaires et orthogonaux.

3. Soit $U = \{f \in E, f(0) = f(1) = 1\}$. Trouver $\inf_{f \in U} \int_0^1 f^2 + (f')^2$.

[Correction](#)

Exercice 70.

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On pose la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Les seuls termes non nuls sont ceux de la première colonne, de la première ligne et en place $(2, 2)$. Ces termes non nuls valent 1.

1. Montrer que A_n est diagonalisable et déterminer le rang de A_n .

2. On pose, $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_p = \text{tr}(A_3^p)$. Calculer la matrice $B = A_3^3 - 2A_3^2 - A_3 + I_3$. Déterminer une relation de récurrence simple vérifiée par la suite (u_p) .

3. Montrer que les valeurs propres non nulles de A_n sont les racines du polynôme :

$$P_n(X) = X^3 - 2X^2 + (2 - n)X + n - 2$$

4. On note α_n , β_n et γ_n les 3 valeurs propres non nulles de A_n rangées par ordre croissant.

a. On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S}_n) : \begin{cases} x + \alpha_n y + \alpha_n^2 z &= \alpha_n^4 \\ x + \beta_n y + \beta_n^2 z &= \beta_n^4 \\ x + \gamma_n y + \gamma_n^2 z &= \gamma_n^4 \end{cases}$$

Montrer que $(\mathcal{S}_n)$ admet une unique solution (x_n, y_n, z_n) et la calculer.

b. Prouver que $\alpha_n < 0 < \beta_n < 1$ et pour n suffisamment grand,

$$\sqrt{n} \leq \gamma_n \leq \sqrt{n} + 1.$$

c. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

[Correction](#)

Exercice 71 (Endomorphismes antisymétriques).

Soit f un endomorphisme défini sur E euclidien et vérifiant

$$(\mathcal{P}) \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

1. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de f . Que peut-on dire de la dimension de E lorsque 0 n'est pas valeur propre ?

2. Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ et que le rang de f est pair.

3. Montrer que $s = f \circ f$ est un endomorphisme symétrique tel que $\text{Im}(s) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(s) = \text{Ker}(f)$.

4. Soit λ une valeur propre non nulle de s et x un vecteur propre associé.

a. Montrer que $\lambda < 0$.

b. Vérifier que $f(x)$ est un autre vecteur propre associé à λ .

c. Soit $F_x = \text{Vect}(x, f(x))$; montrer que F_x et $F_x^\perp$ sont stables par f .

d. Montrer que E_λ le sous-espace propre de s associé à λ est de dimension paire, stable par f . Vérifier l'existence d'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de

E_λ 2 à 2 orthogonaux telle que $(x_1, f(x_1), \dots, x_p, f(x_p))$ est une base de E_λ . En déduire que E_λ admet une base orthonormale $\mathcal{B}_\lambda$ dans laquelle la matrice de la restriction de f à ce sous-espace est diagonale en blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que dans toute base orthonormale la matrice de f est antisymétrique. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle f a pour matrice une matrice A antisymétrique tridiagonale, c'est à dire telle que $a_{i,j} = 0$ pour $|i - j| > 1$.

[Correction](#)

Endomorphismes et matrices symétriques positifs

Exercice 72 (résultat du cours).

Soit E un espace euclidien.

1. Un endomorphisme symétrique u est dit positif si et seulement si pour tout x de E , $\langle u(x), x \rangle \geq 0$. Montrer que u endomorphisme symétrique est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

2. Un endomorphisme symétrique u est dit défini positif si et seulement si pour tout x non nul de E , $\langle u(x), x \rangle > 0$. Montrer que u endomorphisme symétrique u est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

3. On désigne par $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n telles que $\forall X, X^T A X \geq 0$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n$ (ensemble des matrices symétriques de taille n) et ses valeurs propres sont positives.

4. On désigne par $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n c'est à dire telles que $\forall X \neq 0, X^T A X > 0$. Montrer que

$$A \in \mathcal{S}_n^{++} \iff A \in \mathcal{S}_n \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*} \iff A \in \mathcal{S}_n^+ \text{ et } \det A \neq 0.$$

[Correction](#)

Exercice 73.

Montrer que les valeurs propres de la matrice S de terme général $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ sont strictement positives.

[Correction](#)

Exercice 74.

Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n positive.

1. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Montrer qu'il existe une unique matrice S symétrique positive telle que $A = S^2$.

2. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives. Montrer que $\text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}_*^+$ et $\text{tr}(AB) > 0$.

On utilisera le fait que si M et N sont deux matrices carrées d'ordre n , MN et NM ont même polynôme caractéristique (résultat vu en exercice page 30).

3. Soit A et B deux matrices symétriques positives telle que $B - A$ est positive. Montrer que $\det A \leq \det B$ en étudiant successivement les cas suivants :

- a. $\det B = 0$,
- b. $B = I_n$,
- c. le cas général.

[Correction](#)

3. Déterminant de Gram**Exercice 75.**

Soit E un espace préhilbertien réel. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ n éléments de E avec $n \geq 2$. On désigne par matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$ notée $\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice (n, n) de terme général $g_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$. Son déterminant sera noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

1. Prouver que $G(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas modifié lorsqu'on échange deux éléments de la famille ou si on ajoute à un élément une combinaison linéaire des autres. Vérifier que pour tout réel λ ,

$$G(\lambda x_1, \dots, x_n) = \lambda^2 G(x_1, \dots, x_n) .$$

2. Soit $A^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que

$$A^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 .$$

En déduire que $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de ce résultat.

3. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E et F le sous-espace engendré par cette famille. Prouver que pour tout x de E :

$$G(x_1, \dots, x_n) d(x, F)^2 = G(x_1, \dots, x_n, x)$$

4. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs non nuls. Montrer que pour tout $j \leq n$, $G(x_1, \dots, x_j) \leq G(x_1, \dots, x_{j-1}) \|x_j\|^2$. En déduire que $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$ avec égalité si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

5. On suppose E de dimension finie p . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de E et P la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$.

a. Exprimer $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de P .

b. Montrer que le rang de $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ est égal au rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

c. Lorsque $p = n$, retrouver les résultats de la première question et les conclusions de la seconde question.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a. Montrer que le rang de A est le nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$ comptées avec leur multiplicité.

b. On suppose de plus que $A^T A = A^2$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus^\perp \text{Im}(A)$.

7.

a. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$. Vérifier l'inégalité d'Hadamard

$$|\det P| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $C_1, \dots, C_n$ sont deux à deux orthogonaux.

b. On suppose de plus que $\forall(i, j), |p_{i,j}| \in [0, 1]$. Prouver que $|\det P| \leq n^{\frac{n}{2}}$ et qu'il y a égalité si et seulement si $\forall(i, j), p_{i,j} \in \{-1, 1\}$ et les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

c. On s'intéresse aux matrices d'Hadamard décrites dans la question précédente à savoir les matrices inversibles H dont tous les coefficients valent ± 1 et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

Montrer que si il existe une matrice d'Hadamard H de taille n , n est pair. Vérifier que si H est une matrice d'Hadamard de taille n , la matrice H' de taille $2n$ définie par $H' = \begin{pmatrix} H & -H \\ H & H \end{pmatrix}$ est aussi une matrice d'Hadamard. En déduire l'existence de matrices d'Hadamard pour tout $n = 2^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

8. Soient E un espace euclidien de dimension n , $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de rang r et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux familles de E ayant même matrice de Gram.

a. Si $r = n$, démontrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que pour tout i , $f(x_i) = y_i$.

b. Soit $r < n$. Quitte à permuter les éléments des familles, on suppose que $(x_1, \dots, x_r)$ est libre. Prouver que $(y_1, \dots, y_r)$ est libre et démontrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que pour tout i , $f(x_i) = y_i$.

9.

a. Prouver que si A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $A^T A = B^T B$, il existe $Q \in O(n)$ telle que $B = QA$.

b. En déduire pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence d'un couple (U, S) avec $U \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+$ tel que $A = US$.

c. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs non tous nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un projecteur orthogonal p et une base orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\forall i, p(e_i) = u_i$ si et seulement si le spectre de $\mathcal{G}(u_1, \dots, u_n)$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

10. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique où n est pair ($n = 2p$). Soit E le sous-espace vectoriel engendré par les p premiers vecteurs de la base canonique. On appelle π la projection orthogonale sur E . Soit Φ un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \|\Phi(x)\| \leq \|x\|$. Montrer qu'il existe $\sigma \in O(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Phi = \pi \circ \sigma|_E$.

[Correction](#)

Indications

Indications sur l'Exercice 1

2. On pourra remarquer que $X^n - 1$ est élément de E_n .

Indications sur l'Exercice 7

On pourra raisonner par récurrence sur $\text{codim } H = n - \dim(H)$.

Indications sur l'Exercice 8

On pourra commencer par prouver que toutes les droites ont même image.

Indications sur l'Exercice 12

3.c. On pourra remarquer que $(A_0, \dots, A_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

4. On pourra procéder par récurrence sur n .

Indications sur l'Exercice 14

3. Considérer w la restriction de u à $\text{Ker}(u + v)$.

Indications sur l'Exercice 15

3. Il sera judicieux d'introduire N_4 .

Indications sur l'Exercice 16

2.a. On pourra considérer la restriction de u à N_{k+1} .

Indications sur l'Exercice 17

Si $A^3 = B$, alors $AB = BA$.

Indications sur l'Exercice 18

On cherchera à majorer le rang de ABC .

Indications sur l'Exercice 19

On découpera judicieusement A et B .

Indications sur l'Exercice 21

1. Etablir une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 définissant Δ_n .

5. On pourra remarquer que si L_i désigne la ligne i , $L_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(xL_i(x))$ pour $i = 1$ ou $i = 2$.

6. On pourra remarquer que le passage de la ligne i à la ligne $i + 1$ pour $i < n$ se fait par l'opération suivante $L_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(xL_i(x))$ et faire apparaître $(y - a)^n$ (avec a réel) en place $(n + 1, n + 1)$ puis choisir $a = x$.

Indications sur l'Exercice 23

2. On pourra introduire les matrices carrées d'ordre $p + q$ $\begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ B & -I_q \end{pmatrix}$.

Indications sur l'Exercice 28

1.b. Pour la première partie de cette question, on pourra procéder par récurrence.

3.b. On pourra calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2$.

Indications sur l'Exercice 30

2. On commencera par vérifier que $q \circ u = u \circ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k} \right)$.
3. On pourra remarquer que $\text{Im}(p \circ u^{n-k})$ est inclus dans V pour tout k .

Indications sur l'Exercice 31

1. En supposant qu'il existe $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f^2 + \text{id})$ tels que $x = y + z$, on montrera que $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$.

Indications sur l'Exercice 33

2. Démontrer que ce sont **les seuls** en utilisant les transpositions (éléments de S_n échangeant deux éléments et laissant les autres fixes).

Indications sur l'Exercice 35

On pourra chercher une relation de récurrence sur les coordonnées d'un vecteur propre associé à s en lui ajoutant deux coordonnées x_0 et x_{n+1} nulles.

Lorsque $|s| < 2$, on introduira $\theta = \arccos(\frac{s}{2})$.

Indications sur l'Exercice 37

- 2.b. On pourra introduire la matrice carrée d'ordre $n + p$ de la forme $\begin{pmatrix} -A & XI_n \\ -I_p & O_n \end{pmatrix}$ et une autre à déterminer de la forme $\begin{pmatrix} B & XI_p \\ \star & \star \end{pmatrix}$

Indications sur l'Exercice 39

6. On pourra remarquer que i est racine de $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

Indications sur l'Exercice 40

1. On pourra introduire un vecteur propre X et introduire un indice k pour lequel $x_k = \max(x_i)$.

Indications sur l'Exercice 41

- 1.b. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la trace.
- 1.c. On se ramènera au cas précédent.

Indications sur l'Exercice 42

On pourra travailler dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Indications sur l'Exercice 43

2. On pourra commencer par calculer $T^2(f)(x)$ et $T^3(f)(x)$ pour établir une formule donnant $T^n(f)(x)$ à démontrer par récurrence.

3.a. Penser aux sommes de Riemann.

Indications sur l'Exercice 46

1. On pourra montrer que $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k})$

3. On décomposera $\mathbb{K}^n$ en sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A_n .

Indications sur l'Exercice 47

2. Pour déterminer le noyau et l'image de Q , on fera intervenir la matrice $A - I_3$.

Indications sur l'Exercice 48

3. On pourra montrer que si s est une racine de l'unité autre que 1, $P(s) = \frac{-n}{s(1-s)}$.

Indications sur l'Exercice 51

On pourra introduire la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Indications sur l'Exercice 52

2. si $u^2 = a$, u et a commutent.

Indications sur l'Exercice 54

4.b. On montrera que $s_2 \circ s_1 = r^2$ et on remarquera que $s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2$ sont inverses l'une de l'autre.

Indications sur l'Exercice 59

Si U est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1, on remarque que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \langle X, AX \rangle$.

Indications sur l'Exercice 63

1. On prouvera que I_d est élément de G .

Indications sur l'Exercice 68

1. On pourra introduire sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx$

Indications sur l'Exercice 69

3. On pourra remarquer que $f \in U$ si et seulement si $f = 1 - g$ où $g \in V$.

Indications sur l'Exercice 70

3. On pourra considérer $s \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de A_n associée au vecteur propre $X_i n \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et étudier le système $A_n X = sX$.

4.c. On cherchera un équivalent de $\gamma_n^2(\gamma_n^2 - n)$ en utilisant le système (S_n) .

Indications sur l'Exercice 71

3. On commencera par prouver l'égalité des noyaux en vérifiant que pour tout x $\langle s(x), x \rangle = -\|f(x)\|^2$.

Indications sur l'Exercice 73

On pourra se rappeler que $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$

Indications sur l'Exercice 75

5.b. On montrera que $\text{Ker}(P) = \text{Ker}(P^T P)$.

9.c. On appliquera la question précédente à A^T .

Corrections

Correction de l'Exercice 1

[Retour à l'énoncé](#)

1. E_n est non vide car il contient le polynôme nul. De plus si P et Q sont éléments de E_n et α un complexe :

$$(X^n + 1)(\alpha P + Q) = \alpha(X^n + 1)P + (X^n + 1)Q = \alpha P(X^2) + Q(X^2) = (\alpha P + Q)(X^2).$$

Ainsi $\alpha P + Q$ est élément de E_n .

On a bien vérifié que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

2. Si P n'est pas le polynôme nul, $\deg(P(X^2)) = 2 \deg(P)$, on obtient $n + \deg(P) = 2 \deg(P)$; tout polynôme non nul de E_n est de degré n .

Supposons que E_n n'est pas réduit à $\{0\}$. Soient P et Q deux polynômes de E_n non nuls de termes dominants respectifs a_n et b_n . $\frac{P}{a_n} - \frac{Q}{b_n}$ est élément de E_n de degré strictement inférieur à n : c'est donc le polynôme nul ; les polynômes P et Q sont proportionnels. Aussi soit E_n est réduit à $\{0\}$ et est de dimension 0 soit tous les polynômes non nuls sont proportionnels à l'un d'eux et E_n est de dimension 1. On remarque que le polynôme $X^n - 1$ est élément de E_n donc $E_n = \text{Vect}(X^n - 1)$.

□

Correction de l'Exercice 2

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $F_1 = \text{Vect}(\mathcal{S}_1)$ sous-espace de E de dimension s_1 et $F_2 = \text{Vect}(\mathcal{S}_2)$ sous-espace de F_1 de dimension s_2 .

Les $n_1 - n_2$ éléments de $\mathcal{S}_1$ n'appartenant pas à $\mathcal{S}_2$ engendrent un espace vectoriel F_3 de F_1 tel que $F_2 + F_3 = F_1$ aussi $\dim(F_3) + \dim(F_2) \geq \dim(F_1)$ donc $\dim(F_3) \geq s_1 - s_2$. Mais comme F_3 admet une famille génératrice de $n_1 - n_2$ éléments $\dim(F_3) \leq n_1 - n_2$, on a donc obtenu que $s_1 - s_2 \leq n_1 - n_2$ ce qui équivaut à l'inégalité demandée $n_2 - s_2 \leq n_1 - s_1$.

□

Correction de l'Exercice 3

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^p \alpha_k f_k = 0$ c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^p \alpha_k e^{kx} = 0$$

ce qui équivaut à dire que le polynôme $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$ admet pour racines tous les nombres de la forme e^x donc tous les réels strictement positifs. P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul et tous les scalaires sont nuls. La famille proposée est donc libre.

2. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq 2p}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^{2p} \alpha_k f_k = 0$ c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^p \alpha_{2k} \cos(kx) + \sum_{k=1}^p \alpha_{2k-1} \sin(kx) = 0$$

Comme $\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et $\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = -i \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$, l'égalité précédente peut s'écrire après multiplication par $2e^{pix}$:

$$\sum_{k=1}^p (\alpha_{2k} + i\alpha_{2k-1})e^{(p-k)ix} + 2\alpha_0 e^{pix} + \sum_{k=1}^p (\alpha_{2k} - i\alpha_{2k-1})e^{(p+k)ix} = 0$$

ce qui équivaut à dire que pour tout réel x , e^{ix} est racine du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^p (\alpha_{2k} + i\alpha_{2k-1})X^{p-k} + 2\alpha_0 X^p + \sum_{k=1}^p (\alpha_{2k} - i\alpha_{2k-1})X^{p+k}$$

Tous les nombres de module 1 sont racines de P ; P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls soit :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \alpha_{2k} + i\alpha_{2k-1} = \alpha_{2k} - i\alpha_{2k-1} = 0 \quad \text{et} \quad 2\alpha_0 = 0$$

ce qui prouve que tous les scalaires sont nuls : la famille proposée est libre.

3. Soit $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq p}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{k=0}^p \alpha_k g_{a_k} = 0$. La fonction g_a est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf en a or $\alpha_i g_{a_i} = - \sum_{k \neq i} \alpha_k g_{a_k}$. La fonction de droite dans cette égalité est dérivable en a_i ; il en est donc de même de $\alpha_i g_{a_i}$ ce qui impose $\alpha_i = 0$. Tous les scalaires sont nuls; la famille proposée est libre.

□

Correction de l'Exercice 4

[Retour à l'énoncé](#)

1. On recherche P sous la forme $\sum_k = 0^n \alpha_k x^k$. Les conditions $P(a_i) = b_i$ conduisent

au système linéaire $V \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ où la matrice V a pour terme général x_{i-1}^{j-1} avec

$1 \leq i, j \leq n+1$. On reconnaît la transposée de la matrice de Vandermonde associée à $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dont le déterminant est non nul puisque les a_i sont deux à deux distincts. Le système admet une unique solution : P existe et est unique.

2. La question précédente prouve l'existence et l'unicité de L_i . L_i admet pour racines les n nombres a_j avec $j \neq i$: il a donc au moins n racines; comme il est de degré au plus n et non nul ($L_i(a_i) = 1$), ce sont ses seules racines et elles sont simples. Ainsi il existe λ_i tel que

$$L_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$$

La condition $L_i(a_i) = 1$ donne alors $\lambda_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j) \right)^{-1}$, d'où

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

3. Il suffit de prouver que cette famille est libre puisqu'elle comporte $n + 1$ éléments. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0$$

En évaluant en a_j , on obtient $\alpha_j = 0$. La famille est donc libre. C'est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Si $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$, une évaluation en a_j donne immédiatement $\alpha_j = a_j$. Tout polynôme de degré au plus n s'écrit donc

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

□

Correction de l'Exercice 5

[Retour à l'énoncé](#)

1. Le cas $n = 1$ est trivial.

Soit $n \geq 2$. Soit $(Q_1, \dots, Q_n)$ une base de E et r le degré maximal de cet ensemble de polynômes. Quitte à permuter les éléments de cette base (ce qui ne change pas le caractère basique de cette famille), on suppose que $\deg(Q_n) = r$.

Pour tout $i \in [1, n-1]$, on remplace Q_i par P_i défini par

$$P_i = \begin{cases} Q_i & \text{si } \deg(Q_i) = r \\ Q_i + Q_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

Chaque polynôme P_i est obtenu successivement par ajout éventuel du dernier polynôme, ce qui ne change pas le caractère basique. De plus, le degré de P_i est toujours r car lorsque $\deg(Q_i) \neq r$, Q_i est de degré strictement inférieur à Q_n ; la somme est donc du degré de Q_n soit r . $(P_1, \dots, P_{n-1}, Q_n)$ est une base de E constitué de polynômes de même degré r . Remarque : l'exercice précédent fournit explicitement de telles bases.

2. Démontrons ce résultat par récurrence sur n .

Initialisation dans le cas $n = 1$: Tout polynôme non nul de E est une base de E .

Hérédité : on suppose la propriété vraie pour tout sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ de dimension $n - 1$ avec $n \geq 2$.

Soient E de dimension n et $(Q_1, \dots, Q_n)$ une base de E rangé par degré croissant (ce qui est possible car la permutation des éléments d'une base ne modifie pas le caractère basique

de cette famille). On pose $P_n = Q_n$. Pour tout $i < n$, on effectue l'opération suivante :

Si $\deg(Q_i) < \deg(Q_n)$, on pose $R_i = Q_i$.

Si $\deg(Q_i) = \deg(Q_n) = r$, soient a_i et a_n les coefficients dominants de ces polynômes ; on peut remplacer Q_i par $R_i = Q_i - \frac{a_i}{a_n}Q_n$. R_i est un polynôme de degré au plus r et le terme en X^r est nul ($a_i - \frac{a_i}{a_n}a_n = 0$) : c'est donc un polynôme de degré strictement inférieur à Q_n . La base $(R_1, \dots, R_{n-1}, P_n)$ est une base de E donc

$$E = E_1 \oplus \text{Vect}(P_n)$$

avec $E_1 = \text{Vect}(R_1, \dots, R_{n-1})$. Tous les éléments de la base de E_1 sont de degré strictement inférieur à r donc $E_1 \subset \mathbb{C}_{r-1}[X]$.

E_1 étant de dimension $n-1$, par hypothèse de récurrence, il admet une base $(P_1, \dots, P_{n-1})$ tel que $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_{n-1}) < r = \deg(P_n)$ et $(P_1, \dots, P_{n-1}, P_n)$ est une base de E qui répond à la question. Le résultat a ainsi été démontré par récurrence.

□

Correction de l'Exercice 6

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout réel a , on introduit $F_a = \text{Vect}(e_1 + ae_2)$ si $p = 1$ et si $p > 1$ $F_a = \text{Vect}(e_1 + ae_2, e_3, \dots, e_{p+1})$; F_a est un espace vectoriel de dimension p . Pour $a \neq b$, $e_1 + be_2 \notin F_a$ donc les sous-espaces F_a sont tous distincts et sont en nombre infini.

2. Procédons par récurrence sur n la dimension de E .

Si $n = 0$, $E = \{0\}$ et le seul sous-espace de E est E .

Si $n = 1$, E n'a que 2 sous-espaces $\{0\}$ et lui-même. Si les E_i sont différents de E , ils sont tous égaux à $\{0\}$ et leur union est encore réduit au singleton $\{0\}$.

Supposons la propriété vraie pour les espaces vectoriels de dimension $n \geq 1$. Soit E de dimension $n+1$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $\bigcup_{i=1}^p E_i = E$. Soit H un hyperplan de E , c'est à dire un sous espace vectoriel de E de dimension n . Par intersection avec H :

$$\bigcup_{i=1}^p E_i = E \implies \bigcup_{i=1}^p (E_i \cap H) = H.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe j tel que $E_j \cap H = H$ puisque les $E_i \cap H$ sont des sous-espaces vectoriels de H ; ce qui équivaut à dire que $H \subset E_j$. Compte-tenu des dimensions, les seuls sous-espaces de E contenant H sont H et E . Supposons qu'aucun sous-espace n'est égal à E , il y en a au moins un égal à H . Les $(E_i)_i$ étant en dimension finie, le nombre d'hyperplans de E est fini, ce qui est absurde.

□

Correction de l'Exercice 7

[Retour à l'énoncé](#)

Une des deux implications est triviale. Si H et K ont un supplémentaire commun S de dimension s , ils sont tous les deux de dimension $n - s$ donc de même dimension.

On rappelle que E étant de dimension finie, tout sous-espace admet des supplémentaires. Démontrons l'implication réciproque par récurrence sur $s = n - \dim(H)$ (s s'appelle la codimension de H).

Initialisation : si $s = 0$, $H = K = E$ et le supplémentaire commun est $\{0_E\}$.

Hérédité : supposons que si $\dim(H) = \dim(K) = n - s$ avec $s \geq 0$, H et K admettent un supplémentaire commun.

Soient H et K tels que $\dim(H) = \dim(K) = n - (s + 1)$ avec $s \geq 0$.

Si $H = K$, tout supplémentaire de l'un est un supplémentaire de l'autre.

Si $H \neq K$, aucun des sous-espaces n'est inclus dans l'autre donc il existe deux vecteurs u et v tels que $u \in H \setminus K$ et $v \in K \setminus H$. $u + v$ n'est élément pas de H car si $u + v \in H$, $v = u + v - u$ est élément de H ce qui est contraire au choix de v . De même, en échangeant les rôles de H et K , $u + v$ n'est pas élément de K . Soit D la droite engendrée par $u + v$, elle est en somme directe avec H et K (puisque l'intersection est réduite au vecteur nul).

Soit $H_1 = H \oplus D$ et $K_1 = K \oplus D$. On a alors

$$\dim(H_1) = \dim(H) + 1 = \dim(K) + 1 = n - s = \dim(K_1).$$

Par hypothèse de récurrence, H_1 et K_1 ont un supplémentaire commun S ; ainsi

$$E = H_1 \oplus S = H \oplus D \oplus S = K_1 \oplus S = K \oplus D \oplus S$$

$D \oplus S$ est un supplémentaire commun à H et K .

On vient de prouver par récurrence que si $\dim(H) = \dim(K)$, H et K ont un supplémentaire commun.

□

Correction de l'Exercice 8

[Retour à l'énoncé](#)

On remarque que tout sous-espace F vérifie $f(F) = f(F \oplus \{0\}) = f(F) + f(\{0\})$ donc $f(\{0\}) = 0$.

L'image d'une somme directe de p sous-espaces est la somme des images. Vérifions le par récurrence sur p .

Initialisation : C'est la propriété de f pour $p = 2$.

Hérédité : Supposons que $f\left(\bigoplus_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p f(E_i)$ avec $p \geq 2$.

Soit $S = \bigoplus_{i=1}^{p+1} E_i = S_1 \oplus E_{p+1}$ avec $S_1 = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Par définition de f , $f(S) = f(S_1) + f(E_{p+1})$

et par hypothèse de récurrence $f(S_1) = \sum_{i=1}^p f(E_i)$ donc $f(S) = \sum_{i=1}^{p+1} f(E_i)$. On a ainsi vérifié par récurrence que l'image d'une somme directe de sous-espaces est la somme des images.

Or tout sous-espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ est la somme directe de p droites (engendrées par les vecteurs d'une de ses bases). Il est donc intéressant de regarder l'image d'une droite.

Soient $D = \text{Vect}(u)$ et $D' = \text{Vect}(u')$ deux droites distinctes de E (donc (u, u') est une famille libre). On pose $\Pi = \text{Vect}(u, u')$ et $\Delta = \text{Vect}(u + u')$. (u, u') , $(u, u + u')$ et $(u', u + u')$ étant des bases de Π :

$$\Pi = D \oplus \Delta = D' \oplus \Delta$$

donc

$$f(\Pi) = f(D) + f(\Delta) = f(D') + f(\Delta) \implies f(D) = f(D') .$$

Toutes les droites ont même image d .

Par suite un sous-espace de dimension $p \geq 1$ a comme image dp ; $f = d \dim$.

Toutes les applications $F \mapsto d \dim(F)$ conviennent puisque la dimension d'une somme directe de sous-espaces est la somme des dimensions de ces sous-espaces.

□

Correction de l'Exercice 9

[Retour à l'énoncé](#)

La relation $p \circ q = 0$ équivaut à $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$ et par le théorème du rang appliqué à p :

$$\text{rg}(q) \leq \dim(\text{Ker}(p)) = n - \text{rg}(p) \iff \text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq n .$$

Soit $r = p + q - q \circ p$. Vérifions que $r^2 = r$ sachant que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = 0$. On a alors

$$\begin{cases} r \circ p &= p^2 = p \\ r \circ q &= q \circ p + q^2 - q^2 \circ p = q \iff r^2 = r . \\ r \circ q \circ p &= q \circ p \end{cases}$$

r est bien un projecteur.

Comme $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont en somme directe et que $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$, $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont aussi en somme directe. Or pour tout x de E , $r(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ donc $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Réciproquement, soit z un élément de $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ alors il existe $(x, y) \in E^2$ tels que $z = p(x) + q(y)$ et comme on a vu précédemment que $r \circ p = p$ et $r \circ q = q$, $r(z) = z$ aussi $z \in \text{Im}(r)$. Par double inclusion, on vient de démontrer que

$$\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) .$$

Soit x un élément du noyau de r . On a alors

$$\underbrace{p(x)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{q(x - p(x))}_{\in \text{Im}(q)} = 0_E .$$

Les espaces $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ étant en somme directe :

$$p(x) = q(x - p(x)) = 0_E \iff p(x) = q(x) = 0_E ,$$

x est élément de $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Réciproquement si $p(x) = q(x) = 0_E$, $r(x) = 0$ ainsi :

$$\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) .$$

□

Correction de l'Exercice 10

[Retour à l'énoncé](#)

Supposons que g existe.

On remarque alors compte-tenu de $f = f \circ g \circ f$ que si y est élément de $\text{Im}(f)$, $f \circ g(y) = y$. De même, si y est élément de $\text{Im}(g)$, $g \circ f(y) = y$.

Les applications $f_1 : \begin{array}{ccc} \text{Im}(g) & \mapsto & \text{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $g_1 : \begin{array}{ccc} \text{Im}(f) & \mapsto & \text{Im}(g) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Si $f = 0$, $g = 0$ convient et si f est bijective, $g = f^{-1}$ convient.

On suppose dorénavant f de rang r avec $1 \leq r < n$. Soit S un supplémentaire du noyau de f et $(u_1, \dots, u_r)$ une base de S . Par le théorème de l'endomorphisme induit, $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$ que l'on complète en une base de E $(f(u_1), \dots, f(u_r), e_{r+1}, \dots, e_n)$. Soit g l'application linéaire définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(f(u_i)) = u_i \text{ et } \forall j \in \llbracket r+1, n \rrbracket, g(e_j) = 0_E.$$

Le rang de g est la dimension de son image soit $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$ donc f et g ont même rang.

Comme pour tout élément u_i de la base de S , $g \circ f(u_i) = u_i$, il en est de même de tout élément de S . Pour tout x de E , $f(x) \in S$ donc $g \circ f(g(x)) = g(x)$ ce qui équivaut à $g \circ f \circ g = g$.

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f(g(f(u_i))) = f(u_i)$; ainsi pour tout élément de S , $f \circ g \circ f = f$ et pour les éléments de $\text{Ker}(f)$, $f \circ g \circ f(x) = f(x) = 0_E$.

f et $f \circ g \circ f$ coïncident sur S et $\text{Ker}(f)$ donc sur une base adaptée à la décomposition $E = S \oplus \text{Ker}(f)$; ces deux applications sont donc égales $f = f \circ g \circ f$.

L'application g décrite précédemment répond à la question.

□

Correction de l'Exercice 11

[Retour à l'énoncé](#)

Comme $w = v \circ u$, $\text{Im}(w) \subset \text{Im}(v) \subset G$ et $\{0_E\} \subset \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)$.

Supposons que w est un isomorphisme.

On a alors $\text{Im}(w) = G$ et $\text{Ker}(w) = \{0_E\}$. Compte-tenu des inclusions rappelées précédemment, $\text{Im}(v) = G$ et $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$: v est surjective et u est injective.

Soit $y \in F$, $v(y)$ est élément de G et w étant un isomorphisme, il existe x élément de E tel que $v(y) = w(x) = v(u(x))$; ainsi $y - u(x) = y_1 \in \text{Ker}(v)$. On a alors $y = u(x) + y_1$ donc $y \in \text{Im}(u) + \text{Ker}(v)$ soit $F = \text{Im}(u) + \text{Ker}(v)$.

Montrons que cette somme est directe. Soit $y \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $v(y) = 0_G$ donc $v \circ u(x) = 0_G$; x appartient au noyau de w mais w étant bijective, x est l'élément nul de E donc y est l'élément nul de F . Ainsi $F = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v)$.

Réciproquement supposons que v est surjective, u est injective et $F = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v)$. Par le théorème de l'isomorphisme induit, la restriction de v de $\text{Im}(u)$ sur $\text{Im}(v) = G$ est bijective. Pour tout élément z de G , il existe un unique élément y de $\text{Im}(u)$ tel que $z = v(y)$. De plus, u étant injective, y a un unique antécédent x par u donc z s'écrit de manière unique sous la forme $v \circ u(x)$ avec $x \in E$: w est un isomorphisme.

□

Correction de l'Exercice 12

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ comme différence de $P \mapsto P(X+1)$ et l'identité. $\Delta(P) = 0$ équivaut à P est 1-périodique; P est donc borné; c'est un polynôme constant. Tout polynôme constant a bien 0 comme image donc $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}$.

b. Comme précédemment le noyau de Δ_n est constitué des polynômes constants; ainsi par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(\Delta_n)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathbb{R}) = n + 1 - 1 = n.$$

Soit P un polynôme (non nul) de terme dominant $a_p X^p$, le terme dominant de $P(X+1)$ est aussi $a_p X^p$ donc $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$ ainsi $\text{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par égalité des dimensions $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit Q un polynôme non nul de degré d ; $Q \in \text{Im}(\Delta_{d+1})$ donc il existe un polynôme P de degré au plus $d+1$ tel $Q = \Delta(P)$. 0 étant sa propre image, Δ est surjective.

2. Soit P un polynôme réel. Par division de P par X et d'après théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, r) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ tels que

$$P = XQ + r$$

ce qui équivaut à $\mathbb{R}[X] = X\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}$.

Les polynômes de $X\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes divisibles par X donc s'annulant en 0. Par le théorème de l'isomorphisme induit, la restriction de Δ au supplémentaire du noyau de $X\mathbb{R}[X]$ sur $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$ est bijective ce qui est la propriété demandée :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \exists! P \text{ tel que } \Delta(P) = Q \text{ et } P(0) = 0.$$

3.

a. Si $d \neq 0$

$$A_d(X+1) - A_d(X) = \frac{X(X-1) \cdots (X+2-d)}{d!} (X+1 - X + d - 1) = A_{d-1}$$

et $\Delta(A_0) = 0$.

b. Si $d = 0$, $A_d(n) = 1 \in \mathbb{Z}$.

Soit $d \geq 1$. Soit n entier naturel. Si $n < d$, n est racine de A_d et $A_d(n) = 0$ et si $n \geq d$, on remarque que $A_d(n) = \binom{n}{d} \in \mathbb{N}$. On remarque que $A_d(d) = 1$.

Soit n un entier naturel négatif $n = -n'$.

$$A_d(n) = (-1)^d \frac{n'(n'+1) \cdots (n'+d-1)}{d!} = (-1)^d \binom{n'+d-1}{d} = (-1)^d \binom{-n+d-1}{d} \in \mathbb{Z}.$$

c. Le polynôme A_d est de degré d donc la famille $(A_0, \dots, A_d)$ est une famille étagée en degré, donc libre maximale de $\mathbb{R}_d[X]$: c'en est une base. Soit P un polynôme tel que $P(n)$ est entier pour tout entier relatif n . Si P est constant, cette constante doit être un entier c_0 donc $P = c_0 A_0$.

Supposons P de degré $d \geq 1$. Dans la base de $\mathbb{R}_d[X]$ exhibée précédemment, ce polynôme s'écrit de manière unique :

$$P = c_0 A_0 + \cdots + c_d A_d = \sum_{k=0}^d c_k A_k$$

Un polynôme de degré d étant déterminé par sa valeur en $d+1$ points distincts, les $(c_k)_{0 \leq k \leq d}$ sont déterminés par le système $P(n) = \sum_{k=0}^d c_k A_k(n)$ pour $0 \leq n \leq d$, soit compte-tenu des calculs de la question précédente :

$$\forall n \in \llbracket 0, d \rrbracket, P(n) = \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k}$$

Les coefficients sont obtenus par récurrence par $c_0 = P(0)$ et pour $n \geq 1$

$$c_n = P(n) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \binom{n}{k}.$$

Ces coefficients sont dans $\mathbb{Z}$ si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ car $c_0 \in \mathbb{Z}$ et si les c_k sont entiers relatifs pour $k \in [0, n-1]$, il en est de même de c_n . Par récurrence finie, tous les composantes de P dans la base des (A_k) sont entières.

Réciproquement, si $P = \sum_{k=0}^d c_k A_k$ avec la $(c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$, comme $A_k(n)$ est un entier relatif pour tout entier relatif n , $P(n)$ est élément de $\mathbb{Z}$.

4. On procède par récurrence sur n .

Initialisation pour $n = 0$: Pour tout polynôme constant $P = a$, on cherche un nombre α tel que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a = \alpha a$$

la solution est unique et vaut $\alpha = 1$. Hérédité : supposons l'existence d'un unique $n+1$ -uplet

$$(b_0, \dots, b_n) \text{ tel que pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X], P(X+n+1) = \sum_{k=0}^n b_k P(X+k).$$

On recherche un $n+2$ -uplet $(a_0, \dots, a_{n+1})$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$,

$$(1) \quad P(X+n+2) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k)$$

En appliquant cette relation à $P = X^{n+1}$ et en regardant le terme en X^{n+1} , on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = 1$$

$$\text{soit (2) } a_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^n a_k.$$

Il reste à déterminer les $n+1$ autres coefficients. Compte-tenu de la valeur de a_{n+1} , la relation (1) devient :

$$P(X+n+2) - P(X+n+1) = - \sum_{k=0}^n a_k (P(X+n+1) - P(X+k)).$$

$$\text{Or } P(X+n+1) - P(X+k) = \sum_{j=k}^n (P(X+j+1) - P(X+j)) = - \sum_{j=k}^n \Delta(P)(X+j). \text{ Ainsi}$$

la relation (1) équivaut à :

$$\Delta(P)(X+n+1) = - \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n a_k \Delta(P)(X+j) = - \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} a_k \Delta(P)(X+j)$$

En échangeant les signes $\sum$, on obtient :

$$\Delta(P)(X+n+1) = - \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^j a_k \right) \Delta(P)(X+j)$$

On a vu en première question que lorsque P décrit $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, $\Delta(P)$ décrit $\mathbb{R}_n[X]$; donc pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$

$$Q(X+n+1) = - \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^j a_k \right) Q(X+j)$$

Par hypothèse de récurrence, ceci équivaut à :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad - \sum_{k=0}^j a_k = b_j \iff \begin{cases} a_0 & = -b_0 \\ a_0 + a_1 & = -b_1 \\ & \vdots \\ a_0 + a_1 + \dots + a_j & = -b_j \\ & \vdots \\ a_0 + \dots + a_{n-1} + a_n & = -b_n \end{cases}$$

Ce système a donc une solution unique $a_0 = -b_0$ et pour $j \geq 1$, $a_j = b_{j-1} - b_j$.

Par récurrence, on a donc prouvé l'existence d'un unique $n+1$ -uplet $(a_0, \dots, a_n)$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X+n+1) = \sum_{k=0}^n a_k P(X+k).$$

Calcul des coefficients : Désignons par $a_{n,j}$ le coefficient de $P(X+j)$ pour les polynômes de degré au plus n (au lieu de a_j). Des relations $a_{n,0} = -a_{n-1,0}$ et $a_{0,0} = 1$, on déduit $a_{n,0} = (-1)^n$. Le coefficient d'indice le plus élevé est donné par la relation (2). Regardons les coefficients pour les premières valeurs de n :

$n = 0$: $a_{0,0} = 1$

$n = 1$: $a_{1,0} = -1$ $a_{1,1} = 2$

$n = 2$: $a_{2,0} = 1$ $a_{2,1} = -3$ $a_{2,2} = 3$

$n = 3$: $a_{3,0} = -1$ $a_{3,1} = 4$ $a_{3,2} = -6$ $a_{3,3} = 4$.

On remarque que ses coefficients sont au signe près des coefficients binomiaux pour $n \leq 3$:

$$a_{n,j} = (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j}.$$

Si $a_{n,j} = (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j}$ pour n fixé et $0 \leq j \leq n$, pour $1 \leq j \leq n$, par la formule du triangle de Pascal :

$$a_{n+1,j} = a_{n,j-1} - a_{n,j} = (-1)^{n+j-1} \left(\binom{n+1}{j-1} + \binom{n+1}{j} \right) = (-1)^{n+j+1} \binom{n+2}{j}.$$

Pour $j = 0$, $\binom{n+2}{0} = 1$ donc $a_{n+1,0} = (-1)^{n+1} \binom{n+2}{0}$.

Pour $j = n+1$, $(1-1)^{n+2} = 0$ donc par développement par la formule du binôme

$$\sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \binom{n+2}{j} = 0 \text{ soit après multiplication par } (-1)^{n+2} :$$

$$\sum_{j=0}^n a_{n+1,j} = -\binom{n+2}{n+1} + 1 = 1 - a_{n+1,n+1}$$

ce qui donne $a_{n+1,n+1} = \binom{n+2}{n+1}$. On a alors prouvé que $a_{n+1,j} = (-1)^{n+1+j} \binom{n+2}{j}$ pour $0 \leq j \leq n+1$. La propriété $a_{n,j} = (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j}$ pour tout n et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ a été prouvée par récurrence.

□

Correction de l'Exercice 13

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(v)$: il existe $y \in F$ tel que $x = v(y)$.

Comme $u \circ v(y) = u(x) = 0_F$, $v \circ u(v(y)) = 0_E$. Comme $v \circ u \circ v = v$, $x = v(y) = 0_E$. On a donc montré que $v \circ u \circ v = v \implies \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}$.

En échangeant les rôles de E et F et ceux de u et v :

$$u \circ v \circ u = u \implies \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u) = \{0_F\}$$

Soit $x \in \mathbb{E}$. Comme $u \circ v \circ u(x) = u(x)$, $u(x - v \circ u(x)) = 0_F$, donc $x = v(u(x)) + x_0$ où $x_0 = x - v \circ u(x)$ est élément de $\text{Ker}(u)$. On a donc vérifié que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$. On a montré que $u \circ v \circ u = u \implies E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$. Aussi : $v \circ u \circ v = v \implies F = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u)$. Si les conditions (*) sont vérifiées, on a donc bien $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(v)$ et $F = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u)$.

2. Par le théorème de l'endomorphisme induit, la restriction $\tilde{u}$ de u à E_1 est un isomorphisme de E_1 sur $\text{Im}(u)$. Soit y un élément de $\text{Im}(u)$ et x_1 son antécédent dans E_1 . Si v existe avec $E_1 = \text{Im}(v)$, $v(y)$ est dans E_1 et

$$u \circ v \circ u(x_1) = u \circ v(y) = u(x_1) = y$$

Ainsi $v(y)$ est l'antécédent de y par u dans E_1 donc $v(y) = x_1 = \tilde{u}^{-1}(y)$.

La recherche de v tel que $\text{Ker}(v) = F_1$ impose que si $y \in F_1$, $v(y) = 0$. Si l'application linéaire v existe, elle est donc unique.

Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F adaptée à la décomposition $F = \text{Im}(u) \oplus F_1$. Soit v l'application linéaire défini par l'image de cette base de la façon suivante : si e_i est un élément de cette base appartenant à $\text{Im}(u)$, $v(e_i) = \tilde{u}^{-1}(e_i)$ et si il appartient à F_1 , $v(e_i) = 0_F$. v est donc l'application définie par sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires, l'application $\tilde{u}^{-1}$ sur $\text{Im}(u)$ et l'application nulle sur F_1 . Il est immédiat que $E_1 = \text{Im}(v)$ et $F_1 = \text{Ker}(v)$.

Vérifions qu'elle vérifie les conditions (*).

Soit x un élément de E : $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in \text{Ker}(u)$ et x_1 dans E_1 . On a alors

$$u(x) = u(x_1) = \tilde{u}(x_1) \text{ et } u \circ v \circ u(x) = u \circ v(\tilde{u}(x_1)) = u(x_1)$$

donc $u \circ v \circ u = u$.

Soit y élément de F . $y = y_1 + y_0$ avec $y_1 \in \text{Im}(u)$ et $y_0 \in \text{Ker}(v)$ donc :

$$v(y) = v(y_1) = \tilde{u}^{-1}(y_1) \implies u \circ v(y) = y_1 \implies v \circ u \circ v(y) = v(y_1) = v(y)$$

donc $v \circ u \circ v = v$. L'application v définie précédemment convient.

□

Correction de l'Exercice 14[Retour à l'énoncé](#)**1.****a.** Soit y élément de $\text{Im}(u + v)$; il existe x tel que $y = u(x) + v(x)$ donc

$$\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$$

(remarque : il n'y a pas égalité car les éléments de $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ sont ceux qui s'écrivent $u(x) + v(x')$, x et x' pouvant être différents) ; donc

$$(1) \quad \text{rg}(u + v) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$$

En appliquant ce résultat à la somme suivante $u = (u + v) - v$, v et $-v$ ayant même image et même rang :

$$\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(v) \iff \text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v)$$

et, en échangeant les rôles de u et v , $\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v)$. Les deux dernières inégalités obtenues donnent bien :

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) .$$

b. $u + v$ étant inversible, $\text{rg}(u + v) = n$ donc $n \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.Comme $v \circ u = 0$, l'image de u est incluse dans le noyau de v d'où par le théorème du rang :

$$\text{rg}(u) \leq \dim \text{Ker}(v) = n - \text{rg}(v) \implies \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n .$$

On a ainsi vérifié par double inégalité que $n = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.**2.** D'après les inégalités obtenues en (1), le rang de la somme est la somme des rangs si et seulement si :

$$\text{rg}(u + v) = \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) = \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v)$$

La première égalité équivaut à $\text{Im}(u + v) = \text{Im } u + \text{Im } v$ et la seconde égalité à ce que la somme soit directe soit

$$\text{Im}(u) \cap \text{Im } v = \{0_F\} .$$

Ainsi

$$\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \iff \text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v) = \text{Im}(u + v)$$

Supposons ces propriétés réalisées. Comme $\text{Im}(u) \subset \text{Im } u + \text{Im } v = \text{Im}(u + v)$, pour tout y de E , il existe x tel que $u(y) = u(x) + v(x)$ soit $u(y - x) = v(x) = a$. Cet élément a est donc dans $\text{Im}(u) \cap \text{Im } v$ et comme la somme est directe, $a = 0_F$, $y - x \in \text{Ker}(u)$ et $x \in \text{Ker}(v)$ donc $y \in \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$ soit $E = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$.Réciproquement supposons que $\text{Im}(u) \cap \text{Im } v = \{0_F\}$ et $\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = E$; la somme $\text{Im}(u) + \text{Im } v$ est directe. Comme $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$, il reste à prouver l'inclusion réciproque.Soit un élément de $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Par définition, il s'écrit $u(y) + v(z)$ avec $(y, z) \in E^2$. Comme $y - z$ est élément de E , il existe $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(u) \times \text{Ker}(v)$ tel que

$$y - z = x_1 + x_2 .$$

On a alors $u(y) = u(z) + u(x_2)$ et $v(z) = v(z + x_2)$; ainsi :

$$u(y) + v(z) = (u + v)(z + x_2) \in \text{Im}(u + v)$$

ce qui prouve compte tenu de ce qui précède $\text{Im}(u) \oplus \text{Im}(v) = \text{Im}(u + v)$.

3. Considérons w la restriction de u à $\text{Ker}(u + v)$ et déterminons son noyau et son image.

$$x \in \text{Ker}(w) \iff x \in \text{Ker}(u + v) \text{ et } w(x) = u(x) = 0_F \iff u(x) = v(x) = 0_F$$

ce qui prouve que $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.

w étant une restriction de u , son image est incluse dans l'image de u . Soit $y \in \text{Im}(w)$; il existe x tel que $u(x) + v(x) = 0$ tel que $y = u(x) = -v(x)$ donc $\text{Im}(w) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$. Par le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(u + v)) &= \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(w)) \\ &\leq \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)). \end{aligned}$$

□

Correction de l'Exercice 15

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. $f^2 = 0$ équivaut à $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ donc par le théorème du rang, cette inclusion donne :

$$\text{rg}(f) = r \leq \dim(\text{Ker}(f)) = n - r \implies r \leq \frac{n}{2}.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f l'endomorphisme défini par

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{n+1-i} & \text{pour } 1 \leq i \leq r \\ 0_E & \text{pour } i > r \end{cases}.$$

Pour $i \leq r$, $n+1-i > r$ donc $f^2(e_i) = 0_E$ et pour $i > r$ on a aussi $f^2(e_i) = 0_E$ donc $f^2 = 0$.

b. Soit S un supplémentaire du noyau de f et $(u_1, \dots, u_r)$ une base de S . On pose pour $i \in [1, r]$, $f(u_i) = e_i$. Par le théorème de l'endomorphisme induit, $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\text{Im}(f)$. Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, on peut compléter $(e_1, \dots, e_r)$ en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\text{Ker}(f)$.

$\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(f) \oplus S$ dans la quelle f a bien pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0_{r, n-r} & I_r \\ 0_{n-r, n-r} & 0_{n-r, r} \end{pmatrix}$ puisque les $n-r$ premiers vecteurs ont comme image 0_E et les r derniers les r premiers.

c. Soit g un endomorphisme commutant avec f de matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{pmatrix}$$

avec B_1, B_3, B_7, B_9 matrices carrées d'ordre r , B_5 matrice carrée d'ordre $n-2r$, B_2 et B_8 des matrices de taille $(r, n-2r)$ et B_4 et B_6 des matrices de taille $(n-2r, r)$. Si $n = 2r$, la deuxième colonne et la deuxième ligne sont vides. La forme de la décomposition en blocs a

été ainsi choisie pour pouvoir effectuer les produits AB et BA .

On obtient alors :

$$AB = \begin{pmatrix} B_7 & B_8 & B_9 \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} & 0_{n-2r,r} \\ 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & 0_{r,r} \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & B_1 \\ 0_{n-2r,r} & 0_{n-2r,n-2r} & B_4 \\ 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & B_7 \end{pmatrix}$$

Ainsi $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si $AB = BA$ soit $B_7 = 0_{r,r}$, $B_8 = 0_{r,n-2r}$, $B_4 = 0_{n-2r,r}$ et $B_1 = B_9$. Ainsi

$$g \in \mathcal{C} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0_{n-2r,r} & B_5 & B_6 \\ 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & B_1 \end{pmatrix}$$

Comme $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$ est un isomorphisme, $\mathcal{C}$ a même dimension que l'espace vectoriel des

matrices de la forme précédente. Comme $(B_1, B_2, B_3, B_5, B_6) \mapsto \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0_{n-2r,r} & B_5 & B_6 \\ 0_{r,r} & 0_{r,n-2r} & B_1 \end{pmatrix}$

est une bijection et que $\dim(\mathcal{M}_{p,q}) = pq$:

$$\dim(\mathcal{C}) = 2r^2 + 2(n-2r)r + (n-2r)^2 = (n-r)^2 + r^2.$$

2.

a. Comme $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ (par définition de p), il existe x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. Soit $(a_0, \dots, a_{p-1})$ des scalaires tels que

$$(1) \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^i(x) = 0_E$$

Montrons par récurrence sur k compris entre 0 et $p-1$ que pour $0 \leq j \leq k$, $a_j = 0$.

Initialisation : En composant la relation (1) par f^{p-1} , comme $f^j = 0$ pour $j = p$,

$$a_0 f^{p-1}(x) = 0_E.$$

Le vecteur $f^{p-1}(x)$ étant non nul, $a_0 = 0$.

Hérédité : supposons que $0 \leq j \leq k$, $a_j = 0$ avec $k < p-1$. La relation (1) devient

$$\sum_{i=k+1}^{p-1} a_i f^i(x) = 0_E.$$

En composant par f^{p-k-2} , il reste alors $a_{k+1} f^{p-1}(x) = 0_E$ donc $a_{k+1} = 0$.

Par récurrence, on a ainsi prouvé que tous les a_i sont nuls : la famille proposée est donc libre.

Cette famille comportant p éléments, $p \leq n$ donc $f^n = 0$.

b. Si $p = n$, on a donc un élément x tel que $(f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E (famille libre maximale). Le premier élément a pour image 0_E et chacun des autres a pour image le précédent, donc la matrice de f dans cette base est N_n .

3. On remarque que $A = I_4 + aN_4 + a^2N_4^2 + a^3N_4^3$.

a. $\mathcal{V} = \text{Vect}(I_4, N_4, N_4^2, N_4^3)$ est stable par produit puisque les produits de deux termes de la base est dans $\mathcal{V}$. Ainsi on peut chercher A^n sous la forme $A^n = a_n I_4 + b_n N_4 + c_n N_4^2 + d_n N_4^3$

avec $(a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, a, a^2, a^3)$. Comme $A^{n+1} = A^n A$ et que (I_4, N_4, N_4^2, N_4^3) est une famille libre, on obtient les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n + aa_n \\ c_{n+1} = a^2 a_n + ab_n + c_n \\ d_{n+1} = a^3 a_n + a^2 b_n + ac_n + d_n \end{cases}$$

On a alors $a_n = a_1 = 1$ (ce qui était prévisible puisque le produit de deux matrices triangulaires est triangulaire avec sur sa diagonale des termes obtenus par produit terme à terme des matrices initiales). $(b_n)_n$ est alors une suite arithmétique de raison a et de premier terme 1 ; ainsi $b_n = n$. La relation donnant $(c_n)_n$ est alors $c_n - c_{n-1} = na^2$. Ainsi par télescopage :

$$c_n = c_1 + \sum_{k=2}^n ka^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)a^2 = \frac{n(n+1)}{2}a^2.$$

La dernière suite est alors donnée par la relation

$$d_{n+1} - d_n = a^3 + na^3 + \frac{n(n+1)}{2}a^3 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}a^3$$

qui s'écrit aussi pour $n \geq 2$, $d_n - d_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}a^3$.

Aussi comme $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$$d_n = d_1 + \sum_{k=2}^n (d_k - d_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2}a^3 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}a^3$$

soit $d_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}a^3$. Ce dernier calcul peut se faire aussi en reconnaissant des coefficients binomiaux :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

b. A est de déterminant 1 ; elle est donc inversible car son déterminant est non nul. Comme I_4 et N_4 commutent, $(I_4 - aN_4)(I_4 + aN_4 + a^2N_4^2 + a^3N_4^3) = I_4 - a^4N_4^4 = I_4$.

Or $A = I_4 + aN_4 + a^2N_4^2 + a^3N_4^3$ donc $A^{-1} = I_4 - aN_4$. I_4 et N_4 commutent, par la formule du binôme (les termes où N est à une puissance supérieure ou égal à 4 sont nuls) :

$$A^{-n} = (I_4 - aN_4)^n = I_4 - nN_4 + \frac{n(n-1)}{2}N_4^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3}N_4^3.$$

On remarque que ce sont les mêmes formules que pour n entier naturel en changeant n en $-n$.

□

Correction de l'Exercice 16

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. On remarque que $u^k(x) = 0_E \implies u^{k+1}(x) = 0_E$ donc, pour tout k , $N_k \subset N_{k+1}$;

$(N_k)_k$ est bien une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces.

De plus, si $y = u^{k+1}(x)$, $y = u^k(u(x))$ donc $I_{k+1} \subset I_k$.

b. Soit pour tout k , $N_k \subsetneq N_{k+1}$ et la suite $(N_k)_k$ est strictement croissante soit il existe au moins un indice k tel que $N_k = N_{k+1}$. Dans ce second cas, soit p le plus petit indice pour lequel $N_k = N_{k+1}$. Par définition de p , si $k < p$, $N_k \subsetneq N_{k+1}$.

Montrons que pour tout entier $k \geq p$, la propriété $\mathcal{P}(k) : N_k = N_{k+1} = N_p$ est réalisée par récurrence sur k . On remarque que pour tout j :

$$x \in N_{j+1} \iff u^{j+1}(x) = 0 \iff u(x) \in N_j .$$

soit $x \in N_{j+1}$ équivaut à $u(x) \in N_j$ L'initialisation de la récurrence provient de la définition de p .

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(k) : N_k = N_{k+1} = N_p$ réalisée pour un indice $k \geq p$. On a alors :

$$x \in N_{k+2} \iff u(x) \in N_{k+1} = N_k \iff x \in N_{k+1}$$

ce qui prouve que $N_{k+2} = N_{k+1} = N_p$ soit $\mathcal{P}(k+1)$.

On a ainsi prouvé que la suite des noyaux est constante à partir du rang p .

2.

a. On a vu précédemment que x est élément de N_{k+1} si et seulement si $u(x)$ est élément de N_k . Soit $\tilde{u}$ la restriction de u à N_{k+1} . Les éléments du noyau de $\tilde{u}$ sont les éléments de N_{k+1} appartenant à N_1 noyau de u . Comme $N_1 \subset N_{k+1}$, le noyau de $\tilde{u}$ est N_1 . Son image est incluse dans N_k donc de dimension inférieure ou égale à d_k . par le théorème du rang appliqué à $\tilde{u}$, on obtient :

$$d_{k+1} = \dim(N_{k+1}) = \dim(N_1) + \dim(\text{Im}(\tilde{u})) \leq d_k + d_1 .$$

b. Si la suite est strictement croissante, étant constituée d'entiers naturels, on a $d_{k+1} \geq d_k + 1$ et donc on obtient $d_k \geq k$. La suite $(d_k)_k$ n'est donc pas majorée. Par contraposition, la suite $(d_k)_k$ étant majorée par n la dimension de l'espace, elle n'est pas strictement croissante. Par la question 1.b, elle est donc strictement croissante jusqu'à un indice p à partir duquel elle est constante.

On a vu auparavant que tant que la suite est strictement croissante, donc pour $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $d_k \geq k$ en particulier $p \leq d_p \leq n$ donc $p \leq n$.

Montrons que N_p et I_p sont en somme directe. Soit $x \in N_p \cap I_p$. On a alors $u^p(x) = 0_E$ et l'existence d'un élément y tel que $x = u^p(y)$. x étant dans N_p , $u^p(x) = u^{2p}(y) = 0$ ce qui prouve que $y \in N_{2p}$. Comme $2p \geq p$, $N_{2p} = N_p$; ainsi $x = u^p(y) = 0_E$. L'intersection de N_p et I_p est donc réduite à l'élément nul; la somme est directe. Par le théorème du rang appliqué à u^p , la dimension de $N_p \oplus I_p$ est n donc $E = N_p \oplus I_p$.

3.

a. Comme $u^2 \neq 0$, $N_2 \neq E = N_3$ aussi $p = 3$ et $d_3 = 3$. On a ainsi

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < d_3 = 3$$

donc $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$. Par le théorème du rang, $\dim(I_1) = 3 - d_1 = 2$ et $\dim(I_2) = 3 - d_2 = 1$. De plus, $d_3 = 0$ et $d_0 = 3$.

$u \circ v = 0$ équivaut à dire $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$. Comme $u^3 = u \circ u^2 = u^2 \circ u = 0$, $I_2 \subset N_1$ et $I_1 \subset N_2$. I_2 et N_1 ayant même dimension, $I_2 = N_1$. De même, I_1 et N_2 ayant même dimension, $I_1 = N_2$. De plus, $N_0 = I_3 = \{0_E\}$ et $N_3 = I_0 = E$.

Comme $u^2 \neq 0$, il existe e_3 , tel que $e_1 = u^2(e_3) \neq 0_E$. $e_1 \in I_2 = N_1$ donc $u(e_1) = 0_E$.

Posons $e_2 = u(e_3)$. Comme $u_{e_2} = u^2(e_3) = e_1$, e_2 n'est pas dans N_1 : (e_1, e_2) est libre. De plus $u^2(e_1) = u^4(e_3) = 0_E$ et $u^2(e_2) = u^3(e_3) = 0_E$. (e_1, e_2) est une base de N_2 (famille libre maximale). Comme e_3 n'est pas élément de N_2 , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille libre de E . Comportant 3 éléments, c'est une base de E . Des relations $u(e_1) = 08E$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$, on déduit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. On remarque que $N_q = E$ et $N_{q-1} \neq E$. Comme le noyau ne peut plus grossir, la suite $(N_k)_k$ est constante à partir du rang q et $N_{q-1} \neq N_q$. L'indice q est celui à partir duquel la suite des noyaux est stationnaire donc $q \leq n$. De plus, si $x \in N^k$, $u(x) \in N_{k-1}$.

Comme $N_1 = \text{Ker}(u) \subsetneq N_2 \cdots \subsetneq N_q = E$, on peut construire une base $\mathcal{B}'$ de E de la façon suivante : on part de $\mathcal{B}_1$ une base du noyau, qu'on complète en une base $\mathcal{B}_2$ de N_2 ; puis de proche en proche, si $\mathcal{B}_k$ est une base de N_k (contenant les bases précédemment créées), on la complète en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de N_{k+1} . La dernière base $\mathcal{B}_q$ créée est une base de E . Soit A la matrice de u dans cette base.

Soit e_j le j -ème vecteur de cette base et k le premier indice tel que $e_j \in N_k$.

Si $k = 1$, $u(e_j) = 0$; la colonne j de A ne contient que des 0. Si $k > 1$, $u(e_j) \in N_{k-1}$, donc $u(e_j) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_{k-1})$; les éléments de $\mathcal{B}_{k-1}$ ont des indices strictement inférieurs à j donc $a_{i,j} = 0$ si $j \geq i$.

La matrice M est triangulaire supérieure avec des 0 sur sa diagonale.

□

Correction de l'Exercice 17

[Retour à l'énoncé](#)

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A^3 = B$ les matrices A et B commutent. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice B . On a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB = BA$ impose $a_{2,1} = a_{3,1} = a_{3,2} = 0$ (A est triangulaire supérieure) et $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3}$

et $a_{1,2} = a_{2,3}$; ainsi si A existe, A est de la forme $aI_3 + bB + cB^2$ puisque $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors par la formule du binôme (I_3 , B et B^2 commutent) en tenant compte que $B^3 = 0$:

$$A^3 = a^3 I_3 + 3a^2(bB + cB^2) + 3a(bB + cB^2)^2 = a^3 I_3 + 3a^2 bB + (3a^2 c + 3ab^2)B^2.$$

Comme (I_3, B, B^2) est une famille libre, $A^3 = B$ si et seulement si $\begin{cases} a^3 = 0 \\ 3a^2 b = 1 \\ 3a^2 c + 3ab^2 = 0 \end{cases}$. Ce

système est impossible car la première équation impose $a = 0$ ce qui est incompatible avec la seconde équation.

Conclusion : il n'existe pas de matrice telle que $A^3 = B$.

□

Correction de l'Exercice 18[Retour à l'énoncé](#)

Le rang d'un produit de matrices est majoré par le rang des matrices composant ce produit. Les trois matrices étant de rang au plus 2, il en est de même de leur produit ABC . ABC n'est donc pas inversible ; son déterminant est nul ; or par développement colonne 2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3x + 6,$$

donc $x = -3$.

□

Correction de l'Exercice 19[Retour à l'énoncé](#)

On procède à un calcul en blocs. On découpe A sous la forme suivante $A = \begin{pmatrix} L \\ A_1 \end{pmatrix}$ où A_1 est carrée d'ordre 2 et L une matrice ligne de taille $(1, 2)$ et $B = \begin{pmatrix} C & B_1 \end{pmatrix}$ où B_1 est carrée d'ordre 2 et C une matrice colonne de taille $(2, 1)$. On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} LC & LB_1 \\ A_1C & A_1B_1 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par identification $A_1B_1 = I_2$, $A_1C = 0_{2,1}$ et $LB_1 = 0_{1,2}$. A_1 et B_1 sont donc inversibles, inverses l'une de l'autre. Aussi $C = 0_{2,1}$ et $L = 0_{1,2}$. Or $BA = CL + B_1A_1 = B_1A_1 = I_2$.

□

Correction de l'Exercice 20[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $Z = X + iY$ et $Z' = X' + iY'$. Pour tout réel α :

$$h(\alpha Z + Z') = h(\alpha X + X' + i(\alpha Y + Y')) = \begin{pmatrix} \alpha X + X' \\ \alpha Y + Y' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

ce qui prouve le caractère linéaire de h .

L'application est de noyau nul et est surjective, l'antécédent de X de coordonnées

$(x_1, \dots, x_{2n})$ étant $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$. h est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ (en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) si et seulement si pour tout couple (Z, Z') , $\Phi(Z + Z') = \Phi(Z) + \Phi(Z')$ et pour tout complexe $\lambda = \alpha + i\beta$ et tout Z ,

$$\Phi(\lambda Z) = \lambda \Phi(Z) = (\alpha + i\beta)\Phi(Z).$$

Or Φ étant une composée d'endomorphismes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, si a est réel

$$\Phi(aZ + Z') = a\Phi(Z) + \Phi(Z').$$

En particulier $\Phi(Z + Z') = \Phi(Z) + \Phi(Z')$ et $\Phi((\alpha + i\beta)Z) = \alpha\Phi(Z) + \beta\Phi(iZ)$. Φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ si et seulement si pour tout Z , $\Phi(iZ) = i\Phi(Z)$.

Posons $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, les 4 blocs étant des matrices carrées d'ordre n et calculons $\Phi(Z)$ avec $Z = X + iY$.

$$f \circ h(X + iY) = L \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ CX + DY \end{pmatrix}$$

et $\Phi(Z) = AX + BY + i(CX + DY)$.

Comme $iZ = -Y + iX$, $\Phi(iZ) = (-AY + BX) + i(-CY + DX)$. Aussi $\Phi(iZ) = i\Phi(Z)$ pour tout Z si et seulement si

$$(1) \forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad -AY + BX = -(CX + DY) \text{ et } -CY + DX = AX + BY$$

En appliquant (1) pour $Y = 0$, on trouve que pour tout X , $BX = -CX$ et $DX = AX$ soit $B = -C$ et $A = D$. Réciproquement si $B = -C$ et $A = D$, la relation (1) est vérifiée. On a donc prouvé que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si il existe deux matrices A

et B carrées d'ordre n telles que $L = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.

Soit $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$.

Un calcul matriciel en blocs donne alors $LJ = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix}$ et $JL = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$. L et J commutent si et seulement si $A = D$ et $B = -C$. On retrouve bien les conditions précédentes.

□

Correction de l'Exercice 21

[Retour à l'énoncé](#)

1. On développe le déterminant suivant la première ligne; le cofacteur de a est Δ_{n-1} et celui

de b est $- \begin{vmatrix} c & L \\ 0_{n-2,1} & A_{n-2} \end{vmatrix}$ avec L une matrice uniligne; ce cofacteur vaut donc $-c\Delta_{n-2}$. Ainsi

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$$

relation de récurrence linéaire avec $\Delta_1 = a$ et $\Delta_2 = a^2 - bc$. On peut poser $\Delta_0 = 1$ (pour que Δ_2 vérifie la relation précédente) pour commencer la suite au rang 0. On est ramené à l'étude d'une récurrence linéaire double dont (E) l'équation caractéristique est $x^2 - ax + bc = 0$.

On distingue 3 cas suivant le signe de $\delta = a^2 - 4bc$.

- $\delta > 0$: (E) a deux racines réelles distinctes α et β . Alors il existe deux réels λ et μ tel que

$$\forall n, \Delta_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

$$\text{Or } \begin{cases} \Delta_0 = \lambda + \mu = 1 \\ \Delta_1 = \lambda\alpha + \mu\beta = a = \alpha + \beta \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne alors : $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}$ et $\mu = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$. Ainsi, pour tout n ,

$$\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

- $\delta = 0$: $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$. Alors il existe deux réels λ et μ tel que

$$\forall n, \Delta_n = (\lambda + n\mu)\alpha^n.$$

$$\text{Or } \begin{cases} \Delta_0 = \lambda = 1 \\ \Delta_1 = (\lambda + \mu)\alpha = a = 2\alpha \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne alors : $\lambda = \mu = 1$.
Ainsi, pour tout n ,

$$\Delta_n = (n+1)\alpha^n.$$

- $\delta < 0$: La solution est écrite sous forme complexe $\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$. α et β sont conjugués. Soit $\alpha = re^{i\theta}$ et $\beta = re^{-i\theta}$. On obtient alors :

$$\forall n, \Delta_n = \frac{r^n \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Remarque : $\sin(\theta)$ ne s'annule pas car α n'est pas réel.

2. En enlevant à chaque ligne la précédente (pour $2 \leq i \leq n$, $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$), on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

autrement dit, en dehors de la première ligne qui est inchangée, le terme (i, j) vaut 1 si $i > j$ et -1 sinon. En ajoutant la première colonne à toutes les autres, on obtient alors :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

puis en développant suivant la dernière colonne :

$$D_n = (-1)^{n+1}(n-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-1}$$

le dernier déterminant obtenu étant celui d'une matrice triangulaire inférieure.

3. Soient B la matrice unicolonne de terme général b_i et E_j la matrice unicolonne de terme général $\delta_{i,j}$ (valant 1 si $i = j$ et 0 sinon). On a donc à calculer

$$D = \det(a_1 E_1 + B, a_2 E_2 + B, \dots, a_n E_n + B)$$

Par linéarité par rapport à chaque colonne et la propriété d'antisymétrie du déterminant :

$$D = \prod_{i=1}^n a_i \det(E_1, E_2, \dots, E_n) + \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} a_j \right) \det(E_1, \dots, E_{i-1}, B, E_{i+1}, \dots, E_n)$$

Or $B = \sum_{j=1}^n b_j E_j$ donc

$$\det(E_1, \dots, E_{i-1}, B, E_{i+1}, \dots, E_n) = \sum_{j=1}^n b_j \det(E_1, \dots, E_{i-1}, E_j, E_{i+1}, \dots, E_n).$$

Il ne reste que $b_i \det(E_1, \dots, E_n)$ les autres termes étant nuls ayant E_j en place i et j . Comme $\det(E_1, E_2, \dots, E_n) = \det(I_n) = 1$,

$$D = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} a_j \right) b_i.$$

4. Soit M_n la matrice carrée d'ordre n de terme général $\frac{1}{a_i + b_j}$ et D_n son déterminant.

On remarque que si $a_i = a_j$ les colonnes i et j de M_n sont égales, le déterminant est alors nul ; par différence des colonnes C_i et C_j , on pourra mettre en facteur $a_i - a_j$. Or pour tout couple i et j :

$$\frac{1}{a_j + b_i} - \frac{1}{a_n + b_i} = \frac{a_n - a_j}{(a_n + b_i)(a_j + b_i)}.$$

Ainsi en remplaçant successivement pour $1 \leq j \leq n-1$, la colonne j par sa différence avec la dernière colonne (opération : $C_j \leftarrow C_j - C_n$), on obtient :

$$D_n = \prod_{j=1}^{n-1} (a_n - a_j) \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_n + b_1)(a_1 + b_1)} & \frac{1}{(a_n + b_1)(a_2 + b_1)} & \dots & \frac{1}{(a_n + b_1)(a_{n-1} + b_1)} & \frac{1}{a_n + b_1} \\ \frac{1}{(a_n + b_2)(a_1 + b_2)} & \vdots & \dots & \frac{1}{(a_n + b_2)(a_{n-1} + b_2)} & \frac{1}{a_n + b_2} \\ \vdots & \frac{1}{(a_n + b_i)(a_j + b_i)} & & \vdots & \\ \frac{1}{(a_n + b_{n-1})(a_1 + b_{n-1})} & & & \frac{1}{(a_n + b_{n-1})(a_{n-1} + b_{n-1})} & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} \\ \frac{1}{(a_n + b_n)(a_1 + b_n)} & \dots & \dots & \frac{1}{(a_n + b_n)(a_{n-1} + b_n)} & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$$

On remarque alors que sur la ligne i , on peut mettre en facteur $\frac{1}{a_n + b_i}$; d'où :

$$D_n = \frac{1}{a_n + b_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{a_n - a_j}{a_n + b_j} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & 1 \\ \frac{1}{a_1 + b_2} & \vdots & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_2} & 1 \\ \vdots & \frac{1}{a_j + b_i} & & \vdots & \\ \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & & & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_1 + b_n} & \dots & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} & 1 \end{vmatrix}.$$

Par les calculs fait précédemment, en échangeant les rôles des lignes et des colonnes et des a_i et b_i , on obtient qu'en enlevant la dernière ligne à successivement à toutes les autres

$$D_n = \frac{1}{a_n + b_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_j)(b_n - b_j)}{(a_n + b_j)(b_n + a_j)} \begin{vmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ L & 1 \end{vmatrix}$$

et donc $D_n = \frac{1}{a_n + b_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_j)(b_n - b_j)}{(a_n + b_j)(b_n + a_j)} D_{n-1}$. En utilisant cette relation successivement de l'ordre 2 à l'ordre n (ou par récurrence), on obtient alors :

$$D_n = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(a_k - a_j)(b_k - b_j)}{(a_k + b_j)(b_k + a_j)} \prod_{2 \leq k \leq n} \frac{1}{a_k + b_k} D_1$$

Or $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$ donc

$$D_n = \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(a_k - a_j)(b_k - b_j)}{(a_k + b_j)(b_k + a_j)} \prod_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{a_k + b_k}.$$

5.

a. Pour faire apparaître $(x - a)^4$ en place (1, 5), on effectue l'opération suivante $C_5 \leftarrow C_5 - 4aC_3 + 6a^2C_3 - 4a^3C_1 + a^4C_1$ (ce codage signifie qu'à la colonne 5 on ajoute la combinaison linéaire $-4aC_3 + 6a^2C_3 - 4a^3C_1 + a^4C_1$ des autres colonnes). Soit d_i le terme obtenu en place $(i, 5)$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_1 &= a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 = (x - a)^4 \\ d_2 &= a^4 - 8xa^3 + 18a^2x^2 - 16ax^3 + 5x^4 = D_1(x) \\ d_3 &= a^4 - 16a^3x + 54a^2x^2 + 64ax^3 + 25x^4 = D_2(x) \\ d_4 &= (y - a)^4 \\ d_5 &= D_1(y) \end{aligned}$$

On peut vérifier que a en est une racine multiple de D_1 et D_2 en évaluant ce polynôme et ses dérivées successives en a . On vérifie que $D_1(a) = D_1'(a) = D_1''(a) = 0$ et $D_2(a) = D_2'(a) = 0$ ce qui prouve que a est racine au moins triple de D_1 et racine au moins double de D_2 . On a alors $D_1(x) = (x - a)^3(\alpha X + \beta)$: en regardant le terme dominant $\alpha = 5$ et en identifiant les termes constants $\beta = -a$.

Cependant il y a une méthode plus rapide en remarquant que la ligne 2 (resp 3) est formée à partir de la ligne 1 (resp 2) en la multipliant par x puis en la dérivant. On a alors par combinaison linéaire :

$$D_1(x) = \frac{d}{dx} (x(x - a)^4) = (x - a)^3((x - a) + 4x) = (x - a)^3(5x - a)$$

$x D_1(x)$ admet a comme racine au moins triple donc sa dérivée D_2 admet a comme racine au moins double, ce qui prouve le résultat demandé, $D_2(x) = (x - a)^2 Q_2(x)$.

b. On applique la question précédente avec $x = a$ et on obtient :

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 0 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 0 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & (y - x)^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & (y - x)^3(5y - x) \end{vmatrix} = (y - x)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 0 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 0 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & (y - x) \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & (5y - x) \end{vmatrix}$$

On recommence la même manipulation qu'en première question pour faire apparaître $(y-x)^3$ en place $(4, 4)$, soit $C_4 \leftarrow C_4 - 3xC_3 + 3x^2C_2 - x^3C_1$ et on obtient :

$$D(x, y) = (y-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 0 & 0 \\ 1 & y & y^2 & (y-x)^3 & (y-x) \\ 1 & 2y & 3y^2 & D_3(x, y) & (5y-x) \end{vmatrix}$$

où $D_3(x, y) = 4y^3 - 9y^2x + 6yx^2 - x^3 = (y-x)(4y^2 - 5yx + x^2) = (y-x)^2(4y-x)$. Après mise en facteur de $(y-x)^2$ en colonne 4, on a donc un calcul de déterminant en blocs :

$$D(x, y) = (y-x)^5 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 4x & 9x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (y-x) & (y-x) \\ 4y-x & (5y-x) \end{vmatrix}.$$

Dans le premier des déterminants, on met x en facteur sur la colonne 2 et x^2 sur la colonne 3, il reste le déterminant de VanDerMonde $V(1, 2, 3)$ qui vaut $(3-2)(3-1)(2-1) = 2$:

$$D(x, y) = (y-x)^5 x^3 (y-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4y-x & (5y-x) \end{vmatrix} = 2x^3 y (y-x)^6.$$

6. On va opérer comme dans la question précédente en faisant apparaître $(y-a)^n$ en place $(n+1, n+1)$. Soit a un réel fixé et l'opération suivante $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} C_{k+1}$.

Le terme $(i, n+1)$ (avec $i \leq n$) devient donc un polynôme $D_i(x)$

On a immédiatement $D_1(x) = (x-a)^n$. On remarque que le passage de la ligne i à la ligne $i+1$ pour $i < n$ (dans le déterminant initial et donc dans celui obtenu par l'opération précédemment décrite) se fait par l'opération $L_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(xL_i(x))$ donc $D_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}(xD_i(x))$. Par récurrence, on vérifie que a est racine d'ordre $n+1-k$ de D_k .

Initialisation : a est racine d'ordre n de D_1 .

Hérédité : supposons que a est racine d'ordre $n+1-k$ de D_k avec $k < n$. $xD_1(X)$ admet encore a comme racine d'ordre au moins $n+1-k$ de D_k et son polynôme dérivé D_{k+1} admet a comme racine d'ordre au moins $n-k$. On a ainsi prouvé par récurrence que pour $1 \leq i \leq n$, $D_i(x) = (x-a)^{n+1-i} Q_i(x)$ (a est racine de tous les polynômes introduits). En choisissant $x = a$, on obtient alors en désignant par $\Delta(x, y)$ le déterminant à calculer :

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^k & \dots & x^{n-1} & 0 \\ 1 & 2x & \dots & (k+1)x^k & \dots & nx^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1}x & \dots & (k+1)^{n-1}x^k & \dots & n^n x^{n-1} & 0 \\ 1 & y & \dots & y^k & \dots & y^{n-1} & (y-x)^n \end{vmatrix}$$

Soit

$$\Delta(x, y) = (y-x)^n \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^k & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 2x & \dots & (k+1)x^k & \dots & nx^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1}x & \dots & (k+1)^{n-1}x^k & \dots & n^n x^{n-1} \end{vmatrix}$$

En mettant x^{k-1} en facteur sur la colonne k il reste $V(1, 2, \dots, n)$:

$$\Delta(x, y) = (y - x)^n x^s V(1, 2, \dots, n)$$

avec $s = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ et $V(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (k - i) = \prod_{k=2}^n (k-1)!$ d'où le résultat

$$\Delta(x, y) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} k! \right) x^{\frac{n(n-1)}{2}} (y - x)^n.$$

□

Correction de l'Exercice 22

[Retour à l'énoncé](#)

1. On effectue sur le déterminant de J les opérations $L_{k+n} \leftarrow L_{n+k} - iL_k$ pour k variant de 1 à n , opérations élémentaires qui ne change pas le déterminant. On a alors :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & 2I_n \end{vmatrix}$$

et par calcul en bloc $\det(J) = \det(I_n) \det(2I_n) = 2^n$.

2. Prouvons cette relation par récurrence sur la taille p de la matrice.

Initialisation : si $p = 1$, $M = (\alpha)$, $\det(M) = \alpha$, $\overline{M} = (\overline{\alpha})$ et $\det(\overline{M}) = \overline{\alpha} = \overline{\det(M)}$.

Hérédité : Supposons que si M est carrée de taille p , M et $\overline{M}$ ont des déterminants conjugués.

Soit M carrée d'ordre $p+1$ de terme général $m_{i,j}$. Par développement ligne 1

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j} m_{1,j} \det(M_{1,j})$$

où $M_{1,j}$ est la matrice extraite de la matrice M en enlevant la ligne 1 et la colonne j . En développant $\det(\overline{M})$ suivant la ligne 1 :

$$\det(\overline{M}) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{1+j} \overline{m_{1,j}} \det(\overline{M_{1,j}}).$$

Par hypothèse de récurrence, les matrices $M_{1,j}$ étant carrée d'ordre p , $\det(\overline{M_{1,j}}) = \overline{\det(M_{1,j})}$.

Par les règles de calcul sur les conjugués, on a donc bien $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.

On a donc pour tout p et toute matrice carrée d'ordre p , $\det(M) = \det(\overline{M})$.

3. Par calcul matriciel en blocs :

$$MJ = \begin{pmatrix} A - iB & iA - B \\ iA + B & A + iB \end{pmatrix} \text{ et } JP = \begin{pmatrix} C_1 & iC_2 \\ iC_1 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Aussi $MJ = JP$ si et seulement si $C_1 = A - iB$ et $C_2 = A + iB$.

Pour ces valeurs de C_1 et C_2 , on a alors

$$\det(MJ) = \det(M) \det(J) = \det(JP) = \det(J) \det(P)$$

et comme $\det(J)$ est non nul

$$\det(M) = \det(P) = \det(C_1) \det(C_2) = \det(A - iB) \det(A + iB).$$

C_1 et C_2 étant deux matrices conjuguées, $\det(C_2) = \overline{\det(C_1)}$ et $\det(M) = |\det(C_1)|^2 \geq 0$.
Si A et B commutent, $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$ et

$$\det(M) = \det((A + iB)(A - iB)) = \det(A^2 + B^2).$$

□

Correction de l'Exercice 23

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $r = \inf(p, q)$. Les matrices A et B sont de rang au plus r ; il en est de même de leurs produits AB et BA . Les matrices AB et BA sont carrées de tailles respectives p et q . Si $p < q$, BA est carrée de taille q de rang au plus $p < q$ donc $\det(BA) = 0$; si $q < p$, AB est carrée d'ordre p et de rang strictement inférieur donc $\det(AB) = 0$.

Comme $p \neq q$, l'une des deux matrices BA ou AB est de déterminant nul; aussi $\det(AB)\det(BA) = 0$.

2. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ B & -I_q \end{pmatrix}$ matrices carrées d'ordre $p + q$. Alors par calcul en blocs :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} -I_p + AB & -A \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \text{ et } M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -I_p & -A \\ 0 & BA - I_q \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices ayant même déterminant : $\det(AB - I_p)(-1)^q = (-1)^p \det(BA - I_q)$. En multipliant par $(-1)^{p+q}$: $(-1)^p \det(AB - I_p) = (-1)^q \det(BA - I_q)$ soit

$$\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA).$$

□

Correction de l'Exercice 24

[Retour à l'énoncé](#)

On rappelle que si $E_{i,j}$ représente la matrice élémentaire ayant un 1 en place (i, j) et des 0 partout ailleurs

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{j,k}$ vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.

Les $E_{i,j}$ formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de connaître leur image pour connaître Φ .

Pour tout entier i , $E_{i,1} E_{1,i} = E_{i,i}$ et $E_{1,i} E_{i,1} = E_{1,1}$ donc $\Phi(E_{i,i}) = \Phi(E_{1,1})$.

Si $i \neq j$, $E_{i,j} E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j} E_{i,j} = 0$ donc $\Phi(E_{i,j}) = \Phi(0) = 0$.

En posant $a = \Phi(E_{1,1})$, on a donc pour toute matrice $E_{i,j}$, $\Phi(E_{i,j}) = a \operatorname{tr}(E_{i,j})$. Les formes linéaires Φ et $a \operatorname{tr}$ coïncidant sur une base, elles sont égales.

Réciproquement, pour tout nombre a , $a \operatorname{tr}(AB) = a \operatorname{tr}(BA)$. Toutes les formes linéaires proportionnelles à la trace conviennent.

□

Correction de l'Exercice 25[Retour à l'énoncé](#)

L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme noyau de l'application linéaire $X \mapsto X + X^T - \text{tr}(X)A$.

En prenant la trace de l'équation proposée on obtient $2\text{tr}(X) = \text{tr}(X)\text{tr}(A)$. Distinguons alors deux cas suivant la trace de A .

- $\text{tr}(A) \neq 2$: Nécessairement X est de trace nulle. L'équation devient $X + X^T = 0_n$. L'ensemble des solutions est donc l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, puisque toute matrice antisymétrique et de trace nulle.
- $\text{tr}(A) = 2$: Les matrices antisymétriques conviennent toujours (ce sont les solutions de trace nulle). Si X est une solution de trace non nulle, $X + X^T$ étant symétrique, A doit être symétrique.

Si A est de trace 2 et n'est pas symétrique, l'ensemble des solutions est constitué des matrices antisymétriques (comme précédemment).

Dans le cas où A est symétrique de trace 2, la matrice A est aussi solution donc toute matrice de la forme $\lambda A + M$ avec M antisymétrique est encore solution. Montrons que ce sont les seules.

Soit X solution de trace a . $X - \frac{a}{2}A$ est encore solution de trace nulle ; c'est donc une matrice antisymétrique et

$$X = \frac{a}{2}A + M$$

avec M antisymétrique. Comme A n'est pas de trace nulle, elle n'est pas antisymétrique ; aussi l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \text{Vect}(A)$$

$$\text{donc } \dim(\mathcal{S}) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Correction de l'Exercice 26[Retour à l'énoncé](#)

On remarque que toute solution est de la forme $B + aA$ (avec $a = -\text{tr}(M)$). Recherchons les valeurs de a qui conviennent. $B + aA$ est solution si et seulement si :

$$aA + \text{tr}(B + aA)A = 0$$

Si $A = 0$, l'équation proposée devient $M = B$. B est la solution de cette équation.

On suppose dorénavant que A n'est pas la matrice nulle. On a alors

$$(1 + \text{tr}(A))a + \text{tr}(B) = 0.$$

On a alors trois cas à distinguer :

- $\text{tr}(A) \neq -1$: il y a une unique solution $M = B - \frac{\text{tr}(B)}{1 + \text{tr}(A)}A$ (ce qui inclut le cas $A = 0$).

- $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) \neq 0$: aucun nombre a convient : il n'y a pas de solution.
- $\text{tr}(A) = -1$ et $\text{tr}(B) = 0$: tout nombre a convient. Il y a une infinité de solutions, toute matrice de la forme $B + aA$ convient. L'ensemble des solutions est une droite affine.

□

Correction de l'Exercice 27[Retour à l'énoncé](#)**1.**

a. On désigne par C_i la i -ème colonne de A . Par définition du rang d'une matrice, l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ engendré par les colonnes de A est de dimension 1. Soit C un élément non nul de cet espace : c'est une base de $\mathcal{F}$; aussi pour tout i , il existe un scalaire a_i tel que $C_i = a_i C$. Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. On a bien $A = CL$.

b. Supposons que $A = CL = -C'L'$. La matrice CL a toutes ses colonnes proportionnelles à C , vecteur non nul puisque $A \neq 0$.

De même $-C'L'$ a toutes ses colonnes proportionnelles à C' , comme il s'agit de la même matrice, C et C' sont proportionnels :

$$\exists \lambda \text{ tel que } C' = \lambda C$$

avec $\lambda \neq 0$ puisque $C'L' \neq 0$.

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$ et $L' = \begin{pmatrix} \ell'_1 & \cdots & \ell'_n \end{pmatrix}$. On a donc pour

tout i , $c'_i = \lambda c_i$. Le terme (i, j) de CL (respectivement $C'L'$) est $c_i \ell_j$ (respectivement $c'_i \ell'_j$). Aussi pour tout couple (i, j) :

$$c_i \ell_j = -\lambda c_i \ell'_j$$

C étant non nul, il existe un indice k pour lequel c_k est non nul. En regardant la relation précédente pour $i = k$ et en divisant par c_k , on obtient alors :

$$\forall j \in [1, n], \ell_j = -\lambda \ell'_j$$

soit $L = -\lambda L'$ ou $L' = \frac{1}{\lambda} L$.

2.

a. Soit C et L tels que $A = CL$ avec $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \ell_i c_i = LC.$$

Or

$$A^2 = CLCL = C(LC)L = \text{tr}(A)CL = \text{tr}(A)A.$$

A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $A^2 = A$ donc si A est de rang 1, c'est la matrice d'un projecteur si et seulement si elle est de trace 1.

b. Pour avoir une matrice de projecteurs de rang 1, il suffit de choisir une matrice avec une seule colonne non nulle et ayant un 1 sur la diagonale. Les matrices $F_{i,i} = E_{i,i}$ et $F_{i,j} = E_{i,i} + E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont donc des matrices de projecteurs de rang 1. Si $i \neq j$, $E_{i,j} = F_{i,j} - F_{i,i}$; Les matrices élémentaires formant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ engendré par les $F_{i,j}$; aussi $\mathcal{F} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les $F_{i,j}$ avec $1 \leq i, j \leq n$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée de matrice de projecteurs de rang 1.

3.

a. Par le théorème du rang, le noyau de f est de dimension $n - 1$. $S = \text{Im } f + \text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\text{Ker } f$ c'est donc un espace de dimension $n - 1$ ou n .

Si S est de dimension $n - 1$, c'est le noyau de f et comme il contient aussi l'image de f , $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Si S est de dimension n , $S = E$ et la dimension de la somme étant égale à la somme des dimensions, la somme est directe donc $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique. f est de rang 1. Soit u un vecteur non nul de l'image. Etudions f suivant les deux cas possibles. Si $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$: $f(u) = 0$. Soit v un vecteur de E tel que $f(v) = u$. v n'étant pas dans le noyau de f , il engendre une droite supplémentaire du noyau. On complète u en une base du noyau $(u, e_3, \dots, e_n)$. Dans la base $(v, u, e_3, \dots, e_n)$, f a pour matrice $E_{2,1}$. A et $E_{2,1}$ représentant le même endomorphisme dans deux bases, elles sont semblables. Si $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, u n'est pas élément du noyau et il existe k non nul tel que $f(u) = ku$. Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base du noyau. Dans la base $(u, e_2, \dots, e_n)$, f a pour matrice kE_{11} . A et kE_{11} sont donc semblables. Dans ce dernier cas, $\text{tr}(A) = \text{tr}(kE_{11}) = k$.

c. Deux matrices semblables ont même trace aussi la condition donnée est nécessaire. Soient A et A' deux matrices de rang 1 de même trace k . D'après la question précédente, si elles sont de trace nulle, elles sont toutes les deux semblables à E_{21} et par transitivité de la relation de similitude, A et A' sont semblables. D'après la question précédente, si elles sont de trace non nulle, elles sont toutes les deux semblables à kE_{11} et par transitivité de la relation de similitude, A et A' sont semblables. □

Correction de l'Exercice 28

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Soit d_i le terme de D en place (i, i) . Soit $M' = \varphi(M)$. Le terme (i, j) de MD est $m_{i,j}d_j$ et celui de DM est $d_i m_{i,j}$ donc $m'_{i,j} = (d_j - d_i)m_{i,j}$. On remarque que $m'_{i,i} = 0$ pour tout i . Si $i \neq j$, $m'_{i,j} = 0$ si et seulement si $m_{i,j} = 0$ puisque $d_i \neq d_j$ par hypothèse sur D . Le noyau de φ est donc constitué des matrices diagonales. C'est le sous-espace vectoriel engendré par les $E_{i,i}$ donc un espace vectoriel de dimension n .

L'ensemble des matrices de diagonale nulle est le sous-espace vectoriel engendré par les $E_{i,j}$ avec $i \neq j$; il est donc de dimension $n^2 - n$ et il contient l'image de φ . Par le théorème du rang, l'image de φ est de dimension $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2 - n$. Aussi l'image de φ est constitué des matrices n'ayant que des 0 sur leur diagonale.

On peut remarquer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$.

b. Prouvons ce résultat par contraposition. Soit a un endomorphisme de E tel que pour

tout x , x et $a(x)$ soient colinéaires, c'est à dire

$$\forall x \in E, \exists \lambda(x) \in \mathbb{K} \text{ tel que } a(x) = \lambda_x x,$$

la propriété étant triviale pour 0_E puisque $a(0_E) = 0_E$.

Soit v un élément non nul de E . Posons $\lambda_v = \lambda$. Comme $a(v) = \lambda v$, pour tout scalaire α :

$$a(\alpha v) = \alpha a(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

ce qui prouve que pour tout vecteur x colinéaire à v , $a(x) = \lambda x$.

Soit x non colinéaire à v , il existe λ_x et λ_{x+v} tels que

$$a(x) = \lambda_x x \text{ et } a(x+v) = \lambda_{x+v}(x+v)$$

Comme a est linéaire :

$$\lambda_{x+v}x + \lambda_{x+v}v = a(x) + a(v) = \lambda_x x + \lambda v.$$

La famille (x, v) étant libre $\lambda_{x+v} = \lambda_x = \lambda$ et $a(x) = \lambda x$. On a ainsi vérifié que $a = \lambda id_E$.

Par récurrence sur n , montrons que toute matrice de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Initialisation : si $n = 1$, $A = (a)$ et $\text{tr}(A) = a = 0$: A est de diagonale nulle.

Hérédité : supposons la propriété vraie à l'ordre $n \geq 1$. Soit A une matrice carrée d'ordre $n+1$ et de trace nulle.

Si $A = \lambda I_{n+1}$, c'est la matrice nulle de diagonale nulle. A est semblable à elle-même.

Si A n'est pas colinéaire à l'identité, l'application $a : \begin{matrix} \mathbb{K}^{n+1} & \mapsto & \mathbb{K}^{n+1} \\ X & \mapsto & AX \end{matrix}$ n'est pas colinéaire à l'identité, donc il existe U tel que (U, AU) soit une famille libre d'après le début de la question. On complète cette famille libre en une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ dans laquelle a a pour matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A_1 \end{pmatrix}$$

avec L de taille $(1, n)$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et A' représentent le même endomor-

phisme respectivement dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}'$; aussi elles ont même trace. Ainsi :

$$\text{tr}(A') = 0 = \text{tr}(A_1).$$

Par hypothèse de récurrence, A_1 est semblable à une matrice A_2 de diagonale nulle. Ainsi il existe P_1 une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A_2 = P_1^{-1} A_1 P_1$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_1 \end{pmatrix}$,

P est inversible ($\det P = \det P_1$) et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & P_1^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul en blocs donne alors :

$$P^{-1} A' P = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A_2 \end{pmatrix} = A''$$

les $*$ représentant des termes qui n'ont pas besoin d'être calculés. A'' est de diagonale nulle, semblable à A' donc à A (par transitivité de la relation de similitude).

On a ainsi vérifié que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

c. Soient A de trace nulle, A' une matrice de diagonale nulle semblable à A et P une matrice telle que $A = P^{-1}A'P$. Soit D la matrice diagonale dont le i -ème terme est i et φ l'application associée dans la première question. A' appartient donc à l'image de φ ; il existe M telle que

$$A' = MD - DM$$

et on a alors

$$A = P^{-1}MDP - P^{-1}DMP = P^{-1}MPP^{-1}DP - P^{-1}DPP^{-1}MP = UV - VU$$

avec $U = P^{-1}MP$ et $V = P^{-1}DP$.

2.

a. Soit a l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique : $a^p = 0$. On désigne par q le plus petit entier naturel tel que $a^q = 0$ (ce nombre existe puisque $\{k \in \mathbb{N}, a^k = 0\}$ n'est pas vide). $q \neq 0$ car par convention $a^0 = id$. Par définition de q , on a alors $a^{q-1} \neq 0$. Par l'exercice sur les noyaux imbriqués $a^n = 0$ (donc $A^n = 0$) et il existe une base $\mathcal{B}'$ où A' la matrice de a n'a que des 0 sur sa diagonale. A et A' représentent un même endomorphisme dans deux bases distinctes, elles sont semblables; elles ont donc même trace et

$$\text{tr}(A') = 0 = \text{tr}(A).$$

b. Si A et B commutent $(AB)^n = A^n B^n = 0$: AB est nilpotente.

De plus si A et B commutent, par la formule du binôme :

$$(A + B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k B^{2n-k}.$$

Si $k \geq n$, $A^k = 0$ et si $k < n$, $2n - k > n$ et $B^{2n-k} = 0$, donc $(A + B)^{2n} = 0$: $A + B$ est nilpotente.

3.

a. Par sa définition, $\mathcal{N}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les matrices nilpotentes et il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant les matrices nilpotentes. Soit $\mathcal{N}'$ l'ensemble des matrices s'écrivant comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient les matrices nilpotentes et il est stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient les matrices nilpotentes, aussi $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$.

Un sous-espace vectoriel étant stable par combinaison linéaire, toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes éléments de $\mathcal{N}$ est élément de $\mathcal{N}$ aussi $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$. Par double inclusion, on a ainsi vérifié que $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$.

b. $E_{i,j}^2 = 0$ si $i \neq j$ donc les matrices $E_{i,j}$ sont nilpotentes. Soit $M = E_{i,i} - E_{i,j} + E_{j,i} - E_{j,j}$. Comme $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, $E_{i,i}M = E_{i,i} - E_{i,j} = E_{i,j}M$ et $E_{j,j}M = E_{j,i} - E_{i,j} = E_{j,i}M$, d'où $M^2 = 0$; M est nilpotente.

Ainsi $E_{i,i} - E_{j,j} = M + E_{i,j} - E_{j,i}$; comme combinaison linéaire de trois matrices nilpotentes, $E_{i,i} - E_{j,j}$ est élément de $\mathcal{N}$.

c. Soit A une matrice de trace nulle. Comme $a_{n,n} = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k,k}$, on a alors :

$$A = \sum_{i \neq j} a_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} (E_{i,i} - E_{n,n}).$$

Toute matrice de trace nulle est donc élément de $\mathcal{N}$ comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

Une matrice nilpotente étant de trace nulle, tout élément de $\mathcal{N}$ est de trace nulle comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. On a ainsi vérifié par double inclusion que $\mathcal{N}$ est le sous-espace vectoriel formé des matrices de trace nulle (noyau de l'application tr).

□

Correction de l'Exercice 29

[Retour à l'énoncé](#)

1. f^2 n'étant pas l'application nulle, il existe x tel que $f^2(x) \neq 0$.

Vérifions que $(x, f(x), f^2(x))$ est libre. Soient (a, b, c) tels que $ax + bf(x) + cf^2(x) = 0_E$. En composant par f^2 , comme $f^3(x) = f^4(x) = 0_E$, on a alors $af^2(x) = 0_E$ et $f^2(x)$ étant non nul, $a = 0$. Il reste $bf(x) + cf^2(x) = 0_E$. En composant par f , $b f^2(x) = 0_E$ donc $b = 0$; puis comme il ne reste que $c f^2(x) = 0_E$, $c = 0$.

$(x, f(x), f^2(x))$ est une famille libre à 3 éléments : c'est une base de E .

$(f(x), f^2(x))$ est donc une famille libre de $\text{Im}(f)$, le rang de f vaut au moins 2. De plus, $f^2(x)$ est élément non nul du noyau, donc la dimension du noyau vaut au moins 1. Par le théorème du rang, le rang de f vaut 2.

2. Procédons par analyse-synthèse.

Soit u un vecteur directeur d'une droite D stable par f ; comme $f(u)$ est élément de D , il existe λ tel que $f(u) = \lambda u$.

En écrivant u dans la base précédente, on a alors :

$$\begin{cases} u &= \alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) \\ f(u) &= \alpha f(x) + \beta f^2(x) \end{cases}$$

Comme l'écriture dans une base est unique $\begin{cases} \lambda \alpha = 0 \\ \lambda \beta = \alpha \\ \lambda \gamma = \beta \end{cases}$. On remarque que

$$\lambda \neq 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

u étant un vecteur directeur de D , il est non nul donc l'une des composantes est non nulle, aussi $\lambda = 0$ ce qui implique $f(u) = 0_E$ soit $\alpha = \beta = 0$. γ est alors non nul, D est la droite engendrée par $f^2(x)$. Si une droite est stable, cette droite est le noyau de f .

Le noyau de f étant stable par f , cette droite est l'unique droite stable par f .

3. Soit P un plan stable par f et y un élément de P n'appartenant pas à D : d'après la question précédente, $f(y)$ est non nul et non colinéaire à y ; de plus, P étant stable, c'est un

élément de P , $(y, f(y))$ est une famille libre de P de dimension 2 : c'est une base de P .
 $f^2(y)$ est élément de P donc il existe (α, β) tel que $f^2(y) = \alpha y + \beta f(y)$; comme $f^3(y) = 0_E$

$$0_E = \alpha f(y) + \beta f^2(y) = \beta \alpha y + (\alpha + \beta^2) f(y)$$

aussi $\beta \alpha = \alpha + \beta^2 = 0$ ce qui impose $\alpha = \beta = 0$. On a donc $f^2(y) = 0$; y est élément de $\text{Ker}(f^2)$.

4. Cherchons les sous-espaces propres suivant leur dimension. Le seul sous-espace de dimension 0 est $\{0_E\}$ stable par f . Le seul sous-espace de dimension 3 est E stable par f .

Par la question 2, la seule droite stable est $D = \text{Ker}(f)$.

Par la question 3, les plans stables sont inclus dans $F = \text{Ker}(f^2)$. Ce sous-espace contient $f(x)$ et $f^2(x)$ qui en forment une famille libre. F est donc de dimension au moins 2 mais comme $f^2 \neq 0$, ce n'est pas E . C'est donc un plan et le seul plan stable possible; f et f^2 commutant, il est bien stable par f .

On peut aussi remarquer que c'est l'image de f .

Ainsi, les sous-espaces stables sont $\{0_E\}, \text{Ker}(f), \text{Ker}(f^2)$ et E .

□

Correction de l'Exercice 30

[Retour à l'énoncé](#)

1. Cette question est une question de cours.

Soit x tel que $x = p(x)$; comme $p(x)$ est élément de $\text{Im}(p)$, x est élément de $\text{Im}(p)$.

Réciproquement soit x un élément de l'image de p ; par définition, il existe un élément y tel que $x = p(y)$; comme $p^2 = p$ (définition d'un projecteur) on a alors :

$$p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$$

ce qui prouve que tout élément de l'image est invariant par p . On a ainsi vérifié que :

$$\text{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\}.$$

2. Par composition à droite par u et décalage d'indice :

$$q \circ u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n+1-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} = u \circ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k} \right).$$

Or le terme pour $k=0$ est $p \circ u^n = p = u^n \circ p$ puisque $u^n = id_E$ donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k} = \frac{1}{n} \left(p + \sum_{k=1}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k} = q$$

ce qui prouve que q et u commutent.

Par récurrence sur i , on prouve alors que q commute avec u^i pour $i \geq 1$.

- Initialisation : cette dernière a été vue dans le début de la question $q \circ u = u \circ q$.
- Hérédité : soit $i \geq 1$ tel que (*) $u^i \circ q = q \circ u^i$. Alors :

$$u^{i+1} \circ q = u \circ u^i \circ q \underset{\text{par (*)}}{=} u \circ q \circ u^i = q \circ u \circ u^i = q \circ u^{i+1}$$

L'hérédité est donc démontrée.

On a donc vérifié que q commute avec toutes les puissances de u .

3. Soit $x \in E$. Pour tout k entier naturel $p \circ u^k(x) = p(u^k(x)) \in \text{Im}(p) = V$ et comme V est stable par u , $u \circ p \circ u^k(x)$ est élément de V .

Comme $q(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k}(x)$ est une combinaison linéaire d'éléments de V sous-espace vectoriel de E , $q(x)$ est élément de V . On a ainsi vérifié que $\text{Im}(q) \subset V$.

Par la question 1, on a alors comme $q(x)$ est élément de V pour tout x

$$p \circ q(x) = p(q(x)) = q(x)$$

soit $p \circ q = q$.

4. Calculons q^2 . Par définition de q , $q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ q$. Comme q commute pour tout $k \in [1, n]$ avec u^{n-k} :

$$q^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ \underbrace{p \circ q}_{p \circ q = p} \circ u^{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k} = q.$$

q est un projecteur.

Soient x un élément de E et k un entier naturel de $[1, n]$. Comme $p(x)$ est élément de V et que V est stable par u , $u^{n-k} \circ p(x)$ est élément de V et par la caractérisation de V vue en première question $p \circ u^{n-k} \circ p(x) = u^{n-k} \circ p(x)$ soit $p \circ u^{n-k} \circ p = u^{n-k} \circ p$. On a alors :

$$q \circ p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k \circ u^{n-k} \circ p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^n \circ p = p.$$

5. Soit $x \in V$. Par ce qui précède, $x = p(x) = q(p(x)) \in \text{Im}(q)$ ainsi $V \subset \text{Im}(q)$. L'inclusion réciproque ayant été démontrée en question 3, $V = \text{Im}(q)$. Comme l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires, on a prouvé que $\text{Ker}(q)$ est un supplémentaire de V . q et u commutant, $\text{Ker}(q)$ est stable par u .

□

Correction de l'Exercice 31

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $x \in \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f^2 + \text{id})$: il existe $y \in \text{Ker}(f)$ (soit $f(y) = 0$) et $z \in \text{Ker}(f^2 + \text{id})$ (soit $f^2(z) = -z$) tels que $x = y + z$.

Comme $f(y) = 0$, $f(z) = f(x)$ et $f^2(x) = f^2(z) = -z$ et $y = x - z = x + f^2(x)$. Si la décomposition existe, elle est unique. Donc

$$S = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f^2 + \text{id}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id}).$$

Soit $x \in E$. Posons $y = x + f^2(x)$ et $z = x - y = -f^2(x)$.

On a alors $f(y) = (f + f^3)(x) = 0$; y est élément de $\text{Ker}(f)$. De plus :

$$(f^2 + \text{id})(z) = -f^4(x) - f^2(x) = -f \circ (f^3 + f)(x) = 0$$

Aussi $x \in S$ et donc $S = E$.

2. Comme f n'est pas l'application nulle, son noyau est de dimension au plus 2 et ses supplémentaires donc $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$ sont de dimension au moins 1.

$\text{Ker}(f^2 + \text{id})$ contient donc des vecteurs non nuls. Soit x l'un d'eux. Comme f et $f^2 + \text{id}$ commutent, $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$ est stable par f : $f(x)$ est élément de $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$.

Vérifions par l'absurde que $(x, f(x))$ est libre. Si $f(x)$ est colinéaire à x , il existe a réel tel que $f(x) = ax$ et alors $f^2(x) = a^2x$ or $f^2(x) = -x$ donc $a^2 = -1$ ce qui est absurde car $a \in \mathbb{R}$. Ainsi $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$.

3.

a. Soit $V = \text{Ker}(f^2 + \text{id})$ et d sa dimension : alors $(f|_V)^2 = -\text{id}_V$ donc $\det(f|_V)^2 = (-1)^d$. Comme les carrés sont positifs, d est pair. Le seul nombre pair autre que 0 inférieur à 3 est 2.

b. $\text{Ker}(f^2 + \text{id})$ est donc de dimension 2. Soit x_1 un élément non nul de cet espace vectoriel $(x_1, f(x_1))$ en est une base d'après la question précédente.

Comme supplémentaire de V , $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1 : soit x_0 un élément de $\text{Ker}(f)$. Comme concaténation de bases d'espaces supplémentaires, $\mathcal{B} = (x_0, x_1, f(x_1))$ est une base de E ; compte-tenu que $f(f(x_1)) = f^2(x_1) = -x_1$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Si g commute avec f , il commute avec f^2 et avec $f^2 + \text{id}$ donc les noyaux de ces applications sont stables par g . Ainsi la matrice B de g dans $\mathcal{B}$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$.

On a alors f et g commutent si et seulement si

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & -e \\ 0 & b & c \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \\ 0 & e & -d \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à $b = e$ et $c = -d$.

Les endomorphismes du commutant sont les endomorphismes dont la matrice dans la base

$\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Si $u^2 = f$, u appartient au commutant de f . Soit $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base

$\mathcal{B}$. On a alors $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & 2bc \\ 0 & -2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}$ et

$$B^2 = A \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 - c^2 = 0 \\ 2bc = -1 \end{cases}$$

soit $a = 0$ et $b = -c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : la restriction de u au plan engendré par les deux derniers vecteurs de la base $\mathcal{B}$ est une rotation d'angle de mesure $\pm \frac{\pi}{4}$.

□

Correction de l'Exercice 32[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme il n'y a pas de droite stable, il n'y a pas de vecteurs propres donc le polynôme caractéristique de u n'a pas de racines réelles : son degré n est pair.

2. Soit x non nul. x n'est pas vecteur propre, $u(x)$ n'est pas colinéaire à x aussi $(x, u(x))$ est une famille libre et engendre un plan. L'image de ces vecteurs de base appartient à ce plan puisque $u^2(x) = -au(x) - bx$. Ce plan est stable par u et la restriction de u à ce plan a pour matrice dans la base $(x, u(x))$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

3. On recherche les plans stables par u de la forme précédente.

Posons $n = 2p$ et prouvons par récurrence pour $1 \leq k \leq p$ l'existence de vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ tels que $(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ est une famille libre de E .

- Initialisation : Soit x_1 non nul. Il a été vu précédemment que $(x_1, u(x_1))$ est libre et que $\Pi_1 = (x_1, u(x_1))$ est stable par u .
- Hérédité : Supposons que pour k compris entre 1 et $p-1$ il existe $(x_1, \dots, x_k)$ tels que $(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ est une famille libre de E . Posons $\Pi_j = \text{Vect}(x_j, u(x_j))$ pour $1 \leq j \leq k$ et $S_k = \bigoplus_{j=1}^k \Pi_j$.

Comme $\dim(S_k) = 2k < 2p = n$, $S_k \neq E$; il existe $x_{k+1} \notin S_k$.

Le plan $\Pi_{k+1} = \text{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$ est stable par u d'après la première question. Comme intersection de sous-espaces stables, $S_k \cap \Pi_{k+1}$ est stable par u . Ce sous-espace de Π_{k+1} n'est pas de dimension 2 car $x_{k+1} \notin S_k$ et n'est pas de dimension 1 par hypothèse sur u . Il est donc réduit à $\{0\}$, S_k et Π_{k+1} sont en somme directe et $(x_1, u(x_1), \dots, x_{k+1}, u(x_{k+1}))$ est une famille libre de E .

On a ainsi prouvé que pour $1 \leq k \leq p$, il existe une famille $(x_1, \dots, x_k)$ tels que $(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$ est une famille libre de E . En particulier, pour $k = p$, on a trouvé une famille libre maximale donc une base de E et en reprenant les notations précédentes, $E = \bigoplus_{j=1}^p \Pi_j$.

Dans cette base, d'après la première question, la matrice de u est diagonale en blocs, formé de p blocs égaux à A .

□

Correction de l'Exercice 33[Retour à l'énoncé](#)

1. Les sous-espaces triviaux $\mathbb{R}^n$ (de dimension n) et $\{0, \dots, 0\}$ (de dimension 0) sont stables par tous les endomorphismes.

Soit $e = (1, \dots, 1)$. Pour tout σ , $u_\sigma(e) = e$; e est fixe par tous les endomorphismes u_σ donc il en est de même de la droite D (de dimension 1) qu'il engendre.

De plus, si $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, par permutation des coordonnées, pour tout σ de S_n , $\sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} = 0$.

L'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ est stable par toutes les applications u_σ .

L'application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire de noyau $(x_i, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$

H . Comme $\phi(a, 0, \dots, 0) = a$ son image est $\mathbb{R}$. Par le théorème du rang, H est donc de dimension $n - 1$.

2. On désigne par e_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (sa coordonnée numéro i vaut 1 et toutes les autres sont nulles).

Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ autre que $\{0, \dots, 0\}$. Soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ élément de F . Soient i et j deux nombres distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\tau_{i,j}$ la transposition échangeant i et j . On a alors $\tau_{i,j}(v) - v$ élément de F (comme combinaison linéaire d'éléments de F) ; or :

$$\tau_{i,j}(v) - v = (v_j - v_i)(e_i - e_j) .$$

Si F n'est ni $\{0_E\}$ ni la droite D (définie en première question), F contient au moins un vecteur dont toutes les coordonnées ne sont pas égales. Soit v un tel vecteur et (i, j) un couple d'indices tels que $v_i \neq v_j$, $e_i - e_j$ est élément de F car colinéaire à $\tau_{i,j}(v) - v$.

Pour tout k différent de i , $\tau_{j,k}(e_i - e_j) = e_i - e_k$ est élément de F . La famille $\mathcal{F}$ des $n - 1$ vecteurs $e_i - e_k$ avec $k \neq i$ est une famille libre de F : F est de dimension au moins $n - 1$. De plus $e_i - e_k$ est élément de H donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) = H$; aussi $H \subset F$. Si F est de dimension $n - 1$, $F = H$ et si F est de dimension n $F = \mathbb{R}^n$.

Les sous-espaces trouvés en première question sont les seuls sous-espaces stables par toutes les applications u_σ .

□

Correction de l'Exercice 34

[Retour à l'énoncé](#)

1. Toutes les colonnes de A sont proportionnelles à sa première colonne car si C_j désigne la j -ième colonne $C_j = jC_1$. C_1 étant non nulle, le rang de la matrice est 1. Par le théorème du rang, le noyau (sous-espace propre associé à 0) est de dimension $n - 1$ et a pour équation $\sum_{j=1}^n jx_j = 0$.

La somme des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) comptées avec leur multiplicité est égal à la trace soit

$$s = \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

s est la dernière valeur propre de multiplicité 1. Un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image. $AC_1 = sC_1$.

En conclusion, il y a deux valeurs propres 0 de sous-espace propre associé l'espace de dimension $n - 1$ (hyperplan) d'équation $\sum_{j=1}^n jx_j = 0$ et s de sous-espace propre associé la droite engendré

par C_1 . Le polynôme caractéristique de A est donc $\chi_A = x^{n-1} \left(x - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$.

2. Soit C_j la j -ième colonne de B_α , U le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et V celui dont la i -ème composante est i . On remarque que $C_j = (\alpha + j)U + V$. U et V forment une base de l'image. Par le théorème du rang, le noyau est de dimension $n - 2$. Le rang du système $B_\alpha X = 0$ étant 2, il suffit de garder les deux premières lignes (qui ne sont

pas proportionnelles) :

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x_1 + \cdots + (\alpha + 1 + j)x_j + \cdots + (\alpha + 1 + n)x_n = 0 \\ (\alpha + 3)x_1 + \cdots + (\alpha + 2 + j)x_j + \cdots + (\alpha + 2 + n)x_n = 0 \end{cases}$$

soit en remplaçant la seconde ligne par la différence des deux équations :

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x_1 + \cdots + (\alpha + 1 + j)x_j + \cdots + (\alpha + 1 + n)x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_j + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs propres n'appartenant pas au noyau vérifient $B_\alpha X = sX$ avec s non nul ; ce sont donc des éléments de l'image. Soit $X = xU + yV$ l'un d'eux. Les images de U et V sont

$$\begin{aligned} B_\alpha U &= \sum_{j=1}^n C_j = (n\alpha + \frac{n(n+1)}{2})U + nV \\ B_\alpha V &= \sum_{j=1}^n jC_j = \left(\frac{n(n+1)\alpha}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)U + \frac{n(n+1)}{2}V \end{aligned}$$

Aussi $B_\alpha X = sX$ avec $(x, y) \neq 0$ si et seulement si le système

$$\begin{cases} \left(n\alpha + \frac{n(n+1)}{2} - s \right)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}y = 0 \\ nx + \left(\frac{n(n+1)}{2} - s \right)y = 0 \end{cases}$$

a une solution non nulle ce qui équivaut à dire que son déterminant Δ est nul. Or :

$$\Delta = s^2 - n(\alpha + n + 1)s + \frac{n^2(n+1)}{12} (3(n+1) - 2(2n+1)) = s^2 - n(\alpha + n + 1)s - \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}$$

$$\Delta = 0 \text{ admet deux racines non nulles } \frac{n}{2} \left(\alpha + n + 1 \pm \sqrt{(\alpha + n + 1)^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{3}} \right).$$

0 étant valeur propre de multiplicité au moins $n-2$, ces deux valeurs propres sont simples et les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

$$\text{Ainsi } \chi_B = x^{n-2} \left(x^2 - n(\alpha + n + 1)x - \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12} \right).$$

□

Correction de l'Exercice 35

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre s . Le système $AX = sX$

devient :

$$\begin{cases} -sx_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - sx_k + x_{k+1} = 0 \quad \text{si } k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \\ x_{n-1} - sx_n = 0 \end{cases}$$

Soit en imposant $x_0 = x_{n+1} = 0$, :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_{k-1} - sx_k + x_{k+1} = 0.$$

Commençons par chercher les valeurs propres réelles. L'équation caractéristique de cette récurrence double est $t^2 - st + 1 = 0$ de discriminant $\delta = s^2 - 4$. La forme des solutions dépend du signe de δ .

- $s^2 = 4$ donc $s = \pm 2$. La racine est $t = \varepsilon$ et il existe a et b tel que $x_k = (an + b)\varepsilon$. Le système $x_0 = x_{n+1} = 0$ impose $a = b = 0$. 2 et -2 ne sont donc pas valeurs propres.
- $s^2 > 4$: l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes t_1 et t_2 ; il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k, x_k = at_1^k + bt_2^k.$$

La condition $x_0 = 0$ impose $a = -b$ donc $x_{n+1} = a(t_1^{n+1} - t_2^{n+1})$. Comme $t_1 t_2 = 1$, les deux nombres sont de même signe ; aussi, $x_{n+1} = 0$ si et seulement si $a = 0$. Il n'y a pas de valeur propre réelle telle que $|s| > 2$.

- $|s| < 2$: l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées

$$t_1 = \frac{s + i\sqrt{4-s^2}}{2} \text{ et } t_2 = \overline{t_1}.$$

Soit $\theta = \arccos(\frac{s}{2}) \in]0, \pi[$; Alors $t_1 = e^{i\theta}$ et $t_2 = e^{-i\theta}$; il existe deux complexes a et b tels que

$$\forall k, x_k = at_1^k + bt_2^k.$$

La condition $x_0 = 0$ impose $b = -a$ d'où $x_k = 2ia \sin(k\theta)$. La condition $x_{n+1} = 0$ avec $a \neq 0$ est vérifiée si et seulement si $\sin((n+1)\theta) = 0$. Comme $\theta \in]0, \pi[$, les valeurs de θ possibles sont données par $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $s_k = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Les s_k étant deux à deux distincts, il y a n valeurs propres réelles, ce sont les seules. Le

sous-espace propre associé à s_k est la droite de vecteur directeur $X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$.

Ayant n valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable.

□

Correction de l'Exercice 36

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $a = 0$ ou $b = 0$, la matrice est diagonale de diagonale nulle. Son polynôme caractéristique est X^n et est donc de la forme voulue.

On suppose dans la suite de la question que a et b sont non nuls.

Cherchons les valeurs propres de A . s est valeur propre si et seulement si il existe X non nul tel que $AX = sX$. La ligne k de ce système est donc :

$$(L_k) : -\sum_{j=1}^{k-1} bx_j + sx_k - \sum_{j=k+1}^n ax_j = 0$$

la première somme étant vide pour $k = 1$ et la dernière pour $k = n$. On obtient un système équivalent en remplaçant dans ce système chaque ligne L_k par $L_k - L_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, ces opérations étant indépendantes. Aussi $AX = sX$ équivaut à

$$\begin{cases} (s+b)x_k - (s+a)x_{k+1} = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ -\sum_{j=1}^{n-1} bx_j + sx_n = 0 \end{cases} \quad \text{Si } s = -b, \text{ les } n-1 \text{ premières lignes}$$

donnent alors $x_k = 0$ pour $k \geq 2$ et la dernière devient $-bx_1 = 0$ soit $x_1 = 0$. $-b$ n'est pas valeur propre.

Si $s \neq -b$, $x_k = \frac{s+a}{s+b} x_{k+1}$ aussi $x_k = \left(\frac{s+a}{s+b}\right)^{n-k} x_n$ pour $k < n$. On a alors :

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j = \frac{s+a}{s+b} \frac{\left(\frac{s+a}{s+b}\right)^{n-1} - 1}{\frac{s+a}{s+b} - 1} = \frac{s+a}{a-b} \frac{(s+a)^{n-1} - (s+b)^{n-1}}{(s+b)^{n-1}}$$

et la dernière équation multipliée par $(s+b)^{n-1}$ devient :

$$\frac{-b(s+a)^n + b(s+b)^{n-1}(s+a) + (a-b)s(s+b)^{n-1}}{a-b} x_n = 0$$

X est non nul si et seulement si $x_n \neq 0$. s est valeur propre si et seulement si

$$0 = \frac{-b(s+a)^n + b(s+b)^{n-1}(s+a) + (a-b)s(s+b)^{n-1}}{a-b} = \frac{a(s+b)^n - b(s+a)^n}{a-b}.$$

Les valeurs propres de A sont donc les racines de $a(s+b)^n - b(s+a)^n = 0$ ce qui équivaut à $\left(\frac{s+a}{s+b}\right)^n = \frac{a}{b} \neq 1$. Le complexe $\frac{a}{b}$ admet n racines n -ièmes distinctes α_k pour $1 \leq k \leq n$.

L'équation $s+a = \alpha_k(s+b)$ admet une racine puisque $\alpha_k \neq 1$ donnée par $s_k = \frac{b\alpha_k - a}{1 - \alpha_k}$. Ces nombres sont des racines de χ_A polynôme caractéristique de A ; étant au nombre de n , degré du polynôme caractéristique de A , ce sont les seules et elles sont de multiplicité 1; aussi

$$\chi_A = \lambda \frac{a(s+b)^n - b(s+a)^n}{a-b}$$

mais χ_A étant unitaire, $\lambda = 1$. On a ainsi démontré que $\chi_A = \frac{a(s+b)^n - b(s+a)^n}{a-b}$

2. Si $b = 0$, la seule valeur propre est 0 et a étant non nul, la dimension du noyau diffère de la multiplicité dans le polynôme caractéristique : A n'est pas diagonalisable.

Si $b \neq 0$, A a n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

□

Correction de l'Exercice 37

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. M est de rang au plus 1 toutes ses colonnes étant proportionnelles à C . Si C est non nul, l'une des colonnes est non nulle et le rang de C est 1 et si C est le vecteur nul, M est la matrice nulle de rang 0. Le noyau est au moins de dimension $n-1$. Le polynôme caractéristique est donc $X^{n-1}(X - \text{tr}(C))$ soit $X^{n-1}(X - \sum_{j=1}^n a_j^2)$.

b. Si $C = 0$, M est la matrice nulle qui est diagonale (donc diagonalisable).

Supposons maintenant C non nul et posons $s = \sum_{j=1}^n a_j^2$.

Distinguons différents cas

- $s \neq 0$: Les valeurs propres sont 0 de multiplicité $n - 1$ égal à la dimension du noyau sous-espace propre associé et s valeur propre simple dont l'espace propre associé est nécessairement de dimension 1 : la somme des dimensions des sous-espaces propres est n , M est diagonalisable.
- $s = 0$: le corps de base est $\mathbb{C}$; 0 est une valeur propre de multiplicité n alors que le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$: M n'est pas diagonalisable.

2.

a. Soit s valeur propre non nulle de AB : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $ABX = sX$. sX étant non nul, $BX \neq 0$. En multipliant à gauche par B on obtient $BABX = sBX$. BX est vecteur propre de BA pour la valeur s . Toute valeur propre non nulle de AB est valeur propre non nulle de BA .

En échangeant les rôles de A et B (et de n et p), toute valeur propre non nulle de BA est valeur propre de AB .

AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b. On recherche un couple de matrices M_1 et M_2 dont les déterminants de $M_1 M_2$ et $M_2 M_1$ sont $X^p \det(XI_n - AB)$ et $X^n \det(XI_p - BA)$, expressions de produits qui font penser à des calculs en blocs. Soit les matrices carrées d'ordre $n + p$ suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} -A & XI_n \\ -I_p & O_n \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} B & XI_p \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

Alors :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} -AB + XI_n & 0_p \\ B & XI_p \end{pmatrix} \text{ et } M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -BA + XI_p & XB \\ 0_p & XI_n \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices ont même déterminant. Or $\det(M_1 M_2) = X^p \det(XI_n - AB)$ et $\det(M_2 M_1) = X^n \det(XI_p - BA)$. On obtient bien ainsi la relation voulue.

Dans le cas où $n = p$, on a alors :

$$X^n \det(XI_n - AB) = X^n \det(XI_n - BA)$$

ce qui après simplification par X^n prouve que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

c. Soit $A = C$ et $B = C^T$ donc $p = 1$. BA est le réel s . D'après la question précédente, on a alors :

$$X \det(XI_n - M) = X^n (X - s)$$

et on retrouve le fait que le polynôme caractéristique de M est $X^{n-1}(X - s)$.

□

Correction de l'Exercice 38

[Retour à l'énoncé](#)

1. Cherchons les valeurs propres de n ; Soit s une valeur propre et x un vecteur propre associé. $n^k(x) = s^k x$ pour tout entier naturel k ; ce qui peut être démontré par récurrence. En particulier $s^q x = n^q(x) = 0$; et comme x est non nul, $s^q = 0$ ce qui impose $s = 0$. 0 est la seule valeur propre de n . Son polynôme caractéristique est un polynôme de degré p , unitaire n'admettant que 0 comme racine : c'est X^p .

Aussi pour tout complexe z , $\det(zid_E - n) = z^p$. En choisissant $z = -1$, on obtient

$$\det(id_E + n) = (-1)^p \det(-id_E - n) = (-1)^{2p} = 1.$$

2. $u + n = u \circ (id_E + u^{-1} \circ n) = u \circ (id_E + v)$ avec $v = u^{-1} \circ n$. Montrons que v est nilpotent. Comme u et n commutent, $u \circ n = n \circ u$ et en composant à gauche et à droite par u^{-1} , on obtient $n \circ u^{-1} = u^{-1} \circ n$; u^{-1} et n commutent. Aussi pour tout k , $v^k = (u^{-1})^k \circ n^k$. Si $n^q = 0$, $v^q = 0$ donc v est nilpotent et par la première question, $\det(id_E + v) = 1$; par conséquent

$$\det(u + n) = \det(u) \det(id_E + v) = \det(u) .$$

□

Correction de l'Exercice 39

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $AX = sX$ alors par récurrence immédiate sur k , $A^k X = s^k X$. On a alors

$$(A^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j A^{k-1-j})X = P(s)X = 0$$

Si s est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à s , X est non nul et donc $P(s) = 0$.

Dans les applications qui suivent, on va cerner les racines possibles puis le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}$, utiliser le fait que la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égal à la trace et le produit au déterminant de la matrice considérée.

2. D'après la première question, les valeurs propres de A sont racines de

$$P(x) = x^3 - x^2 + 2x = x(x^2 - x + 2) .$$

Le trinôme intervenant dans cette expression a un discriminant négatif; P a donc comme racine réelle 0 et deux racines complexes conjuguées. La seule valeur propre réelle possible est donc 0. Le polynôme caractéristique de A est réel de degré 5 impair; il a donc au moins une racine réelle: ce ne peut être que 0. 0 est valeur propre de A : A n'est pas inversible.

3. D'après la première question, les valeurs propres de A sont racines de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2) .$$

Les valeurs propres réelles ou complexes de A appartiennent à $\{0, 1, 2\}$. A étant inversible, les seules valeurs propres possibles sont 1 et 2. Le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}$:

$$\chi_A = (X-1)^p (X-2)^{5-p}$$

où $p \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ (0 si 1 n'est pas valeur propre et 5 si 2 n'est pas valeur propre).

Ainsi $\text{tr}(A) = p + 2(5-p) = 10 - p$ donc $p = 2$ et $\chi_A = (X-1)^2 (X-2)^3$.

4. Les valeurs propres de A sont racines de $P(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Ses seules valeurs propres possibles sont donc 1 ou 0. Le polynôme caractéristique de A est donc de la forme $\chi_A(x) = x^p (x-1)^{n-p}$ avec $0 \leq p \leq n$ et $\text{tr}(A) = n - p \in \mathbb{N}$.

5. D'après la première question, les valeurs propres complexes de A sont racines de

$$P(x) = x^5 - x - 1 .$$

Étudions les variations de P sur $\mathbb{R}$. $P'(x) = 4x^4 - 1$ de racines réelles $\pm \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit s l'une de ses racines. Comme $s^4 = \frac{1}{4}$, $P(s) = -\frac{3s}{4} - 1$ et comme $|s| \leq 1$, $P(s) < 0$.

On a ainsi le tableau de variations suivant (en posant $s_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$) :

x	$-\infty$	s_1	s_2	$+\infty$
$P'(x)$	+	0	0	+
$P(x)$	$-\infty$	$P(s_1)$	$P(s_2)$	$+\infty$

$P(s_1)$ et $P(s_2)$ étant négatifs, P n'a qu'une racine réelle positive $\alpha > s_2$ et simple (P' ne s'y annule pas).

P et P' n'ayant pas de racines communes ($x^4 = \frac{1}{4} \implies P(x) = -\frac{3x}{4} - 1 \neq 0$), toutes les racines complexes de P sont simples; de plus, P étant réel, elles sont 2 à 2 conjuguées; soient α, β et $\bar{\beta}, \gamma$ et $\bar{\gamma}$ ces racines. Ce sont les seules valeurs propres possibles de A . Soit p la multiplicité de α dans le polynôme caractéristique de A (éventuellement nul si α n'est pas valeur propre de A), q celle de β (et donc de $\bar{\beta}$) et r celle de γ et de son conjugué. On a alors :

$$\det(A) = \alpha^p (\beta \bar{\beta})^q (\gamma \bar{\gamma})^r = \alpha^p |\beta|^{2q} |\gamma|^{2r} > 0.$$

6. D'après la première question, les valeurs propres de A sont racines de

$$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1).$$

Les seules valeurs propres possibles sont donc $i, -i, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Soit $p \geq 0$ la multiplicité de i (et de $-i$) dans le polynôme caractéristique de A , et $q \geq 0$ celle de j et son conjugué. On a donc

$$\chi_A(x) = (x^2 + 1)^p (x^2 + x + 1)^q$$

ce polynôme étant de degré n , $n = 2p + 2q$; n est pair. De plus $\text{tr}(A) = pi - pi + qj + q\bar{j} = -q \in \mathbb{Z}$.

7. D'après la première question, les valeurs propres de A sont racines de $P(x) = x^2 + x + 1$. Seuls j et son conjugué sont racines de P . Le polynôme caractéristique de A étant réel et scindé dans $\mathbb{C}$, il est de la forme

$$\chi_A = (X^2 + X + 1)^p = (X - j)^p (X - \bar{j})^p$$

donc $n = 2p$ (n est pair), $\det(A) = j^p \bar{j}^p = 1$ et $\text{tr}(A) = p(j + \bar{j}) = -p = -\frac{n}{2}$.

Cherchons une telle matrice lorsque $n = 2$ de trace -1 et de déterminant 1 . La matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient. On vérifie que } A_1^2 + A_1 + I_2 = 0.$$

Soit A_p une matrice diagonale en blocs (formée de p blocs A_1) et ailleurs des blocs de 0 .

$$A_p = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

A_p répond à la question pour $n = 2p$.

□

Correction de l'Exercice 40

[Retour à l'énoncé](#)

1. La relation $\forall i, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ équivaut à $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. U est donc vecteur propre

associé à la valeur propre 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à 1 et k un indice pour lequel $x_k = \max(x_i)$.

Comme $AX = X$, la ligne k donne

$$x_k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_k$$

soit

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} (x_k - x_j) = 0$$

Tous les termes de cette somme étant positifs ou nuls, ils sont nuls $\forall j$, $a_{k,j} (x_k - x_j) = 0$ et comme $a_{k,j} > 0$, $x_k = x_j$ donc $X = x_k U$. Le sous-espace propre associé à la valeur 1 est la droite engendrée par U .

2. Soit λ une valeur propre complexe de A . Comme précédemment, Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un

vecteur propre de A associé à λ et k un indice pour lequel $|x_k| = \max(|x_i|)$. Comme $AX = \lambda X$, la ligne k donne

$$(*) \quad \lambda x_k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$(**) \quad |\lambda| |x_k| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{k,j} |x_k| = |x_k|$$

Comme $x_k \neq 0$ (car $X \neq 0$), on obtient bien $|\lambda| \leq 1$.

3. Si $|\lambda| = 1$, dans (**), il n'y a que des égalités donc pour tout j , $|x_j| = |x_k|$. Posons $x_j = e^{i\alpha_j} \lambda x_k$; l'équation (*) devient $1 = \sum_{j=1}^n a_{k,j} e^{i\alpha_j}$. En prenant la partie réelle, on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} = \sum_{j=1}^n a_{k,j} \cos(\alpha_j) \iff \sum_{j=1}^n a_{k,j} (1 - \cos(\alpha_j)) = 0 ;$$

ce qui est possible si et seulement si pour tout j , $\cos(\alpha_j) = 0$ donc $x_j = \lambda x_k$ et en particulier $x_k = \lambda x_k$ soit $\lambda = 1$ (puisque x_k est non nul).

□

Correction de l'Exercice 41

[Retour à l'énoncé](#)

1. On rappelle que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$ admet des valeurs propres et des vecteurs propres.

a. $\alpha = \beta = 0$: u et v commutent donc v commute avec $u - \lambda \text{id}_E$ pour tout complexe λ . Soit λ une valeur propre de u , le sous-espace propre associé $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ de dimension non nulle est stable par v ; l'endomorphisme induit de v à ce sous-espace admet un vecteur propre x_0 qui est vecteur propre de v et vecteur propre de u car il appartient à $E_\lambda(u)$.

b. $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$: Si $u(x) = 0$,

$$u(v(x)) = v \circ u(x) + \alpha u(x) = 0$$

donc $v(x)$ est dans le noyau de u . Le noyau de u est donc stable par v .

Supposons ce noyau réduit à $\{0\}$; u est alors inversible et

$$v - u^{-1} \circ v \circ u = u^{-1}(u \circ v - v \circ u) = \alpha \text{id}_E$$

Or $\text{tr}(u^{-1} \circ v \circ u) = \text{tr}(u \circ u^{-1} \circ v) = \text{tr}(v)$ donc $\text{tr}(v - u^{-1} \circ v \circ u) = 0$ et $\text{tr}(\alpha \text{id}_E) = n\alpha \neq 0$. Par l'absurde, on a vérifié que le noyau de u est de dimension au moins 1; comme il est stable par v , v induit sur ce noyau un endomorphisme qui admet au moins un vecteur propre; ce vecteur propre est vecteur propre commun à u et v .

c. α et β non nuls. On a alors

$$(u + \frac{\beta}{\alpha}v) \circ v - v \circ (u + \frac{\beta}{\alpha}v) = u \circ v - v \circ u = \alpha \circ (u + \frac{\beta}{\alpha}v)$$

D'après le deuxième cas étudié, $u + \frac{\beta}{\alpha}v$ et v ont un vecteur propre commun x ; il existe (λ, μ) tel que $(u + \frac{\beta}{\alpha}v)(x) = \lambda x$ et $v(x) = \mu x$ donc $u(x) = \left(\frac{\beta\mu}{\alpha} + \lambda\right)x$; c'est aussi un vecteur propre de u .

2. Démontrons par récurrence sur $n = \dim E$ que deux endomorphismes de E qui commutent sont trigonalisables dans une même base.

- Initialisation : pour $n = 1$, toute base constituée d'un seul vecteur convient.
- Hérédité : supposons la propriété vérifiée pour $n - 1 \geq 1$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. D'après la première question, ils ont un vecteur propre commun y tel que $u(y) = \alpha y$ et $v(y) = \beta y$. Soit E_1 un supplémentaire de $D = \text{Vect}(y)$ dans E et p la projection sur E_1 de direction D . $u_1 = p \circ u$ et $v_1 = p \circ v$ sont des endomorphismes de E_1 . Vérifions qu'ils commutent. Soit x un élément de E , $u(x) = \alpha y + u_1(x)$, donc

$$v \circ u(x) = \alpha \beta y + v(u_1(x)) \implies p \circ v \circ u(x) = v_1 \circ u_1(x)$$

De même $u_1 \circ v_1(x) = p \circ u \circ v(x)$ et comme u et v commutent $u_1 \circ v_1 = v_1 \circ u_1$.

Par hypothèse de récurrence, comme $\dim E_1 = n - 1$ il existe une base de E_1

$(x_1, \dots, x_{n-1})$ dans laquelle u_1 et v_1 ont une matrice triangulaire. Soit T_u (respectivement T_v) celle de u_1 (respectivement v_1). $u(x) - u_1(x)$ et $v(x) - v_1(x)$ étant des éléments de D , dans la base $\mathcal{B} = (y, x_1, \dots, x_{n-1})$, on obtient :

$$M_u = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & L_u \\ 0_{n-1,1} & T_u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_v = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & L_v \\ 0_{n-1,1} & T_v \end{pmatrix}$$

où L_u et L_v sont des éléments de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$. Ces deux matrices M_u et M_v sont bien triangulaires.

On a ainsi vérifié par récurrence que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel de dimension finie qui commutent sont trigonalisables dans une même base.

□

Correction de l'Exercice 42

[Retour à l'énoncé](#)

On peut remarquer que $\text{Ker}(\Phi)$ est le commutant de p et contient déjà p et id_E : 0 est donc valeur propre.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. Dans cette base,

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

où $0_{p,q}$ représente la matrice nulle de dimension (p, q) et 0_p la matrice nulle d'ordre p .

Soit f un endomorphisme propre associé à la valeur propre s . Soit F la matrice de cet endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$.

$$F = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

$\Phi(f) = sf$ équivaut alors à $PF - FP = sF$ soit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ C & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r & B \\ -C & 0_{n-r} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Ceci équivaut donc à

$$\begin{cases} sA = 0_r \\ sB = B \\ -sC = C \\ sD = 0_{n-r} \end{cases}$$

Si $s \notin \{0, 1, -1\}$, la seule solution est $F = 0$ aussi les seules valeurs propres possibles sont 0, 1 et -1.

Si $s = 0$, $B = 0_{r,n-r}$ et $C = 0_{n-r,r}$, A et D sont quelconques. L'espace propre associé à la valeur propre 0, $L_0(\Phi)$, est l'ensemble des endomorphismes de matrice dans la base

$\mathcal{B} \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix}$. L'application de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ dans $L_0(\Phi)$ qui à (A, D) associe l'endomorphisme f tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & D \end{pmatrix}$ est un isomorphisme donc

$$\dim L_0(\Phi) = \dim(\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})) = r^2 + (n-r)^2$$

Si $s = -1$, $A = 0_r$, $B = 0_{r,n-r}$, $D = 0_{n-r}$ et C est quelconque. L'espace propre associé à la valeur propre -1 , $L_{-1}(\Phi)$, est l'ensemble des endomorphismes de matrice dans la base $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} O_r & 0_{r,n-r} \\ C & O_{n-r} \end{pmatrix}$. Il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et est donc de dimension $n(n-r)$.

Si $s = 1$, $A = 0_r$, $C = 0_{n-r,r}$, $D = 0_{n-r}$ et B est quelconque. L'espace propre associé à la valeur propre 1 , $L_1(\Phi)$, est l'ensemble des endomorphismes de matrice dans la base $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} O_r & B \\ 0_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix}$. Il est isomorphe à $\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et est donc de dimension $n(n-r)$.

Φ est diagonalisable ; deux arguments possibles :

- Toute matrice se décompose dans la somme $L_0(\Phi) + L_{-1}(\Phi) + L_1(\Phi)$
- La somme des dimensions des sous-espaces propres est

$$r^2 + 2r(n-r) + (n-r)^2 = (r+n-r)^2 = n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$$

□

Correction de l'Exercice 43

[Retour à l'énoncé](#)

1. f étant continue sur $[0, 1]$, comme pour tout élément x de $[0, 1]$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont éléments de $[0, 1]$, $T(f)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.

On vérifie aisément que T est linéaire :

$$\forall x \in [0, 1], T(\alpha f + g)(x) = \alpha T(f)(x) + T(g)(x).$$

T est bien un endomorphisme de E .

Une fonction f appartient au noyau si et seulement si

$$\forall x \in [0, 1], f\left(\frac{x+1}{2}\right) = -f\left(\frac{x}{2}\right).$$

La fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ convient. Le noyau n'est pas réduit à la fonction nulle ; 0 est valeur propre de T . Le spectre de T contient au moins 0.

2. Commençons par regarder les petites valeurs de n :

$$T^2(f)(x) = \frac{1}{2} \left(T(f)\left(\frac{x}{2}\right) + T(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x+1}{4}\right) + f\left(\frac{x+2}{4}\right) + f\left(\frac{x+3}{4}\right) \right)$$

$$\text{soit } T^2(f)(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f\left(\frac{x+k}{4}\right).$$

$$\text{Ainsi } T^2(f)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f\left(\frac{x+2k}{8}\right) \text{ et } T^2(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 f\left(\frac{x+1+2k}{8}\right) \text{ donc}$$

$$T^3(f)(x) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 f\left(\frac{x+k}{8}\right)$$

$$\text{Montrons par récurrence sur } n \text{ que } \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right).$$

- Initialisation : la formule est vérifiée pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ d'après la définition de T et les calculs précédents.
- Hérédité : Supposons la formule vraie pour $n \geq 3$. Alors

$$T^n(f)\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{\frac{x}{2} + k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x + 2k}{2^{n+1}}\right).$$

$2k$ avec $0 \leq k \leq 2^n - 1$ décrit tous les nombres pairs strictement inférieurs à 2^{n+1} .
En remplaçant x par $x + 1$:

$$T^n(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\right)$$

$2k+1$ avec $0 \leq k \leq 2^n - 1$ décrit tous les nombres impairs strictement inférieurs à 2^{n+1} ; ainsi

$$T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right)$$

On a ainsi démontré par récurrence que pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0, 1]$,

$$T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right).$$

3.

a. Dans $T^n(f)(0)$ on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction f sur le segment $[0, 1]$ aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t)dt$.

$$T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right).$$

Par l'inégalité des accroissements finis, si M est un majorant de $|f'|$ sur $[0, 1]$, pour tout k :

$$\left| f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq M \frac{x}{2^n}$$

et par inégalité triangulaire

$$|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leq \frac{Mx}{2^n}.$$

Cette dernière inégalité prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = 0$ et ainsi pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

b. Si 1 est valeur propre, il existe une fonction autre que la fonction nulle telle que $T(f) = f$ donc pour tout n , $T^n(f) = f$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(x) = f(x) = \int_0^1 f(t)dt$$

donc f est une fonction constante. Toute fonction constante vérifie $T(f) = f$. Ainsi 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes (espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $f_0 : x \mapsto 1$).

c. Si $T(f) = \lambda f$, $T^n(f) = \lambda^n f$. Comme $T^n(f)$ a une limite lorsque n tend vers l'infini, si f n'est pas l'application nulle, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme $\lambda^n = \frac{T^n(f)(x_0)}{f(x_0)}$, la suite $(\lambda^n)^n$ est convergente donc $\lambda \in]-1, 1[$. Si $|\lambda| > 1$, λ n'est pas valeur propre.

d. Comme $\int_0^1 f(\frac{x}{2})dx = 2 \int_0^{1/2} f(t)dt$ par le changement de variable affine $t = \frac{x}{2}$ et $\int_0^1 f(\frac{x+1}{2})dx = 2 \int_{1/2}^1 f(t)dt$ par le changement de variable affine $t = \frac{x+1}{2}$, on obtient que pour toute application de E

$$\int_0^1 T(f)(x)dx = \int_0^1 f(t)dt.$$

Comme $\lambda \neq 1$, $\lambda \in]-1, 1[$ et $\lim \lambda^n = 0$, aussi $\lim T^n(f) = 0$ soit $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

4.

a. Par règles de dérivation classique :

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{4} \left(f'(\frac{x}{2}) + f'(\frac{x+1}{2}) \right) = \frac{T(f')}{2}.$$

b. si $T(f) = \lambda f$, on a alors par dérivation $T(f') = 2\lambda f'$. Aussi si $\lambda \neq 1$, f' est non nulle et 2λ est valeur propre. 2λ est donc valeur propre si $\lambda \neq 1$. Donc si $\lambda \neq 1$, $2\lambda \in]-1, 1[$ soit $\lambda \in I_1 =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Ainsi $\text{Sp}(T) \subset \{1\} \cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Cherchons f non nulle telle que $T(f) = \frac{f}{2}$ alors $(T(f))' = \frac{f'}{2}$ soit $f' = T(f')$. f n'étant pas associé à la valeur propre 1, elle n'est pas constante donc f' est non nulle; f' est vecteur propre pour la valeur propre 1 donc f' est constante de valeur $a \neq 0$, il existe a et b tels que $f(x) = ax + b$. De plus comme $\int_0^1 f(t)dt = 0$ soit $\frac{a}{2} + b = 0$. Ainsi $f(x) = a(x - \frac{1}{2}) = af_1(x)$. Vérifions que f_1 est vecteur propre :

$$T(f_1)(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + (\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f_1(x)$$

$\frac{1}{2}$ est valeur propre et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par f_1 . On a vérifié que $\frac{1}{2}$ est dans le spectre.

5.

a. Soit $I_n =]-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}[$. Par récurrence sur n , on prouve alors la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: si λ est valeur propre, soit il existe $p \leq n$ tel que $\lambda = \frac{1}{2^p}$ soit $\lambda \in I_n$.

La propriété a été vérifiée aux ordres 0 et 1 dans les questions précédentes.

Supposons la vraie à l'ordre n . Soit λ une valeur propre; alors $\lambda = 1$ ou 2λ est valeur propre. Par hypothèse de récurrence, $2\lambda = \frac{1}{2^p}$ avec $p \geq n$ ($\lambda = \frac{1}{2^{p+1}}$) ou $2\lambda \in I_n$ (ce qui équivaut à $\lambda \in I_{n+1}$). On a bien vérifié que soit $\lambda = \frac{1}{2^p}$ avec $p \leq n+1$ soit $\lambda \in I_{n+1}$ ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété est donc vraie pour tout n .

b. Par récurrence, on a ainsi montré que soit λ est de la forme $\frac{1}{2^p}$ soit il appartient à tous les intervalles I_n . L'intersection des I_n étant réduite à $\{0\}$, les seules valeurs propres

possibles sont les réels de la forme $\frac{1}{2^p}$ ou 0.

On a déjà vérifié que 0, 1 et $\frac{1}{2}$ étaient valeurs propres et que les sous-espaces propres associés à 1 et $\frac{1}{2}$ étaient des droites. Par récurrence sur n , montrons que $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ est valeur propre et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

- Les questions **3.b** et **4.b** fournissent l'initialisation pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons que $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ avec $n \geq 1$ est valeur propre et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par f_n .

Cherchons f non nulle telle que $T(f) = \frac{1}{2^{n+1}}f$. f n'est pas constante et par la question **4.b**, f' (qui est non nulle) est associé à la valeur propre λ_n donc il existe α tel que $f' = \alpha f_n$. Soit F_n une primitive de f_n ; alors il existe β tel que $f = \alpha F_n + \beta$. Comme f est d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ (question **3.d**),

$$f = \alpha(F_n - \int_0^1 F_n) \alpha f_{n+1} ,$$

f_{n+1} est donc la primitive de f_n dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle.

Vérifions que f_{n+1} est une application propre associée à λ_{n+1} . Par ce qui précède :

$$T(f_{n+1})' - 2^{n+1} f_{n+1}' = 2T(f_n) - 2^{n+1} f_n = 0 .$$

$T(f_{n+1}) - 2^{n+1} f_{n+1}$ est une fonction constante d'intégrale nulle par la question **3.d**; elle est donc nulle; ce qui prouve que λ_{n+1} est valeur propre et que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par f_{n+1} .

On a ainsi vérifié par récurrence que le spectre de T est $\bigcup_{p=0}^{+\infty} \{\frac{1}{2^p}\} \cup \{0\}$ et que les sous-espaces propres autres que le noyau sont des droites vectorielles.

□

Correction de l'Exercice 44

[Retour à l'énoncé](#)

La matrice A étant triangulaire, son polynôme caractéristique est $\prod_{p=1}^n (X - a_{p,p})$. Ce polynôme étant scindé et à racines simples, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont ses termes diagonaux. il existe une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On remarque que $a_{p,p}^n = -1$ soit $D^n = -I_n$; d'où $P^{-1}A^n P = D^n = -I_n$ ce qui donne

$$A^n = PD^n P^{-1} = -I_n .$$

□

Correction de l'Exercice 45[Retour à l'énoncé](#)

A admet comme polynôme caractéristique $(X-1)^2(X-2)^2$. Ses valeurs propres sont 1 et 2 ; elle est diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres associés sont de dimension 2.

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice vaut au moins 2 puisque les deux dernières lignes sont indépendantes. Si $a \neq 0$, la première ligne est indépendante des deux dernières : le rang de la matrice est 3 et le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1 par le théorème du rang ; si $a = 0$, les deux premières colonnes sont nulles ; le rang ne peut pas excéder 2 ; il vaut donc 2 et le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 2.

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par un raisonnement analogue, les deux premières lignes sont indépendantes et engendrent la troisième si et seulement si $f = 0$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2 si et seulement si $f = 0$.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si $a = f = 0$.

□

Correction de l'Exercice 46[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit χ_u le polynôme caractéristique de u et χ_k celui de sa restriction à E_k . En travaillant dans une base adaptée à la décomposition de E , on obtient

$$\chi_u = \prod_{k=1}^p \chi_k$$

donc le spectre de u est l'union des spectres de ces restrictions.

Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Dans la décomposition de E , x se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^p x_k$$

où x_k est élément de E_k . On a alors :

$$u(x) = \lambda x = \sum_{k=1}^p \lambda x_k = \sum_{k=1}^p u(x_k)$$

et par unicité de la décomposition, comme $u(x_k)$ est élément de E_k , $u(x_k) = \lambda x_k$ pour tout k . Réciproquement, si chaque x_k vérifie $u(x_k) = \lambda x_k$, il en est de même de leur somme. On a donc montré que :

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k})$$

une partie des sous-espaces de droite pouvant être réduit à $\{0\}$ (ceux pour lesquels λ n'est pas valeur propre de $u|_{E_k}$). On a donc pour toute valeur λ du spectre de u :

$$\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) = \sum_{k=1}^p \dim(\text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k}))$$

et

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) = \sum_{k=1}^p \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(\text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k}))$$

et en enlevant les sous-espaces de dimension nulle :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) = \sum_{k=1}^p \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u|_{E_k})} \dim(\text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k}))$$

Comme $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u|_{E_k})} \dim(\text{Ker}(u|_{E_k} - \lambda \text{id}_{E_k})) \leq \dim(E_k)$ avec égalité si et seulement si $u|_{E_k}$ est diagonalisable, on a alors :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) \leq \sum_{k=1}^p \dim(E_k) = n$$

avec égalité si et seulement si pour tout k , $u|_{E_k}$ est diagonalisable. u est donc diagonalisable si et seulement si ses p restrictions le sont.

2. Le polynôme caractéristique de A_2 est $\chi_2(s) = s^2 - a_1 a_2$.

Si $a_1 a_2 = 0$, la seule valeur propre est 0. Le sous-espace propre associé est de dimension 2 si et seulement si A_2 est la matrice nulle donc si et seulement si $a_1 = a_2 = 0$ que le corps de base soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il reste à étudier dans les cas réels et complexes le cas où $a_1 a_2 \neq 0$.

- Cas complexe : le polynôme caractéristique a deux racines distinctes sur $\mathbb{C}$ et A_2 est diagonalisable.
En conclusion, A_2 est diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si et seulement si $a_1 a_2 \neq 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$.
- Cas réel : si $a_1 a_2 < 0$, A_2 n'a pas de valeurs propres ; elle n'est donc pas diagonalisable. Si $a_1 a_2 > 0$, comme dans le cas complexe, A_2 a deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable. En conclusion, A_2 est diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si et seulement si $a_1 a_2 > 0$ ou $a_1 = a_2 = 0$.

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A_n . Les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_i, e_{n+1-i})$ sont stables par u . Soient $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($n = 2p$ ou $n = 2p + 1$), Π_k le plan engendré par (e_k, e_{n+1-k}) pour $k \leq p$ et Δ la droite engendrée par e_{p+1} lorsque $n = 2p + 1$.

On a alors si n est pair, $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{k=1}^p \Pi_k$ et si n est impair, $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{k=1}^p \Pi_k \oplus \Delta$. On a donc décomposé l'espace $\mathbb{K}^n$ en sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A_n . Par la première question, A_n est diagonalisable si et seulement si la restriction de

u à chaque Π_k l'est puisque lorsque n est impair, la restriction à Δ espace de dimension 1 est diagonalisable. La matrice de la restriction de u à π_k dans la base (e_k, e_{n+1-k}) est $\begin{pmatrix} 0 & a_{n-k} \\ a_k & 0 \end{pmatrix}$ matrice étudiée dans la question précédente.

- Cas complexe : A_n est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$, $a_k a_{n-k} \neq 0$ ou $a_k = a_{n-k} = 0$.
- Cas réel : A_n est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$, $a_k a_{n-k} > 0$ ou $a_k = a_{n-k} = 0$.

□

Correction de l'Exercice 47

[Retour à l'énoncé](#)

1. les relations de récurrence données pour définir les suites s'écrivent matriciellement $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} s & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & s & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & s \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} (s-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & s & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & s \end{vmatrix}$$

puis en retranchant la première colonne aux deux autres :

$$\chi_A(s) = (s-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & s + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & s + \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (s-1)(s + \frac{3}{4})(s + \frac{1}{4}).$$

A a trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Il existe P tel que $D = P^{-1}AP$

avec $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$ soit $A = PDP^{-1}$.

2. On a alors pour tout entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{4})^n \end{vmatrix}$ de

limite $E_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. L'application linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à M associe $P^{-1}MP$ étant

continue, la suite $(A^n)_n$ converge vers $Q = P^{-1}E_{1,1}P$. Comme $E_{1,1}^2 = E_{1,1}$, $Q^2 = Q$. Q est la matrice dans la base canonique d'un projecteur q de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3) associés dans l'ordre à $1, -\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{4}$. D'après ce qui précède, on peut choisir pour P la matrice de cette base dans la base canonique et la matrice de q dans cette nouvelle base est $E_{1,1}$, projecteur sur $\text{Vect}(U_1) =$

$\text{Ker}(A - I_3)$ de direction $\text{Vect}(U_2, U_3) = \text{Ker}(A + \frac{1}{4}I_3) \oplus \text{Ker}(A + \frac{1}{4}I_3) = \text{Im}(A - I_3)$.

Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$, on remarque que toutes les colonnes ont la somme de leurs coordonnées nulles ; ainsi l'image est incluse dans le plan d'équation $x + y + z = 0$. Par égalité des dimensions, c'est ce plan.

Cherchons le noyau $AX = X$ donne avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $x = \frac{3}{4}y$ puis $z = -\frac{3}{4}x + y = \frac{7}{16}y$. Q

est donc le projecteur sur la droite D de vecteur directeur $(\frac{3}{4}, 1, \frac{7}{16})$ de direction le plan Π d'équation $x + y + z = 0$.

3. Comme $(A^n)_n$ converge et l'application $M \mapsto MX_0$ étant continue, $(A^n X_0)_n$ converge vers QX_0 projeté de X_0 sur D de direction Π .

Comme $\mathbb{R}^3 = D \oplus \Pi$, on cherche la composante de X_0 sur D dans cette décomposition. Elle

est de la forme $QX_0 = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$ et $X_0 - QX_0 \in \Pi$ donne alors

$$a + b + c = \lambda(\frac{3}{4} + 1 + \frac{7}{16}) = \frac{35\lambda}{16}$$

$$\text{ainsi } \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix} = QX_0 = \frac{a + b + c}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

□

Correction de l'Exercice 48

[Retour à l'énoncé](#)

1. Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ -1 & & & & s \end{vmatrix}$. On peut le

développer suivant la première colonne, les mineurs associés aux deux coefficients non nuls étant des déterminants de matrices triangulaires :

$$\chi_B(s) = s^n - 1$$

Le polynôme caractéristique a donc n racines simples (les racines n -ièmes de l'unité) : B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. L'endomorphisme b de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à B associe à chaque vecteur e_k de la base canonique le précédent e_{k-1} et au premier e_1 le dernier e_n . Ainsi l'endomorphisme b^p décale les vecteurs de base de p indices, soit $b^p(e_i) = e_{i-p}$ si $i > p$ et $b^p(e_i) = e_{n+i-p}$ sinon. On a donc :

$$A = a_1 I_n + a_2 B + \dots + a_n B^{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k B^{k-1}$$

ce qui se note $A = P(B)$.

Par la première question, il existe une matrice Q inversible telle que

$$Q^{-1}BQ = D = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & s_n \end{pmatrix}$$

où D est la matrice diagonale telle que $s_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On a alors :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} P(s_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(s_2) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & P(s_n) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n P(s_k) = \prod_{k=1}^n P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

3. Soit $P = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$. On remarque que P est la dérivée du polynôme $Q = \sum_{k=0}^n X^k$. Or

(*) $(1-X)Q = 1 - X^{n+1}$ donc en dérivant :

$$(**) \quad (1-X)P - Q = -(n+1)X^n$$

L'égalité (*) évaluée en s_k racine n -ième de l'unité donne alors

$$(1-s_k)Q(s_k) = 1 - s_k^{n+1} = 1 - s_k$$

et donc si $k \neq n$ (soit $s_k \neq 1$) $Q(s_k) = 1$. On obtient alors par (**):

$$(1-s_k)P(s_k) = -(n+1) + 1 = -n \iff P(s_k) = \frac{-n}{1-s_k}$$

et $P(s_n) = P(1) = \frac{n(n+1)}{2}$. D'où :

$$\det(A) = P(1) \prod_{k=1}^{n-1} P(s_k) = \frac{(-1)^{n-1} P(1) n^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} (1-s_k)}$$

On remarque alors que

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - s_k) = 1 + X + \cdots + X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

soit $\prod_{k=1}^{n-1} (X - s_k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Une évaluation en 1 donne

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - s_k) = n$$

Ainsi

$$\det(A) = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

□

Correction de l'Exercice 49

[Retour à l'énoncé](#)

1. Cas $n = 1$: $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $(X-a)^2 - 1$. Les valeurs propres de A sont donc $a+1$ et $a-1$. M a deux valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable. Cas général : A est diagonalisable donc il existe une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ matrice diagonale d'éléments diagonaux $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Soit $Q = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}$ d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix}$; alors

$$M_1 = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} D & I_n \\ I_n & D \end{pmatrix}$$

Si u est l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, M_1 représente le même endomorphisme dans une base $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{2n})$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le plan Π_j engendré par (v_j, v_{n+j}) est stable par u et la restriction de u à ce plan a pour matrice dans

la base (v_j, v_{n+j}) la matrice $\begin{pmatrix} d_j & 1 \\ 1 & d_j \end{pmatrix}$ dont on a vu en préalable qu'elle était diagonalisable.

Il existe donc une base (w_j, w_{n+j}) de Π_j constituée de deux vecteurs propres de u . Comme $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{j=1}^n \Pi_j$, $(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_{2n})$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$ formée de vecteurs propres de u ; u et donc toutes ses matrices et notamment M sont diagonalisables.

2. On peut commencer par calculer le polynôme caractéristique de B mais cela ne donnera que le spectre de B et pas les sous-espaces propres de B .

On peut remarquer que $r = \text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \text{rg}(A)$. Ainsi le noyau de B est de dimension $2n - r = n + \dim(\text{Ker}(A))$. 0 est donc valeur propre.

a. Soit s une valeur propre de B . Il existe $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec X_1 et X_2 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $BX = sX$, ce qui équivaut à $A(X_1 + X_2) = sX_1 = sX_2$.

0 est valeur propre de B et le sous-espace propre associé est constitué des vecteurs $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 + Y \end{pmatrix}$ où X_1 est quelconque et Y appartient au noyau de A . On retrouve le résultat précédemment obtenu.

Si $s \neq 0$, $X_1 = X_2$ et $2AX_1 = sX_1$; s est valeur propre de B si et seulement si $\frac{s}{2}$ est valeur

propre de A et $E_s(B)$ le sous-espace propre de B associé à s est constitué des vecteurs $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$ où X_1 est élément de $E_{\frac{s}{2}}(A)$.

b. Le noyau de B , sous-espace propre associé à 0 pour B est en isomorphisme avec $\mathbb{R}^n \times \text{Ker}(A)$ par l'application qui à (X_1, Y) associe $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 + Y \end{pmatrix}$; il est donc de dimension

$n + \dim(\text{Ker}(A))$.

$E_s(B)$ a même dimension que le sous-espace propre $E_{\frac{s}{2}}(A)$ associé à A pour $\frac{s}{2}$ par l'isomor-

phisme $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$.

Ainsi si S^* est le spectre de A éventuellement privé de 0 :

$$d = \sum_{s \in \text{Sp}(B)} \dim E_s(B) = \sum_{s \in S^*} \dim(E_s(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) + n$$

$d = 2n$ si et seulement si

$$n = \sum_{s \in S^*} \dim(E_s(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = \sum_{s \in \text{Sp}(A)} \dim(E_s(A))$$

B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

3. On reprend les mêmes notations que dans la question précédente. Le système $BX = sX$ équivaut à :

$$\begin{cases} X_2 = sX_1 \\ AX_1 = sX_2 \end{cases} \iff \begin{cases} X_2 = sX_1 \\ AX_1 = s^2X_1 \end{cases}$$

X est non nul si et seulement si X_1 l'est. Ainsi s est valeur propre de B si et seulement si s^2 est valeur propre de A . De plus, le sous-espace propre $E_s(B)$ associé est formé des vecteurs

$\begin{pmatrix} X_1 \\ sX_1 \end{pmatrix}$ où X_1 appartient au sous-espace propre $E_{s^2}(A)$ de A .

L'application de $E_{s^2}(A)$ dans $E_s(B)$ qui à X_1 associe $\begin{pmatrix} X_1 \\ sX_1 \end{pmatrix}$ étant un isomorphisme, ces deux espaces ont même dimension. Chaque valeur propre σ strictement positive de A amène deux valeurs propres pour B , $\pm\sqrt{\sigma}$, dont les sous-espaces propres ont même dimension que le sous-espace propre de A associé à σ ; le noyau de B a même dimension que le noyau de A , dimension non nulle lorsque 0 est valeur propre des matrices et les valeurs propres négatives de A ne donnent aucune valeur propre de B . Si $S^+(A)$ désigne les valeurs propres strictement positives de A et , on obtient alors que

$$d = \sum_{s \in \text{Sp}(B)} \dim(E_s(B)) = 2 \sum_{\sigma \in S^+} \dim E_{\sigma}(A) + \dim \text{Ker}(A)$$

Comme $\sum_{\sigma \in S^+} \dim E_{\sigma}(A) + \dim \text{Ker}(A) \leq n$ (avec égalité si et seulement si A n'a pas de valeurs propres négatives)

$$d = \sum_{s \in \text{Sp}(B)} \dim(E_s(B)) \leq \sum_{\sigma \in S^+} \dim E_{\sigma}(A) + n \leq 2n$$

$d = 2n$ si et seulement si $\sum_{\sigma \in S^+} \dim E_{\sigma}(A) = n$ c'est à dire si et seulement si A est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

□

Correction de l'Exercice 50

[Retour à l'énoncé](#)

Pour montrer l'équivalence des trois propositions, on va prouver successivement que (a) $\Rightarrow$ (b), puis (b) $\Rightarrow$ (c) et finalement (c) $\Rightarrow$ (a)

- (a) $\implies$ (b) : Soit x_0 tel que $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ engendre E ; cette famille est donc une base de E étant génératrice minimale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ n complexes tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0$$

En évaluant en x_0 , on obtient :

$$a_0 x + a_1 f(x) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = 0$$

et compte-tenu du caractère libre de $\mathcal{F}$, tous les a_k sont nuls. la famille $id_E, f, \dots, f^{n-1}$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

- (b) $\implies$ (c) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f .

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ n complexes tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0$. Cette égalité équivaut à

$$\forall j, \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_j) = 0$$

Si s_j est la valeur propre associée à e_j , $f^k(e_j) = s_j^k e_j$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \iff \forall j, \sum_{k=0}^{n-1} a_k s_j^k = 0.$$

Terminons cette démonstration par contraposition. Si les s_j ne sont pas deux à deux distincts, alors le spectre de f est constitué de p valeurs distinctes $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ avec

$1 \leq p < n$. Soit $P = \prod_{k=1}^p (X - \sigma_k)$; Ce polynôme est de degré au plus $n - 1$ et admet

pour racines les valeurs propres de f . Si $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k x^k$, on a donc par ce qui précède :

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k f^k = 0$$

la famille $(id_E, f, \dots, f^p)$ est liée ainsi que $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$ comme surfamille de la première. On a prouvé que $\text{non}(c) \implies \text{non}(b)$ soit par contraposition $(b) \implies (c)$.

- (c) $\implies$ (a) : On suppose que f a n valeurs propres distinctes. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f , e_j étant associé à s_j . Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans cette base. $f^k(x)$ a alors pour coordonnées $(s_1^k, \dots, s_n^k)$ dans cette même base. La famille $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E si et seulement si le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de cette famille est non nul. Ce déterminant a comme terme ligne i colonne j $x_i s_i^{j-1}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & \dots & s_1^{n-1} x_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_i & \dots & x_i s_i^{j-1} & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & \dots & \dots & s_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n x_i \mathcal{V}(s_1, \dots, s_n)$$

où $\mathcal{V}(s_1, \dots, s_n)$ désigne le déterminant de Vandermonde de $(s_1, \dots, s_n)$ qui est non nul puisque les n valeurs propres sont distinctes. Ainsi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est non nul si et seulement si les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes non nulles. Le vecteur $\sum_{j=1}^n e_j$ convient. On a ainsi trouvé un vecteur x tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ engendre E .

□

Correction de l'Exercice 51

[Retour à l'énoncé](#)

Procédons par analyse synthèse.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même solution (donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$). Introduisons la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a alors $u_{n+2} = f \circ f(u_n)$ et donc en appliquant la relation à u_n , pour tout entier naturel non nul :

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Cette suite vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'équation caractéristique :

$$s^2 + s - 6 = (s - 2)(s + 3) = 0$$

Il existe deux réels a et b tels que $u_n = a2^n + b(-3)^n$.

Si b est non nul, on a alors $u_n \sim (-3)^n b$, la suite $(u_n)_n$ ne garde pas un signe positif pour tout n . Comme pour tout n , $u_n = f(u_{n-1}) > 0$, nécessairement $b = 0$.

On a alors $u_n = a2^n$ et comme $u_0 = x$, $u_n = x2^n$. En particulier $u_1 = f(x) = 2x$. Si une fonction convient, c'est la fonction $x \mapsto 2x$.

Vérifions que cette fonction convient. $f \circ f(x) = f(2x) = 4x$ et donc pour tout $x > 0$:

$$f \circ f(x) + f(x) = 6x;$$

Le problème a une unique solution, la fonction $x \mapsto 2x$.

□

Correction de l'Exercice 52

[Retour à l'énoncé](#)

1. Toute symétrie vérifie $s^2 = id_E$ et il y a une infinité de symétries.

2. Si $u^2 = a$, u et a commutent. Soit M la matrice de u dans la base canonique. Le terme (i, j) de MA est 0 si $j = 1$ et $m_{i,j-1}$ si $j \geq 2$. Le terme (i, j) de AM est 0 si $i = n$ et $m_{i+1,j}$ si $i < n$. Aussi en posant $m_{1,j} = m_j$, on obtient que M et A commutent si et seulement si il existe $(m_1, \dots, m_n)$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & \cdots & m_n \\ 0 & m_1 & m_2 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & m_1 \end{pmatrix}$$

Le bloc des deux premières lignes et deux premières colonnes de M^2 est alors $\begin{pmatrix} m_1^2 & 2m_1m_2 \\ 0 & m_1^2 \end{pmatrix}$.

La relation $M^2 = A$ impose alors $m_1^2 = 0$ et $2m_1m_2 = 1$. Ces deux équations sont incompatibles; l'équation $M^2 = A$ n'admet pas de solution. a n'a pas de racines carrées.

3. $u^2 = 0$ équivaut à dire que l'image de u est incluse dans le noyau. Soit r le rang de u et dimension de l'image; par le théorème du rang, le noyau de u est de dimension $n - r$; aussi si $u^2 = 0$

$$r \leq n - r \iff r \leq \frac{n}{2}.$$

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base d'un supplémentaire S de $N = \text{Ker}(u)$. Par le théorème de l'endomorphisme induit, $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$ que l'on peut compléter en une base $(u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_{n-r})$ du noyau. En concaténant cette base du noyau et la base de S , on obtient une base de E dans laquelle la matrice de A est de la forme annoncée.

4. Soit β une racine carrée de α . L'équation $u^2 = \alpha \text{id}_E$ équivaut à $\left(\frac{u}{\beta}\right)^2 = \text{id}_E$ donc $u = \beta s$ où s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ de direction $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$. Comme $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$, s est diagonalisable et $u = \beta s$ l'est aussi.

5. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de a associés respectivement à $s_1, \dots, s_n$. Si $u^2 = a$, u et a commutent; les sous-espaces propres de a sont stables par u . Les valeurs propres étant distinctes, les sous-espaces propres sont les droites $D_i = \text{Vect}(e_i)$. La stabilité de D_i par u équivaut à dire que e_i est vecteur propre de u donc il existe d_i tel que $u(e_i) = d_i e_i$. $u^2 = a$ équivaut alors à

$$\forall i, d_i^2 = s_i$$

qui admet deux solutions si $s_i \neq 0$ et une seule si $s_i = 0$.

Ainsi l'équation $u^2 = a$ admet 2^n solutions lorsque a a n valeurs propres distinctes non nulles et 2^{n-1} lorsque si a a n valeurs propres distinctes dont 0.

6.

a. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de vecteurs propres de a associés respectivement à $s_1, \dots, s_n$. Soit d_i une racine carrée de s_i et u l'endomorphisme de E défini par $u(e_i) = d_i e_i$. u^2 et a coïncident sur une base, donc $u^2 = a$.

b. La matrice exhibée en question 3 n'a que 0 pour valeur propre (matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 0 sur sa diagonale) et n'est pas la matrice nulle: elle n'est pas diagonalisable. L'équation $u^2 = 0$ admet donc des solutions non diagonalisables.

c. Soit $s_1, \dots, s_p$ les valeurs propres de u et $E_i = \text{Ker}(u - s_i \text{id}_E)$ le sous-espace propre associé. Comme toute solution de $u^2 = a$ commute avec a , les sous-espaces propres de a sont stables par u et

$$(u|_{E_i})^2 = s_i \text{id}_{E_i}$$

La donnée des restrictions de u à chaque E_i caractérise entièrement u puisqu'on connaît alors u sur une base de E formée de vecteurs propres de a . Si s_i est non nul, $u|_{E_i}$ est diagonalisable; il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_i constitué de vecteurs propres de u . Si 0 n'est pas valeur propre, la concaténation de ces p bases est une base de E formée de vecteurs propres de u ; ainsi u est diagonalisable.

Si 0 est valeur propre, quitte à permuter les indices, on suppose que $s_1 = 0$. Si le noyau est de dimension 1 engendré par e_1 , le noyau de a étant stable par u , e_1 est vecteur propre de u et $u(e_1) = d_1 e_1$ impose $d_1^2 = 0$ soit $d_1 = 0$. On pose alors $\mathcal{B}_1 = \{e_1\}$. La concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ avec $1 \leq i \leq p$ donne une base de vecteurs propres. Dans ce cas, u est diagonalisable.

Si le noyau est de dimension q engendré par $(e_1, \dots, e_q)$, soit u_1 l'endomorphisme du noyau tel que $u_1(e_j) = 0$ pour $j < q$ et $u_1(e_q) = e_1$. $u_1^2 = 0$.

Soit d_i une racine carrée de s_i pour $i > 1$ et u l'endomorphisme de E défini par $u|_{E_1} = u_1$ et pour $i > 1, u|_{E_i} = d_i id_{E_i}$.

u vérifie $u^2 = a$, ses valeurs propres sont $0, d_2, \dots, d_p$ et les sous-espaces propres associés $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{q-1})$ et les E_i pour $i > 2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est $n - 1$ (puisque la somme des dimensions des E_i est n) ; u n'est pas diagonalisable. On a ainsi prouvé que si le noyau de a est de dimension au moins 2, il existe une solution non diagonalisable. Par contraposition, si toute solution de $u^2 = a$ est diagonalisable, a est diagonalisable et son noyau est de dimension au plus 1.

7. Le polynôme caractéristique a deux racines s_1 et s_2 .

Si $s_1 \neq s_2$, on se retrouve dans le cas étudié en question 5. Il existe P_0 inversible telle que

$$A = P_0 \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} P_0^{-1} ; \text{ en désignant par } d_i \text{ une racine carrée de } s_i, \text{ on a alors}$$

$$X = P_0 \begin{pmatrix} \pm d_1 & 0 \\ 0 & \pm d_2 \end{pmatrix} P_0^{-1}.$$

Il y a alors 3 solutions si $s_1 s_2 = 0$ et 4 sinon.

Dans la suite, $s_1 = s_2 = s$ et d est une racine carrée de s .

Si $A = 0$, d'après la question 3, $X = 0$ ou il existe une matrice inversible P telle que

$$X = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$

Si A est diagonalisable, $A = sI_2$ ($s \neq 0$), $\frac{X}{d}$ est une matrice de symétrie il existe P inversible telle que

$$X = dP \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si A n'est pas diagonalisable, A est trigonalisable ; il existe $a \neq 0$ et une matrice P inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} s & a \\ 0 & s \end{pmatrix} P^{-1}$$

Le sous-espace propre associé à s étant de dimension 1 et stable par l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à X , X est de la forme suivante

$$X = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } X^2 = P \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha + \gamma) \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On a alors $\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = s \\ \beta(\alpha + \gamma) = a \end{cases}$. Si $s = 0$, ce système n'a pas de solution, on retrouve un cas particulier de la question 2. Si s est non nul, $\alpha + \gamma$ devant être non nul, ils sont égaux entre eux. On a donc deux solutions $\alpha = \gamma = d$ et $\beta = \frac{a}{2d}$ ou $\alpha = \gamma = -d$ et $\beta = -\frac{a}{2d}$.

8. Si $\alpha > 0$, on se retrouve dans un cas similaire à la question 4 : $\frac{u}{\sqrt{\alpha}}$ est une symétrie et est donc diagonalisable.

Si $\alpha = 0$, on a vu en question 3 des endomorphismes non diagonalisables de carré l'application

nulle.

Si $\alpha < 0$ et u une solution de $u^2 = a$. Soit λ dans le spectre de u ; il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$ et alors $u^2(x) = \lambda^2 x = \alpha x$ ce qui impose $\lambda^2 = \alpha$ équation sans solution dans $\mathbb{R}$. u n'a pas de valeurs propres et n'est donc pas diagonalisable.

En conclusion, toute solution de l'équation $u^2 = \alpha \text{id}_E$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha > 0$.

9.

a. On reprend les notations et raisonnement de la question 5. On a donc une base de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ de a tels que $u(e_i) = d_i e_i$ avec $\forall i, d_i^2 = s_i$. Cette équation n'a des solutions que si $s_i \geq 0$. L'équation $u^2 = a$ avec a admettant n valeurs propres distinctes admet des solutions si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives et toute solution est diagonalisable.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes étant opposées, 0 est valeur propre et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

La somme de chaque ligne est 4 donc $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre

4.

La somme des valeurs propres étant égale à la trace, la dernière valeur propre est 1. Un vecteur propre $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associé vérifie $\begin{cases} 4x + 4z = 5y \\ -x + z = -y \end{cases}$ soit $\begin{cases} 8z = y \\ 8x = 9y \end{cases}$; le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Inversons la matrice P en résolvant le système $X' = PX$ soit $\begin{cases} x + 9y + z = x' \\ x + 8y + z = y' \\ y + z = z' \end{cases}$.

Par différence des deux premières lignes, $y = x' - y'$, puis par report dans la troisième $z' = -x' + y' + z'$ et enfin par report dans la première

$$x = x' - (-x' + y' + z') - 9(x' - y') = -7x' + 8y' - z'$$

ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il y a donc 4 solutions :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit $X_1 = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit $X_2 = \begin{pmatrix} 11 & -11 & -2 \\ 10 & -10 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ et leurs opposées $-X_1$ et $-X_2$.

10. si $u^2 = -\text{id}_E$, $\det(u)^2 = (-1)^n > 0$ donc n est pair. Posons $n = 2p$.

D'après ce qui précède (question 8), u n'a pas de vecteur propre donc pour tout vecteur non nul, $(x, u(x))$ est libre et comme $u^2(x) = -x$ le plan engendré par $(x, u(x))$ est stable par u . Montrons par récurrence sur k que pour $k \leq p$, il existe une famille libre de la forme $(x_1, \dots, x_k, u(x_1), \dots, u(x_k))$.

- Initialisation : pour x_1 , tout vecteur non nul convient.
- Hérédité : supposons l'existence d'une famille libre $(x_1, \dots, x_k, u(x_1), \dots, u(x_k))$ avec $k < p$. $S = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k, u(x_1), \dots, u(x_k))$ est stable par u . Soit x_{k+1} un élément n'appartenant pas à S et Π_{k+1} le plan engendré par $(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$. $S \cap \Pi_{k+1}$ est stable par u comme intersection de sous-espaces stables. Si il contient un vecteur y non nul, il contient aussi son image et donc le plan engendré par $(y, u(y))$; c'est donc Π_{k+1} ce qui est absurde puisque $x_{k+1} \notin S$. Ainsi S et Π_{k+1} sont d'intersection réduite à $\{0\}$; $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, u(x_1), \dots, u(x_k), u(x_{k+1}))$ est une base de $S \oplus \Pi_{k+1}$ et une famille libre de E .

On a ainsi montré qu'il existe une famille libre de la forme $(x_1, \dots, x_k, u(x_1), \dots, u(x_k))$ tant que $k \leq p$. Pour $k = p$, on obtient une base dans laquelle la matrice de u est de la forme annoncée.

11. On procède comme en question 6 en décomposant E en sous-espaces propres de a E_i associé à s_i ; u et a commutant, chaque sous-espace propre E_i est stable par u . On étudie les restrictions de u à chaque sous-espace propre; cet ensemble de restrictions caractérise u puisqu'ils définissent u pour les vecteurs propres de a donc notamment sur une base de E formée de vecteurs propres de a . On désigne par u_i la restriction de u à E_i . On a donc $u_i^2 = s_i \text{id}_{E_i}$. Si $s_i < 0$, on a vu en question précédente que cette équation a des solutions si et seulement si $\dim(E_i)$ est pair. Pour $s_i \geq 0$, la solution $\sqrt{s_i} \text{id}_{E_i}$ convient. On a ainsi vérifié que si a est diagonalisable, l'équation (*) a des solutions si et seulement si tout sous-espace propre de a associé à une valeur propre strictement négative est de dimension paire.

□

Correction de l'Exercice 53[Retour à l'énoncé](#)

1. Une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonaux. Ainsi A_m est orthogonale si et seulement si

$$\begin{cases} (m^2 - 1)^2 + 4(m - 1 - \sqrt{2})^2 = 5 \\ (-m + 2 + \sqrt{2})^2 + 1 = 5 \\ (m^2 - 1)(-m + 2 + \sqrt{2}) + 2(m - 1 - \sqrt{2}) = 0 \end{cases}.$$

La seconde équation conduit à $-m + 2 + \sqrt{2} = \pm 2$ soit $m = \sqrt{2}$ ou $m = -4 + \sqrt{2}$

Si $m = \sqrt{2}$, $A_{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; il s'agit bien d'une matrice orthogonale de déterminant

1; $f_{\sqrt{2}}$ est une rotation d'angle $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Si $m = -4 + \sqrt{2}$, la matrice n'est pas orthogonale (les termes diagonaux ne sont ni égaux, ni opposés).

2. Comme en question précédente, les deux vecteurs colonnes de A_m étant orthogonaux, la matrice est orthogonale si et seulement si

$$(m - \frac{1}{4})^2 + (m + \frac{1}{2})^2 = 1$$

soit

$$m^2 + \frac{m}{2} + \frac{5}{16} = (m + \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} = 1.$$

Il y a deux solutions $m = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour ces deux valeurs, les termes diagonaux de la matrice sont opposés, ce sont des symétries orthogonales par rapport à des droites. La droite de symétrie est l'ensemble des vecteurs fixes et admet donc pour équation

$$(m - \frac{5}{4})x + (m + \frac{1}{2})y = 0$$

soit si $m = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(-3 + \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{3})y = 0$ et si $m = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-(3 + \sqrt{3})x + (1 - 2\sqrt{3})y = 0$.

□

Correction de l'Exercice 54[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $\vec{v}_1'$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{v}_1', \vec{v}_1')$ est une base $\mathcal{B}_1$ orthonormale directe de E . Dans la base $\mathcal{B}_1$, $\vec{v}_2'$ s'écrit $a\vec{v}_1' + b\vec{v}_1'$. Toute isométrie est caractérisée par sa matrice dans la base $\mathcal{B}_1$. La condition $f(\vec{v}_1') = \vec{v}_2'$ impose que la première colonne de la matrice soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Il y a donc deux solutions $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrice de rotation et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ matrice de symétrie

orthogonale. Deux isométries vérifient $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$, une rotation et une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme si et seulement si

$$m^2 + 4 = 25$$

soit $m = \pm\sqrt{21}$ et les deux vecteurs ont pour normes 5. Les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{5}$ et $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{5}$ sont unitaires. Par une isométrie f , $f(\vec{u}) = \vec{v}$ si et seulement si $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$; aussi il existe une unique symétrie envoyant $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et une unique rotation.

Soit $m = \varepsilon\sqrt{21}$ (où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$).

La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} 3a - 4b = 2 \\ +4a + 3b = m \end{cases}$$

$$\text{soit } a = \frac{6 + 4m}{25} = \frac{6 + 4\varepsilon\sqrt{21}}{25} \text{ et } b = \frac{-8 + 3m}{25} = \frac{-8 + 3\varepsilon\sqrt{21}}{25}.$$

La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la symétrie est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ -4a + 3b = m \end{cases}$$

$$\text{soit } a = \frac{6 - 4m}{25} = \frac{6 - 4\varepsilon\sqrt{21}}{25} \text{ et } b = \frac{8 + 3m}{25} = \frac{8 + 3\varepsilon\sqrt{21}}{25}. \text{ On peut vérifier que dans tous les cas } a^2 + b^2 = 1.$$

3. Soit f un endomorphisme orthogonal de E : soit f est une réflexion c'est à dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite donc le produit d'une seule réflexion soit f appartient au groupe des rotations. Soit s une réflexion, $s \circ f$ est un endomorphisme orthogonal de déterminant -1 : c'est une réflexion. Ainsi

$$\forall s \in O(E) \setminus SO(E), \exists s' \in O(E) \setminus SO(E), s \circ f = s'$$

ce qui équivaut à $f = s \circ s'$ en composant à gauche par s .

Une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites dont l'une d'elles est arbitraire; la décomposition n'est pas unique.

4.

a. Soit $\vec{v}_1$ un vecteur unitaire de Δ_1 et $\vec{v}_2$ un vecteur unitaire de Δ_2 . Une isométrie vectorielle f transforme Δ_1 en Δ_2 si et seulement si $f(\vec{v}_1) = \pm\vec{v}_2$; il y a donc deux rotations et deux symétries orthogonales telles que $f(\Delta_1) = \Delta_2$. On peut remarquer que les deux rotations ont des matrices opposées ainsi que les deux symétries.

b. Soit $\vec{v}_1$ un vecteur unitaire de Δ_1 et $\vec{v}_2 = r(\vec{v}_1)$. Soit $\mathcal{B}_1$ la base orthonormale directe $\vec{v}_1, \vec{v}_1^\perp$. Dans cette base, $\vec{v}_2$ a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. La rotation r a pour matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, la symétrie s_1 a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et s_2 a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

$\vec{v}_2$ étant fixe par s_2 , on a :

$$\begin{cases} a \cos(\theta) + b \sin(\theta) = \cos(\theta) \\ b \cos(\theta) - a \sin(\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

soit $a = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ et $b = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

$s_2 \circ s_1(\vec{v}_1) = s_2(\vec{v}_1) = \cos(2\theta)\vec{v}_1 + \sin(2\theta)\vec{v}_1 = r^2(\vec{v}_1) = \vec{v}_3$. $s_2 \circ s_1$ et r^2 sont deux rotations qui envoient $\vec{v}_1$ sur $\vec{v}_3$: elles sont donc égales. On a donc $s_2 \circ s_1 = r^2$.

Comme $(s_2 \circ s_1)^{-1} = s_1^{-1} \circ s_2^{-1} = s_1 \circ s_2$, $s_1 \circ s_2 = r^{-2}$.

□

Correction de l'Exercice 55

[Retour à l'énoncé](#)

On remarque que A est symétrique et ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. De plus

$$(12)^2 + 4^2 + 6^2 = 144 + 16 + 36 = 196 = (14)^2$$

Les vecteurs colonnes sont unitaires : l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique est un endomorphisme orthogonal symétrique : c'est une symétrie orthogonale. Comme ce n'est ni l'identité ni son opposé, c'est une symétrie par rapport à un plan ou par rapport à une droite. Si c'est une symétrie par rapport à un plan, dans une base orthogonale

adaptée au plan, la matrice sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc de trace 1 et Si c'est une

symétrie par rapport à une droite, dans une base orthogonale adaptée à celle-ci, la matrice sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc de trace -1 . Comme $\text{tr}(A) = \frac{1}{14}(12 + 6 - 4) = 1$,

l'endomorphisme associé à A est une symétrie orthogonale par rapport à un plan donc une réflexion. Les éléments du plan sont ceux vérifiant $AX = X$, le plan a pour équation $-x + 2y - 3z = 0$.

Comme précédemment, On remarque que B est symétrique et ses vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. De plus

$$(2)^2 + 6^2 + 3^2 = 7^2$$

Les vecteurs colonnes sont unitaires; l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique est un endomorphisme orthogonal symétrique de trace -1 : c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ dont un système d'équations est

$$\begin{cases} -5x - 6y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 13z = 0 \end{cases}.$$

L'orthogonal de Δ est l'ensemble des éléments vérifiant $AX = -X$ soit le plan d'équation $3x - 2y + z = 0$: un vecteur directeur de Δ est $(3, -2, 1)$.

□

Correction de l'Exercice 56[Retour à l'énoncé](#)

1. On vérifie aisément que les vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux et comme

$$8^2 + 1 + 4^2 = 81 = 9^2 = 4^2 + 4^2 + 7^2$$

ces vecteurs sont unitaires : A est une matrice orthogonale ; f est un endomorphisme orthogonal.

2. Si λ est valeur propre de f , il existe un vecteur non nul $\vec{w}$ tel que $f(\vec{w}) = \lambda \vec{w}$. f conservant la norme, $|\lambda| = 1$; les seules valeurs propres possibles sont ± 1 . Par développement suivant la première colonne :

$$\det(A + I_3) = \left(\frac{1}{9}\right)^3 \begin{vmatrix} 17 & 1 & -4 \\ -4 & 13 & -7 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{9}\right)^3 (17(169 + 56) + 4(13 + 32) - (-7 + 52)) \neq 0$$

-1 n'est pas valeur propre. Comme le polynôme caractéristique est de degré 3, il admet au moins une racine : ce ne peut être que 1. 1 est donc valeur propre.

Le système $AX = X$ s'écrit $\begin{cases} -x + y - 4z = 0 \\ 4x + 5y + 7z = 0 \\ x + 8y - 5z = 0 \end{cases}$. En additionnant la première équation

et la dernière, on obtient $y = z$ puis en reportant $x = -3y$. Il s'agit donc d'une droite de vecteur directeur $(3, -1, -1)$. Le vecteur unitaire de cette droite de première coordonnée positive est donc $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, -1, -1)$.

3. $\mathcal{P}$ est un plan orthogonal à la droite $\text{Vect}(\vec{w})$ stable par l'isométrie f , aussi le plan est stable par f .

La restriction de f à ce plan n'a pas de valeurs propres (-1 n'est pas valeur propre de f et le sous-espace propre associé à 1 est l'orthogonal de ce plan) : $f|_{\mathcal{P}}$ est une rotation. Dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$ orthogonale du plan orienté par $\vec{w}$ (c'est à dire telle que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

une base directe de $\mathbb{R}^3$), $f|_{\mathcal{P}}$ a pour matrice R_θ et A est semblable à $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi $\text{tr}(A) = 2\cos(\theta) + 1 = \frac{16}{9}$ donc $\cos(\theta) = \frac{7}{18}$.

Il reste à connaître le signe de $\sin(\theta)$ pour déterminer θ . Soit $\vec{X}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{w}$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}'$. On a alors

$$D = \det_{\mathcal{B}'}(\vec{X}, f(\vec{X}), \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & \cos(\theta)x - \sin(\theta)y & 0 \\ y & \sin(\theta)x + \cos(\theta)y & 0 \\ z & z & 1 \end{vmatrix} = \sin(\theta)(x^2 + y^2)$$

de signe constant (celui de $\sin(\theta)$) puisque $(x, y) \neq (0, 0)$. Or ce déterminant est le même dans toutes les bases orthonormales directes. En choisissant $\vec{X} = \vec{i}$, on a alors

$$D = \frac{1}{9\sqrt{11}} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{5}{9\sqrt{11}} > 0$$

Aussi la restriction de f à $\mathcal{P}$ orienté par $\vec{w}$ est une rotation d'angle $\arccos(\frac{7}{18})$. On dit que f est une rotation de cet angle autour de l'axe dirigé par $\vec{w}$.

□

Correction de l'Exercice 57

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme sous-espaces propres de f , F_f et G_f sont stables par f et f étant une isométrie, il en est de même de leurs orthogonaux. De plus, comme $F_f \cap F_f^\perp$ est réduit à $\{0_E\}$, le seul élément de $F_f^\perp$ fixe par f est 0_E .

2. Si λ est valeur propre de f , il existe un vecteur non nul $\vec{w}$ tel que $f(\vec{w}) = \lambda\vec{w}$. f conservant la norme, $|\lambda| = 1$; les seules valeurs propres possibles sont ± 1 . De plus, comme E est de dimension 3, le polynôme caractéristique de f est de degré 3; il admet donc au moins une racine réelle. 1 ou -1 est valeur propre de $f : F_f$ ou G_f n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

3. Si $F_f = E$, alors $f = id_E$.

4. $F_f^\perp$ est une droite stable par f ; la restriction de f à cette droite n'admet pas de vecteurs fixes autre que 0_E . Tout vecteur non nul de cette droite a pour image un vecteur de cette droite autre que lui-même et de même norme; ainsi si $\vec{v}$ est élément de $F_f^\perp$, $f(\vec{v}) = -\vec{v}$. On a alors $F_f^\perp \subset G_f$. Comme F_f est de dimension 2, la dimension de G_f ne peut excéder 1. On a donc $G_f = F_f^\perp$. f est donc la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport au plan F_f .

5.

a. $F_f^\perp$ est un plan et la restriction de f à ce plan est une isométrie plane sans élément fixe autre que 0_E : c'est donc une rotation.

b. Dans une base décrite par l'énoncé, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\text{tr}(f) = 2\cos(\theta) + 1$.

c. f transforme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en la base $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$: c'est un endomorphisme orthogonal. Les éléments (x, y, z) fixes par f vérifient $x = y = z$; c'est une droite de vecteur directeur $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. f est donc une rotation d'angle de mesure θ autour de l'axe dirigé par $\vec{w}$. Par la trace, $2\cos(\theta) + 1 = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

Il reste à connaître le signe de $\sin(\theta)$. Soit $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ élément de $F_f^\perp$ et $\vec{e}_2 = \vec{w} \wedge \vec{e}_1$.

Comme $f(\vec{e}_1) = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2$

$$\sin(\theta) = \langle f(\vec{e}_1), \vec{e}_2 \rangle = \det(w, e_1, f(e_1)) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il s'agit d'une rotation d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $\vec{w}$.

6.

a. La restriction de f à l'orthogonal de $G_f^\perp$ n'admet en dehors de 0_E ni élément fixes ni éléments changés en leur opposé: ainsi $G_f^\perp$ n'est pas une droite (les seules isométries d'une droite sont l'identité et son opposé). G_f n'est pas de dimension 2. Comme 1 n'est pas valeur propre, -1 est valeur propre; la dimension de G_f vaut au moins 1. On a vérifié que G_f est de dimension 1 ou 3. Si G_f est de dimension 3, $f = -id_E$.

b. La restriction de f à $G_f^\perp$ est une rotation r sans point fixe autre que 0_E . Soit $\vec{x}$ élément de E décomposé en $\vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in G_f$ et $\vec{z} \in G_f^\perp$. On a alors $f(\vec{x}) = -\vec{y} + r(\vec{z})$ et $f^2(\vec{x}) = \vec{y} + r^2(\vec{z})$. $f^2(\vec{x}) = \vec{x}$ si et seulement si $r^2(\vec{z}) = \vec{z}$. r^2 n'a des points fixes autre que 0 si et seulement si r^2 est l'identité ce qui impose si θ est l'angle de la rotation r que $2\theta \equiv 0[2\pi]$ soit $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ mais alors r est soit l'identité soit son opposé ce qui est exclus. Ainsi $f^2(\vec{x}) = \vec{x}$ si et seulement si $x \in G_f$. On a bien vérifié que $G_f = \text{Ker}(f^2 - \text{id}_E)$.

c. On a vu précédemment que la restriction de f à P est une rotation. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base directe de P orienté par $\vec{w}$ vecteur unitaire de G_f . Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{w})$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit ρ la rotation de matrice dans cette base $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les restrictions de ρ et f à P sont égales.

Soit $\vec{x}$ élément de E décomposé en $\vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in G_f$ et $\vec{z} \in P$ (donc $r(\vec{z}) \in P$). On a alors

$$f(\vec{x}) = -\vec{y} + r(\vec{z}) \text{ et } s_P \circ \rho(\vec{x}) = s_P(\vec{y} + r(\vec{z})) = -\vec{y} + r(\vec{z}),$$

ce qui prouve que $s_P \circ \rho = f$. De même :

$$\rho \circ s_P(\vec{x}) = \rho(-\vec{y} + \vec{z}) = -\vec{y} + r(\vec{z})$$

ce qui vérifie $s_P \circ \rho = f = \rho \circ s_P$.

d. Soit $f = s_P \circ \rho = \rho \circ s_P$. Pour $\vec{x}$ élément de $P^\perp$, $s_P(\rho(\vec{x})) = -\rho(\vec{x})$ donc $\rho(\vec{x})$ est élément de $P^\perp$: $P^\perp$ est stable par ρ ; la seule droite stable par ρ est son axe car $\rho \neq \text{id}_E$; donc l'axe de ρ est orthogonal à P . Or

$$f^2 = \rho \circ s_P \circ s_P \circ \rho = \rho^2$$

L'axe de ρ^2 est celui de f^2 ; comme ρ et ρ^2 ont même axe, l'axe de rotation de ρ est entièrement déterminé. P son orthogonal est unique. Ainsi s_P est entièrement déterminé par la donnée de f et $\rho = f \circ s_P$ est unique. La décomposition trouvée précédemment est unique.

□

Correction de l'Exercice 58

[Retour à l'énoncé](#)

Soient x élément de l'image de $\text{Id}_E - u$. Il existe x' tel que $x = x' - u(x')$, on a alors :

$$\forall y, \langle x, y \rangle = \langle x' - u(x'), y \rangle = \langle x', y \rangle - \langle u(x'), y \rangle$$

Aussi si y est élément du noyau de $\text{Id}_E - u$, comme $u(y) = y$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle - \langle u(x'), u(y) \rangle = 0$$

puisque u conserve le produit scalaire. On a ainsi prouvé que

$$\text{Ker}(\text{Id}_E - u) \subset \text{Im}(\text{Id}_E - u)^\perp$$

Par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(\text{Id}_E - u)) = n - \dim(\text{Im}(\text{Id}_E - u)) = \dim(\text{Im}(\text{Id}_E - u)^\perp)$$

$\text{Ker}(Id_E - u)$ est inclus dans $\text{Im}(Id_E - u)^\perp$ et de même dimension, les deux sous-espaces sont donc égaux.

□

Correction de l'Exercice 59

[Retour à l'énoncé](#)

Soit U le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1. Alors

$$S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = U^T A U = \langle U, A U \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|S| \leq \|U\| \|A U\|$$

Comme A est une matrice orthogonale $\|A U\| = \|U\| = \sqrt{n}$. On trouve bien ainsi l'inégalité demandée :

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

avec égalité si et seulement si $A U$ et U sont colinéaires soit $A U = \pm U$.

□

Correction de l'Exercice 60

[Retour à l'énoncé](#)

Soient $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. A partir de cette base de $\mathbb{R}^n$, on construit une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt que l'on rappelle :

$$e_1 = \frac{C_1}{\|C_1\|} \text{ donc } C_1 = \|C_1\| e_1$$

puis par récurrence $(e_1, \dots, e_{k-1})$ étant construit ;

$$u_k = C_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle C_k, e_i \rangle e_i \text{ puis } e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|} ; \text{ on a alors } C_k = \sum_{i=1}^k \langle C_k, e_i \rangle e_i.$$

Ainsi, si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(C_1, \dots, C_n)$$

qui est le résultat attendu puisque $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1)$ est une matrice orthogonale (changement de bases orthonormales) et $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(C_1, \dots, C_n)$ triangulaire par construction.

Le résultat demeure vrai si A n'est pas inversible mais il faut adapter le procédé d'orthogonalisation précédent. Si la famille des C_i n'est pas de rang n , soit F le sous-espace engendré par cette famille et r sa dimension.

On pose $i_1 = \inf\{i, C_i \neq 0\}$ puis $i_k = \inf(j, (C_{i_1}, \dots, C_{i_{k-1}}, C_j) \text{ libre})$. On remarque que $i_k > i_{k-1}$ donc par récurrence $i_k \geq k$.

$(C_{i_1}, \dots, C_{i_r})$ est alors une base de F auquel on peut appliquer le procédé précédent pour obtenir une base orthonormale $(e_1, \dots, e_r)$ que l'on complète en une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout i entre 1 et n , on peut définir k tel que $k = \inf(j, (C_{i_1}, \dots, C_{i_j}, C_i))$ est liée; comme $C_i \notin \text{Vect}(C_{i_1}, \dots, C_{i_{k-1}})$, $k-1 \leq i_{k-1} < i < i_k$ donc $C_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $k \geq i$. La matrice des C_i dans la base $\mathcal{B}_1$ est donc triangulaire supérieure. On finit alors comme précédemment.

□

Correction de l'Exercice 61

[Retour à l'énoncé](#)

1. On remarque immédiatement que $f(x) = x$ si $\langle a|x \rangle = 0$. 1 est donc valeur propre et le sous-espace propre associé contient $H = D^\perp$ où D est la droite engendrée par a .

De plus, $f(a) = (1 + \alpha\|a\|^2)a$ donc a est vecteur propre associé à la valeur propre $s = 1 + \alpha\|a\|^2$ qui est différente de 1. Le sous-espace propre associé contient donc D . Comme D et son orthogonal sont supplémentaires et que la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder la dimension de E , on a donc deux valeurs propres 1 et $1 + \alpha\|a\|^2$ dont les sous-espaces propres associés sont respectivement $D^\perp$ et D .

2. $\|f(a)\| = \|a\|$ si et seulement si $|s| = 1$. Comme $s \neq 1$, la seule possibilité est $s = -1$ soit $\alpha = -\frac{2}{\|a\|^2}$. On a alors $f|_H = id_H$ et $f|_D = -id_D$: f est la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport à H .

3. On applique ce qui précède avec $a = (1, 2, 3)$. On a alors

$$s(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{2(x + 2y + 3z)}{14}(1, 2, 3) = \frac{1}{7}(6x - 2y - 3z, -2x + 3y - 6z, -3x - 6y - 2z)$$

La matrice de s dans la base canonique est donc :

$$S = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie mentalement que cette matrice est bien symétrique, orthogonale et de trace 1.

□

Correction de l'Exercice 62

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Supposons que $f^2 = -id_E$ et $f \in O(E)$. On a alors pour tout x , puisque f conserve le produit scalaire :

$$\langle x, f(x) \rangle = -\langle f^2(x), f(x) \rangle = -\langle f(x), x \rangle$$

ce qui, compte-tenu de la symétrie du produit scalaire, donne bien $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

b. Supposons que $f^2 = -id_E$ et $\forall x \in E$, $\langle x, f(x) \rangle = 0$. En appliquant cette seconde propriété à $x + f(x)$ on obtient :

$$\langle x + f(x), f(x) + f^2(x) \rangle = \langle x + f(x), f(x) - x \rangle = 0$$

En développant on obtient :

$$-\langle x, x \rangle + \langle f(x), f(x) \rangle = 0$$

f conserve la norme ; c'est donc bien un endomorphisme orthogonal.

c. Supposons que $f \in O(E)$ et $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$. Pour tout couple (x, y) :

$$\langle f(x) + f(y), x + y \rangle = 0$$

et donc en développant $\langle f(x), y \rangle + \langle x, f(y) \rangle = 0$.

En appliquant ce résultat au couple $(f(x), y)$ on a alors :

$$\langle f^2(x), y \rangle + \langle f(x), f(y) \rangle = -\langle x, y \rangle + \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

f conserve le produit scalaire : c'est donc un endomorphisme orthogonal.

2. comme $f^2 = -id_E$, $(\det(f))^2 = (-1)^n$ où n est la dimension de E . $(-1)^n > 0$ impose alors n pair.

□

Correction de l'Exercice 63

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $\phi_i(M) = \phi_i(M')$, M_i étant inversible, en multipliant à droite par M_i^{-1} , on obtient $M = M'$, ϕ_i est donc injective de G ensemble fini dans lui-même : c'est une bijection. L'inverse de ϕ_i est $\phi_i^{-1}(M) = MM_i^{-1}$. Pour prouver que G est un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{R})$, il faut vérifier qu'il contient la matrice I_d et que toute matrice M de G a son inverse dans G .

ϕ_i^{-1} étant une application de G dans lui-même, $\phi_i^{-1}(M_i) = I_d$ est élément de G . Aussi pour tout i , on a $\phi_i^{-1}(I_d) = M_i^{-1}$ est élément de G .

2. Q est manifestement bilinéaire et symétrique. De plus

$$Q(X, X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|M_k X\|^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si pour tout k , $M_k X = 0$ ce qui équivaut à $X = 0$ puisque les matrices M_k sont inversibles.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une autre écriture de Q est

$$Q(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{M \in G} \langle MX, MY \rangle.$$

Une description de G est l'ensemble des $\phi_i(M_k)$ avec $1 \leq k \leq n$. Aussi

$$Q(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle M_k M_i X, M_k M_i Y \rangle = Q(M_i X, M_i Y).$$

L'application $X \mapsto M_i X$ conserve le produit scalaire Q : sa matrice M_i est orthogonale pour le produit scalaire Q .

3. $PM_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_i(M_k) = \frac{1}{n} \sum_{M \in G} M = P$ pour tout i . Aussi

$$P^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n PM_k = P$$

P est une matrice de projecteur.

P est la matrice d'un projecteur orthogonal pour Q si et seulement si $Q(PX, Y) = Q(X, PY)$.

Or :

$$Q(PX, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \langle M_k PX, PY \rangle$$

Soit ψ_i l'application de G dans G qui à M associe $M_i M$. Pour les mêmes raisons que ϕ_i , ψ_i est bijective. Ainsi pour tout i :

$$M_i P = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_i(M_k) = \frac{1}{n} \sum_{M \in G} M = P$$

et $Q(PX, Y) = Q(PX, PY)$. En échangeant les rôles de X et Y et par symétrie du produit scalaire

$$Q(X, PY) = Q(PY, X) = Q(PY, PX) = Q(PX, PY) = Q(PX, Y)$$

P est un projecteur orthogonal pour Q .

□

Correction de l'Exercice 64

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Comme $u(x) = \lambda x$,

$$\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$$

x étant non nul et u conservant la norme, $|\lambda| = 1$ soit $\lambda = \pm 1$.

2. Soit G un sous-espace de E stable par u . La restriction de u à G conserve encore la norme ; $u|_G$ est donc une isométrie de G et est donc bijectif. Pour tout élément x de G , il existe x' élément de G tel que $x = u(x')$. Soit y élément de $G^\perp$; comme u conserve le produit scalaire :

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x'), u(y) \rangle = \langle x', y \rangle = 0$$

$u(y)$ est encore élément de $G^\perp$ ce qui prouve la stabilité de $G^\perp$ par u .

3. Comme somme de deux sous-espaces stables par u , $S = E_+ \oplus E_-$ est stable par u . Il faut prouver que cette somme est une somme orthogonale. Soit $(x, y) \in E_+ \times E_-$; on a alors $u(x) = x$ et $u(y) = -y$ et comme u conserve le produit scalaire :

$$\langle u(x), u(y) \rangle = -\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

soit $\langle x, y \rangle = 0$. E_+ et E_- sont des sous-espaces orthogonaux donc $S = E_+ \overset{\perp}{\oplus} E_-$ et

$$E = S \overset{\perp}{\oplus} F = E_+ \overset{\perp}{\oplus} E_- \overset{\perp}{\oplus} F.$$

F étant l'orthogonal d'un sous-espace stable par u , F est stable par u . $u|_F$ est un endomorphisme sans valeur propre réelle (tous les vecteurs propres de u sont dans S) aussi la dimension de F est paire puisque son polynôme caractéristique n'a pas de racine réelle et est donc de degré pair.

4. Soit A la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ de E . Son polynôme caractéristique n'a pas de racines réelles et ses racines complexes sont deux à deux conjuguées. Soit α l'une d'elles et V un vecteur propre associé : $AV = \alpha V$ et $A\bar{V} = \bar{\alpha}\bar{V}$. Soient $V_1 = \frac{V + \bar{V}}{2}$ et $V_2 = \frac{V - \bar{V}}{2i}$. V_1 et V_2 sont des vecteurs réels tels que $V = V_1 + iV_2$. Posons $\alpha = a + ib$ avec a et b réels ; on a alors

$$AV = (a + ib)(V_1 + iV_2) = aV_1 - bV_2 + i(aV_2 + bV_1) \text{ et } A\bar{V} = aV_1 - bV_2 - i(aV_2 + bV_1)$$

ainsi

$$AV_1 = aV_1 - bV_2 \text{ et } AV_2 = aV_2 + bV_1.$$

Soient v_1 et v_2 les vecteurs de E de matrice V_1 et V_2 dans la base $\mathcal{B}$. On a montré que $u(v_1) = av_1 - bv_2$ et $u(v_2) = av_2 + bv_1$.

L'espace engendré par (v_1, v_2) est donc stable par u . Il reste à prouver qu'il s'agit bien d'un plan donc que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Supposons que v_1 et v_2 sont colinéaires : V étant non nul, v_1 ou v_2 est non nul et son image lui étant colinéaire, c'est un vecteur propre de u ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Par l'absurde, on a bien vérifié que $\text{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan. La restriction de u à ce plan est une isométrie sans point fixe de ce plan : c'est donc une rotation.

5. Soit $p = \dim(E_+)$, $q = \dim(E_-)$ et $2r = \dim(F)$.

Prouvons par récurrence sur r que si $\dim(F) = 2r$ et qu'une isométrie v de F n'a pas de vecteurs propres, il existe une base orthogonale de F dans laquelle cette isométrie a pour

matrice :

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

- Initialisation : Si $r = 1$, on a démontré ce résultat dans la question précédente.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie si $\dim(F) = 2(r-1)$. Soit v une isométrie de F de dimension $2r$ sans valeurs propres. Alors par la question 4, il existe un plan stable P pour lequel $v|_P$ est une rotation et admet donc dans $\mathcal{B}_P$ base orthonormale de P une matrice R_{θ_r} . $P^\perp$ est stable par v d'après la question 2 et de dimension $2r-2$. La restriction v_1 de v à $P^\perp$ est une isométrie sans valeurs propres. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1$ de $P^\perp$ dans laquelle v_1 a pour matrice

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\theta_{r-1}) \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_P$ est une base orthonormale de F (comme concaténée de deux bases orthonormales de sous-espaces orthogonaux) dans laquelle la matrice de v est de la forme attendue.

On a ainsi démontré par récurrence le résultat annoncé.

Soit $\mathcal{B}_p$ une base de E_+ , $\mathcal{B}_q$ une base orthonormale de E_- et $\mathcal{B}_r$ une base orthonormale

de F dans laquelle la matrice de la restriction de u à F est

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{B}_p \cup \mathcal{B}_q \cup \mathcal{B}_r$ est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

Si p , q ou r est nul, la base correspondante n'existe pas et le bloc correspondant disparaît.

□

Correction de l'Exercice 65[Retour à l'énoncé](#)

A étant symétrique, par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit s une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. $AX = sX$ donc $A^2X = s^2X$ et $A^3X = s^3X$. De la relation donnée $A^3 + A^2 + A = 0$ multipliée à droite par X on obtient

$$(s^3 + s^2 + s)X = 0$$

et comme X n'est pas nul, $s(s^2 + s + 1) = 0$. Le trinôme n'admettant pas de racine réelle, la seule valeur propre de A est 0. Comme elle est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, c'est la matrice nulle.

La matrice nulle est la seule matrice symétrique réelle vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

□

Correction de l'Exercice 66[Retour à l'énoncé](#)

On remarque que la matrice $S = A^T A - A A^T$ est symétrique donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles et leur somme est égale à la trace de S . Or la trace de S est nulle puisque $A^T A$ et $A A^T$ ont même trace. Toutes les valeurs propres sont nulles. Comme S est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, c'est la matrice nulle ce qui équivaut à $A^T A = A A^T$.

□

Correction de l'Exercice 67[Retour à l'énoncé](#)

1. si y est un vecteur, et p un projecteur orthogonal, $y = p(y) + z$ où $\langle p(y), z \rangle = 0$. Aussi :

$$\langle y, p(y) \rangle = \|p(y)\|^2.$$

2. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre s de $p_1 \circ p_2 \circ p_1$. On a alors, p_1 étant un endomorphisme symétrique :

$$s\|x\|^2 = \langle x, p_1 \circ p_2 \circ p_1(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2 \circ p_1(x) \rangle$$

Comme x est non nul, en appliquant la propriété démontrée en première question avec le projecteur p_2 et $y = p_1(x)$:

$$s = \frac{\|p_2 \circ p_1(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$$

De plus par propriété des projecteurs orthogonaux :

$$\|p_2 \circ p_1(x)\| \leq \|p_1(x)\| \leq \|x\|$$

donc $s \leq 1$.

□

Correction de l'Exercice 68[Retour à l'énoncé](#)

On rappelle le théorème suivant :

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. $p_F(x)$ est l'unique élément y_0 de F tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

1. On introduit sur $\mathbb{R}[X]^2$ l'application suivante

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx$$

PQ étant un polynôme, l'application $x \mapsto e^{-x} P(x) Q(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant la fonction intégrable $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ au voisinage de l'infini : $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.

C'est manifestement une forme bilinéaire symétrique telle que pour tout polynôme P , $\langle P, P \rangle \geq 0$ avec égalité compte tenu de la continuité, si et seulement si $P(x) = 0$ pour tout $x > 0$. P ayant alors une infinité de racines, c'est le polynôme nul. On a bien défini un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

Si $A = X^2$ comme $P = aX + b$ décrit $\mathbb{R}_1[X]$ lorsque (a, b) décrivent $\mathbb{R}^2$, on cherche donc à prouver l'existence de $\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|A - P\|^2$. Le théorème rappelé précédent nous affirme cette existence, que cette borne inférieure est atteinte en $P_0 = a_0X + b_0$ projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Ce projeté est caractérisé par être un polynôme de degré au plus 1 tel que $A - P_0$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$ ce qui équivaut à

$$\langle A - P_0, 1 \rangle = \langle A - P_0, X \rangle = 0$$

puisque $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Soit la suite α_n définie par $\alpha_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. (a_0, b_0) est donc solution du système

$$(S) \quad \begin{cases} a_0 \alpha_1 + \alpha_0 b_0 = \alpha_2 \\ a_0 \alpha_2 + \alpha_1 b_0 = \alpha_3 \end{cases}$$

Par intégration par parties généralisées, on prouve que $\alpha_n = n\alpha_{n-1}$ et comme $\alpha_0 = 1$, on obtient $\alpha_n = n!$.

Le système (S) devient donc

$$(S) \quad \begin{cases} a_0 + b_0 = 2 \\ 2a_0 + b_0 = 6 \end{cases}$$

soit $a_0 = 4$ et $b_0 = -2$. Le polynôme P_0 est donc $4X - 2$.

De plus, P_0 et $A - P_0$ étant orthogonaux :

$$\|A\|^2 = \|P_0\|^2 + \|A - P_0\|^2$$

Ainsi, le minimum cherché m vaut

$$m = \|A\|^2 - \|P_0\|^2 = \alpha_4 - (16\alpha_2 - 16\alpha_1 + 4\alpha_0) = 24 - 20 = 4.$$

2. On définit sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ le produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Soit f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = t \ln(t)$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$. Soit F l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus 1. Le problème posé est alors $\inf_{g \in F} \|f - g\|^2$. Le théorème rappelé précédent nous affirme cette existence, que cette borne inférieure est atteinte en $g_0 : t \mapsto at + b$ projeté orthogonal de f sur F .

Ce projeté est caractérisé par être de degré au plus 1 et tel que $f - g_0$ est orthogonal à F ce qui équivaut à

$$\langle f - g_0, 1 \rangle = \langle f - g_0, X \rangle = 0$$

où $X : t \mapsto t$. (a, b) est donc solution du système :

$$(S) \quad \begin{cases} a \int_0^1 t dt + b \int_0^1 dt = \int_0^1 f(t) dt \\ a \int_0^1 t^2 dt + b \int_0^1 t dt = \int_0^1 t f(t) dt \end{cases}.$$

Or $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Une intégration par parties généralisées sur l'intervalle $]0, 1]$ donne alors pour n entier naturel :

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1} \ln(t)}{n+1} \right]_{x \rightarrow 0}^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Le système (S) s'écrit donc :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{a}{2} + b = -\frac{1}{4} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

Comme $b = -\frac{1}{4} - \frac{a}{2}$, $(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})a = \frac{a}{12} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{1}{72}$ aussi $(a, b) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$. Comme précédemment, le minimum cherché est

$$m = \langle f, f \rangle - \langle g_0, g_0 \rangle.$$

$\langle f, f \rangle = \int_0^1 t^2 \ln^2 t dt$. Une intégration par parties sur l'intervalle $[x, 1]$ avec les fonctions $u : t \mapsto \ln^2 t$ et $v : t \mapsto \frac{t^3}{3}$ donne alors

$$\int_x^1 t^2 \ln^2(t) dt = [u(t)v(t)]_x^1 - \frac{2}{3} \int_x^1 t^2 \ln(t) dt$$

et en faisant tendre x vers 0, tous les termes ayant une limite :

$$\langle f, f \rangle = -\frac{2I_2}{3} = \frac{2}{27}$$

De plus

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{6} - \frac{1}{3} \right)^2 dt = \frac{1}{36} \int_0^1 (t-2)^2 dt = \left[\frac{(t-2)^3}{108} \right]_0^1 = \frac{7}{108}.$$

Ainsi $m = \frac{2}{27} - \frac{7}{108} = \frac{1}{108}$.

□

Correction de l'Exercice 69[Retour à l'énoncé](#)

1. L'application proposée est clairement une forme bilinéaire symétrique. De plus :

$$\langle f, f \rangle = \int (f^2(t) + (f'(t))^2) dt \geq 0$$

avec égalité, compte-tenu de la continuité, si et seulement si $f^2(t) + (f'(t))^2 = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc $f = 0$. L'application proposée définit bien un produit scalaire sur E .

2. Soit $e_1 : x \mapsto e^x$ et $e_2 : x \mapsto e^{-x}$. On a alors $W = \text{Vect}(e_1, e_2)$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E .

V apparaît comme l'intersection des noyaux des formes linéaires $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto f(1)$: c'est donc bien aussi un sous-espace vectoriel de E .

Soient $(f, g) \in V \times W$. Par une intégration par parties, les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\int_0^1 f'g' = [fg']_0^1 - \int_0^1 fg'' \underset{f(0)=f(1)=0}{=} - \int_0^1 fg''$$

et ainsi

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(g - g'') \underset{g=g''}{=} 0$$

V et W sont en somme directe et orthogonaux.

Soit f élément de E . Vérifions que $f \in V \oplus W$. On cherche donc g dans V et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f = g + ae_1 + be_2.$$

$g = f - ae_1 - be_2$ est élément de E pour tout couple (a, b) . De plus, $f - ae_1 - be_2$ appartient à V équivaut au système $\begin{cases} a + b = f(0) \\ ae + be^{-1} = f(1) \end{cases}$ qui a une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ (son

déterminant est non nul). On a ainsi vérifié que $E = V \oplus W$.

3. Soit e_0 la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$. On remarque que $f \in U$ équivaut à $e_0 - f \in V$ soit $f = e_0 - g$ avec $g \in V$. On a donc

$$\inf_{f \in U} \int_0^1 (f^2 + (f')^2) = \inf_{f \in U} (\|f\|^2) = \inf_{g \in V} (\|e_0 - g\|^2).$$

Par le théorème du projeté orthogonal, cette borne inférieure est un minimum atteint en $p_V(e_0)$ projeté orthogonal de e_0 sur V et vaut $m = \|e_0 - p_V(e_0)\|^2$.

V et W étant supplémentaires et orthogonaux $m = \|p_W(e_0)\|^2$ où $p_W(e_0)$ est le projeté orthogonal de e_0 sur W ; il s'écrit $ae_1 + be_2$ où (voir la question précédente)

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ae + be^{-1} = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système par substitution ou formules de Cramer donne $a = \frac{1}{1+e}$ et $b = \frac{e}{1+e}$. Soit $h = p_W(e_0) = \frac{e_1 + ee_2}{1+e}$.

$$h^2 + h'^2 = \frac{(e_1 + ee_2)^2 + (e_1 - ee_2)^2}{(1+e)^2} = \frac{2}{(1+e)^2} (e_1^2 + e^2 e_2^2).$$

d'où :

$$m = \frac{2}{(1+e)^2} \left(\int_0^1 e^{2t} dt + e^2 \int_0^1 e^{-2t} dt \right) = \frac{1}{(1+e)^2} (e^2 - 1 - e^2(e^{-2} - 1)) = \frac{2(e^2 - 1)}{(1+e)^2}.$$

□

Correction de l'Exercice 70

[Retour à l'énoncé](#)

1. A_n est symétrique réelle donc diagonalisable. Les $n-3$ dernières colonnes sont égales à la troisième donc le rang de la matrice est celui de ses trois premières colonnes. Celles-ci sont indépendantes donc A_n est de rang 3. La dimension du noyau est donc $n-3$ par le théorème du rang : 0 est une valeur propre de multiplicité 3.

2. $A_3^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; ainsi $B = 0$. En multipliant par A^p on a alors pour tout $p \geq 0$:

$$A_3^{p+3} - 2A_3^{p+2} - A_3^{p+1} + A_3^p = 0$$

et en prenant la trace

$$u_{p+3} - 2u_{p+2} - 3u_{p+1} + u_p = 0$$

avec $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 6$.

3. Soit s une valeur propre non nulle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$$AX = sX \text{ donne alors : } \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= sx_1 \\ x_1 + x_2 &= sx_2 \\ x_1 &= sx_i \text{ pour } 3 \leq i \leq n \end{cases}.$$

On en tire que $x_1 = (s-1)x_2$ puis pour $i \geq 3$, $x_i = \frac{x_1}{s} = \frac{(s-1)x_2}{s}$. En reportant dans la première équation on obtient :

$$x_2 \left(s + \frac{(n-2)(s-1)}{s} - s(s-1) \right) = 0$$

x_2 étant non nul puisque X n'est pas le vecteur nul, s est valeur propre non nulle de A_n si et seulement si $s + \frac{(n-2)(s-1)}{s} - s(s-1) = 0$. En multipliant par $-s$, on obtient alors que les valeurs propres sont les racines de

$$P_n(X) = X^3 - 2X^2 + (2-n)X + n-2.$$

De plus, on peut remarquer que l'espace propre associé à l'une d'entre elles est de dimension

1 puisqu'il est engendré par le vecteur $X_s = \begin{pmatrix} s(s-1) \\ s \\ s-1 \\ \vdots \\ s-1 \end{pmatrix}$. P_n a donc trois racines distinctes

puisque A_n est diagonalisable et ses racines sont simples.

4.

a. Le système proposé a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \\ 1 & \beta_n & \beta_n^2 \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 \end{vmatrix}$; on reconnaît le déterminant de Vandermonde associé au triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$. Ces trois nombres étant deux à deux distincts, ce déterminant est non nul; c'est un système de Cramer qui admet donc une solution unique. On pourrait la calculer à partir des formules de Cramer ou par les méthodes usuelles mais il y a plus rapide. Comme les racines de P_n vérifient $s^3 = 2s^2 - (2-n)s + 2-n$:

$$s^4 = 2s^3 - (2-n)s^2 + (2-n)s = 2(2s^2 - (2-n)s + 2-n) - (2-n)s^2 + (2-n)s$$

soit $s^4 = (n+2)s^2 - (2-n)s - 2(n-2)$.

On a obtenu une solution de (S_n) $(x, y, z) = (-2(n-2), n-2, n+2)$ et c'est donc l'unique solution.

b. $P'_n(x) = 3X^2 - 4X + (2-n)$ admet deux racines $x_1 = \frac{2 - \sqrt{3n-2}}{3} < 0$ et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{3n-2}}{3} > 1$. Les racines de P_n vérifient donc :

$$\alpha_n < x_1 < \beta_n < x_2 < \gamma_n$$

Compte-tenu des remarques sur x_1 et x_2 , $\alpha_n < 0$ et $\gamma_n > 1$. Comme $\alpha_n \beta_n \gamma_n = 2-n < 0$, $\beta_n > 0$.

On remarque que $P_n(1) = -1$ et $P_n(0) = n-2 > 0$. P_n change de signe sur l'intervalle $]0, 1[$, cet intervalle contient une racine qui ne peut être que β_n car $\gamma_n > 1$.

$P_n(\sqrt{n}) = -n + 2(\sqrt{n} - 1) \sim -n$. Pour n assez grand, $P_n(\sqrt{n}) < 0$ donc $\gamma_n > \sqrt{n}$.

$P_n(\sqrt{n} + 1) = n\sqrt{n} + 3n + 3\sqrt{n} + 1 - 2(n + 2\sqrt{n} + 1) - (n-2)(\sqrt{n} + 1) + n - 2 \sim n$. Pour n assez grand, $P_n(\sqrt{n} + 1) > 0$ donc $\gamma_n < \sqrt{n} + 1$.

c. Par l'encadrement précédent, on obtient déjà que $\gamma_n \sim \sqrt{n}$. En utilisant le système (S_n) , on a :

$$\gamma_n^4 - n\gamma_n^2 = 2\gamma_n^2 + (n-2)\gamma_n - 2(n-2).$$

Comme $\gamma_n^2 \sim n$, dans le terme de droite, le terme qui l'emporte est $(n-2)\gamma_n \sim n\sqrt{n}$. On a alors :

$$\gamma_n - \sqrt{n} = \frac{\gamma_n^4 - n\gamma_n^2}{\gamma_n^2(\gamma_n + \sqrt{n})} \sim \frac{n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve bien que la suite $(\gamma_n - \sqrt{n})_n$ a pour limite $\frac{1}{2}$.

□

Correction de l'Exercice 71

[Retour à l'énoncé](#)

1. En appliquant la propriété $(\mathcal{P})$ à (x, x) on obtient que pour tout x $\langle f(x), x \rangle = 0$. Si λ est valeur propre de f , il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors :

$$\langle f(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$$

soit $\lambda = 0$. La seule valeur possible est 0.

Si la dimension de E est impaire, χ_f le polynôme caractéristique de f est de degré impair et admet donc au moins une racine qui ne peut être que 0 d'après ce qui précède. Si 0 n'est pas valeur propre, alors E est de dimension paire.

2. Soit x dans l'image de f et y dans son noyau. Il existe x' tel que $x = f(x')$. On a alors avec la propriété $(\mathcal{P})$:

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x'), y \rangle = -\langle x', f(y) \rangle = 0$$

Les sous-espaces $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont donc orthogonaux, donc en somme directe. Compte-tenu du théorème du rang, on a alors :

$$E = \text{Im}(f) \oplus^\perp \text{Ker}(f) .$$

De plus, la restriction de f à son image vérifie encore la propriété $(\mathcal{P})$ et n'admet pas 0 comme valeur propre : l'image de f est de dimension paire.

3. En appliquant la propriété de l'énoncé au couple $(f(x), y)$ puis $(x, f(y))$, on obtient :

$$\forall (x, y) \in E^2, -\langle s(x), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle = -\langle s(y), x \rangle .$$

Ainsi par symétrie du produit scalaire, on a vérifié que pour tout couple (x, y) ,

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle .$$

s est bien un endomorphisme symétrique.

Comme $s = f^2$, $\text{Im}(s) \subset \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(s)$. En appliquant la propriété $(\mathcal{P})$ au couple $(f(x), x)$, on a alors

$$-\langle s(x), x \rangle = \|f(x)\|^2 .$$

Aussi si $s(x) = 0$, $f(x) = 0$; $\text{Ker}(s) \subset \text{Ker}(f)$. Les noyaux de f et s sont égaux.

Par le théorème du rang, les images de f et s ont même dimension et compte-tenu de l'inclusion $\text{Im}(s) \subset \text{Im}(f)$, ces images sont égales.

4.

a. On a vu précédemment que, pour tout x , $-\langle s(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$. Aussi si $s(x) = \lambda x$ avec λ non nul, $f(x)$ n'est pas le vecteur nul et

$$\lambda = -\frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} < 0 .$$

b. $f^2(x) = \lambda x$ implique en composant par f , $f^3(x) = s(f(x)) = \lambda f(x)$. $f(x)$ étant non nul, c'est bien un vecteur propre de s . Ce vecteur n'est pas colinéaire à x puisque 0 est la seule valeur propre possible de f .

c. $(x, f(x))$ est une base de F_x dont l'image $(f(x), -\lambda x)$ est constituée d'éléments de F_x : F_x est stable par f .

Soit y un vecteur de $F_x^\perp$ donc orthogonal à x et à $f(x)$. En appliquant la propriété $(\mathcal{P})$ à (x, y) puis $(f(x), y)$ on obtient :

$$-\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0 \text{ puis } \langle x, f(y) \rangle = -\langle f^2(x), y \rangle = -\lambda \langle x, y \rangle = 0$$

$f(y)$ est orthogonal à x et à son image : il appartient à $F_x^\perp$.

d. On a vu précédemment que si x est élément de E_λ , il en est de même de $f(x)$: E_λ est stable par f .

La restriction f_λ de f à E_λ n'admet pas 0 comme valeur propre puisque ce sous-espace est inclus dans l'image de f orthogonal du noyau. f_λ vérifie encore la propriété $(\mathcal{P})$ pour les éléments de E_λ : aussi par la question 2, E_λ est de dimension paire $2p$.

Montrons par récurrence sur $m \leq p$ qu'il existe $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ deux à deux orthogonaux et tels que $(x_1, f(x_1), \dots, x_m, f(x_m))$ est une famille libre de E .

- Initialisation pour $m = 1$: On choisit x_1 non nul de E_λ et on a vu que $(x_1, f(x_1))$ est libre.
- Hérédité : Soit $m < p$ On suppose connu $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ deux à deux orthogonaux et tels que $\mathcal{F}_m = (x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_m))$ est une famille libre de E_λ . Comme $2m < 2p$, l'orthogonal de $F = \text{Vect}(\mathcal{F}_m)$ dans E_λ est de dimension au moins 1 : soit x_{m+1} un élément de $F^\perp \cap E_\lambda$. Comme $F = \bigoplus_{j=1}^m F_{x_j}$, on a vu précédemment que $f(x_{m+1})$ est aussi dans l'orthogonal de F car cet élément est dans l'orthogonal de chaque F_{x_j} . Ainsi $F_{x_{m+1}}$ est en somme directe orthogonale avec F : la concaténation de la base de F $(x_1, f(x_1), \dots, x_m, f(x_m))$ avec la base $(x_{m+1}, f(x_{m+1}))$ de $F_{x_{m+1}}$ fournit une base de $F \oplus F_{x_{m+1}}$, donc une famille libre de E_λ .
On a ainsi vérifié l'hérédité de la propriété tant que $m \leq p$.

Pour $m = p$, on a une famille libre maximale donc une base. Ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux d'après les questions précédentes. Pour avoir une base orthonormale, il suffit donc de les normer. Dans les choix successifs des x_i , on peut imposer qu'ils soient unitaires. On a vu alors que $\|f(x)\|^2 = -\lambda$. Soit $a = \sqrt{-\lambda}$.

On choisit donc $\mathcal{B}_\lambda = (x_1, \frac{f(x_1)}{a}, \dots, x_p, \frac{f(x_p)}{a})$. On a alors $f(x_i) = a \frac{f(x_i)}{a}$ et $f\left(\frac{f(x_i)}{a}\right) = \frac{\lambda}{a} x_i = -a x_i$ donc la matrice est bien de la forme annoncée.

5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . La i -ème coordonnée de x dans cette base est $\langle x, e_i \rangle$; ainsi si A est la matrice de f dans cette base $a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle$. f est antisymétrique implique

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle = -\langle f(e_i), e_j \rangle = -a_{j,i}$$

A est antisymétrique.

s étant symétrique, ses sous-espaces propres sont en somme directe et orthogonaux deux à deux. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ses valeurs propres non nulles. Soient $\mathcal{B}_i$ une base orthonormale de E_{λ_i} décrite dans la question précédente. La concaténation de ces bases et d'une base orthonormale du noyau si il n'est pas réduit à $\{0\}$ donne une base orthonormale de E où la matrice de A est antisymétrique et tridiagonale. Elle est diagonale en blocs avec des blocs de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a_j \\ a_j & 0 \end{pmatrix}$ et d'un éventuel bloc nul de taille la dimension du noyau.

□

Correction de l'Exercice 72

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit u un endomorphisme symétrique positif.

Soit s une valeur propre de u et x_s un vecteur propre associé. Comme $u(x_s) = s x_s$, $\langle u(x_s), x_s \rangle = s \|x_s\|^2$ soit

$$(1) \quad s = \frac{\langle u(x_s), x_s \rangle}{\|x_s\|^2}.$$

Ainsi si pour tout x de E , $\langle u(x), x \rangle \geq 0$, $s \geq 0$.

Réciproquement supposons que toutes les valeurs propres sont positives. Par le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ associés respectivement à $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Pour tout élément x de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$

tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$; On a alors

$$u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i s_i e_i \implies \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n s_i x_i^2.$$

On a bien alors si toutes les valeurs propres sont positives

$$(2) \quad \langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^n s_i x_i^2 \geq 0$$

2. On reprend la démonstration précédente.

Si u est un endomorphisme défini positif, comme x_s n'est pas nul, l'inégalité dans (1) devient stricte.

On suppose toutes les valeurs propres de u strictement positives. Pour tout vecteur x non nul, il existe au moins une composante x_i non nul. Dans la somme intervenant dans (2), il y a un indice i tel que $s_i x_i^2 > 0$, les autres termes étant positifs ou nuls : ainsi pour tout vecteur x non nul, $\langle u(x), x \rangle > 0$.

3. Les deux questions suivantes sont la traduction matricielle des questions précédentes. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . A est symétrique équivaut à u est autoadjoint (la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique). De plus comme le produit scalaire de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ de matrices dans la base canonique X et Y , on a alors $\langle x, y \rangle = X^T Y$ donc $\langle x, u(x) \rangle = X^T A X$.

Ainsi l'écriture matricielle de u endomorphisme symétrique est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives est donc sachant que A est symétrique $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

4. De même, l'écriture matricielle de u endomorphisme symétrique u est défini positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives est donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si A est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

Les valeurs sont strictement positives si et seulement si elles sont positives et 0 n'est pas valeur propre, ce qui donne bien la deuxième équivalence.

□

Correction de l'Exercice 73

[Retour à l'énoncé](#)

Soit S cette matrice et X un élément non nul tel que $SX = \lambda X$. On a alors $\lambda = \frac{X^T S X}{X^T X}$ du

signe de $X^T S X$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a alors

$$X^T S X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{i,j} x_i x_j$$

soit

$$X^T S X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j} x_i x_j.$$

Or pour tout entier naturel n $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$, on obtient

$$X^T SX = \int_0^1 \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j t^{i+j-1} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(x_i t^i \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) \right) dt$$

On pose alors $P(t) = \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}$. On a alors :

$$X^T SX = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^i \right) P(t) dt = \int_0^1 t P(t)^2 dt \geq 0.$$

Les valeurs propres sont donc positives.

De plus, $X^T SX = 0$ si et seulement si $\int_0^1 t P(t)^2 dt = 0$. La fonction $t \mapsto t P(t)^2$ étant continue et positive sur $[0, 1]$, l'intégrale est nulle si et seulement si pour tout $t \in [0, 1]$, $t P(t)^2 = 0$ ce qui impose $P(t) = 0$ pour $t \in]0, 1]$. P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul donc $X = 0$. Aussi si X est non nul, $\lambda > 0$. Les valeurs propres sont strictement positives.

□

Correction de l'Exercice 74

[Retour à l'énoncé](#)

1. A étant une matrice symétrique positive : ses valeurs propres $(s_1, \dots, s_n)$ sont positives et il existe une matrice orthogonale P telle que $A = P^T D P$ où D est la matrice diagonale telle que $d_{i,i} = s_i$ notée $\text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$. La matrice $S = P^T \Delta P$ avec $\Delta = \text{Diag}(\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_n})$ est une matrice symétrique positive telle que $S^2 = A$.

Prouvons que c'est la seule. Soit S symétrique positif tel que $S^2 = A$. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ les sous-espaces propres de A : ce sont des espaces deux à deux orthogonaux. On a alors l'existence d'une matrice orthogonale tel que

$$A = P^T \begin{pmatrix} \sigma_1 I_{r_1} & & & \\ & \sigma_2 I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_p I_{r_p} \end{pmatrix} P$$

où σ_i est valeur propre de A de multiplicité r_i .

S et A commutant, les sous-espaces propres de A sont stables par S . Aussi S est de la forme :

$$S = P^T \begin{pmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_p \end{pmatrix} P$$

où les S_i sont symétriques et positives (le spectre de S est l'union des spectres des S_i). On a alors pour tout i $S_i^2 = \sigma_i I_{r_i}$. Si s est valeur propre de S_i , s^2 est valeur propre de S_i^2 , donc $s^2 = \sigma_i$ et comme $s \geq 0$, $s = \sqrt{\sigma_i}$. S_i étant diagonalisable avec une unique valeur propre, $S_i = \sqrt{\sigma_i} I_{r_i}$. S est donc unique.

On remarque que si A est définie positive, il en est de même de S puisque A étant inversible, S l'est aussi.

2. On utilise la question précédente; aussi il existe S définie positive telle que $A = S^2$. Comme pour tout couple de matrices, MN et NM ont même polynôme caractéristique, $AB = S(SB)$ et SBS ont même polynôme caractéristique. La trace et le déterminant en étant des coefficients au signe près, ces deux matrices ont même trace et même déterminant. Ainsi

$$\det(AB) = \det(SBS) \text{ et } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(SBS).$$

On remarque que SBS est symétrique (car $(SBS)^T = S^T B^T S^T = SBS$). De plus, pour tout X :

$$X^T SBSX = (SX)^T B(SX) \geq 0$$

car $B \in S_n^+$. De plus, B étant définie positive, $(SX)^T B(SX) = 0$ si et seulement si $SX = 0$, mais comme S est inversible (puisque définie positive), $X = 0$. Ainsi SBS est définie positive. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives, leur somme et leur produit sont strictement positifs. Cette matrice étant symétrique donc diagonalisable, la trace est la somme des valeurs propres et le déterminant en est le produit. On a donc vérifié que SBS et donc AB ont une trace et un déterminant strictement positifs.

3. On a donc pour tout X , $0 \leq X^T AX \leq X^T BX$.

a. Dans le cas où $\det(B) = 0$, 0 est valeur propre de B . Aussi il existe X_0 non nul tel que $BX_0 = 0$. Alors

$$0 \leq X_0^T AX_0 \leq X_0^T BX_0 = 0.$$

Ainsi $X_0^T AX_0 = 0$ donc A n'est pas définie positive : 0 est valeur propre de A :

$$\det(A) = 0 \leq \det(B).$$

b. Cas où $B = I_n$: Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors

$$\lambda = \frac{X^T AX}{X^T X} = \frac{X^T AX}{X^T BX} \leq 1$$

Toutes les valeurs propres de A sont inférieures à 1 ; il en est de même de leur produit. Comme A est diagonalisable, ce produit est égal au déterminant de A donc $\det(A) \leq 1 = \det(B)$.

c. Cas général : Si B n'est pas inversible, le cas a été traité en cas *a*. Si B est inversible, B est symétrique définie positive. Soit S la matrice définie positive telle que $B = S^2$. On a alors :

$$B - A = S(I_n - S^{-1}AS^{-1})S$$

Pour tout X , il existe Y tel que $X = SY$. On a alors :

$$X^T(I_n - S^{-1}AS^{-1})X = Y^T(B - A)Y \geq 0 \text{ et } X^T(S^{-1}AS^{-1})X = Y^TAY \geq 0$$

$B_1 = I_n$ et $A_1 = S^{-1}AS^{-1}$ sont des matrices symétriques positives telles que $B_1 - A_1$ est symétrique positive. Par la question *b* :

$$\det(A_1) = \frac{\det(A)}{\det^2(S)} = \frac{\det(A)}{\det(B)} \leq 1$$

soit comme $\det(B) > 0$, $\det(A) \leq \det(B)$.

□

Correction de l'Exercice 75

[Retour à l'énoncé](#)

Cette correction utilise les résultats sur les matrices symétriques positives ou définies positives, mais elle propose en général en parallèle une démonstration permettant de ne pas les connaître.

1. L'échange de deux éléments x_i et x_j échange dans la matrice de Gram les colonnes i et j et les lignes i et j ; chacun de ces deux échanges multiplie le déterminant par -1 : finalement, le déterminant est inchangé.

De même, l'ajout à un des éléments x_i d'une combinaison linéaire des autres modifie de la même façon l'ensemble des lignes et l'ensemble des colonnes de la matrice de Gram; ces opérations ne changeant pas le déterminant, le déterminant de Gram est inchangé.

Multiplier un élément x_i par λ effectue la même opération sur la i -ème colonne de la matrice de Gram ainsi que sur sa i -ème ligne. Chacune de ses opérations multiplie le déterminant par λ aussi $G(\lambda x_1, \dots, x_n) = \lambda^2 G(x_1, \dots, x_n)$.

2. $A^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \alpha_j \right)$. On a alors par bilinéarité du produit scalaire :

$$A^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 \geq 0$$

Par caractérisation des matrices symétriques positives, toutes les valeurs propres de la matrice symétrique $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ sont positives ou nulles (la démonstration est dans l'exercice 72 : si s est valeur propre de la matrice de Gram de vecteur propre A associé, $s = \frac{A^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A}{A^T A}$). La matrice de Gram étant symétrique, elle est diagonalisable et son déterminant est le produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) : aussi, toutes les valeurs propres étant positives ou nulles, $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.

Ce déterminant est nul si et seulement si 0 est valeur propre de la matrice $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul du noyau de la matrice.

$$A_0^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A_0 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|^2 = 0$$

donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, la famille est liée. On a ainsi prouvé que si 0 est valeur propre, la famille est liée.

Pour la réciproque, on peut utiliser la caractérisation des matrices définies positives. Si 0

n'est pas valeur propre, pour tout $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ non nul, $A^T \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) A > 0$ et donc

$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$. La famille est libre.

Si on ne connaît pas les matrices symétriques positives, on peut le démontrer autrement. On

suppose la famille liée. Il existe donc un vecteur non nul A tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. L'un des coefficients α_j est non nul; quitte à permuter x_1 avec x_j de la famille, on suppose $\alpha_1 \neq 0$. Par la première question, on a alors :

$$\alpha_1^2 G(x_1, \dots, x_n) = G(\alpha_1 x_1, x_2, \dots, x_n) = G\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_n\right) = G(0, x_2, \dots, x_n) = 0$$

et donc $G(x_1 \cdots, x_n) = 0$ puisque $\alpha_1 \neq 0$.

Pour $n = 2$, $G(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \|x_1\|^2 & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \|x_2\|^2 \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (\langle x_1, x_2 \rangle)^2$. $G(x_1, x_2) \geq 0$ avec égalité si et seulement si la famille (x_1, x_2) est liée correspond exactement à l'inégalité de Schwarz $|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\| \|x_2\|$ avec égalité si et seulement si la famille (x_1, x_2) est liée.

3. Soit $x' = x - p_F(x)$ où $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ est le projeté orthogonal de x sur F . D'après la première question

$$G(x_1, \cdots, x_n, x) = G(x_1, \cdots, x_n, x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = G(x_1, \cdots, x_n, x')$$

Or x' est dans l'orthogonal de F donc $\langle x', x_i \rangle = 0$ pour tout i . Ainsi :

$$G(x_1, \cdots, x_n, x) = \begin{vmatrix} G(x_1, \cdots, x_n) & 0_{n,1} \\ 0_{n,1} & \|x'\|^2 \end{vmatrix} = G(x_1, \cdots, x_n) \|x'\|^2$$

Comme $\|x'\| = \|x - p_F(x)\| = d(x, F)$, on a bien vérifié le résultat demandé.

On remarque que si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, cette égalité a peu d'intérêt puisque les deux déterminants de Gram sont nuls.

4. Soit $x'_j = x - p_{F_{j-1}}(x)$ où $p_{F_{j-1}}(x)$ est le projeté orthogonal de x_j sur F_{j-1} le sous-espace engendré par $(x_1, \cdots, x_{j-1})$ (autrement dit x'_j est le projeté orthogonal de x_j sur l'orthogonal de F_{j-1}). D'après la question précédente

$$G(x_1, \cdots, x_j) = G(x_1, \cdots, x_{j-1}) \|x'_j\|^2$$

Or $\|x'_j\|^2 \leq \|x_j\|^2$ avec égalité si et seulement si $x_j \in F_{n-1}^\perp$ donc si x_j est orthogonal à tous les x_i avec $i < j$. Ainsi

$$G(x_1, \cdots, x_j) \leq G(x_1, \cdots, x_{j-1}) \|x_j\|^2$$

avec égalité si et seulement si $(x_1, \cdots, x_{j-1})$ est liée ou pour tout $i < n$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. En appliquant ce résultat pour j variant de 2 à n on a alors :

$$G(x_1, \cdots, x_n) \leq G(x_1, \cdots, x_{n-1}) \|x_n\|^2 \leq \cdots \leq G(x_1, \cdots, x_j) \prod_{i=j+1}^n \|x_i\|^2 \leq \cdots \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

En cas d'égalité, comme les vecteurs sont non nuls, $G(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$: la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre et pour tout $j < n$, $(x_i, \cdots, x_j)$ est libre. Ainsi les $n - 1$ inégalités deviennent des égalités si et seulement si

$$\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

c'est à dire si et seulement si les vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ sont deux à deux orthogonaux.

5.

a. Comme $x_j = \sum_{k=1}^n p_{k,j} e_k$ et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, on obtient :

$$g_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j}$$

qui est le terme (i, j) de la matrice $P^T P$. On a donc $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = P^T P$.

b. Si $PX = 0$, $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)X = 0$. Réciproquement si $P^T PX = 0$, $X^T P^T PX = 0$ or

$$X^T P^T PX = (PX)^T PX = \|PX\|^2 = 0$$

donc $PX = 0$. P et $P^T P$ ont même noyau N . P étant une matrice à p lignes et n colonnes, par le théorème du rang, son rang est égal à $n - \dim N$. $P^T P$ est une matrice carrée à n lignes et n colonnes, aussi son rang est $= n - \dim N$: P et $P^T P$ ont même rang.

c. Lorsque $p = n$, on obtient alors $G(x_1, \dots, x_n) = (\det P)^2$. L'échange de deux vecteurs transforme $\det(P)$ en $-\det(P)$ mais ne modifie pas le carré. Ajouter à un élément une combinaison linéaire des autres ne modifie pas le déterminant donc laisse le carré de ce déterminant inchangé. Multiplier un élément de la famille par λ multiplie le déterminant par λ et donc le carré par λ^2 . On a ainsi retrouvé dans ce cas particulier les résultats obtenues en première question.

De plus, $(\det P)^2 \geq 0$ et vaut 0 si et seulement si la famille est liée.

6.

a. Par la question précédente, le rang de A est le rang de $A^T A$. La matrice $A^T A$ étant symétrique, elle est semblable à une matrice diagonale D (de même rang) dont le rang est le nombre de termes non nuls. La diagonale de cette matrice D est constituée des valeurs propres de $A^T A$ comptées avec leur multiplicité. Ainsi D , $A^T A$ et A ont comme rang le nombre de valeurs propres non nulles de $A^T A$ comptées avec leur multiplicité.

b. $A^T A$ étant symétrique, par le théorème spectral :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A^T A) \oplus S$$

où S est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $A^T A$. Si de plus $A^2 = A^T A$, comme $\text{Im}(A^2) \subset \text{Im}(A)$ et que ces deux sous-espaces ont même dimension par la question précédente, ils sont égaux. De plus, $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^2)$ et ayant même dimension par le théorème du rang, ces deux noyaux sont égaux.

Tout sous-espace propre d'une matrice est inclus dans son image, aussi $S \subset \text{Im}(A^T A)$; de plus, ces espaces ont même dimension $n - \dim(\text{Ker } A)$, ils sont donc égaux. On a donc bien

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A).$$

7.

a. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On a alors par les deux questions précédentes :

$$G(C_1, \dots, C_n) = (\det P)^2 \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|^2$$

qui équivaut à

$$\det(P) \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|$$

P étant inversible, ses colonnes forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Aussi, par la question 4, il y a égalité si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

b. Comme pour tout couple (i, j) , $|p_{i,j}| \leq 1$,

$$\forall k, \quad \|C_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_{i,k}^2} \leq \sqrt{n}$$

donc

$$\det(P) \leq (n)^{\frac{n}{2}}$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux et pour tout k , $\|C_k\| = \sqrt{n}$ soit $\sum_{i=1}^n p_{i,k}^2 = n$ ce qui impose que pour tout couple (i, k) , $p_{i,k} = \pm 1$.

c. L'orthogonalité de C_i et C_j impose

$$\langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^n p_{i,k} p_{j,k} = 0$$

La somme de n nombres valant 1 ou -1 est nulle : la moitié valent 1 et l'autre -1 , ce qui impose la parité de n .

Si H de taille n et de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$ convient, on introduit la matrice H' de taille $2n$ défini par $H' = \begin{pmatrix} H & -H \\ H & H \end{pmatrix}$. Vérifions qu'elle convient. Tous ses coefficients valent 1 ou -1 .

Soient deux indices $1 \leq i < j \leq n$ alors $C'_i = \begin{pmatrix} C_i \\ C_i \end{pmatrix}$ et $C'_j = \begin{pmatrix} C_j \\ C_j \end{pmatrix}$ et

$$\langle C'_i, C'_j \rangle = 2\langle C_i, C_j \rangle = 0.$$

Soient deux indices $1 \leq i \leq n < j$ alors $C'_i = \begin{pmatrix} C_i \\ C_i \end{pmatrix}$ et $C'_j = \begin{pmatrix} -C_{j-n} \\ C_{j-n} \end{pmatrix}$ et leur produit scalaire est nul.

Soient deux indices $n \leq i < j \leq 2n$ alors $C'_i = \begin{pmatrix} -C_{i-n} \\ C_{i-n} \end{pmatrix}$ et $C'_j = \begin{pmatrix} -C_{j-n} \\ C_{j-n} \end{pmatrix}$:

$$\langle C'_i, C'_j \rangle = 2\langle C_{i-n}, C_{j-n} \rangle = 0.$$

Les vecteurs colonnes de H' sont deux à deux orthogonaux.

Pour $n = 2$, la matrice $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient. D'après ce qui précède, la suite de matrices définies par $H_{p+1} = \begin{pmatrix} H_p & -H_p \\ H_p & H_p \end{pmatrix}$ est une suite de matrices d'Hadamard et H_p est de taille 2^p .

8. On peut déjà remarquer que les deux familles ont même rang puisque si A est la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base orthonormale, $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = A^T A$ et a le même rang que A d'après la question 5. Ainsi

$$\text{rg}(\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

a. Les deux familles étant de rang maximal n , ce sont des bases de E . Soient f l'unique isomorphisme défini par $f(x_i) = y_i$. Vérifions que c'est une isométrie. Soit x un élément de E ; $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. On a alors

$$\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \langle x_i, x_j \rangle$$

et comme $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i y_i$:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i a_j \langle y_i, y_j \rangle.$$

Les deux familles ayant même matrice de Gram, pour tout couple (i, j) , $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$; f conserve la norme de tout élément, c'est une isométrie vectorielle.

b. Comme $(x_1, \dots, x_r)$ et $(y_1, \dots, y_r)$ ont même matrice de Gram, elles ont même rang ; la famille $(y_1, \dots, y_r)$ est aussi libre.

Soit F l'espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_r)$ (et donc par $(x_1, \dots, x_n)$) et F' celui engendré par $(y_1, \dots, y_r)$. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $F^\perp$ et $(e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ une base orthonormale de $F'^\perp$. Comme $(x_1, \dots, x_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe une unique application linéaire f telle linéaire telle que $f(x_i) = y_i$ pour $i < r$ et $f(e_i) = e'_i$ pour $i > r$. Vérifions qu'il s'agit d'une isométrie. Si $x = \sum_{i=1}^r a_i x_i + \sum_{i=r+1}^n a_i e_i$, on a alors :

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r a_i x_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=r+1}^n a_i e_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_i a_j \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=r+1}^n a_i^2$$

De même, comme $f(x) = \sum_{i=1}^r a_i y_i + \sum_{i=r+1}^n a_i e'_i$:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_i a_j \langle y_i, y_j \rangle + \sum_{i=r+1}^n a_i^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq r} a_i a_j \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=r+1}^n a_i^2$$

donc f conserve la norme, f est une isométrie. Il reste à vérifier que pour tout i , $f(x_i) = y_i$, ce qui est déjà vrai par définition de f pour $i \leq r$.

Soit $r < j \leq n$. Comme x_j est élément de F , il existe un unique r -uplet $X_j^T = (a_1, \dots, a_r)$ tel que $x = \sum_{i=1}^r a_i x_i$. Ce r -uplet est solution du système

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \sum_{i=1}^r a_i \langle x_i, x_k \rangle = \langle x_j, x_k \rangle$$

écrit matriciellement $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_r) X_j = \begin{pmatrix} \langle x_j, x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x_j, x_r \rangle \end{pmatrix}$. La matrice étant inversible

$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_r)$ étant inversible, X_j est l'unique solution du système

$$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_r) X = \begin{pmatrix} \langle x_j, x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x_j, x_r \rangle \end{pmatrix}.$$

$(y_1, \dots, y_r)$ étant de rang r , c'est une base de $\text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$. Le vecteur Y_j des coordonnées de y_j dans la base $(y_1, \dots, y_r)$ est donc l'unique solution de

$$\mathcal{G}(y_1, \dots, y_r) X = \begin{pmatrix} \langle y_j, y_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y_j, y_r \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_j, x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x_j, x_r \rangle \end{pmatrix}.$$

Comme pour tout couple (i, j) , $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$, les deux systèmes précédents sont les mêmes et par unicité de la solution, $X_j = Y_j = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$. Ainsi

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^r a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^r a_i y_i = y_j$$

On a vérifié que f est une isométrie telle que pour tout i , $f(x_i) = y_i$.

9.

a. Soient $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathcal{B}$ sa base canonique, $(x_1, \dots, x_n)$ la famille de vecteurs de matrice A dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \dots, y_n)$ la famille de vecteurs de matrice B dans $\mathcal{B}$. Par la question 5, $A^T A = \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ et $B^T B = \mathcal{G}(y_1, \dots, y_n)$; aussi les deux familles ont même matrice de Gram et d'après ce qui précède, il existe $f \in O(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout i , $f(x_i) = y_i$. Soit Q la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, C_i la matrice de x_i dans la base $\mathcal{B}$ (qui est la i -ème colonne de A) et C'_i la matrice de y_i dans la base $\mathcal{B}$ (qui est la i -ème colonne de B); on a alors $C'_i = QC_i$ ce qui donne $B = QA$.

b. $A^T A$ est une matrice de Gram et d'après la première question elle est symétrique positive (c'est à dire dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles); il existe une matrice orthogonale P telle que $A^T A = P^T D P$ où D est la matrice diagonale telle que $d_{i,i} = s_i \geq 0$ notée $\text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$. La matrice $S = P^T \Delta P$ avec $\Delta = \text{Diag}(\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_n})$ est une matrice symétrique positive telle que $S^2 = A^T A$.

Comme S est symétrique $S^2 = S^T S = A^T A$. Par la question précédente, il existe une matrice U de $O(n)$ telle que $A = US$.

Remarque : S est la racine carrée symétrique positive de $A^T A$ et est donc unique (cf exercice 74).

c. Traduisons matriciellement le problème posé. Soit A la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ dans $\mathcal{B}_0$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ orthogonale de matrice U dans la base $\mathcal{B}_0$ et p un projecteur orthogonal de matrice Π dans la base canonique; $p(e_i) = u_i$ pour tout i équivaut à $A = \Pi U$. p est un projecteur orthogonal équivaut à Π est symétrique de valeurs propres 0 et 1. C'est presque ce qui précède sauf que la matrice orthogonale est à droite du produit. On va donc travailler avec la transposée de A puisque $A = \Pi U$ équivaut à $A^T = U^T \Pi$.

Supposons l'existence de U et Π comme décrits précédemment. Alors

$$A^T A = U^T \Pi^2 U = U^{-1} \Pi U$$

La matrice de Gram de $(u_1, \dots, u_n)$ est semblable à Π et a donc comme seules valeurs propres possibles 0 et 1.

Réciproquement, supposons que $A^T A$ n'admet comme valeurs propres possibles que 0 et 1. En utilisant la question précédente, il existe une matrice Π symétrique à valeurs propres positives et une matrice orthogonale O telle que $A^T = O \Pi$ soit $A = \Pi O^T = \Pi U$ avec $U = O^T = O^{-1}$ orthogonale. On a alors $\Pi^2 = A A^T$ et $A^T A = O \Pi O^{-1}$. Π^2 et $\mathcal{G}(u_1, \dots, u_n)$ sont semblables. Si s est une valeur propre de Π , s^2 en est une de Π^2 . Le spectre de $\mathcal{G}(u_1, \dots, u_n)$ donc de Π^2 étant inclus dans $\{0, 1\}$, celui de Π l'est aussi. π est bien la matrice d'un projecteur orthogonal.

10. On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de Φ et par $\mathcal{B}_E$ celle de E formé des p premiers vecteurs de $\mathcal{B}$.

La matrice de π dans la base $\mathcal{B}$ est $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer σ , on recherche sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Soit M la matrice de σ dans la base $\mathcal{B}$ écrite en blocs sous la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$. $\pi \circ \sigma|_E = \Phi$ équivaut à A est la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}_E$. Il reste à déterminer B, C et D pour que σ soit une isométrie. $M^T M = I_{2r}$ donne alors pour le bloc en haut à gauche $A^T A + B^T B = I_r$. Cela correspond au fait que les p premiers vecteurs colonnes de la matrice M sont unitaires et deux à deux orthogonaux. On cherche donc B vérifiant

$$B^T B = I_r - A^T A.$$

Soit $S = I_r - A^T A$. S est symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ de matrice X dans la base $\mathcal{B}_E$:

$$X^T S X = X^T X - X^T A^T A X = X^T X - (A X)^T A X = \|x\|^2 - \|\Phi(x)\|^2 \geq 0$$

S est une matrice symétrique positive dont toutes les valeurs propres sont positives. Par le théorème spectral, S est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale; il existe $P \in O(n)$ telle que $S = P^T \text{Diag}(s_1, \dots, s_p) P$ où les s_i sont positifs. On peut alors choisir pour B la racine carrée de cette matrice à savoir

$$B = P^T \text{Diag}(\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_p}) P.$$

Il reste à déterminer les p dernières colonnes de M . M est orthogonale si et seulement si ces r colonnes sont unitaires, orthogonales deux à deux et orthogonales aux p premières. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les p premières colonnes. Il est de dimension au plus p ; son orthogonal est donc au moins de dimension p : pour les dernières colonnes de M , on peut donc choisir les p premiers vecteurs d'une base orthonormale de $F^\perp$. On a ainsi prouvé l'existence de M donc de σ .

□