

Analyse en PC ou PC*

S. Sidaner

Niveau : BAC+2

Difficulté : ★ à ★★★

Durée : Variable

Rubrique(s) : Analyse .

La petite histoire...

Ce **polycopié d'exercices** recouvre la partie analyse du programme de mathématiques de PC et PC*. Chaque chapitre commence par un rapide résumé de cours ; ce dernier a pour but de rappeler les définitions et d'énoncer les théorèmes du programme et les principales propriétés ; il ne comporte donc ni exemples ni démonstrations. Le programme de PCSI est supposé acquis, notamment les notions suivantes :

- les nombres complexes,
- les espaces vectoriels,
- les matrices et les déterminants,
- l'espace vectoriel des polynômes réels $\mathbb{R}[X]$ ou complexes $\mathbb{C}[X]$,
- les espaces euclidiens ou préhilbertiens réels,
- les suites réelles ou complexes,
- les séries numériques,
- les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes,
- les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2 à coefficients constants.

Les notations suivantes sont utilisées :

- $\Re$: partie réelle d'un complexe,
 - $\Im$: partie imaginaire d'un complexe,
 - $[.]$ la partie entière d'un réel,
 - $< ., . >$: le produit scalaire
 - $\llbracket a, b \rrbracket$ avec (a et b entiers) : les entiers naturels de l'intervalle $[a, b]$,
 - $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n ,
 - $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes complexes de degré au plus n ,
 - $\cosh$ est la fonction cosinus hyperbolique (partie paire de l'exponentielle),
 - $\sinh$ est la fonction sinus hyperbolique (partie impaire de l'exponentielle).
-

Table des matières

Analyse en PC ou PC*	1
1 Intégrales généralisées	5
I. Résumé de cours :	5
1. Intégration de fonctions continues par morceaux	5
2. Intégrales généralisées	7
3. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	9
II. Exercices :	11
1. Convergence et calcul d'intégrales généralisées	11
2. Fonctions intégrables	14
2 Séries numériques	16
I. Résumé de cours	16
1. Rappel sur les séries numériques :	16
2. Compléments sur les séries numériques :	17
3. Produit de Cauchy :	18
II. Exercices sur les séries numériques	19
1. Autour de la série harmonique	19
2. Autres exercices sur les séries numériques	20
3 Espaces vectoriels normés	27
I. Résumé de cours	27
1. Normes :	27
2. Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :	29
3. Un peu de topologie	29
4. Limite d'une application en un point adhérent :	31
5. Applications continues :	32
II. Exercices	34
1. Normes sur un espace vectoriel	34

2.	Suites vectorielles	36
3.	Topologie	36
4.	Continuité d'applications d'une variable réelle	38
5.	Continuité d'applications définies sur un espace vectoriel	39
4	Dérivation de fonctions vectorielles	41
I.	Résumé de cours	41
1.	Dérivabilité d'une fonction :	41
2.	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:	43
3.	Arcs paramétrés	44
II.	Exercices sur la dérivation	45
1.	Dérivabilité de fonctions à valeurs réelles	45
2.	Dérivabilité de fonctions vectorielles	47
3.	Arcs paramétrés	48
5	Suites et séries de fonctions	49
I.	Résumé de cours	49
1.	Modes de convergence :	49
2.	Régularité de la limite d'une suites de fonctions	51
3.	Régularité de la somme d'une série de fonctions	52
4.	Suite et séries de fonctions intégrables :	53
5.	Intégrales à paramètre :	54
II.	Exercices	56
1.	Suites de fonctions	56
2.	Séries de fonctions :	58
3.	Suites et séries de fonctions intégrables	60
4.	Intégrales à paramètres	61
6	Séries entières	64
I.	Résumé de cours	64
1.	Rayon de convergence :	64
2.	Régularité de la somme :	65
3.	Développement en série entière :	66
II.	Exercices sur les séries entières	68
1.	Rayon de convergence	68
2.	Développement en séries entières :	69
3.	Lien séries entières et équations différentielles	71

7	Equations différentielles linéaires	74
I.	Résumé de cours	74
1.	Systèmes différentiels	74
2.	Équation linéaire scalaire d'ordre 2	75
II.	Exercices	76
1.	Système différentiels	76
2.	Equations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2	78
8	Calcul différentiel	80
I.	Résumé de cours :	80
1.	Applications continûment différentiables :	80
2.	Règle de la chaîne :	81
3.	Applications géométriques	82
4.	Points critiques et extrema.	83
5.	Dérivées partielles d'ordre 2	84
II.	Exercices	84
1.	Applications de classe $\mathcal{C}^1$	84
2.	Extrema	85
3.	Dérivées partielles d'ordre 2 :	88
4.	Equations aux dérivées partielles	88
5.	Courbes et surfaces	90
	Indications	92
	Corrections	103

Chapitre 1

Intégrales généralisées

I. Résumé de cours :

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes

1. Intégration de fonctions continues par morceaux

(i) Fonctions continues par morceaux

Définition : Une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y est **continue par morceaux** si et seulement si elle y admet un nombre fini de points de discontinuité et en chacun de ces points, f admet une limite à droite et une limite à gauche.

Propriétés :

- Sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[\subset [a, b]$ où f est continue, elle est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction f_i .
- $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$, ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Une fonction est **continue par morceaux sur I** intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

Propriété : $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

(ii) **Intégrale sur un segment**

Théorème-définition : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$. Soit f_i le prolongement par continuité de f sur $[x_i, x_{i+1}]$. Le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t) dt$ ne dépend pas de la subdivision et est appelé **l'intégrale sur $[a, b]$ de f** notée $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_{[a,b]} f$.

Propriétés :

- $f \mapsto \int_{[a,b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$. De plus, elle est positive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- L'intégrale est invariante par translation c'est à dire que si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout réel c ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx.$$
- Si deux fonctions continues par morceaux ne diffèrent qu'en un nombre fini de points sur $[a, b]$, elles ont même intégrale sur $[a, b]$.
- **Inégalité de la moyenne :** Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et M un majorant de f sur $[a, b]$. On a l'inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq M(b-a).$$

- **Relation de Chasles :** Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $a < c < b$. Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Théorème de changement de variable : Étant donné une fonction f continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et une fonction φ à valeurs dans I , strictement croissante (respectivement décroissante) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, on a alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \text{ (respectivement } - \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(t) dt).$$

2. Intégrales généralisées

(i) Intégrale impropre sur $[a, +\infty[$

Définition : Si f est une application continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs réelles ou complexes, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie en $+\infty$.

Propriété : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives. Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a, +\infty[$.

(ii) Intégrales généralisées sur un intervalle

Définition : Soit f continue par morceaux sur I de bornes a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- $I = [a, b[$: l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie en b .
- $I =]a, b]$: l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite **convergente** si l'application $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers a .

Dans le cas de convergence, la limite est notée $\int_a^b f(t)dt$.

Théorème-définition : Soit f une application continue par morceaux sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit c un élément de $]a, b[$.

La convergence des intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ ne dépend pas de c et en cas de convergence, leur somme est indépendante de c .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si et seulement si pour tout $c \in]a, b[$, $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque : L'intégrale de f sur I de bornes a et b (incluses ou non dans I) est convergente si et seulement si f est d'intégrale convergente sur

$]a, b[$. Ainsi si f est continue sur $[a, b[$ est prolongeable par continuité en b , $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

Propriétés :

- Soit f continue par morceaux sur I de bornes a et b et à valeurs positives. $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si il existe un point c de I tel que $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ est bornée.
- Lien avec une primitive : Soit f une fonction continue sur I de bornes a et b et F une primitive de f sur I . Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F a une limite en a et en b et on a alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_b F - \lim_a F$

(iii) **Intégrales de référence**

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente.
- $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

(iv) **Propriétés**

Remarque : La convergence d'une intégrale ne dépend pas du fait que f soit bornée ou non.

Propriété : L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I d'intégrale convergente est un espace vectoriel sur lequel $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est linéaire et positive si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Théorème de changement de variables : Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) |\varphi'(u)| du$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et, si tel est le cas, les deux intégrales sont égales.

Intégration par parties généralisée :

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I de bornes a et b telles que fg a une limite finie en a et en b . Les intégrales de fg' et $f'g$ sur I sont de même nature et

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_b fg - \lim_a fg - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

3. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**(i) Intégrales absolument convergentes**

Définition : On dit que f , continue par morceaux sur I , a une **intégrale absolument convergente** si l'intégrale de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ sur I est convergente.

Remarque : Pour une fonction à valeurs réelles de signe constant, l'absolue convergence de son intégrale équivaut à sa convergence.

Théorème : Soit f une fonction continue par morceaux sur I de bornes a et b d'intégrale absolument convergente sur I . L'intégrale $\int_a^b f$ est convergente et on a $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Exemple : L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument convergente. La démonstration de ce résultat est proposée en exercice page 12.

Définition : Une fonction f , continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable sur I** si f admet sur I une intégrale absolument convergente. L'intégrale de f sur I est alors noté $\int_I f$ ou $\int_I f(t)dt$.

Remarque : par le théorème de changement de variables, si φ est une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J , et si $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $u \mapsto f \circ \varphi(u)\varphi'(u)$ est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur J .

(ii) **Relations de comparaison :**

Théorème : Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$:

- si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b[$.
- si $f \underset{x \rightarrow b}{=} O(g)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b[$.
- si $f \underset{x \rightarrow b}{=} o(g)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, b[$.
- si $f \underset{x \rightarrow b}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a, b[$.

La troisième propriété se déduit directement de la seconde car si $f \underset{x \rightarrow b}{=} o(g)$, alors $f \underset{x \rightarrow b}{=} O(g)$.

De même, pour f et g fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$:

- si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $]a, b]$.
- si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $]a, b]$.
- si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $]a, b]$.

Remarque : les théorèmes de comparaison sont énoncés avec des modules ou des valeurs absolues : si les fonctions sont positives, on peut remplacer $|f|$ par f et $|g|$ par g .

(iii) **Sous-espaces de fonctions intégrables :**

- L'ensemble $\mathcal{L}_1(I, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I est un espace vectoriel.
- Si f est une fonction **continue** intégrable sur I telle que $\int_I |f| = 0$, alors f est la fonction nulle.
- Si f est continue par morceaux et intégrable sur I intervalle borné de bornes a et b , alors

$$|f| \leq M \implies \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \leq (b-a)M$$

Lemme : Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable.

Propriété : Les fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$.

Théorème : Les fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ sur lequel l'application $(f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de carrés intégrables sur I . On a alors

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}.$$

II. Exercices :

Des indications pour certains d'entre eux se trouvent en page 92.

1. Convergence et calcul d'intégrales généralisées

La correction de ces exercices commence en page 103.

Exercice 1.

Soit la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Donner son domaine de définition et montrer qu'elle est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est-elle convergente ?

[Correction](#)

Commentaires sur l'Exercice 1

La convergence des intégrales de Bertrand de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a \ln^b(t)}$ n'étant pas au programme de PC, il faut les comparer à des intégrales de Riemann. Pour la culture générale, cette intégrale converge si et seulement si $a > 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.

Exercice 2.

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$.

1. Montrer que I est convergente.

2. Par le changement de variables $x = \frac{1}{u}$, calculer I .

[Correction](#)

Exercice 3.

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ est convergente. En déduire que

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

2. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)| dx \leq \frac{2}{n\pi}.$$

En déduire que f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

[Correction](#)

Exercice 4.

Étudier la convergence des intégrales suivantes (les paramètres α et β sont réels) :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\exp(t) + t^2 \exp(-t)}.$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (t^\beta + 1)}.$

2. $\int_0^1 \frac{1 - e^x + \alpha \sin(x)}{x^2} dx.$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln(t^\beta + 1)}{(t^{2\alpha} + 1)} dt.$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos x} dx.$

Pour les questions 4 et 5, on représentera dans le plan les couples (α, β) pour lesquels l'intégrale converge.

[Correction](#)

Exercice 5.

Justifier l'existence des intégrales suivantes et les calculer :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1 + t^2} dt.$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + e^t)(1 + e^{-t})} dt.$

$$3. \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} dt.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx.$$

[Correction](#)

Exercice 6.

$$\text{Soit } I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

1. Justifier l'existence de I .

2. Prouver que $I = -4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du$.

3.

a. Écrire $X^4 + 1$ comme produit de deux polynômes réels.

b. Soit $\varepsilon = \pm 1$. Montrer que

$$\int_0^X \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + \varepsilon\sqrt{2}u + 1} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(X^2 + \varepsilon\sqrt{2}X + 1) - \varepsilon\sqrt{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}X + \varepsilon) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

c. Calculer I en remarquant que : $4u^2 = \sqrt{2}(u^2 + \sqrt{2}u + 1) - \sqrt{2}(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$.

[Correction](#)

Exercice 7.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives et $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que les intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ sont de même nature et les comparer en cas de convergence.

[Correction](#)

Exercice 8.

Soient a et T deux réels strictement positifs, f une fonction continue de période T .

On recherche les valeurs λ pour lesquelles $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

1. Montrer qu'il existe au plus une valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $I(\lambda)$ converge.

2. Montrer que si $F(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$ est bornée, alors $I(\lambda)$ converge.

3. Existe-t-il une valeur λ pour laquelle $I(\lambda)$ est une intégrale convergente ?

[Correction](#)

Exercice 9.

Soit $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

1. Vérifier que I est une intégrale convergente.

2. Montrer que $I = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_a^{a^2} \frac{dx}{\ln x}$.

3. Calculer I .

[Correction](#)

2. Fonctions intégrables

La correction de ces exercices commence en page 111.

Exercice 10.

Soit f une fonction continue intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Montrer que $f_1 : x \mapsto f(\sqrt{x^2 + 4a})$ et $f_2 : x \mapsto f(x + \frac{a}{x})$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et que leurs intégrales sont égales.

[Correction](#)

Exercice 11.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Après avoir prouvé la convergence des intégrales, prouver que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt \leq 2 \int_0^x \frac{F(t)f(t)}{t} dt.$$

2. En déduire que $t \mapsto \frac{F^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt.$$

[Correction](#)

Exercice 12.

Soit $F(x) = \sin(x^5 + x)$. Cet exercice cherche à étudier l'intégrabilité de F sur $\mathbb{R}^+$ et la nature de son intégrale. Il utilise les notions sur les séries numériques.

1. Établir que $\varphi : x \mapsto x^5 + x$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même dont la réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On pose $u_n = \varphi^{-1}(n\pi)$. Montrer que la série de terme général $\int_{u_n}^{u_{n+1}} |F(x)| dx$ est divergente. F est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
3. Soit $v_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} F(x) dx$. Vérifier que la série $\sum v_n$ est convergente.
4. Donner la nature de l'intégrale $\int_0^\infty F(x) dx$.

[Correction](#)

Exercice 13.

Soit $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, autre que la fonction nulle, positive et telle que les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ soient de carré intégrable sur $]0, +\infty[$.

1. Prouver que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. On cherche alors à vérifier que :

$$\int_{]0, +\infty[} f \leq \sqrt{\pi} \left(\int_{]0, +\infty[} f^2 \right)^{1/4} \left(\int_{]0, +\infty[} x^2 f^2(x) dx \right)^{1/4} \quad (*)$$

a. Commencer par prouver (*) pour une fonction g vérifiant en plus des hypothèses précédentes

$$\int_{]0, +\infty[} g^2 = \int_{]0, +\infty[} x^2 g^2(x) dx = 1$$

b. Prouver alors (*) dans le cas général en introduisant une fonction g telle que $\forall x > 0, g(x) = \alpha f(\beta x)$ avec α et β judicieusement choisis.

[Correction](#)

Chapitre 2

Séries numériques

I. Résumé de cours

Les séries considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Rappel sur les séries numériques :

(i) **définition, lien avec les suites.**

Définitions : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. La **série** notée $\sum u_n$ (de **terme général** u_n) est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est la **somme partielle de rang** n de la série. Si la suite $(S_n)_n$ converge vers S , on dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** et S est appelé sa **somme** et noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Le **reste de rang** n est le nombre $S - S_n$.

Propriété : Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Théorème des séries géométriques : La série géométrique $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$.

Propriétés :

- L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel sur lequel l'application qui à une série associe sa somme est linéaire.
- La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

(ii) Séries à termes positifsPropriétés :

- Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$, la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$ et on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs tels que $u_n \sim v_n$, ces deux séries sont de même nature.

(iii) Séries absolument convergentes :

Définition : Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente et on a alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

2. Compléments sur les séries numériques :**(i) Théorème de comparaison série et intégrale :**

Théorème de comparaison série-intégrale : Soit une fonction f continue, à valeurs réelles positives et décroissante sur $[0, +\infty[$. La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème sur les séries de Riemann : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) Formule de Stirling :

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

(iii) Règle de d'Alembert :

Théorème (règle de d'Alembert) : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls à partir d'un certain rang et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Si $L > 1$, le terme général ne tend pas vers zéro et si $L < 1$, la série est convergente.

Théorème-définition de l'exponentielle : Pour tout complexe z , la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme est appelée **exponentielle** de z soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(iv) **Théorème des séries alternées :**

Définition : Une série est dite alternée si et seulement si la suite $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant.

Le théorème suivant est aussi appelé critère des séries alternées.

Théorème des séries alternées : Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $(|u_n|)_n$ est une suite décroissante de limite nulle. Alors :

- La série $\sum u_n$ est convergente.
- Sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.
- R_n , le reste de rang n , a le signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

3. Produit de Cauchy :

(i) **Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :**

Définition Le **produit de Cauchy** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

Théorème de convergence d'un produit de Cauchy : Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente dont la somme est le produit des sommes des deux séries initiales.

(ii) **Applications :**

- Pour tout couple (z, z') de complexes, $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.
- Pour tout entier naturel p et tout complexe z tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} z^n.$$

II. Exercices sur les séries numériques

Les indications sur certains de ces exercices se trouvent à partir de la page 93.

1. Autour de la série harmonique

La correction de ces exercices commence page 115

Exercice 14 (Série harmonique).

On désigne, pour tout entier naturel n non nul, par H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1.

a. Prouver que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. La notation $\ln$ désigne le logarithme népérien.

b. En déduire que la suite de terme général $H_n - \ln n$ converge. Sa limite est la "constante d'Euler" notée γ . Vérifier que $0 \leq \gamma \leq 1$.

c. Améliorer ce résultat en montrant que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$. (On pourra commencer par vérifier que pour tout $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$).

2. On pose alors $H_n = \ln n + \gamma + r_n$ et $w_n = r_{n-1} - r_n$. On pourra remarquer que r_n est le reste d'ordre n de la série $\sum w_n$. Montrer que $0 \leq r_n \leq \frac{1}{n}$.

3. On veut prouver l'existence d'un développement limité de r_n d'ordre 3, donc démontrer l'existence de constantes a, b, c telles que

$$r_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

a. Montrer que $w_k = \int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2} dt$.

b. Établir par différentes intégrations par parties que :

$$w_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right) + v_k$$

$$\text{avec } v_k = \int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{2(u+k-1)^4} du = \int_0^1 \frac{u^2(1-u)^2}{(u+k-1)^5} du.$$

c. En déduire que $0 \leq r_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64n^4}$. Trouver alors les constantes a, b, c .

[Correction](#)

Commentaires sur l'Exercice 14

Une valeur approchée de la constante d'Euler est 0,5772156649.

Exercice 15 (Série harmonique alternée).

On pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On reprend les notations de l'exercice précédent.

1.

a. Vérifier que $(U_n)_n$ est bien convergente.

b. Prouver que $U_{2n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

c. En déduire la valeur de la somme $U = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

2. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = U - U_n$.

a. Calculer $\sum_{k=0}^n R_k$ en fonction de R_n en distinguant le résultat selon la parité de n .

b. En admettant (exercice précédent) que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ et en écrivant U_n en fonction de H_n et $H_{\lfloor n/2 \rfloor}$, en déduire la nature de la série $\sum R_n$ et en cas de convergence, donner sa somme.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$. Vérifier que $(u_n)_n$ est bien définie et

$|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

[Correction](#)

2. Autres exercices sur les séries numériques

La correction de ces exercices commence page 119.

Exercice 16.

Cet exercice commence par la démonstration d'un théorème très classique qui ne figure pas explicitement dans les programmes de PCSI et de PC.

1. (**Théorème de Césaro**) Montrer que si une suite réelle ou complexe $(u_n)_n$

converge vers L , alors la suite $(v_n)_n$ de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}{n}$$

converge vers la même limite L .

2. Soit la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

a. Montrer que cette suite converge vers 0.

b. Montrer que pour tout réel β non nul, $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \sim \frac{-\beta}{6} u_n^{\beta+2}$.

c. En utilisant le théorème de Césaro démontré en première question, trouver un équivalent de (u_n) .

d. Vérifier que la série $\sum u_n^2$ diverge et que la série $\sum u_n^3$ converge.

3. Par la même méthode, montrer que la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ converge et en donner un équivalent.

4. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Étudier la suite (u_n) et en donner un équivalent simple. Pour quels nombres α la série $\sum u_n^\alpha$ est-elle convergente ?

[Correction](#)

Exercice 17.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Prouver que $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est une série convergente.

[Correction](#)

Exercice 18.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels positifs tels que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si

la série $\sum a_n$ converge.

[Correction](#)

Exercice 19.

Nature et somme (si elles convergent) des séries :

1. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

2. $\sum_{n \geq 1} (\ln(n+2) + a \ln(n+1) + b \ln(n))$
avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$3. \sum_{n \geq 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$$

$$4. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$$

[Correction](#)

Exercice 20.

Étudier la nature des séries suivantes (pour les dernières questions, le paramètre a est réel) :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n!}$$

$$6. \sum_{n \geq 2} \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$$

$$2. \sum_{n \geq 3} \left(1 - \frac{1}{\ln n} \right)^{\sqrt{n}}$$

$$7. \sum_{n \geq 2} \cos \left(\pi n^4 \left(\ln \frac{n}{n-1} \right)^3 \right)$$

$$3. \sum_{n \geq 2} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$$

$$8. \sum_{n \geq 1} \frac{a + (-1)^n}{a + n + (-1)^{n+1} \sqrt{n}}$$

$$4. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n \ln(n + \sin^2 n)}$$

$$9. \sum_{n \geq 2} \sin \left(\pi \frac{2n^2 + an + 1}{2n + 1} \right)$$

$$5. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1} \sqrt[4]{n}}$$

[Correction](#)

Exercice 21.

Soit $u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right)^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les couples (a, b) pour lesquels l'expression est bien définie pour tout entier naturel.
2. Étudier la convergence et l'absolue convergence de la série $\sum u_n$.

[Correction](#)

Exercice 22.

On note p_n le nombre de chiffres qui interviennent dans l'écriture décimale d'un entier n .

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

2. Soit a et b deux nombres strictement positifs. Étudier selon le couple (a, b) la convergence de la série de terme général $u_n = a^n b^{p_n}$.

[Correction](#)

Exercice 23.

On considère une suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in]0, 1]$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1})$.

3.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

b. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

4.

a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x \leq e^x - 1 \leq x + 2x^2.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1 + 2u_n.$$

5. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

[Correction](#)

Commentaires sur l'Exercice 23

Pour la dernière question, on peut le démontrer directement ou utiliser le théorème de Césaro présenté en exercice p 20.

Exercice 24.

Soient (a, b, c, d) des réels strictement positifs, $(\alpha_n)_n$ une suite à termes strictement positifs tels que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}.$$

On pose $\beta_n = \ln(n^\lambda \alpha_n)$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de λ pour laquelle la série $\sum (\beta_{n+1} - \beta_n)$ converge.

2. En déduire la nature de la série $\sum \alpha_n$ en fonction de la valeur de (a, b, c, d) .

[Correction](#)

Exercice 25.

1. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $a_n \sim b_n$ et que la série de terme général a_n converge. Montrer que la série de terme général b_n converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k+1}$.

a. Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

b. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

[Correction](#)

Exercice 26 (Transformation d'Abel).

1. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ deux suites réelles ou complexes.

On pose $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

2.

a. Donner la somme $\sum_{k=1}^n e^{ki\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

b. Étudier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ki\theta}}{k}$ suivant θ .

3. Sans utiliser le critère des séries alternées, montrer que si $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de signe constant telle que $(|a_k|)_k$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^k a_k$ est convergente.

4. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même. Donner la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{\varphi(k)}{k^2}$.

5. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement croissante tendant vers l'infini et $(u_n)_n$ une suite telle que la série $\sum u_n$ est convergente. Montrer que la suite

de terme général $x_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i u_i}{a_n}$ est convergente.

[Correction](#)

Exercice 27.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

a. Dans cette question, on choisit $u_n = \frac{1}{2^n}$; montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer R_n . Donner la nature de $\sum v_n$ en fonction de α .

b. Dans le cas général, exprimer v_n en fonction de R_n , R_{n-1} et α . Donner la nature de $\sum v_n$ pour $\alpha = 1$ et en déduire la nature de $\sum v_n$ pour $\alpha > 1$.

c. Donner la nature de $\sum v_n$ pour $0 < \alpha < 1$.

2. On suppose désormais que $\sum u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général v_n en fonction de α .

[Correction](#)

Exercice 28.

Soit f une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même telle que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$. On pose $g : x \mapsto \frac{f^{-1}(x)}{x^2}$.

1. Prouver que $\frac{n}{f(2n)} \leq S_{2n} - S_n \leq \frac{n}{f(n)}$.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[f(1), +\infty[$.

3. Prouver que g est intégrable sur $[f(1), +\infty[$.

[Correction](#)

Exercice 29.

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}^+} |f''|$ et $\int_{\mathbb{R}^+} f$ convergent.

1. Montrer que f' a une limite nulle en $+\infty$.

2. Montrer que f a une limite en $+\infty$. La préciser.

3. Montrer que les séries de terme général $f'(n)$ et $f(n)$ convergent.

[Correction](#)

Exercice 30.

On dit qu'un produit infini $\prod (1 + b_k)$ converge si et seulement si la suite

$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + b_k)$ est convergente et on note sa limite $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + b_k)$.

1. Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k \in \mathbb{R}$ et $(a_k(n))_{n \geq 0}$ une suite réelle de limite b_k . On suppose de plus qu'il existe une suite $(m_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |a_k(n)| \leq m_k$$

et que la série $\sum m_k$ converge.

a. Montrer qu'il existe un rang K à partir duquel $0 \leq m_k \leq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que les produits, $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + b_k)$ et $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k(n))$ sont convergents.

c. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + b_k).$$

2. On pose $m = 2n + 1$.

a. Montrer que pour tout réel x :

$$\sin(mx) = m \sin x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/m)} \right).$$

b. Dédurre des questions précédentes que $\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi} \right)^2 \right)$.

[Correction](#)

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

I. Résumé de cours

1. Normes :

(i) Définition d'une norme et exemples.

Définition : N application de E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}^+$ est **une norme** si et seulement si

- (a) $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (axiome de séparation) ;
- (b) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (axiome d'homogénéité) ;
- (c) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Propriétés :

- Si E est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E .
- Inégalité triangulaire inversée :

$$\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y) .$$

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \text{ et } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\text{Comparaison : } \forall x, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty.$$

(ii) Distance associée à une norme. Boules.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $(x, y) \mapsto N(x - y)$ est une **distance** car elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- (a) $\forall(x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$
- (b) $\forall(x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
- (c) $\forall(x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Définitions :

- Une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{x \in E, N(x - a) < r\}$.
- Une boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{x \in E, N(x - a) \leq r\}$.
- Une sphère de centre a et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\{x \in E, N(x - a) = r\}$.

(iii) **Parties convexes**

Définition : Soit A une partie de E . A est **une partie convexe** de E si et seulement si le segment joignant deux points de A est inclus dans A soit

$$\forall(x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in A \quad .$$

Propriétés :

- Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.
- Une intersection de convexes est convexe.
- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

(iv) **Parties bornées**

Définition : Soit A une partie de E . A est **une partie bornée** de (E, N) espace vectoriel normé si et seulement si il existe M tel que

$$\forall x \in A, N(x) \leq M$$

autrement dit $A \subset \mathcal{B}_f(0, M)$ (boule fermée de centre 0 et de rayon M).

Propriété : Les boules ouvertes et fermées, les sphères sont bornées.

Définition : Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E espace vectoriel normé est une **suite bornée** si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Définition : Une fonction de X à valeurs dans E espace vectoriel normé est une **fonction bornée** si l'ensemble $f(X) = \{f(x), x \in X\}$ est borné.

Propriété : L'ensemble des fonctions bornées sur X à valeurs dans E normé par $\|\cdot\|$ est un sous-espace vectoriel de E^X sur lequel on peut définir la norme infinie suivante $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \{\|f(x)\|\}$

2. Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

(i) Convergence pour une norme.

Définition : la suite $(u_n)_n$ de E converge pour la norme N vers ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } n \geq n_0 \implies N(u_n - \ell) < \varepsilon.$$

Si ℓ existe, ce nombre est unique est appelé limite de la suite pour la norme N ; dans le cas contraire, elle est divergente pour la norme choisie. Toute suite convergente pour N est bornée pour cette norme.

(ii) Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Propriétés :

- L'ensemble des suites de E convergentes pour une norme N est un espace vectoriel.
- Toute suite extraite d'une suite convergente pour la norme N est convergente pour la norme N .

(iii) Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème : Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas de la norme choisie.

Remarque : la démonstration de ce théorème est hors programme en PC ou PC*. Il a pour conséquence qu'on a le choix de la norme utilisée dès que E est de dimension finie. On ne précise plus alors pour quelle norme la suite est bornée ou convergente.

Propriété : Pour qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E espace vectoriel normé de dimension finie converge, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E soient convergentes et les coordonnées de la limite sont alors les limites des suites coordonnées.

3. Un peu de topologie

L'espace vectoriel E est supposé de dimension finie p : l'étude topologique se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

(i) Points adhérents :

Définition : a est un **point adhérent** à A si et seulement si toute boule ouverte centrée en a rencontre A ce qui mathématiquement s'écrit :

$$\forall r > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \|x - a\| < r.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'**adhérence** de A et est noté $\overline{A}$.

Caractérisation séquentielle des points adhérents : a est un point adhérent de A si et seulement si a est la limite d'une suite d'éléments de A .

Définition : La **frontière** de A est $\overline{A} \cap \overline{E - A}$ l'intersection de son adhérence et de l'adhérence de son complémentaire. Un point a appartient à la frontière de A si et seulement si toute boule ouverte centrée en a rencontre A et son complémentaire.

(ii) **Points intérieurs :**

Définition : a est un **point intérieur** à A si et seulement si il existe une boule ouverte centrée en a de rayon $r > 0$ incluse dans A ce qui s'écrit mathématiquement

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \|x - a\| < r \implies x \in A.$$

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé l'**intérieur** de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.

Remarque : Un point adhérent à A est soit un point intérieur à A soit un point de la frontière de A . L'intersection de l'intérieur de A et de sa frontière est vide.

Définition : U sous-ensemble de E espace vectoriel est un **ouvert** de E si et seulement si tout point de U est intérieur à U c'est à dire $\overset{\circ}{U} = U$.

Propriétés :

- E et $\emptyset$ sont des ouverts.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Une union d'ouverts est un ouvert.
- Une boule ouverte est un ouvert.

(iii) **Parties fermées :**

Définition : F sous-ensemble E espace vectoriel est un **fermé** de E si et seulement si $E - F$ est ouvert.

Propriétés :

- E et $\emptyset$ sont des fermés.
- Une union finie de fermés est un fermé.
- Une intersection de fermés est un fermé.

- A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.
- Une boule fermée est un fermé.
- Une sphère est un fermé.

Caractérisation séquentielle des fermés : Un sous-ensemble de E est fermé si et seulement si toute suite convergente de F converge dans F .

4. Limite d'une application en un point adhérent :

(i) Définition :

Définition : Soient f une application de A sous-ensemble de E espace vectoriel normé par N_E dans F espace vectoriel normé par N_F et a un point adhérent à A . f admet pour limite b en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \text{ tel que } N_E(x - a) < \alpha \text{ et } x \in A \implies N_F(f(x) - b) < \varepsilon.$$

Propriétés :

- La limite lorsqu'elle existe est unique. On note $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f$.
- Si a est élément de A , la seule limite possible est $f(a)$.
Si $\lim_a f = f(a)$, f est dite continue en a .
- Si f a une limite en a , f est bornée au voisinage de a .
- Si E et F sont de dimension finie, l'existence d'une limite et sa valeur ne dépendent pas du choix des normes.

(ii) Caractérisation séquentielle

Caractérisation séquentielle de la limite : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f , application de $A \subset E$ dans F a pour limite b en a point adhérent à A si et seulement si pour toute suite d'éléments $(a_n)_n$ d'éléments de A de limite a , la suite $(f(a_n))_n$ est une suite convergente de limite b .

Caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si et seulement si pour toute suite d'éléments $(a_n)_n$ d'éléments de A de limite a , la suite $(f(a_n))_n$ est une suite convergente de limite $f(a)$.

Propriétés :

- f a une limite en a si et seulement si les coordonnées de f dans une base $\mathcal{B}$ de F ont une limite et les coordonnées de la limite de f dans la base $\mathcal{B}$ sont les limites des coordonnées de f .

- f est continue en a si et seulement si ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ de F sont continues en a .

(iii) **Opérations algébriques.**

Propriétés : E et F sont supposés de dimension finie (dans le cas contraire, il faudrait préciser les normes utilisées).

- Si f et g sont deux applications de $A \subset E$ dans F ayant pour limite b et c en a , pour tout couple de scalaires α et β , $\alpha f + \beta g$ a comme limite en a $\alpha b + \beta c$.
- Si $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la limite en a de fg est bc .
- *Composition de limites* : Soit $f : A \subset E \mapsto F$ et $g : B \subset F \mapsto G$ avec $f(A) \subset B$. Soit a un point adhérent de A et $b = \lim_a f$. Alors b est adhérent à B et si $\lim_b g = c$, $\lim_a g \circ f = c$.

5. Applications continues :

(i) **Structure de $\mathcal{C}(A, F)$.**

Définition : Une application définie sur $A \subset E$ dans F (E et F espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$) est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A .

L'ensemble des fonctions continues de A dans F est noté $\mathcal{C}(A, F)$.

Propriétés :

- $\mathcal{C}(A, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

(ii) **Cas des fonctions numériques.**

Propriété :

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $\{x \in E, f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ est un ouvert et les ensembles définis par $\{x \in E, f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ et $\{x \in E, f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ sont fermés.

En remplaçant f par $-f$ ou $f - a$ où a est réel, on obtient que les ensembles définis par $\{x \in E, f(x) > a\}$ ou $\{x \in E, f(x) < a\}$ sont des ouverts et les ensembles définis par $\{x \in E, f(x) = a\}$ (soit $f^{-1}(a)$), $\{x \in E, f(x) \geq a\}, \{x \in E, f(x) \leq a\}$ sont fermés.

Théorème : Soit f une application continue de A partie fermée et bornée de E dans $\mathbb{R}$, f est bornée et les bornes sont atteintes.

(iii) Applications lipschitziennes.

Définition : Soit k un réel positif. f application de $A \subset E$ espace vectoriel normé par N_E dans F espace vectoriel normé par N_F est dite **k -lipschitzienne** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2, N_F(f(x) - f(y)) \leq k N_E(x - y) .$$

Une application de $A \subset E$ espace vectoriel normé par N_E dans F espace vectoriel normé par N_F est lipschitzienne si il existe un nombre réel k pour lequel elle est k -lipschitzienne.

Lorsque E et F sont de dimension finie, le caractère lipschitzien ne dépend pas des normes ; par contre, le nombre k dépend de celles-ci.

Propriétés :

- L'application $x \mapsto N(x)$ de E espace vectoriel normé par N est 1-lipschitzienne.
- Une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.
- Toute application lipschitzienne (pour des normes) est continue pour ces normes.

(iv) Continuité des applications linéaires.

Propriété : Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans lui même continue en 0 et vérifiant pour tout couple (x, y) de réels $f(x + y) = f(x) + f(y)$, alors f est linéaire.

Théorème : Si f est une application linéaire entre E et F , espaces vectoriels de dimension finie, f est lipschitzienne donc continue.

(v) Continuité des applications multilinéaires.

Propriétés :

- Toute application multilinéaire sur $\mathbb{K}^n$ dans F est continue.
- Le déterminant est une fonction continue.
- Toute fonction polynômiale de n variables (donc définie sur $\mathbb{K}^n$) est continue.

II. Exercices

Les indications sur certains de ces exercices débutent page 95.

1. Normes sur un espace vectoriel

La correction de ces exercices débute page 138.

Exercice 31.

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E normé par $\|\cdot\|$ tels que $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$. Montrer que :

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \geq \frac{3}{2}(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| + \|\vec{z}\|).$$

[Correction](#)

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel réel normé. Montrer que les boules ouvertes $\mathcal{B}(a, r)$ et $\mathcal{B}(a', r)$ sont égales si et seulement si $a = a'$ et $r = r'$.

[Correction](#)

Exercice 33.

Soit $N_0 : (x, y) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$ et $N_1(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$

1. Montrer que N_0 et N_1 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner les boules unités fermées pour ces normes.

[Correction](#)

Exercice 34.

Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N(AB) = N(A)N(B)$ pour tout couple de matrices (A, B) .

[Correction](#)

Exercice 35.

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ (donc associé à un produit scalaire $\langle, \rangle$).

1. Prouver que pour tout couple de polynômes (P, Q) de E , on a :

$$\|P + Q\|^2 + \|P - Q\|^2 = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2).$$

2. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n, n+1$ réels deux à deux distincts.

On pose $\|P\|_\alpha = \sum_{k=0}^n |P(\alpha_k)|$.

a. Prouver que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme.

b. Donner les polynômes L_i de E tels que $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$ (qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon).

c. Calculer $\|L_i + L_j\|_\alpha$, $\|L_i - L_j\|_\alpha$, $\|L_i\|_\alpha$. En déduire que $\|\cdot\|_\alpha$ n'est pas une norme euclidienne.

3. On pose $\|P\|'_\alpha = \sqrt{\sum_{k=0}^n P(\alpha_k)^2}$.

a. Montrer qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

b. Déterminer un couple de réels strictement positifs e et f tels que pour tout polynôme P de E :

$$e\|P\|'_\alpha \leq \|P\|_\alpha \leq f\|P\|'_\alpha.$$

Correction

Exercice 36.

Soit K une partie convexe fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ symétrique par rapport à $O = (0, 0)$ et admettant O comme point intérieur. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x) = \inf \left\{ t > 0 \mid \frac{x}{t} \in K \right\}$.

1. Vérifier que $N(x)$ est bien défini pour tout x de $\mathbb{R}^2$ et est un minimum si x est non nul.

2. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Identifier la boule unité fermée de E pour cette norme.

Correction

Exercice 37.

1. Soient $p \in]1, +\infty[$, $t \in [0, 1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|tx + (1-t)y|^p \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p.$$

2. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$.

a. Montrer que $x \mapsto \|x\|_p$ vérifie les axiomes de séparation et d'homogénéité.

b. Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p \leq 1\}$. Montrer que B est convexe.

c. En déduire que $\| \cdot \|_p$ est une norme.

3. Pour quelles valeurs de p cette norme est-elle euclidienne ?

[Correction](#)

2. Suites vectorielles

La correction de ces exercices débute page 144.

Exercice 38.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(\vec{u}_n)_n, (\vec{v}_n)_n$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \vec{u}_n \text{ est colinéaire à } \vec{v}_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n = \vec{u}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{v}_n = \vec{v}.$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

[Correction](#)

Exercice 39.

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre p . I_p désigne la matrice identité d'ordre p .

1. On suppose que la suite de matrices : $A_n = I_p + A + A^2 + \dots + A^n$ converge vers une matrice B . Montrer que $I_p - A$ est inversible, et $B = (I_p - A)^{-1}$.

2. La réciproque est fautive, c'est à dire que la suite (A_n) peut diverger même si $I - A$ est inversible. Chercher un contre-exemple.

[Correction](#)

Exercice 40.

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Soit λ un complexe de module strictement supérieur à 1 et $(\vec{x}_n)_n$ une suite d'éléments de E . Prouver que la suite $(\vec{x}_n)_n$ est convergente si et seulement si la suite $(\vec{x}_n + \lambda \vec{x}_{n+1})_n$ est convergente.

[Correction](#)

3. Topologie

La correction de ces exercices débute page 146.

Exercice 41.

Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? bornées ? convexes ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } xy = 1\}$.

2. $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } xy < 1\}$.
3. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + xy + y^2 < 1\}$.
4. $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(z^2) \leq 1\}$.

[Correction](#)

Exercice 42.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et C une partie convexe de E non vide. Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont des convexes de E .

[Correction](#)

Exercice 43 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$).

1. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On pose

$$a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*).$$

- a. Montrer que a existe et est élément de G .
- b. Vérifier que si $a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$ et si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$ (autrement dit tout réel est un point adhérent à G).
2. Montrer que si α et β sont non nuls, $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
3. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $P(f)$ l'ensemble de ses périodes. Montrer que $P(f)$ est un sous groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que a et b appartiennent à $P(f)$ avec $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, que dire de f ?
4. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on suppose que f est périodique de période a et que g est périodique de période b avec $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ et que $f + g$ est périodique de période $c \neq 0$. En étudiant $\Delta(x) = f(x+c) - f(x)$ montrer que f ou g est constante.

[Correction](#)

Exercice 44.

Soit $(u_n(\alpha))_n$ définie par $u_1(\alpha) = \alpha > 0$ et $u_{n+1}(\alpha) = u_n(\alpha)^2 + \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que les limites L possibles de $(u_n(\alpha))_n$ sont 0, 1 et $+\infty$.
2. On note $E_L = \{\alpha > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\alpha) = L\}$. Montrer que E_0 , E_1 et $E_{+\infty}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $]1+\infty[\subset E_{+\infty}$, puis montrer que $E_{+\infty}$ est un ouvert.

[Correction](#)

Exercice 45.

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. On note Ω_P l'ensemble des éléments c de $\mathbb{K}$ tels que le polynôme $P + c$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

1. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.
2. Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que Ω_P est vide ou est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Quels sont les polynômes pour lesquels Ω_P n'est pas borné ?

[Correction](#)

4. Continuité d'applications d'une variable réelle

La correction de ces exercices débute page 150.

Exercice 46.

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que

$$(R) \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

1. Étudier l'injectivité de f puis sa surjectivité.
2. Quelles sont les fonctions vérifiant les hypothèses ?

[Correction](#)

Exercice 47.

Soit f une fonction continue en 0 et 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$. Prouver que f est constante.

[Correction](#)

Exercice 48.

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(R) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

1. Montrer que si $f(0) = 0$, alors $f = 0$.
2. Montrer que si f s'annule en a , alors $f(0) = 0$.
3. Trouver les fonctions f solutions. (on pourra poser $g = \ln |f|$.)

[Correction](#)

Exercice 49 (Théorème du point fixe).

Soit f une application de I dans I lipschitzienne de rapport $k < 1$ où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

1. Soit $u_0 \in I$. On pose $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente. En déduire que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ est un point fixe de f .

2. Montrer que ℓ est l'unique point fixe de f dans I .

[Correction](#)

5. Continuité d'applications définies sur un espace vectoriel

La correction de ces exercices débute page 152.

Exercice 50.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{x}{\max(1, \|x\|)}$ est 2-lipschitzienne.

[Correction](#)

Exercice 51.

Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'image par f d'un convexe de E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

[Correction](#)

Exercice 52 (Distance à un sous-ensemble).

Soit E un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$ de dimension finie. Soit A une partie non vide de E .

1. Soit x un élément de E . Vérifier l'existence de $\inf\{\|x - y\|, y \in A\}$. Ce nombre est noté $d(x, A)$.

2. Vérifier que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

3. Prouver que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

4. Si B est une autre partie non vide de E telle que $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$, prouver l'existence de deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

5. Si A est un fermé borné non vide, prouver l'existence d'un élément y_x de A tel que $d(x, A) = \|x - y_x\|$. Vérifier que ce résultat demeure si A est fermé non vide.

6. Si E est muni d'une norme euclidienne, et A une partie convexe de E , prouver que si il existe $y_0 \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - y_0\|$, cet élément est unique.

7. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On pose $F' = \bigcup_{x \in F} B_f(x, r)$. Montrer que F' est fermé. (B_f : boule fermée).

[Correction](#)

Exercice 53.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K une partie bornée fermée non vide de E et $f : K \rightarrow K$ telle que :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in K^2, \vec{x} \neq \vec{y} \implies \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Montrer que f possède un unique point fixe.

[Correction](#)

Exercice 54 (Fonction tendant vers $+\infty$ à l'infini.).

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application de E dans $\mathbb{R}$ continue. On suppose que f a pour limite $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ c'est à dire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in E, \|x\| \geq B \implies f(x) \geq A.$$

1. On prend $A = f(0)$ et B le nombre correspondant. Montrer que $\inf\{f(x), x \in E\} = \inf\{f(x), \|x\| \leq B\}$. En déduire que f admet un minimum.

2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et g une application de $S = [a, b]$ avec $a \neq b$ dans $\mathbb{R}$ bornée. Montrer qu'il existe $P \in E$ tel que $\|g - P\|_{S, \infty} = \sup\{|g(t) - P(t)|, t \in [a, b]\}$ soit minimal. (P est appelé un polynôme de meilleure approximation de g sur $[a, b]$).

[Correction](#)

Chapitre 4

Dérivation de fonctions vectorielles

I. Résumé de cours

La dérivabilité et les notions adjacentes sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont supposées connues. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$.

1. Dérivabilité d'une fonction :

(i) Dérivabilité en un point :

Définition : f est dite **dérivable** en $a \in I$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et cette limite appelée **dérivée de f en a** est notée $f'(a)$.

Propriété : Une fonction dérivable en un point y est continue.

(ii) Dérivabilité sur un intervalle :

Définition : f est dite **dérivable sur I** si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .

Propriétés :

- f est dérivable sur I si et seulement si ses applications coordonnées le sont.
- Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables en un point a est dérivable en a .

- Soit f continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I . f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Définition : f est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** si et seulement si f' existe et est continue sur I .

Propriété : $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour lequel l'application dérivation de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ est linéaire.

Théorème de la limite de la dérivée : Si f , continue de I dans $\mathbb{R}$, est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a . Si ℓ est réel, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de a , elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Ce théorème peut s'étendre aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en passant composante par composante.

(iii) **Opérations sur les fonctions dérivables**

Propriété : Soit f une application de I dans $\mathbb{R}^n$ et L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si f est dérivable en a , $L \circ f$, la composée de L et f , est dérivable en a et

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a)) = L \circ f'(a) .$$

Aussi si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, $L \circ f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^p)$.

Théorème : Soit B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Soit f application de I dans $\mathbb{R}^n$ et g application de I dans $\mathbb{R}^p$. Si f et g sont dérivables en a , l'application

$$\begin{aligned} \Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longmapsto B(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

est dérivable en a et

$$\Phi'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)) .$$

De plus, si f et g sont $\mathcal{C}^1$, il en est de même de Φ .

Corollaires :

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne, l'application $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ de I dans $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$.

- Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$, l'application $x \mapsto \det(f(x), g(x))$ de I dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto \det(f'(x), g(x)) + \det(f(x), g'(x))$.

Théorème : Soient φ application de J , intervalle de $\mathbb{R}$, dans I , intervalle de $\mathbb{R}$, dérivable en a et une application f de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivable en $\varphi(a)$. La composée $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a))$. De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J , $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .

Corollaire : Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$ espace euclidien ne s'annulant pas, l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto \frac{\langle f'(x), f(x) \rangle}{\|f(x)\|}$.

2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

(i) Définition et premières propriétés.

Définition : f est dite de **classe $\mathcal{C}^k$** si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si f est dérivable à tout ordre.

Propriété : Soit $0 \leq k \leq \infty$. $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

Extension du théorème de la limite de la dérivée : Si f , application continue de I dans $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I \setminus \{a\}$ et si, pour tout $k \leq p$, $f^{(k)}(x)$ tend vers ℓ_k (réel) lorsque x tend vers a , f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et pour tout $k \leq p$, $f^{(k)}(a) = \ell_k$.

(ii) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Théorème (Formule de Leibniz) :

Soit B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Soit f application de I dans $\mathbb{R}^n$ et g application de I dans $\mathbb{R}^p$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ x &\longmapsto B(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\Phi^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)})$.

Corollaire : $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Propriété : Si f est une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^k$ de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans J intervalle de $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas, f^{-1} est une

application de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Théorème : Soient φ application de classe $\mathcal{C}^k$ de J , intervalle de $\mathbb{R}$, dans I , intervalle de $\mathbb{R}$, et une application f de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^n$. L'application composée $f \circ \varphi$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}^n$.

3. Arcs paramétrés

(i) Définitions

Définition : Soit $1 \leq k \leq \infty$.

- Un **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ est la donnée d'un couple (I, f) avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans F espace vectoriel normé de dimension 2 ou 3. L'ensemble $\Gamma = f(I)$ est le **support** ou la **trajectoire** de cet arc paramétré.
- $M_0 = f(t_0)$ est un **point simple** de Γ si M_0 n'est l'image que de t_0 par f , sinon c'est un **point multiple**.
- Ce point est **régulier** si et seulement si $f'(t_0) \neq 0$.
- Si tous les points sont simples (respectivement réguliers), l'arc paramétré est dit simple (respectivement régulier).

(ii) Tangente à une courbe :

Définition : Soit $\Delta(t)$ une droite passant par un point A de vecteur directeur $\vec{v}(t)$ de limite non nulle $\vec{V}$ lorsque t tend vers a . La droite D passant par A de vecteur directeur $\vec{V}$ est la **droite limite** de $\Delta(t)$ en a .

Définition : Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $M_0 = f(t_0)$. Soit D_t la droite passant par M_0 et $M = f(t)$. Si D_t a une droite comme limite lorsque t tend vers t_0 , cette droite limite est appelée **tangente** à Γ en M_0 .

Propriété : En un point régulier $M_0 = f(t_0)$ de l'arc paramétré (I, f) , la tangente a pour vecteur directeur $f'(t_0)$.

Remarque : pour les courbes planes, $y = \phi(x)$ tous les points sont réguliers et un vecteur tangent est $(1, \phi'(x))$.

(iii) Plan d'étude d'une courbe plane :

Soit Γ une courbe plane d'équation $x = f(t)$ et $y = g(t)$ avec f et g suffisamment régulières ou autrement définie par les points $M = F(t)$ avec $F(t) = (f(t), g(t))$. Pour tracer Γ , voici un plan d'étude :

- Détermination du domaine de définition de F et de sa classe.
- Détermination d'un domaine propre (D est un domaine propre si il n'existe pas deux intervalles I et J ouverts inclus dans D tels que $F(I) = F(J)$).
- Détection d'éventuelles propriétés de Γ et notamment les symétries pour réduire le domaine d'étude D_e .
- Étude des variations de x et y sur D_e .
- Étude des éventuelles asymptotes.
- Suivant la précision souhaitée et l'allure de la courbe, on peut déterminer les points d'intersection avec les axes, les points multiples et les tangentes en ces points.
- Tracé de Γ .

II. Exercices sur la dérivation

Les indications sur certains de ces exercices se trouvent à la page 97.

1. Dérivabilité de fonctions à valeurs réelles

La correction de ces exercices commence page 155.

Exercice 55.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit g et φ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Donner la dérivée de $x \mapsto g(x)e^{\varphi(x)}$.

2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Montrer l'existence d'un réel c appartenant à $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(b)}{(c - b)^2}.$$

3. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ telles qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) + \alpha \int_a^t f(s)ds$. Prouver que :

$$f(t) \leq g(t) + \alpha e^{\alpha t} \int_a^t g(s)e^{-as}ds.$$

[Correction](#)

Exercice 56.

Soient a et b deux réels positifs. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

1.

a. Montrer que les deux suites sont adjacentes pour $n \geq 1$. On désigne par $\ell(a, b)$ leur limite commune.

b. Vérifier que $\ell(a, b) = \ell(b, a)$ et que $\ell(\lambda a, \lambda b) = \lambda \ell(a, b)$ pour tout λ réel positif.

2. On pose $f(x) = \ell(1, x)$.

a. Calculer $f(0)$, $f(1)$ puis $f(1/x)$ et $f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ en fonction de $f(x)$.

b. Vérifier que pour tout x , $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$.

3.

a. Soit $g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. On suppose que $x \mapsto g(x)/x$ est décroissante. Montrer que g est continue.

b. Étudier la monotonie de f . En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. Prouver que f est continue en 0.

4. Montrer que f est dérivable en 1. Est elle dérivable en 0 ?

5. Donner le comportement asymptotique de f en $+\infty$ et l'allure générale de la courbe en précisant les tangentes en 0 et 1.

[Correction](#)

Exercice 57.

Démontrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

[Correction](#)

Exercice 58.

Soit la fonction $f : x \mapsto (\text{Arcsin}(x))^2$.

1. Vérifier que

$$\forall x \in]-1, 1[, (1 - x^2)f''(x) = xf'(x) + 2.$$

2. En déduire que, pour tout n , $f^{(2n+2)}(0) = 2^{2n+1} (n!)^2$ puis

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2k)!(2n-2k)!}{(2k+1)(2n-2k+1)((k!(n-k)!)^2)} = \frac{2^{4n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}.$$

[Correction](#)

2. Dérivabilité de fonctions vectorielles

La correction de ces exercices commence page 159.

Exercice 59.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq n!$.
2. Montrer que $f^{(n)}$ a n racines réelles et les déterminer.

[Correction](#)

Exercice 60.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne et F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $I = [a, b]$ dans E .

1. Prouver que si $F(a) = F(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $F(c)$ et $F'(c)$ sont des vecteurs orthogonaux.

2. On suppose E de dimension 3. Prouver que si $F(a)$ et $F(b)$ forment une famille libre, alors il existe c tel que $F'(c) \in \text{Vect}(F(a), F(b))$, espace vectoriel engendré par $F(a)$ et $F(b)$. Est-ce vrai si E est de dimension $n > 3$?

[Correction](#)

Exercice 61.

1. Calculer, pour p et q entiers naturels, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

2. Soit A_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ de terme général $a_{i,j} = \frac{1}{(i+j-2)!}$ avec $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$. Calculer son déterminant Δ_n . On introduira $D_n(x)$ déterminant de la matrice $M_n(x)$ obtenue en remplaçant la dernière ligne de A_n par : $\left(\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$.

[Correction](#)

3. Arcs paramétrés

La correction de ces exercices commence page 162.

Exercice 62.

Soit

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos^3(t) \\ y(t) &= b \sin^3(t)\end{aligned}$$

avec a et b réels strictement positifs. On désigne par Γ l'ensemble $F(\mathbb{R})$ avec $F = t \mapsto (x(t), y(t))$.

1. Montrer que $A = F(0)$ n'est pas un point régulier de Γ . Soit $m(t) = \frac{y(t)}{x(t) - a}$. Déterminer la limite de m lorsque t tend vers 0. En déduire la tangente à Γ en A .

2. Étudier et tracer la courbe Γ .

3. Prouver que deux normales passent par O et donner leurs équations. Déterminer une condition nécessaire et suffisantes pour que ces normales soient perpendiculaires.

Rappel : la normale en un point de la courbe est la droite passant par ce point orthogonale à la tangente.

[Correction](#)

Exercice 63.

Soit Γ l'arc paramétré d'équations

$$\begin{aligned}x(t) &= 3 \cos(t) + 3 \cos(2t) + \cos(3t) \\ y(t) &= 3 \sin(t) + 3 \sin(2t) + \sin(3t)\end{aligned}$$

Étudier et tracer Γ en précisant les points d'intersection avec l'axe des abscisses et ceux à tangente horizontale ou verticale.

[Correction](#)

Exercice 64.

Soit Γ l'arc paramétré d'équations
$$\begin{cases} x(t) = \ln(\sin(t)) - 2 \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}.$$

Étudier et tracer Γ .

[Correction](#)

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions

I. Résumé de cours

Dans tout ce chapitre, les fonctions f_n sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

1. Modes de convergence :

(i) Convergence simple d'une suite de fonctions.

Définition : Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f si et seulement si pour tout x de I , la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

(ii) Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I convergeant simplement vers la fonction f sur I . La **convergence** est dite **uniforme** sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon, \exists n_0, n \geq n_0 \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui revient à dire que $(f_n)_n$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, appelée norme de la convergence uniforme.

Propriétés :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I équivaut à la suite de terme général $g_n = f - f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .
- Si il existe une suite α_n de limite nulle telle que $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

- Si il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n))_n$ ne converge pas vers 0, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0.

(iii) **Modes de convergence d'une série de fonctions.**

Définitions : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I intervalle de

$\mathbb{R}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

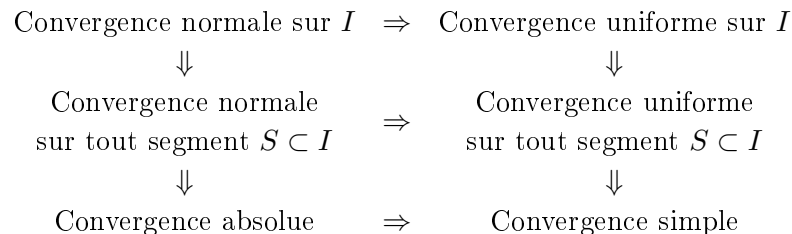
- $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) vers f si la suite $(S_n)_n$ converge simplement (respectivement uniformément) vers f .
- $\sum f_n$ converge absolument si la série $\sum |f_n|$ est convergente, autrement dit si en tout point x de I , la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
- Une série $\sum f_n$ de fonctions réelles ou complexes définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et bornées est dite **normalement convergente** si et seulement si la série $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ est convergente.

Propriétés :

- Si il existe une série numérique $\sum a_n$ convergente telle que $\|f_n\|_{\infty, I} \leq a_n$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur I .
- Si il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge, la série n'est pas normalement convergente.

Lien entre les différents modes de convergence :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ la série associée. Voici le lien entre les différents mode de convergence de la série :



2. Régularité de la limite d'une suites de fonctions

(i) Continuité et convergence uniforme.

Théorème La limite d'une suite de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur I est continue sur I .

La continuité étant une notion locale, il en découle une version plus forte : La limite d'une suite de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur tout segment inclus dans I est continue sur I .

(ii) Intersion limite-intégrale :

Théorème d'intersion limite et intégrale sur un segment :
Si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

(iii) Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

Théorème :

Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que **la suite (f'_n) converge uniformément vers h sur tout segment inclus dans I** , alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I , f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

On obtient alors l'extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Théorème de régularité de la limite :

Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I qui converge simplement sur I vers f , telle que les suites $(f_n^{(j)})$ pour $1 \leq j \leq k-1$ convergent simplement vers des fonctions h_j et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I , alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $1 \leq j \leq k, f^{(j)} = h_j$.

Remarque : toutes les suites $(f_n^{(j)})_n$ pour $1 \leq j \leq k-1$ convergent uniformément sur tout segment inclus dans I .

3. Régularité de la somme d'une série de fonctions

(i) Continuité de la somme :

Théorème :

Si $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

(ii) Intégration terme à terme d'une série de fonctions :

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

(iii) Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

Théorème de dérivation terme à terme d'une série :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: Si $(\sum f_n)$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que les séries $\sum f_n^{(j)}$ pour $1 \leq j \leq k-1$ convergent simplement vers des fonctions h_j et $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de

I vers h_k , alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour $1 \leq j \leq k$, $f^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$.

Cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$: Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est une série de fonctions

de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur I qui converge simplement sur I vers f et dont toutes les séries dérivées $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ convergent uniformément sur tout segment de

I , alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier j non nul, $f^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}$.

4. Suite et séries de fonctions intégrables :

(i) Théorème de convergence dominée :

Théorème de convergence dominée :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Remarque : ce théorème peut s'appliquer aux sommes partielles d'une série.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}_m(I, K)$ $(\sum f_n)_n$ qui converge simplement sur I vers une fonction f de $\mathcal{C}_m(I, K)$ sur I . Si il existe $\varphi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ intégrable sur I telle, pour tout entier n , $|\sum_{k=0}^n f_k| \leq \varphi$, alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

(ii) Intégration terme à terme d'une série :

Théorème d'intégration terme à terme d'une série :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I telle que $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

5. Intégrales à paramètre :

On s'intéresse aux fonctions de la forme $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ (" x " est un paramètre pour l'intégrale)

(i) **Continuité sous le signe $\int$.**

Théorème de continuité des intégrales à paramètres :

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Version avec hypothèse de domination plus faible :

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- Pour tout **segment** S **inclus dans** I , il existe une fonction positive φ_S , continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout élément (x, t) de $S \times J$, $|f(x, t)| \leq \varphi_S(t)$.

alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Attention : la restriction à un segment se fait sur l'intervalle donnant le domaine de définition de $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ et **jamais sur l'intervalle d'intégration J .**

(ii) **Dérivation****Théorème de dérivation des intégrales à paramètre :**

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur J ;
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a sur I :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Remarque : l'hypothèse de domination peut être affaiblie pour tout segment S inclus dans I , il existe une fonction positive φ_S , continue par morceaux et intégrable sur J , telle que pour tout élément (x, t) de $S \times J$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_S(t)$.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$:

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $I \times J$, dérivable k fois par rapport à x . On suppose que :

- Pour tout $x \in I$, les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ avec $1 \leq p \leq k$ sont continues par morceaux et intégrables sur J .
- Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur I .
- il existe k fonctions positives φ_p avec $1 \leq p \leq k$, continues par morceaux et intégrables sur J , telle que pour tout élément (x, t) de $I \times J$, $\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \varphi_p(t)$

alors la fonction F définie sur I par la relation $F(x) = \int_J f(x, t) dt$ est

de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $p \in [1, k]$, $F^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$.

II. Exercices

Les indications concernant certains de ces exercices commencent page 98.

1. Suites de fonctions

La correction de ces exercices débute page 165.

Exercice 65.

Soit f croissante et continue de $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. On pose pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $g_n(x) = e^{-n} \lfloor e^n f(x) \rfloor$.

1. Prouver que g_n est une fonction en escalier pour tout $n > 0$.
2. Montrer que $(g_n)_n$ est une suite de fonctions convergeant uniformément vers f .

[Correction](#)

Exercice 66.

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x$ et pour tout n , $f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4f_n^3\left(\frac{x}{3}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto 3t - 4t^3$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq x$.
3. Déterminer une suite $(a_n)_n$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - \sin x| \leq a_n x^3.$$

4. Montrer que $(f_n)_n$ converge en tout point réel.
5. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? sur $\mathbb{R}$?

[Correction](#)

Exercice 67.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus d muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par

$$\forall P \in E, \|P\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|.$$

1. Soient $a_0, \dots, a_d$ $d + 1$ points distincts de $[0, 1]$.

a. Prouver pour tout i compris entre 0 et d , l'existence d'un polynôme L_i de E vérifiant, pour tout $j \in [1, d]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ soit $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$.

b. Vérifier que pour tout polynôme de E on a alors $P = \sum_{i=0}^d P(a_i) L_i$.

2. On suppose que $(P_n)_n$ est une suite de E convergeant simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f . Montrer que $f \in E$ et que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f .

3. Donner un exemple de suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ convergeant simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction g n'appartenant pas à $\mathbb{R}[X]$.

[Correction](#)

Exercice 68.

1. Prouver que si $t = \sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, alors $u = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$. Par le changement de variable $t = \sinh(u)$, déterminer $I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (n^2 + k^x)^{-1/2}$.

Étudier la convergence simple de la suite (f_n) :

- a. pour $x \leq 0$;
- b. pour $0 < x < 2$;
- c. pour $x = 2$;
- d. pour $x > 2$.

[Correction](#)

Exercice 69.

1. Soient $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues définies sur I à valeurs réelles convergeant uniformément vers une fonction f et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de I convergeant vers $a \in I$. Montrer que la suite de terme général $f_n(x_n)$ converge vers $f(a)$.

2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \ell_n$. Vérifier que si la suite $(\ell_n)_n$ est convergente de limite ℓ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f = \ell$.

[Correction](#)

2. Séries de fonctions :

La correction de ces exercices débute page 170.

Exercice 70.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

[Correction](#)

Exercice 71 (la fonction dzeta).

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition de ζ et prouver que cette fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Établir les variations de ζ .

2. Donner la limite de ζ en 1 et un équivalent.

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^x}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire la limite de ζ en $+\infty$ et un équivalent de $\zeta(x) - 1$.

[Correction](#)

Exercice 72.

Soit E l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Soient a et b deux réels tels que $|a| < 1$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout élément f de E on pose :

$$\forall x, T(f)(x) = f(x) - af(bx).$$

Montrer que T est un automorphisme de E .

[Correction](#)

Exercice 73.

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{1 + (nx \ln n)^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que cette série de fonctions converge absolument sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

[Correction](#)

Exercice 74.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^{2n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f et y étudier la continuité de f .
2. Donner un équivalent de f en 1.

[Correction](#)

Exercice 75.

On définit une suite de fonctions par f_0 continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier n , $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$.

1. Montrer que $\sum f_k$ est une série normalement convergente.
2. Soit $g_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$; montrer que g_0 est continue sur $[a, b]$, que g_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, puis que g_n est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.
3. Déterminer g_1 .

[Correction](#)

Exercice 76.

Soit $f_N(x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n}$.

1. Montrer que f_N converge vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble à définir.
2. Étudier la parité et la périodicité de f .

[Correction](#)

Exercice 77.

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{x}{n^a(1 + nx^2)}$ avec $a > 0$ et

la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Donner le domaine de définition de f . Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$. En déduire la continuité de f en dehors de 0.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. À quelles conditions sur a la série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?

4. Soit $a \leq \frac{1}{2}$; en remarquant que $\phi_a(t) = \frac{1}{t^a(1+tx^2)}$ décroît sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f n'est pas continue en 0.

5. Dans cette question $a = 1$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. f est-elle dérivable en 0 ?

c. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ utilisant la fonction ζ présentée page 58.

d. Déterminer par comparaison série intégrale un équivalent de f en 0.

[Correction](#)

3. Suites et séries de fonctions intégrables

La correction de ces exercices débute page 178.

Exercice 78.

On considère la suite $U_n = \int_0^\infty \frac{\text{Arctan}(n\sqrt{x})dx}{1+x^3+x^6+\dots+x^{3n}}$. Déterminer la nature de cette suite et en cas de convergence donner sa limite.

[Correction](#)

Exercice 79.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, nulle en dehors d'un segment S . On pose $I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} n f(x) \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n^3} dx$. Après avoir vérifié l'existence de I_n , déterminer la limite de la suite $(I_n)_n$.

On admettra le résultat (intégrale de Gauss) $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[Correction](#)

Exercice 80.

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Donner D l'ensemble de définition de f . f est-elle continue sur D ?

2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$?

3. f est-elle intégrable sur D ?

[Correction](#)

Exercice 81.

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{n^3 x^3 + n + 1}$. Étudier la nature de la suite $(I_n)_n$ puis celle de la série $\sum I_n$.

[Correction](#)

Exercice 82.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'existence de l'intégrale $I_r = \int_0^{+\infty} e^{-rt} \cos(xt) dt$ et la calculer.

3. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, que : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + e^t} dt$.

[Correction](#)

Exercice 83.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^n} dt$ et $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^n}$

1. Démontrer l'existence de a_n et u_n pour tout entier naturel $n \geq 2$.

2. Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3. En utilisant le changement de variable $t = x^{1/n}$, montrer que :

$$a_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On admettra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Déterminer la limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ et un équivalent de la suite $u_n - \ell$.

[Correction](#)

4. Intégrales à paramètres

La correction de ces exercices débute page 183.

Exercice 84 (Intégrale de Gauss).

Cet exercice propose deux méthodes de calcul de l'intégrale de Gauss définie par $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Les deux dernières questions sont donc indépendantes.

1. Montrer que G est défini.

2. Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ et

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, solution de l'équation différentielle $y' - y = \frac{-G}{\sqrt{x}}$.

b. Prouver que $f(x) = Ge^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

c. En déduire G .

3. Soient φ et h les fonctions suivantes :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a. Montrer que φ et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner leurs dérivées.

b. Exprimer f en fonction de h .

c. Retrouver ainsi la valeur de G .

[Correction](#)

Exercice 85.

$$\text{Soit } I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}.$$

1. Donner D le domaine de définition de I et prouver que I y est continue.

2. Déterminer $I(0)$ et les limites de I en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Montrer que pour $x \in D, I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^x du}{(1+u^2)(1+u^x)}$. En déduire la valeur de $I(x)$ lorsque $x \in D$.

[Correction](#)

Exercice 86.

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t} dt}{t}.$$

1. Vérifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer F' et en déduire F .

[Correction](#)

Exercice 87.

On considère f une fonction continue réelle telle que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. On définit pour tout réel $t > 0$,

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy \quad .$$

Montrer que $P_t f$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et de limite nulle en $\pm\infty$.

3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(f)(x) = f(x)$. On rappelle la valeur de l'intégrale de

$$\text{Gauss } \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. On suppose de plus que f est de classe 3 et que $f^{(3)}$ est bornée.

Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f(x) - f(x)) = f''(x)$.

[Correction](#)

Exercice 88 (La fonction Gamma).

On pose pour x réel $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et prouver que cette fonction y est continue.

2. Donner une relation de récurrence liant $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$. Déterminer $\Gamma(n)$ lorsque n est entier naturel non nul.

3. Γ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$?

4. Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. En déduire que pour tout x de $\mathcal{D}$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^n ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

[Correction](#)

Chapitre 6

Séries entières

I. Résumé de cours

Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et z est variable réelle ou complexe.

1. Rayon de convergence :

(i) Définition du rayon de convergence.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition Le **rayon de convergence** de la série $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure (réelle ou infinie) de l'intervalle I_a défini par

$$I_a = \{r \geq 0, \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \}.$$

Théorème de convergence d'une série entière :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.
- Si $|z| < R$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

Remarque : pour $|z| = R$, il peut y avoir convergence ou divergence.

(ii) Opérations sur les séries entières :

Propriété : Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_a, R_b)$ et si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$.

Théorème :

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Leur produit de Cauchy est une série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et dont le rayon de convergence $R \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| \leq \inf(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

(iii) Exemples de détermination de rayon de convergence**Règle de d'Alembert :**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ telle que (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si la suite $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ admet une limite L , le rayon de convergence de cette série est $\frac{1}{L}$ (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

Propriétés :

- Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :
 si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
 si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

2. Régularité de la somme :

Dans ce paragraphe, on étudie la somme d'une série entière d'une variable réelle.

(i) Continuité :

Propriété : Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R . Cette série converge normalement vers sa somme f sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence : elle est donc continue sur $] -R, R[$.

Cette propriété de continuité est plus générale : la somme d'une série entière d'une variable complexe est continue sur le disque ouvert de convergence.

(ii) **Intégration et dérivation :**

Théorème : Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ d'une variable réelle x dont le rayon de convergence R est strictement positif, une primitive sur l'intervalle $] -R, R[$ de la somme f de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Théorème : La somme f d'une série entière $\sum a_n x^n$ d'une variable réelle x dont le rayon de convergence R est strictement positif est une fonction de classe C^∞ sur $] -R, R[$. En outre, pour tout $k \geq 1$, $f^{(k)}$ s'obtient par k dérivations terme à terme.

Propriété On a donc $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

3. Développement en série entière :(i) **Fonctions développables en série entière**

Définition : f est développable en série entière sur $] -r, r[$ si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que pour tout

x tel que $x < r$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Définition : La série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur $] -r, r[$ est la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Unicité du développement en série entière : Si une fonction est développable en série entière, son développement en série entière est sa série de Taylor.

(ii) **Développements usuels :**

En (2), s est un complexe donné :

	$f(x)$	développement	domaine	méthode
(1)	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$] -1, 1[$	série géométrique
(1 b)	$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$] -1, 1[$	série géométrique
(2)	e^{sx}	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} x^n$	$\mathbb{R}$	série exponentielle

En (5) $p \in \mathbb{N}$ et en (10) α est un réel :

	f(x)	développement	domaine	méthode
(3)	$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$] -1, 1]$	primitive de (1b)
(3b)	$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$[-1, 1[$	$x \rightarrow -x$ dans (3)
(4)	$(1+x)^{-2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$	$] -1, 1[$	dérivation de (1b)
(4b)	$(1-x)^{-2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$	$] -1, 1[$	dérivation de (1)
(5)	$(1+x)^{-p}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{p+n-1}{p-1} x^n$	$] -1, 1[$	dérivations de (1b)
(5b)	$(1-x)^{-p}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{p-1} x^n$	$] -1, 1[$	dérivations de (1)
(6)	$\cos(x)$	$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$	$\mathbb{R}$	à partir de (2) avec $\alpha = \pm i$
(7)	$\sin(x)$	$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	$\mathbb{R}$	à partir de (2)
(8)	$\text{ch}(x)$	$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$	$\mathbb{R}$	à partir de (2)
(9)	$\text{sh}(x)$	$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$	$\mathbb{R}$	à partir de (2)
(10)	$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$] -1, 1[$	équation différentielle
(11)	$\text{Arctan}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$] -1, 1[$	composition de (1) bis avec $x \mapsto x^2$ puis primitive.

Remarques :

- Lorsque dans (10), α est rationnel, on peut parfois exprimer les coefficients avec des factorielles. Ainsi pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!} x^n$$

et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n.$$

- Arcsin est développable en série entière puisque sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ l'est. Le développement de sa dérivée s'obtient à partir de celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en substituant $-x^2$ à x et celui de Arcsin en intégrant terme à terme celui de sa dérivée avec un terme constant nul (Arcsin(0) = 0).

II. Exercices sur les séries entières

Les indications concernant certains de ces exercices débutent page 100.

1. Rayon de convergence

La correction de ces exercices commence page 189.

Exercice 89.

Domaine de convergence et somme de :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n}$

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+2)!}{3 \times 6 \times \dots \times (3n)} x^{3n}$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$

5. $\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$

6. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha) x^n}{n!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

7. $\sum_{n \geq 1} u_n x^n$ avec

$$u_n = \int_0^1 t(t-1)\dots(t-n+1) dt.$$

8. $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

[Correction](#)

Exercice 90.

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Dans cette question, on choisit $a_n = n$; donner les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$, $\sum a_n^2 x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$. Donner les sommes de ces trois séries entières.

2. On revient au cas général. Quels sont les rayons de convergence de $\sum a_n^2 x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$?

[Correction](#)

Exercice 91.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n.$$

On utilisera le fait que $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, résultat obtenu dans un exercice précédent page 47.

[Correction](#)

2. Développement en séries entières :

La correction de ces exercices commence page 195.

Exercice 92.

Soit α un réel donné non nul. Développer en série entière en précisant le rayon de convergence :

1. $\text{Arctan}(x+1)$;
2. $\ln(1 + 2 \cosh(\alpha) x + x^2)$;
3. $\ln(1 + 2 \cos(\alpha) x + x^2)$.

[Correction](#)

Exercice 93.

Soit j un entier naturel non nul. On pose $f_j(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nj}}{(nj)!}$ avec x réel.

1. Donner le domaine de définition de f_j .
2. Soit U_j l'ensemble des racines j -ièmes de l'unité.
 - a. Calculer $S_p = \sum_{\omega \in U_j} \omega^p$.
 - b. En déduire f_j .
 - c. Expliciter f_3 et f_4 .

[Correction](#)

Exercice 94.

$\forall x \in]-1, 1[$, on pose $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

1. Prouver que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.

2. Montrer que f_x est $\mathcal{C}^1$ et prouver que $f'_x(\theta) = \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$. En déduire $f_x(\theta)$.

3. Montrer que $F(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) d\theta$ est définie au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. A l'aide des questions précédentes, déterminer $F(x)$ sur $] -1, 1[$ puis sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

4. On se propose de retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser les séries entières.

a. Soit $Q_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}})$. Démontrer que, pour $x \neq \pm 1$,

$$Q_n(x) = \frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{x + 1}.$$

b. Retrouver alors la valeur de $F(x)$ respectivement pour $x \in]-1, 1[$ puis pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

[Correction](#)

Exercice 95.

Soit une suite non nulle $(a_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \geq 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}.$$

1. Montrer sans calculer les $(a_n)_n$ qu'il existe deux réels strictement positifs A et k tels que, pour tout n , $|a_n| \leq Ak^n$. En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est strictement positif.

2. Dans cette question, on impose $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

a. Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de cette série pour $|x| < \frac{1}{2}$.

b. En écrivant $S(x)$ sous la forme $S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$ avec a , b et c réels, déduire l'expression de a_n .

c. Autre méthode : On pose $b_n = a_n - a_{n-1}$. Déterminer la suite $(b_n)_n$ et retrouver le résultat précédent.

[Correction](#)

Exercice 96.

Soit une suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = 1$ et pour tout entier naturel

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} .$$

En utilisant la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, calculer a_n et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

[Correction](#)

Exercice 97.

Soit $(a_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1 ; on désigne par S la somme de cette série.

1. En choisissant $0 < r < 1$, développer en série entière

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta .$$

2. On suppose S bornée sur le disque ouvert unité. Montrer que S est polynomiale.

[Correction](#)

3. Lien séries entières et équations différentielles

La correction de ces exercices commence page 202.

Exercice 98.

Soit $f : x \mapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2$.

1. Prouver que f est développable en série entière en précisant le rayon de convergence.

2. Déterminer une équation différentielle linéaire vérifiée par f' .

3. En déduire le développement en série entière de f .

[Correction](#)

Exercice 99.

Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par F (du premier ordre), en déduire F .

[Correction](#)

Exercice 100.

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel non nul :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{n-k+2}.$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$. En déduire un minorant du rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$.

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f .

b. En déduire f .

[Correction](#)

Exercice 101.

Soit h définie par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-6x+x^2}}$

1. Montrer que h est développable en série entière.

2. Montrer que h vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients a_n du développement en série entière de h .

3. Soit g telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ avec

$$\forall n \geq 1, (n+1)b_{n+1} - 3(2n+1)b_n + (n)b_{n-1} = 0$$

Montrer que $g(x) = h(x) \int_0^x h(t) dt$.

[Correction](#)

Exercice 102.

Soit a_n le coefficient de X^n dans $P_n = (1 + X + X^2)^n$

1. Donner a_0, a_1 et a_2 et montrer que pour tout $n, a_n \leq 3^n$. En déduire un minorant du rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

2. Montrer que les coefficients de X^{n+1} et de X^{n-1} dans P_n sont égaux.

3. Vérifier que $(n+1)a_{n+1} = (2n+1)a_n + 3na_{n-1}$. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
4. Déterminer alors une expression de f à l'aide de fonctions usuelles et préciser le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

[Correction](#)

Chapitre 7

Equations différentielles linéaires

I. Résumé de cours

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Systèmes différentiels

On cherche à résoudre $(E) \quad X' = AX + B$ où A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'inconnue est X , application dérivable de J dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (assimilé à $\mathbb{K}^n$) où $J \subset I$.

(i) Ensemble de solutions

Propriété : Toute solution de (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène $(E_0) X' = AX$ associée à (E) .

Théorème de Cauchy linéaire Soient A une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B une application continue de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le problème de Cauchy $(C) \begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I et toute solution de (C) sur un intervalle $J \subset I$ est une restriction de cette solution.

Corollaire : Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I et $t_0 \in I$. L'application $\begin{matrix} \mathcal{S}_0 & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{matrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$\mathcal{S}_0$ forme donc un espace vectoriel de dimension n .

- (ii) **Systèmes différentiels à coefficients constants** : $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

La réduction des matrices, partie du programme d'algèbre, est supposée acquise.

Propriété : Si V est un vecteur propre de A associée à la valeur propre s , $t \mapsto e^{st}V$ est solution du système différentiel $X' = AX$.

Théorème : Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}$ le système différentiel $X' = AX$. Si A est diagonalisable, et si $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de vecteurs propres où V_i est associé à la valeur propre s_i , l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est formé des applications de la forme

$$t \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{s_i t} V_i$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

On retrouve le fait que l'ensemble des solutions est de dimension n et ce théorème en donne une base constituée des applications $t \mapsto e^{s_i t} V_i$.

2. Équation linéaire scalaire d'ordre 2

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ où a, b, c sont des fonctions continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et (E_0) l'équation homogène associée $y'' + ay' + by = 0$.

- (i) **Ensemble de solutions**

y est solution de (E) si et seulement si $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution du système

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Théorème de Cauchy linéaire : Soit I un intervalle où a, b, c sont continues. Soit $(t_0, \alpha_0, \alpha_1) \in I \times \mathbb{K}^2$. Il existe une unique solution de (E) définie sur I telle que $y(t_0) = \alpha_0$ et $y'(t_0) = \alpha_1$.

Corollaire : sous les mêmes hypothèses sur I , l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est un plan vectoriel.

Remarque : Si y_0 est une solution de (E_0) sur I ne s'y annulant pas, on peut déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) en posant

$y(t) = u(t)y_0(t)$. Les équations (E_0) ou (E) deviennent alors après ce changement de fonction inconnue une équation linéaire d'ordre 1 en u' .

(ii) Cas des équations à coefficients constants

On retrouve les résultats vus en première année.

Théorème : Soient l'équation différentielle $(E_0) y'' + ay' + by = 0$ et son équation caractéristique associée $(Eq) s^2 + as + b = 0$. Les solutions de (E_0) dépendent du nombre de racines de (Eq) dans $\mathbb{K}$.

- Si (Eq) a deux racines s_1 et s_2 , les solutions de (E_0) sont

$$t \mapsto \lambda e^{s_1 t} + \mu e^{s_2 t}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- Si (Eq) n'a qu'une racine s_1 , les solutions de (E_0) sont

$$x \mapsto (\lambda + \mu t)e^{s_1 t}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $a^2 - 4b < 0$, les solutions de (Eq) sont conjuguées $(s_1 = \alpha + i\beta$ et $s_2 = \alpha - i\beta)$, les solutions de (E_0) sont

$$t \mapsto (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)e^{\alpha t}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Propriété : Soit l'équation différentielle $(E) y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré d . Soit m la multiplicité de α comme racine de $s^2 + as + b = 0$ ($m = 0, 1$ ou 2). Une solution particulière est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ où Q est un polynôme de degré $d + m$. Les coefficients de Q de degré strictement inférieur à m peuvent être choisis nuls. Les solutions de (E) sont obtenues en ajoutant cette solution particulière de (E) aux solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) .

II. Exercices

Les indications concernant certains de ces exercices commencent page 101.

1. Système différentiels

La correction de ces exercices débute page 207.

Exercice 103.

Déterminer les solutions à valeurs réelles des systèmes différentiels suivant :

$$1. \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

$$3. X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{cases} x'' = 3x - 5y \\ y'' = -x - y \end{cases} \text{ vérifiant } \begin{cases} x(0) = y'(0) = 1 \\ y(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x'' + 2x' + x + 3y'' + y' + y = 0 \\ x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0 \end{cases}$$

[Correction](#)

Exercice 104.

On considère le système $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe deux vecteurs X_1 et X_2 non nuls et deux complexes λ et μ distincts ($\lambda \neq \mu$) tels que : $X(t) = e^{\lambda t} X_1 + e^{\mu t} X_2$ soit solution sur $\mathbb{R}$. Prouver que $t \mapsto e^{\lambda t} X_1$ et $t \mapsto e^{\mu t} X_2$ sont solutions.

[Correction](#)

Exercice 105.

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ty(t) + e^t \cosh(\frac{t^2}{2}) \\ y'(t) = tx(t) + y(t) + e^t \sinh(\frac{t^2}{2}) \end{cases}$$

[Correction](#)

Exercice 106.

Soit le système différentiel à coefficients non constants suivant :

$$(S) \begin{cases} (t^2 + 1)x'(t) &= tx(t) + y(t) + 2t^2 - 1 \\ (t^2 + 1)y'(t) &= x(t) - ty(t) + 3t \end{cases}.$$

1. Etablir une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par x .

2. Résoudre cette équation différentielle en recherchant les solutions développables en série entière.

3. Donner les solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}$.

[Correction](#)

2. Equations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2

La correction de ces exercices débute page 216.

Exercice 107.

Soit f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec a complexe de partie réelle strictement positive, et telle que $\lim_{+\infty} f' + af = 0$.

1. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. Soit f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\lim_{+\infty} f'' + f' + f = 0$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

[Correction](#)

Exercice 108.

Pour chaque question, déterminer les solutions (E) de classe $\mathcal{C}^2$ sur I (pour les dernières questions, une méthode est suggérée) :

1. $(E) \ y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x \cosh x - x^2$ avec $I = \mathbb{R}$.

2. $(E) \ y'(x) + y(-x) = xe^{-x}$ avec $I = \mathbb{R}$.

3. $(E) \ y''(x) - y'(x) - e^{2x}y(x) = e^{3x}$ avec $I = \mathbb{R}$.

Soit $u = e^x$ et Y la fonction définie par $y(x) = Y(u(x))$. Commencer par chercher Y .

4. $(E) \ x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$.

On commencera par rechercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$.

5. $(E) \ (x^2 + 3)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1$ avec $I = \mathbb{R}$.

On commencera par chercher les solutions polynomiales.

6. $(E) \ xy''(x) - 2y'(x) - xy(x) = 0$ avec $I = \mathbb{R}^{+*}$.

On pourra vérifier que y est suffisamment dérivable pour dériver deux fois cette équation.

[Correction](#)

Exercice 109.

Montrer que $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)$ est développable en série entière et déterminer ce développement en précisant son rayon de convergence.

[Correction](#)

Exercice 110.

Soit l'équation différentielle $(E) \quad xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$.

1. Déterminer y_0 une solution de (E) développable en série entière telle que $y_0(0) = 1$. Préciser le rayon de convergence de cette série entière. Vérifier que y_0 ne s'annule jamais .

2. Soit y une application de $\mathbb{R}^{+*}$ deux fois dérivable. On pose $u(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si u' est solution d'une équation différentielle (E') linéaire du premier ordre

b. Résoudre (E') puis (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions ?

[Correction](#)

Exercice 111.

Soit (E) l'équation différentielle

$$y''(x) + (1 + e^{-x^2})y(x) = 0.$$

1.

a. Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout x :

$$y'^2(x) + y^2(x) + \int_0^x 2y'(t)y(t)e^{-t^2} dt = K$$

b. MEn déduire que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est bornée .

2. Soit a un réel et y_0 la solution de $y''(x) + y(x) = 0$ s'annulant en a et vérifiant $y'(a) = 1$. En introduisant la fonction $W(x) = y(x)y_0'(x) - y'(x)y_0(x)$, montrer que toute solution de (E) s'annule au moins une fois sur $]a, a + \pi[$.

[Correction](#)

Chapitre 8

Calcul différentiel

I. Résumé de cours :

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à l'étude de ses coordonnées, ce chapitre privilégie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

1. Applications continûment différentiables :

(i) Dérivée partielle première en un point :

Définition : Soit f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_p)$ un élément de U .

Si $f_i : t \mapsto f(a + (t - a_i)e_i)$ est dérivable en a_i , on dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à la i -ème variable au point a de U et on note le nombre $f'_i(a_i)$ sous la forme $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

(ii) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

Définition : Une fonction définie sur U , ouvert de $\mathbb{R}^p$, est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si les p dérivées partielles $\partial_j f$ sont définies et continues sur U .

Propriétés :

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, est un espace vectoriel stable par produit ; de plus

$$\partial_i(f + \alpha g) = \partial_i(f) + \alpha \partial_i(g) \text{ et } \partial_i(fg) = f \partial_i(g) + \partial_i(f)g .$$

- Si f est élément de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et ne s'annule pas sur U , $\frac{1}{f}$ est aussi élément de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\partial_i \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{\partial_i(f)}{f^2}$.

- Les fonctions polynomiales en $(x_1, \dots, x_p)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

(iii) **Développement limité d'ordre 1 :**

Théorème fondamental : Soit $\mathbb{R}^p$ muni de l'une de ses normes $\|\cdot\|$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors en tout point a de U :

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^p (x_j - a_j) \partial_j f(a) + o(\|x - a\|) .$$

Corollaire : Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U .

Définition : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a)$ est une application linéaire, appelée **différentielle** et notée $df(a)$.

(iv) **Gradient**

Définition : Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$, le **gradient** de f est le vecteur $(\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a))$ et est noté $\nabla f(a)$.

Remarque : $\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Propriété : Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et α un réel :

$$\nabla(\alpha f + g)(a) = \alpha \nabla f(a) + \nabla g(a) \text{ et } \nabla(fg)(a) = f(a) \nabla g(a) + g(a) \nabla f(a)$$

2. Règle de la chaîne :

(i) **Règle de la chaîne :**

Théorème de dérivation d'une composée : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U , alors l'application

$$F : t \mapsto f((x_1(t), \dots, x_p(t)))$$

définie de I dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(t) = \sum_{j=1}^p x'_j(t) \partial_j f(x_1(t), \dots, x_p(t)) .$$

Application : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$. f est constante sur U si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\partial_i f = 0$ (c'est à dire $\forall a \in U, \nabla f(a) = 0$).

(ii) Dérivée partielle d'une composée :

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire que x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$) à valeurs dans U .

Soit F l'application composée $f \circ \phi$ soit $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ application de V dans $\mathbb{R}$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $U_0 = (u_0, v_0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(U_0) = \partial_1 f(\phi(U_0)) \frac{\partial x}{\partial u}(U_0) + \partial_2 f(\phi(U_0)) \frac{\partial y}{\partial u}(U_0) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(U_0) = \partial_1 f(\phi(U_0)) \frac{\partial x}{\partial v}(U_0) + \partial_2 f(\phi(U_0)) \frac{\partial y}{\partial v}(U_0) \end{cases}$$

Gradient en polaires : En particulier, si $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et en posant $m = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m) \end{cases}$$

En inversant ces formules et en désignant par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base obtenue par rotation de θ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(a) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta.$$

3. Applications géométriques**(i) Courbes $f(x, y) = 0$:**

Définition : Soit f définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et la courbe $\Gamma = \{(x, y), f(x, y) = 0\}$. Un point de Γ est dit **régulier** si et seulement si ∇f ne s'y annule pas.

Propriété : En tout point régulier de Γ , le gradient est un vecteur normal à la courbe (donc orthogonal à la tangente). La tangente a donc pour équation : $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Théorème fondamental : En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

(ii) **Surfaces** $f(x, y, z) = 0$

Définition : Soit f définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une surface par $\Sigma = \{(x, y, z), f(x, y, z) = 0\}$. Un point de Σ est dit **régulier** si et seulement si ∇f ne s'y annule pas.

Définition : Le **plan tangent** à Σ en un point régulier est le plan orthogonal au gradient passant par ce point.

Le plan tangent a donc pour équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Propriété : Si Γ est une courbe régulière de classe $\mathcal{C}^1$ tracée sur Σ , la tangente à Γ en un point est une droite du plan tangent à Σ en ce point.

4. Points critiques et extrema.(i) **Extremum**

Définition : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^p$. f définie sur A partie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ présente un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** en a_0 si et seulement si

$$\exists r > 0, \forall a \in A, \|a - a_0\| < r \implies f(a) \leq f(a_0) \text{ (respectivement } f(a) \geq f(a_0) \text{)}.$$

Cet extremum est **global** si et seulement si

$$\forall a \in A \quad f(a) \leq f(a_0) \text{ (respectivement } f(a) \geq f(a_0) \text{)}.$$

(ii) **Extrema sur un ouvert :**

Définition : a est un **point critique** pour f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si la différentielle de f en a est nulle (ou $\nabla f(a) = 0$).

Théorème : Si f définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ présente un extremum en a , a est un point critique de f .

(iii) **Extrema sur un fermé :**

Propriétés : Soit f une fonction continue définie sur F fermé de $\mathbb{R}^p$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{F}$.

- Si F est borné, f admet un minimum et un maximum global sur F .
- Les extrema de f sont atteints en des points critiques de $\overset{\circ}{F}$ ou à la frontière de F .

5. Dérivées partielles d'ordre 2

(i) Définition :

Définition : Soit f une application de U ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Si elles existent, les dérivées partielles premières des dérivées partielles d'ordre 1 de f sont les **dérivées partielles d'ordre 2** de f ; elles sont notées $\partial_i(\partial_j f) = \partial_{i,j}^2 f$ ou $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ si $i = j$.

Définition : Si les p^2 dérivées partielles de f existent et sont continues sur l'ouvert U , f est dite **de classe $\mathcal{C}^2$** sur U .

Propriété : $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel réel stable par produit.

(ii) Théorème de Schwarz.

Théorème de Schwarz : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$. Alors pour $1 \leq i \leq j \leq p$, $\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$.

II. Exercices

Les indications concernant certains de ces exercices commencent page 102.

1. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

La correction de ces exercices débute page 224.

Exercice 112.

Soit f application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0, 1, 1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 1) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 1) = 3$. Peut-on déterminer

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t^2, \cosh(t), e^t)}{f(t, \cos(t), \cosh(t))} ?$$

[Correction](#)

Exercice 113.

$$\text{Soit } f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$$

1. Donner le domaine de définition D de f ? f est-elle continue sur D ?

2. Déterminer le plus grand ouvert(au sens de l'inclusion) sur lequel f est $\mathcal{C}^1$? Y donner ses dérivées partielles.

3. Donner une expression de f et de ses dérivées partielles sans signe $\sum$.

[Correction](#)

Exercice 114.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $\varphi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ et $\varphi(x, x) = f'(x)$.

1. Étudier la continuité de φ .

2. Que dire de la régularité (de la classe) de φ si f est de classe $\mathcal{C}^2$?

[Correction](#)

Exercice 115.

Soit $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D à valeurs dans D telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant

$$\sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq k.$$

1. Soient $(a, b) \in D$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + x, b + y) \in D$. Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + x, b + y) - f(a, b) = x \frac{\partial f}{\partial x}(a + tx, b + ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a + tx, b + ty).$$

2. Soit une suite (u_n) définie par $(u_0, u_1) \in D$ et pour tout n ,

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}).$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et que la limite de cette suite ne dépend pas du choix de (u_0, u_1) .

[Correction](#)

2. Extrema

La correction de ces exercices débute page 228.

Exercice 116.

Soient $f(x, y) = \frac{(1 + x + y)}{(1 + x^2 + y^2)}$ et $C_z = \{(x, y) | f(x, y) = z\}$

1. Caractériser C_z . Représenter C_0 , C_1 et C_{-1} .

2. Déterminer les extrema de f .

[Correction](#)

Exercice 117.

1. Déterminer les points critiques de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 5x.$$

2. Montrer que $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / x + y \leq 1\}$ est un fermé borné. Déterminer le maximum de f sur T .

3. Déterminer les extrema de $g(x, y) = xy\sqrt{1-x-y}$ sur T .

[Correction](#)

Exercice 118.

Soit $f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Trouver ses points critiques et sa valeur en ses points.

2. Montrer que $P(t) = \left(t\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(t\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2$ est un polynôme de degré 2 dont on calculera le discriminant ; en déduire que f admet un minimum global.

3. On définit sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ la fonction g définie par

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

Trouver le minimum global de g sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par analogie aux questions précédentes,.

[Correction](#)

Exercice 119.

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Soit a un élément de $\mathbb{R}^n$ et Φ_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \Phi_a(x) = \langle a, x \rangle.$$

Calculer $\nabla(\Phi_a)$ le gradient de cette application.

2. Soit u une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

Montrer que u admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ autrement dit qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(b) \leq u(x).$$

3. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Montrer que $\nabla(f)$ est une application surjective.

[Correction](#)

Exercice 120.

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient trois points A, B et C de $\mathbb{R}^2$ formant un triangle équilatéral tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ce triangle.

On cherche à vérifier que pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, $MB + MC \geq MA$.

On introduit la fonction f définie par

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, f(M) = MB + MC - MA.$$

1.

a. Soit f_A l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $M = (x, y)$ associe AM . Déterminer le plus grand ouvert U_A sur lequel f_A est de classe $\mathcal{C}^1$? Y donner son gradient.

b. Quel est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$? Quel est son gradient?

2. Montrer que $f(M)$ tend vers l'infini lorsque AM tend vers l'infini. En déduire que f est minorée sur $\mathbb{R}^2$ et atteint son minimum.

3. On admet le résultat suivant : si M_1 et M_2 sont deux points du plan et α un réel non multiple de π , l'ensemble des points M tels que $(\widehat{MM_1}, \widehat{MM_2}) = \alpha$ est un arc de cercle d'extrémités M_1 et M_2 .

a. Prouver que si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs unitaires de somme nulle, alors les trois angles $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}), (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}), (\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$ sont égaux et valent $\pm \frac{2\pi}{3}$.

b. Montrer que $\mathcal{E}$ l'ensemble des points critiques de f est formé de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas A .

c. Prouver que f est constante sur $\mathcal{E}$ et déterminer cette constante.

4. Prouver que pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, $MB + MC \geq MA$. Quels sont les points où l'égalité est réalisée?

[Correction](#)

3. Dérivées partielles d'ordre 2 :

La correction de ces exercices débute page 234.

Exercice 121.

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x, y) = P(x + iy)$.

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

[Correction](#)

Exercice 122.

Soit f la fonction **continue** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Donner $f(0, y)$.

2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

[Correction](#)

Exercice 123 (Laplacien en polaires).

Soit f une application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose alors $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour r non nul et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f d'ordre 1 et 2.

2. Exprimer Δf en fonction des dérivées partielles de g .

[Correction](#)

4. Equations aux dérivées partielles

La correction de ces exercices débute page 236.

Exercice 124.

Chercher l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$ avec $U = \mathbb{R}^2$;

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2f(x, y)$ avec $U = \mathbb{R}^2$;

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yf(x, y)$ avec $U = \mathbb{R}^2$;

4. $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2f(x, y) = 0$ avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
5. $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - yf(x, y) = 0$ avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$;
6. $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$;
7. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sin(x)}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\sin(y)}{x} \end{cases}$ avec $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$;
8. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 + \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2 - \frac{1}{x} \end{cases}$ avec $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

[Correction](#)

Exercice 125.

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$z(x, y) = F\left(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}\right)$$

On pose $u(x, y) = \left(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}\right)$.

1.

a. Donner D le domaine de définition de z et vérifier que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Prouver que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et donner ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en fonction de x, y, F' et F'' .

2.

a. Vérifier que la relation $\Delta(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ se réduit à une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction F .

b. Intégrer cette équation différentielle et donner les solutions de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

[Correction](#)

Exercice 126.

1. Montrer que ϕ définie sur $B = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ par $\phi(t, z) = (tz, t - tz)$ est une bijection de B dans $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

Vérifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{2x}{x+y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{2y}{x+y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{2f(x, y)}{x+y+2} = (x+y+2) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

[Correction](#)**5. Courbes et surfaces**

La correction de ces exercices débute page 240.

Exercice 127.

Soit le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Soient $A = (a_1, a_2)$ et l'application f définie pour $M = (x, y)$ par

$$f(M) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = MA.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ et donner son gradient (sous forme vectorielle).

2. Soit $F = (-c, 0)$ et $F' = (c, 0)$ avec $c > 0$. Soit $M = (x, y)$; calculer $MF^2 - MF'^2$. Prouver alors que $MF + MF' = 2a$ (avec $a > c$) si et seulement si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b^2 = a^2 - c^2$.

3. Soit $\mathcal{E}$ la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$. Prouver que la bissectrice de l'angle $(\widehat{MF, MF'})$ est normal à la courbe.

[Correction](#)**Exercice 128.**

Soit $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $(x + y + z)^2 = 4yz$ et $\mathcal{D}$ la droite définie par

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}. \text{ On admet qu'en } (0, 0, 0), \mathcal{S} \text{ n'admet pas de plan tangent.}$$

1. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ contenant $\mathcal{D}$.

2. En regardant les vecteurs normaux à ces plans, que pouvez vous dire de ces plans?

[Correction](#)

Exercice 129.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation

$$x(x-1)(x+1) + y^2(x+1) + z^2(x-1) = 0.$$

1. Déterminer en fonction de a la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan Π_a d'équation $x = a$.
2. Déterminer les droites contenues dans $\mathcal{S}$.
3. Quels sont les points de $\mathcal{S}$ dont le plan tangent à une équation de la forme $z = c$?

[Correction](#)

Indications

Indications sur l'Exercice 5

2. Effectuer le changement de variables $t = \ln(u)$.
3. On commencera par prouver la convergence de l'intégrale puis on effectuera le changement de variable $t = \sqrt{\cos(u)}$.
4. Le calcul de l'intégrale se fera en 2 temps : on commencera par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ avant de faire une intégration par parties généralisée.

Indications sur l'Exercice 6

1. Rappel : pour $x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
2. On commencera par une intégration par parties généralisée.

Indications sur l'Exercice 7

On remarquera que si J est convergente, $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ est de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

Indications sur l'Exercice 8

3. On pourra commencer par regarder $F(a + nT)$.

Indications sur l'Exercice 9

2. Couper l'intégrale en 2 mais attention aux bornes.

3. On pourra écrire $\int_a^{a^2} \frac{dx}{\ln x} = \int_a^{a^2} x \frac{dx}{x \ln x}$.

Indications sur l'Exercice 10

Pour prouver l'intégrabilité des fonctions, on peut utiliser des changements de variable judicieux. Pour la seconde fonction, il est bon de remarquer que $x \mapsto x + \frac{a}{x}$ n'est pas une bijection sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de se limiter aux intervalles où cette fonction est bijective.

Indications sur l'Exercice 13

1. On pourra écrire f comme le produit de deux fonctions de carré intégrable.

Indications sur l'Exercice 15

- 1.c.** On écrira U_{2n-1} comme une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
- 2.b.** On commencera par s'intéresser aux sommes partielles de rang pair.

Indications sur l'Exercice 16

- 1.** Revenir à la définition de la limite pour u_n et couper $v_n - L$ en deux.
- 2.b.** Utiliser un développement limité de u_{n+1} en fonction de u_n .
- 2.c.** Choisir β dans la question précédente pour que la suite de terme général $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite non nulle.

Indications sur l'Exercice 18

On comparera les séries $\sum a_n$ et $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Indications sur l'Exercice 19

- 1.** On pourra faire apparaître le terme général sous la forme $u_{n+1} - u_n$.
- 3.** On commencera par décomposer la fraction rationnelle proposée sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$.
- 4.** On commencera par écrire le polynôme X^2 comme combinaison linéaire de $(X-1)(X-2)$, $(X-1)$ et 1.

Indications sur l'Exercice 20

- 6.** En appelant p_n le terme général de la suite, on s'intéressera à la série dont $\ln(p_n)$ est la somme partielle de rang n . On comparera celle-ci à la série harmonique.

Indications sur l'Exercice 22

- 1.** On s'intéressera aux sommes partielles de rang $10^N - 1$.

Indications sur l'Exercice 23

- 5.** On montrera que $\lim \frac{1}{nu_n} = 1$.

Indications sur l'Exercice 25

- 2.a.** On étudiera la série de terme général $u_{n-1} - u_n$.

Indications sur l'Exercice 26

- 5.** Cette question utilise une méthode similaire à la démonstration du théorème de Césaro après avoir réalisé une transformation d'Abel.

Indications sur l'Exercice 27

1.b. On pourra poser $w_n = \ln(1 - v_n)$.

1.c. on pourra étudier $\int_{R_n}^{R_{n+1}} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Indications sur l'Exercice 28

3. Par changement de variable, on se ramènera à étudier l'intégrabilité d'une certaine fonction sur $[1, +\infty[$.

Indications sur l'Exercice 29

2. On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur le segment $[x, x+1]$ pour F primitive de f .

3. On pourra de nouveau utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Indications sur l'Exercice 30

1.b. On isolera les termes d'indice supérieur à K et on prendra le logarithme népérien.

2.a. On commencera par montrer que $\sin(2m+1)x = \sin(x)U(\sin^2(x))$ avec U polynôme de degré m .

Indications sur l'Exercice 34

On s'intéressera au produit $E_{1,1}E_{2,2}$ où $E_{i,j}$ est la matrice ayant un 1 en place (i, j) et des zéros partout ailleurs.

Indications sur l'Exercice 36

1. Pour x autre que $(0, 0)$, on commencera par prouver l'existence de $N(x)$ en utilisant l'hypothèse que O est point intérieur à K puis que c'est un nombre non nul en utilisant le fait que K est borné.

2. Pour démontrer l'inégalité triangulaire, on cherchera un point commun au segment $[\frac{x}{N(x)}, \frac{y}{N(y)}]$ et à la droite dirigée par $x + y$.

Indications sur l'Exercice 37

1. On commencera par l'étude de la fonction $f(t) = tx^p + (1-t)y^p - (tx + (1-t)y)^p$ sur $[0, 1]$ avec x et y positifs.

3. Une norme euclidienne vérifie l'identité du parallélogramme.

Indications sur l'Exercice 38

Raisonnement par l'absurde et introduire F un supplémentaire du plan engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$.

Indications sur l'Exercice 39

1. On calculera $(I_p - A)A_n$.

Indications sur l'Exercice 40

On pourra exprimer $\vec{x}_n$ en fonction de $\vec{x}_0$ et des $\vec{y}_k = \vec{x}_k + \lambda \overrightarrow{x_{k+1}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.

Indications sur l'Exercice 43

1.a. On pourra raisonner par l'absurde et dans le cas $a > 0$ coincer deux éléments de G entre a et $2a$.

Indications sur l'Exercice 44

3. On pourra introduire les $A_n = \{\alpha > 0, u_n(\alpha) > 1\}$.

Indications sur l'Exercice 45

1. Une racine multiple d'un polynôme est une racine commune à ce polynôme et à son polynôme dérivé.

Indications sur l'Exercice 48

3. On commencera par montrer que pour tout x , $g(nx) = n^2g(x)$ successivement pour n entier naturel, puis entier relatif, puis rationnel et enfin on conclura.

Indications sur l'Exercice 50

Lorsque y est de norme supérieure à 1, on utilisera $x = (x - y) + y$.

Indications sur l'Exercice 52

5. On pourra introduire $K = C \cap \mathcal{B}_f(x, d(x, A) + 1)$.

7. On utilisera l'application $x \mapsto d(x, A)$ pour caractériser F' .

Indications sur l'Exercice 53

On pourra introduire la fonction g définie par $g(x) = \|f(x) - x\|$.

Indications sur l'Exercice 55

2. On appliquera la question précédente en choisissant judicieusement g et φ pour appliquer le théorème de Rolle.

3. On pourra utiliser la fonction $F(t) = \int_a^t f(s)ds$.

Indications sur l'Exercice 56

2.a. pour le dernier calcul, on s'intéressera à $\ell(u_1, v_1)$.

3.a. On utilisera le théorème de limite des fonctions monotones.

Indications sur l'Exercice 57

On utilisera l'extension du théorème de la limite de la dérivée en cherchant la forme des dérivées de f sur $] -1, 1[$.

Indications sur l'Exercice 58

2. les deux parties de la question utilisent la formule de Leibniz.

Indications sur l'Exercice 59

1. On passera par $\mathbb{C}$ pour décomposer la fraction rationnelle avant de la dériver.

Indications sur l'Exercice 60

2. on fera intervenir un déterminant bien choisi.

Indications sur l'Exercice 61

2. On cherchera à calculer D'_n en déterminant ses racines et leur ordre de multiplicité.

Indications sur l'Exercice 65

1. Si on pose $p_n = E(e^n f(0))$ et $q_n = E(e^n f(1))$, pour tout entier k compris entre 1 et $q_n - p_n$, on introduira le plus petit x tel que $e^n f(x) = p_n + k$ après avoir justifié son existence.

Indications sur l'Exercice 66

3. On se rappellera que $\sin(3y) = 3\sin(y) - 4\sin^3(y)$.
4. On pourra s'intéresser à la convergence sur $I_p = [0, 3^p]$.

Indications sur l'Exercice 68

2.d. On commencera par prouver que pour tout $\alpha < 1$, $f_n(x) \leq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n - n^\alpha + 1}{\sqrt{n^2 + n^{\alpha x}}}$.

Indications sur l'Exercice 70

On pourra établir une relation entre $f(2x)$ et $f(x)$.

Indications sur l'Exercice 71

2. On procédera par comparaison série et intégrale.

Indications sur l'Exercice 72

Pour prouver le caractère bijectif de T , on remarquera que si $T(f) = g$, pour tout entier naturel n et tout réel x , $a^n g(b^n x) = a^n f(b^n x) - a^{n+1} f(b^{n+1} x)$ et on en déduira l'expression de f .

Indications sur l'Exercice 74

2. On introduira à x fixé la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{1 - x^{2t}}$ et on utilisera une comparaison série-intégrale.

Indications sur l'Exercice 75

1. On pourra commencer par vérifier que $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$.
3. On établira une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par g_1 .

Indications sur l'Exercice 76

1. On pourra reconnaître dans f_N la somme partielle d'une série en introduisant les expressions $g_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$.

Indications sur l'Exercice 79

On pourra effectuer le changement de variable $y = nx$.

Indications sur l'Exercice 83

4. pour trouver un développement limité de la partie de l'intégrale entre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$, on commencera par le changement de variable $x = \frac{1}{t^n}$ puis on continuera comme dans la question précédente.

Indications sur l'Exercice 87

2. On effectuera un changement de variable affine pour se rapprocher d'une intégrale de Gauss.

4. Utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange

Indications sur l'Exercice 89

4. Pour le calcul de la somme, on séparera le cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.
6. On introduira une exponentielle complexe.
8. On interprètera a_n comme le terme général d'un produit de Cauchy.

Indications sur l'Exercice 90

1. Pour les deux premières sommes, on se servira des développements en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^p}$ avec des valeurs bien choisies de p .

Indications sur l'Exercice 92

1. On commencera par développer en série entière la dérivée de la fonction.

Indications sur l'Exercice 94

2. On établira un lien entre $f'_x(\theta)$ et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} x^n e^{ni\theta}$.
- 4.b. On écrira $F(x)$ comme limite d'une suite de sommes de Riemann associées à $\Phi : \theta \mapsto \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Indications sur l'Exercice 100

- 2.a. On reconnaîtra un produit de Cauchy dans la somme intervenant dans la relation de récurrence.

Indications sur l'Exercice 102

2. On utilisera la relation $X^2 P_1(\frac{1}{X}) = P_1$.

Indications sur l'Exercice 103

4. On utilisera l'inconnue $X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$.

5. On commencera par écrire x'' et y'' en fonction de x', y', x et y .

Indications sur l'Exercice 105

On pourra s'intéresser aux fonction $x + y$ et $x - y$.

Indications sur l'Exercice 107

1. On commencera par résoudre l'équation différentielle $f' + af = g$ puis regarder l'influence de l'hypothèse que la limite en $+\infty$ de g est nulle sur les solutions de l'équation différentielle.

2. On se reportera à la première question en faisant intervenir deux complexes a et b tel que $g = f' + af$ vérifie $g' + bg$ de limite nulle en $+\infty$.

Indications sur l'Exercice 108

1. Rappel : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

5. Dans le résultat final, il peut rester une primitive non déterminée par les fonctions usuelles.

6. Après deux dérivations, on obtient une équation différentielle linéaire à coefficients constants vérifiée par $y'' - y$.

Indications sur l'Exercice 109

On commencera par établir une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

Indications sur l'Exercice 111

2. On raisonnera par l'absurde et on s'intéressera aux variations de W .

Indications sur l'Exercice 115

2. On commencera par vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - u_{n-1}| \leq k^p a$$

où $a = \sup(|u_1 - u_0|, |u_2 - u_0|)$ et $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Indications sur l'Exercice 119

3. On introduira la fonction $u = f - \Phi_a$ pour a donné et on appliquera les résultats des questions précédentes.

Indications sur l'Exercice 124

6. On passera en polaires.

Indications sur l'Exercice 126

2. On utilisera le changement de variable de la première question en posant $(x, y) = \phi(t, z)$.

Indications sur l'Exercice 127

2. on pourra s'intéresser à la quantité $MF^2 - MF'^2$

Corrections

Correction de l'Exercice 1

[Retour à l'énoncé](#)

1. La fonction est définie en x si et seulement si $\ln(x)$ est défini et $x^2 - 1 \neq 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$. Si $x > 0$ et $x \neq 1$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$. f est continue sur son domaine de définition.

En 1, $\ln(x) \sim x - 1$ donc $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \sim \frac{1}{x + 1}$. Ainsi la fonction est prolongeable en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.

2. f est continue et **positive** sur $I =]0, +\infty[$.

En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln(x)}{x^2}$. Par comparaison usuelle, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Comme fonction de

Riemann, $x \mapsto \frac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, f l'est aussi.

En 0, $f(x) \sim -\ln(x)$. Par comparaison à une fonction intégrable au voisinage de 0, f est intégrable sur $]0, 1]$.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale convergente.

□

Correction de l'Exercice 2

[Retour à l'énoncé](#)

1. f est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. En 0, f étant prolongeable par continuité, elle est intégrable sur $]0, 1]$. En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln(x)}{x^3}$. Par comparaison usuelle, $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme fonction de Riemann, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, f l'est aussi.

2. L'application $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone de $I =]0, +\infty[$ sur lui-même. Comme $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2}$, par le théorème de changement de variables donne alors :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{u^3(1+u^{-2})^2} du = -I.$$

ainsi $I = 0$.

□

Correction de l'Exercice 3

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$. g est une fonction continue positive sur $]0, +\infty[$ prolongeable par continuité en 0 ($\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$). Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Or sur $[1, +\infty[$, $0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x^2}$. g étant majorée par une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$, elle y est intégrable.

g est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soient les fonctions u et v définies par $u(x) = 1 - \cos x$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et leur produit admet une limite nulle en 0 et en $+\infty$ car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $0 \leq u(x)v(x) \leq \frac{2}{x}$. Par le théorème d'intégration par parties généralisé, $\int_0^{+\infty} u'v$ et $\int_0^{+\infty} uv'$ sont de même nature. Or $u'v = f$ et $uv' = -g$. La seconde intégrale étant convergente, la première l'est.

2. Sur le segment $S_n = [n\pi, (n+1)\pi]$, $\frac{|\sin(x)|}{(n+1)\pi} \leq |f(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{(n+1)\pi}$. En intégrant cette inégalité sur S_n , on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)| dx \leq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx$$

Par périodicité de π de la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ et l'invariance des intégrales par translation :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx = \int_0^\pi |\sin(x)| dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = 2$$

ce qui donne le résultat attendu :

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)| dx \leq \frac{2}{n\pi}.$$

Soit $F(x) = \int_\pi^x |f(t)| dt$ primitive de $|f|$ sur $]0, +\infty[$.

On remarque que $F(n\pi) = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| dt$. Par le calcul précédent, $F(n\pi) \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+1}$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ étant divergente, F n'est pas bornée puisque $\lim F(n\pi) = +\infty$. f n'est donc pas intégrable sur $]0, +\infty[$

□

Correction de l'Exercice 4

[Retour à l'énoncé](#)

1. $f(t) = \frac{1}{\exp(t) + t^2 \exp(-t)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Sur $[0, +\infty[$, $f(t) \leq e^{-t}$ et donc par majoration par une fonction intégrable, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Sur $] -\infty, -1]$, $f(t) \leq \frac{e^t}{t^2} \leq e^t$ donc f est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

f est continue sur $[-1, 0]$ donc y est intégrable. f étant intégrable, l'intégrale est absolument convergente donc convergente.

2. $f(x) = \frac{1 - e^x + \alpha \sin(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, 1]$. Il faut donc étudier f au voisinage de 0. Par développement limité du numérateur de f en 0, on obtient :

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)}{x} - \frac{1}{2} + o(1)$$

Si $\alpha \neq 1$, $f(x) \sim \frac{(\alpha - 1)}{x}$ et f n'est pas intégrable au voisinage de 0. Étant du signe de $\alpha - 1$, son intégrale sur $]0, 1]$ n'est ni absolument convergente ni convergente.

Si $\alpha = 1$, f est prolongeable par continuité en 0 : son intégrale sur $]0, 1]$ est donc absolument convergente.

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x + \cos x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas. Sur $[2, +\infty[$, $|f(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}} = g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$. g étant d'intégrale convergente sur $[2, +\infty[$ (par comparaison à une fonction de Riemann), f est d'intégrale convergente sur $[2, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$.
4. Soit $f(t) = \frac{1}{t^\alpha(t^\beta + 1)}$. Cette fonction est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Pour obtenir l'équivalent aux bornes, il faut distinguer suivant le signe de β .

- Cas $\beta > 0$: en $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$. Ainsi f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha + \beta > 1$. En 0, $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour $\beta > 0$, l'intégrale est convergente si et seulement si

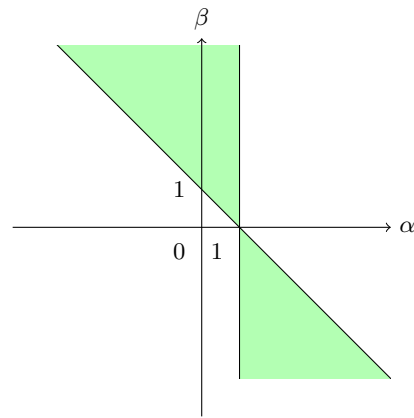
$$1 - \beta < \alpha < 1$$

- Cas $\beta = 0$ alors $f(t) = \frac{1}{2t^\alpha}$ donc l'intégrale est divergente pour tout α .
- Cas $\beta < 0$: en $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Ainsi f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. En 0, $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.

Pour $\beta < 0$, l'intégrale est convergente si et seulement si

$$1 < \alpha < 1 - \beta$$

Le domaine où l'intégrale est convergente est représenté en vert ci-dessous :



5. On pose $f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{t^\alpha \ln(t^\beta + 1)}{t^{2\alpha} + 1} = \frac{\ln(t^\beta + 1)}{t^\alpha + t^{-\alpha}}$. On a donc $f_{\alpha,\beta} = f_{-\alpha,\beta}$. On se limite au cas $\alpha \geq 0$ pour l'étude.

Pour tout couple (α, β) , $f_{\alpha,\beta}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et y est positive. On va de nouveau chercher les équivalents aux bornes. On remarque que $\ln(t^\beta + 1) = \beta \ln(t) + \ln(1 + t^{-\beta})$.

On distingue de nouveau 3 cas :

- Cas $\beta > 0$: en $+\infty$, $f_{\alpha,\beta}(t) \sim \frac{\beta \ln(t)}{t^\alpha}$ si $\alpha \neq 0$. Si $\gamma < \alpha$, $f_{\alpha,\beta}(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ et si $\gamma > \alpha$, $\frac{1}{t^\gamma} = o(f_{\alpha,\beta})$. Ainsi si $|\alpha| > 1$, on choisit γ tel que $1 < \gamma < |\alpha|$. $f_{\alpha,\beta}$ est dominée par une fonction intégrable : elle est donc intégrable. Si $0 < \alpha < 1$, on choisit γ tel que

$\alpha < \gamma < 1$. Une fonction non intégrable est négligeable devant $f_{\alpha,\beta}$ donc $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $|\alpha| = 1$, une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est $F(t) = \ln(\ln(t))$ de limite infinie en $+\infty$. Ainsi la fonction $f_{1,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si $\alpha = 0$, $f_{0,\beta} \sim \frac{\beta}{2} \ln(t)$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Conclusion partielle : $f_{\alpha,\beta}$ est inté-

grable sur $[1, +\infty[$ lorsque $\beta > 0$ si et seulement si $|\alpha| > 1$.

En 0, $\ln(1+t^\beta) \sim t^\beta$.

Ainsi $f_{\alpha,\beta} \sim at^{+|\alpha|+\beta}$ où $a = 1$ si α est non nul et $a = \frac{1}{2}$ si $\alpha = 0$.

Cette fonction a une limite finie en 0 : l'intégrale sur $]0, 1]$ est faussement impropre, donc convergente. **L'intégrale converge lorsque $\beta > 0$ si et seulement si $1 < |\alpha|$.**

- Cas $\beta = 0$: $f_{\alpha,0} = \frac{\ln 2}{t^\alpha + t^{-\alpha}}$.

En $+\infty$, $f_{\alpha,0} \sim \frac{\ln 2}{t^\alpha}$. La fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Cette fonction a une limite finie en 0 : l'intégrale sur $]0, 1]$ est faussement impropre, donc convergente.

L'intégrale converge lorsque $\beta = 0$ si et seulement si $1 < |\alpha|$.

- Cas $\beta < 0$: en $+\infty$, $f_{\alpha,\beta}(t) \sim \frac{a}{t^{\alpha-\beta}}$ avec $a = 1$ si α est non nul et $a = \frac{1}{2}$ si $\alpha = 0$ car $\ln(1+t^\beta) \sim t^\beta$. L'intégrale est donc convergente sur $[1, +\infty[$ si et

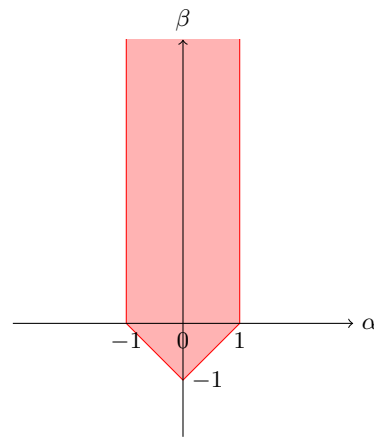
seulement si $|\alpha| - \beta > 1$.

En 0, $f_{\alpha,\beta} \sim \frac{a\beta \ln(t)}{t^\alpha}$ avec $a = 1$ si

α est non nul et $a = \frac{1}{2}$ si $\alpha = 0$.

Cette fonction a une limite finie en 0 : l'intégrale sur $]0, 1]$ est faussement impropre, donc convergente. **L'intégrale converge lorsque $\beta < 0$ si et seulement si $|\alpha| > 1 + \beta$.**

Le domaine où l'intégrale n'est pas convergente est représenté en rouge ci-dessous :



□

Correction de l'Exercice 5

[Retour à l'énoncé](#)

1. $f : t \mapsto \frac{\text{Arctan } t}{1+t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ admettant pour primitive F définie par $F(t) = \frac{\text{Arctan}^2(t)}{2}$. F admettant une limite finie en $+\infty$, f a une intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{1+t^2} dt = \lim_{+\infty} F - F(0) = \frac{\pi^2}{8}$$

2. La fonction $\ln$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale proposée est donc convergente si et seulement si $I = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)(1+u^{-1})} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2}$ est convergente et les deux intégrales sont alors égales. Une primitive de la fonction continue $u \mapsto \frac{1}{(1+u)^2}$ est $F : u \mapsto \frac{-1}{1+u}$ de limite nulle en $+\infty$; les intégrales sont donc convergentes et $I = -F(1) = \frac{1}{2}$.

3. La fonction f à intégrer est continue sur $[0, 1[$. Le seul problème est donc la borne 1. Comme $1-t^4 = (1-t)(1+t+t^2+t^3)$, en 1, $1-t^4 \sim 4(1-t)$ et $f(t) \sim \frac{1}{4\sqrt{1-t}}$: elle est donc intégrable au voisinage de 1. L'intégrale est convergente et tout changement de variable

répondant aux exigences du théorème de changement de variables généralisées gardera cette convergence.

Effectuons le changement de variable $t = \sqrt{\cos(u)}$ qui réalise une bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1[$. Comme $\frac{dt}{du} = -\frac{\sin(u)}{\sqrt{\cos(u)}}$

$$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^4}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u) du}{2(1+\cos u)\sqrt{1-\cos^2 u}}$$

Or $\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin(u)| = \sin(u)$ sur l'intervalle considéré. Ainsi

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2(1+\cos u)} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2\cos^2(u/2)}$$

Une primitive de $u \mapsto \frac{1}{2(1+\cos u)}$ est donc $F : u \mapsto \frac{\tan(\frac{u}{2})}{2}$ donc $I = \frac{\tan(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2}$.

4. $f : t \mapsto \ln(1+t^{-2})$ est une fonction continue et positive sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Comme $f(t) = \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t)$. Elle est donc la somme de deux fonctions intégrables sur $]0, 1]$: elle est intégrable sur $]0, 1]$.

L'intégrale étant convergente, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même conserve la convergence et

$$I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2)}{u^2} du$$

Soit $g(u) = -\frac{1}{u}$ et $h(u) = \ln(1+u^2)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Leur produit est de limite nulle en 0 et en $+\infty$. Aussi $\int_0^{+\infty} g(u)h'(u)du$ est convergente et

$$I = [g(u)h(u)]_{u \rightarrow 0}^{u \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2du}{u^2+1} = [2\operatorname{Arctan}(u)]_0^{u \rightarrow +\infty} = \pi.$$

5. Soit $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, sur $[1, +\infty[$, $0 < f(t) \leq e^{-t}$. f étant majorée par une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$, f l'est aussi. F est donc définie sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0, +\infty[$.

De plus, $F(x) - F(0) = -\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Par le théorème fondamental de l'intégration, F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $-f$. De plus, si $x \geq 1$, sur l'intervalle $[x, +\infty[$, $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$ d'où pour $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-x}.$$

L'intégrale de F est donc convergente sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$ dominée par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties généralisée : F et $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0$ d'où :

$$\int_0^{+\infty} F(x)dx = [xF(x)]_0^{x \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \left[\frac{-e^{-x^2}}{2} \right]_0^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2}.$$

□

Correction de l'Exercice 6**Retour à l'énoncé**

1. Soit $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ fonction continue sur $]0, +\infty[$ de signe constant (négatif). En 0, comme $\operatorname{Arctan}(x) \sim x$, $|f(x)| \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ et est intégrable sur $]0, 1]$ par équivalence (critère de Riemann).

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, une autre expression de f est $f(x) = -\frac{\operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$. Aussi, au voisinage de $+\infty$, $|f(x)| \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}$ et est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc absolument convergente.

2. Les fonctions $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}$ et $h : x \mapsto 2\sqrt{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Leur produit est nul en 0 et est de limite nulle en $+\infty$ car $g(x)h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par intégration par parties généralisée, le terme intégré étant nul :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)h'(x)dx = - \int_0^{+\infty} g'(x)h(x)dx = - \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$$

Soit le changement de variable $x = u^2$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même. On obtient alors :

$$I = -4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}du.$$

3.

a. $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)$.

b. On remarque que :

$$\frac{\sqrt{2}u}{u^2 + \varepsilon\sqrt{2}u + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2u + \varepsilon\sqrt{2}}{u^2 + \varepsilon\sqrt{2}u + 1} - \frac{\varepsilon}{(u + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + \varepsilon\sqrt{2}u + 1} du &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \ln(u^2 + \varepsilon\sqrt{2}u + 1) - \varepsilon\sqrt{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}u + \varepsilon) \right]_0^X \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(X^2 + \varepsilon\sqrt{2}X + 1) - \varepsilon\sqrt{2} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}X + \varepsilon) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

c. Comme $u^4 + 1 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{4u^2}{1+u^4} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} du.$$

On ne peut pas couper l'intégrale en 2 : chaque morceau représenterait une intégrale divergente. Du coup, on revient à la définition :

$$I = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sqrt{2}u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du - \int_0^X \frac{\sqrt{2}u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} du.$$

Ainsi :

$$I = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^2 + \sqrt{2}X + 1} \right) + \sqrt{2} \left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}X - 1) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}X + 1) \right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X^2 - \sqrt{2}X + 1}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(\sqrt{2}X + \varepsilon) = \frac{\pi}{2} : I = \sqrt{2}\pi$.

□

Correction de l'Exercice 7

[Retour à l'énoncé](#)

f étant positive, sa primitive F est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $F(0) = 0$, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$. Soit $I(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$. f et F étant continues et positives, I (respectivement J) converge si et seulement si $x \mapsto I(x)$ (respectivement $x \mapsto J(x)$) est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Une intégration par parties sur tout segment $[0, x]$ donne :

$$(1) \quad I(x) = \frac{F(x)}{1+x} + J(x)$$

Ainsi $0 \leq J(x) \leq I(x)$.

Si I est convergente, $x \mapsto I(x)$ et donc $x \mapsto J(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+ : J$ converge.

Supposons maintenant que J converge. Pour tout réel x , l'intégrale $J_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ est convergente et de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$. Or sur l'intervalle $[x, +\infty[$, la fonction F est croissante donc

$$\forall t \geq x, 0 \leq \frac{F(x)}{(1+t)^2} \leq \frac{F(t)}{(1+t)^2}$$

et en intégrant cette inégalité sur $[x, +\infty[$, on obtient :

$$0 \leq \frac{F(x)}{1+x} \leq J_1(x)$$

Cette nouvelle inégalité prouve ainsi par théorème d'encadrement que si J converge, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{1+x} = 0$. Dans ce cas, l'égalité (1) prouve alors par passage à la limite que I est convergente et $I = J$. On a bien vérifié que I est convergente si et seulement si J est convergente et qu'en cas de convergence, les deux intégrales sont égales.

□

Correction de l'Exercice 8

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soient λ et λ' deux réels tels que $I(\lambda)$ et $I(\lambda')$ sont convergentes. La différence de deux intégrales convergentes étant convergente, $I(\lambda) - I(\lambda') = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \lambda'}{t} dt$ est convergente, ce qui impose $\lambda = \lambda'$.

2. F est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto \lambda - f(x)$. Si F est bornée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. Par le théorème d'intégration par parties généralisée, les intégrales $I(\lambda)$ et $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$ sont de même nature. Si M est un majorant de $|F|$ sur $[a, +\infty[$:

$$\left| \frac{F(t)}{t^2} \right| \leq \frac{M}{t^2}.$$

La fonction majorante étant intégrable sur $[a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$ est une intégrale convergente et donc $I(\lambda)$ aussi.

3. Soit $x = a + nT$ avec $n \in \mathbb{N}$. Comme $F(x) = \lambda(x - a) - \int_a^x f(t) dt$:

$$F(a + nT) = n\lambda T - n \int_a^{a+T} f(t) dt .$$

L'ensemble des $F(a + nT)$ est borné si et seulement si $\lambda = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$ autrement dit si λ est la valeur moyenne de la fonction f sur une période.

Vérifions que cette valeur convient. On impose $\lambda = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$. Soit $x > a$ et p la partie entière de $\frac{x-a}{T}$ donc l'unique entier naturel tel que

$$a + pT \leq x < a + (p+1)T .$$

On a alors $F(x) - F(a + pT) = \lambda(x - a - pT) + \int_{a+pT}^x f(t) dt$. Pour la valeur de λ choisie, $F(a + pT) = 0$. On obtient alors si m est un majorant de $|f|$ (f est bornée car continue et périodique) :

$$|F(x)| \leq |\lambda| |x - a - pT| + \int_{a+pT}^x m dt \leq (m + |\lambda|)(x - a - pT) \leq (m + |\lambda|)T$$

F est donc bornée sur $[a, +\infty[$ pour $\lambda = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$.

□

Correction de l'Exercice 9

[Retour à l'énoncé](#)

1. $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ est une fonction continue sur $]0, 1[$ prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. En 1, $\ln(x) \sim x - 1$ donc f a comme limite 1. L'intégrale est faussement impropre aux 2 bornes et est donc convergente.

2. On cherche à couper l'intégrale en 2 mais les fonctions $t \rightarrow \frac{1}{\ln(t)}$ et $t \rightarrow \frac{t}{\ln(t)}$ sont intégrables au voisinage de 0 (car de limite nulle) mais pas au voisinage de 1. On revient donc à la définition :

$$I = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{x-1}{\ln x} dx = \lim_{a \rightarrow 1} \left[\int_0^a \frac{1}{\ln x} dx - \int_0^a \frac{x}{\ln x} dx \right]$$

Dans la seconde intégrale, le changement de variable $t = x^2$ donne alors :

$$\int_0^a \frac{x}{\ln x} dx = \int_0^{a^2} \frac{2}{2 \ln t} dt$$

Par la relation de Chasles, on trouve alors $I = \lim_{a \rightarrow 1} \int_a^{a^2} \frac{dx}{\ln x}$.

3. $\int_a^{a^2} \frac{dx}{\ln x} = \int_a^{a^2} x \frac{dx}{x \ln x}$ Attention : l'intervalle d'intégration considéré est $[a^2, a]$ (car $a < 1$) et sur cet intervalle $\ln(x) < 0$. On a donc l'encadrement suivant :

$$\frac{a}{x \ln x} \leq \frac{x}{x \ln x} \leq \frac{a^2}{x \ln x}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ étant $x \mapsto \ln(\ln(x))$, en intégrant les inégalités précédentes sur $[a^2, a]$, on obtient :

$$a (\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(a^2))) \leq \int_{a^2}^a \frac{dx}{\ln x} \leq a^2 (\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(a^2)))$$

soit en multipliant par -1 et en remarquant que $\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(a^2)) = -\ln 2$:

$$a^2 \ln(2) \leq \int_a^{a^2} \frac{dx}{\ln x} \leq a \ln(2)$$

Par passage à la limite lorsque a tend vers 1, on a alors $I = \ln(2)$.

□

Correction de l'Exercice 10

[Retour à l'énoncé](#)

La fonction f_1 est continue sur $[0, +\infty[$. Posons $u = \sqrt{x^2 + 4a}$ soit $x = \sqrt{u^2 - 4a} = \varphi(u)$. φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $J =]2\sqrt{a}, +\infty[$ sur $I =]0, +\infty[$.

Par le théorème de changement de variable généralisée, f_1 est intégrable sur $I =]0, +\infty[$ si et seulement si $g : u \mapsto \frac{uf(u)}{\sqrt{u^2 - 4a}}$ est intégrable sur $]2\sqrt{a}, +\infty[$ et en cas de convergence, les intégrales sont égales.

Étudions l'intégrabilité de g sur J : g est continue sur J . Comme $\left| \frac{uf(u)}{\sqrt{u^2 - 4a}} \right| \underset{+\infty}{\sim} |f(u)|$ au voisinage de $+\infty$, l'intégrabilité de f sur $[2\sqrt{a} + 1, +\infty[$ assure l'intégrabilité de g .

Au voisinage de $2\sqrt{a}$, f est bornée et $u^2 - 4a = (u - 2\sqrt{a})(u + 2\sqrt{a})$ donc

$$g(u) = O\left(\frac{1}{\sqrt{u - 2\sqrt{a}}}\right)$$

et est donc intégrable sur $]2\sqrt{a}, 2\sqrt{a} + 1]$. g est intégrable sur J , f_1 l'est sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4a}) dx = \int_{2\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{uf(u)}{\sqrt{u^2 - 4a}} du.$$

Soit $\psi(x) = x + \frac{a}{x}$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $\psi' : x \mapsto 1 - \frac{a}{x^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
$\psi(x)$	$+\infty$	$2\sqrt{a}$	$+\infty$

La restriction de ψ à $I_1 =]0, \sqrt{a}[$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I_1 sur J et la restriction de ψ à $I_2 =]\sqrt{a}, +\infty[$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I_2 sur J . La dérivée de ψ ne s'annulant pas sur ces intervalles, les bijections réciproques seront aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminons leur expression en résolvant $u = x + \frac{a}{x}$ soit l'équation du second degré $x^2 - ux + a = 0$. Pour $u > 2\sqrt{a}$, son discriminant $u^2 - 4a$ est strictement positif; elle admet deux racines $x_1 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4a}}{2} = \varphi_1(u)$ dans I_1 et $x_2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4a}}{2} = \varphi_2(u)$ dans I_2 . On utilise de nouveau le théorème de changement de variable sur chaque intervalle I_j ($j \in \{1, 2\}$), φ_j étant bijective de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\varphi'_j(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon_j \frac{u}{\sqrt{u^2 - 4a}} \right)$ avec $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = 1$

- f_2 est intégrable sur I_1 si et seulement si $u \mapsto \frac{g(u) - f(u)}{2}$ est intégrable sur J , ce qui est le cas comme différence de 2 fonctions intégrables et :

$$\int_0^{\sqrt{a}} f_2(x) dx = \int_{2\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{g(u) - f(u)}{2} du.$$

f_2 étant continue en $\sqrt{a}$, f_2 est intégrable sur $[0, \sqrt{a}]$.

- f_2 est intégrable sur I_2 (et donc sur $[\sqrt{a}, +\infty[$) si et seulement si $u \mapsto \frac{g(u) + f(u)}{2}$ est intégrable sur J , ce qui est le cas comme somme de 2 fonctions intégrables et :

$$\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f_2(x) dx = \int_{2\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{g(u) + f(u)}{2} du.$$

Ainsi f_2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et comme $\int_0^{+\infty} f\left(x + \frac{a}{x}\right) dx = \int_0^{\sqrt{a}} f_2(x) dx + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f_2(x) dx$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f\left(x + \frac{a}{x}\right) dx = \int_{2\sqrt{a}}^{+\infty} \frac{g(u) - f(u) + g(u) + f(u)}{2} du = \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4a}) dx.$$

□

Correction de l'Exercice 11

[Retour à l'énoncé](#)

1. F est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f . Par définition de la dérivée en 0 où F prend la valeur 0, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t} = f(0)$. Les fonctions $t \mapsto \frac{F^2(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{F(t)f(t)}{t}$ sont donc continues sur $]0, x]$ et de limite finie en 0. Les intégrales proposées sont donc faussement impropres et donc convergentes.

Les fonctions $t \mapsto F^2(t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, x]$. Leur produit $-F(t) \frac{F(t)}{t}$ est de limite nulle en 0. Aussi par une intégration par parties généralisée :

$$\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt = -\frac{F^2(x)}{x} + 2 \int_0^x \frac{F(t)f(t)}{t} dt \leq 2 \int_0^x \frac{F(t)f(t)}{t} dt.$$

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ et f étant de carrés intégrables sur $]0, x]$:

$$\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt \leq 2 \int_0^x \frac{F(t)f(t)}{t} dt \leq 2 \sqrt{\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt} \sqrt{\int_0^x f^2(t) dt}.$$

Si f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$, F est nulle aussi et les résultats demandés sont immédiats.

Si f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, il existe un nombre x_0 à partir duquel $F(x) > 0$ et $\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt \neq 0$. En divisant par cette quantité non nulle, pour $x > x_0$:

$$\sqrt{\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt} \leq 2 \sqrt{\int_0^x f^2(t) dt}$$

ou en élevant au carré :

$$\int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int_0^x f^2(t) dt$$

f^2 étant intégrable, $x \mapsto \int_0^x \frac{F^2(t)}{t^2} dt$ est croissante et majorée par $4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{F^2(t)}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$ et l'inégalité demandée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{F^2(t)}{t^2} dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt.$$

□

Correction de l'Exercice 12

[Retour à l'énoncé](#)

1. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $\varphi' : x \mapsto 5x^4 + 1$ positive ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^+$: elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur son image $[0, \lim_{+\infty} \varphi[= \mathbb{R}^+$ dont la réciproque ϕ^{-1} est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{5\phi^{-1}(x)^4 + 1}$.

2. Soit $a_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} |F(x)| dx$. Effectuons le changement de variable $x = \varphi^{-1}(t)$:

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{5(\varphi^{-1}(t))^4 + 1} dt$$

Comme φ^{-1} est croissante et que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| dt = 2$,

$$b_{n+1} = \frac{2}{5(\varphi^{-1}((n+1)\pi))^4 + 1} = \frac{2}{5u_{n+1}^4 + 1} \leq a_n \leq b_n = \frac{2}{5(\varphi^{-1}(n\pi))^4 + 1} = \frac{2}{5u_n^4 + 1}.$$

Comme $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$, $(\phi^{-1}(x))^5 + \phi^{-1}(x) = x$. Lorsque x tend vers $+\infty$, il en est de même de $\phi^{-1}(x)$ aussi $(\phi^{-1}(x))^5 + \phi^{-1}(x) = x \sim (\phi^{-1}(x))^5$. Ainsi $\phi^{-1}(x) \sim x^{1/5}$. On a alors $u_{n+1} \sim (n\pi)^{1/5}$ (car $n+1 \sim n$) et $b_{n+1} \sim \frac{2}{5\pi^{4/5}n^{4/5}}$. La série $\sum b_{n+1}$ est divergente, il en est de même de $\sum a_n$ (comparaison de séries à termes positifs).

Or $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \int_0^{u_{n+1}} F(x) dx$. Comme S_n est de limite infinie (divergence d'une série à termes positifs), l'intégrale $\int_0^{+\infty} |F(x)| dx$ est divergente : F n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3. Sur l'intervalle $[u_n, u_{n+1}]$, $\varphi(x)$ décrit l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ et donc F est de signe constant, positif si n est pair, négatif si n est impair. Aussi $v_n = (-1)^n a_n$. En reprenant l'encadrement trouvé pour a_n et en l'appliquant aussi à a_{n+1} , on obtient :

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq a_n \leq b_n$$

La suite (a_n) est décroissante et tend vers 0 car b_n est de limite nulle. Par le théorème des séries alternées, la série $\sum v_n$ est convergente. Désignons par V sa somme.

4. La somme partielle de la série des v_n de rang n est $V_n = \int_0^{u_{n+1}} F(x)dx$. Soit X un réel et n l'unique entier tel que $u_n \leq X < u_{n+1}$. On a alors :

$$\left| \int_0^X F(x)dx - \int_0^{u_n} F(x)dx \right| = \left| \int_{u_n}^X F(x)dx \right| \leq \int_{u_n}^X |F(x)|dx \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} |F(x)|dx = a_n$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, il en est de même de n et comme a_n est de limite nulle :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X F(x)dx - \int_0^{u_n} F(x)dx = 0$$

ce qui prouve que $\int_0^X F(x)dx$ converge vers V .

□

Correction de l'Exercice 13

[Retour à l'énoncé](#)

1. La somme de deux fonctions intégrables est intégrable ; ainsi $u_f : x \mapsto \sqrt{(1+x^2)f^2(x)}$ est de carré intégrable sur $]0, +\infty[$. Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{u_f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. Comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (une primitive est Arctan de limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$), f apparaît comme le produit de deux fonctions continues de carrés intégrables sur $]0, +\infty[$: elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

2.

a. Soit g telle que $\int_{]0, +\infty[} g^2 = \int_{]0, +\infty[} x^2 g^2(x) dx = 1$. En reprenant le produit précédent après avoir remplacé f par g et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{]0, +\infty[} g \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} (1+x^2)g^2(x) dx} \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

b. Le changement de variable $y = \beta x$ étant affine, si α et β sont strictement positifs, g vérifie les mêmes hypothèses que f et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g^2(x)dx &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} f^2(\beta x)dx = \frac{\alpha^2}{\beta} \int_0^{+\infty} f^2(y)dy \\ \int_0^{+\infty} x^2 g^2(x)dx &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} x^2 f^2(\beta x)dx = \frac{\alpha^2}{\beta^3} \int_0^{+\infty} y^2 f^2(y)dy \end{aligned}$$

f n'étant pas la fonction nulle, $I_1 = \int_0^{+\infty} f^2$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)dx$ sont non nulles.

g vérifie les hypothèses précédentes si et seulement si :
$$\begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^2} = I_1 \\ \frac{\beta}{\alpha^3} = I_2 \end{cases}$$

soit $\beta = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{I_1}} = \frac{I_2^{1/4}}{I_1^{3/4}}$. De plus :

$$\int_{]0, +\infty[} g = \int_0^{+\infty} \alpha f(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\beta} \int_{]0, +\infty[} f$$

Comme $\int_{]0, +\infty[} g \leq \sqrt{\pi} \int_{]0, +\infty[} f \leq \sqrt{\pi} \frac{\beta}{\alpha}$. Or $\frac{\beta}{\alpha} = I_2^{1/4} I_1^{1/4}$. On trouve bien le résultat demandé.

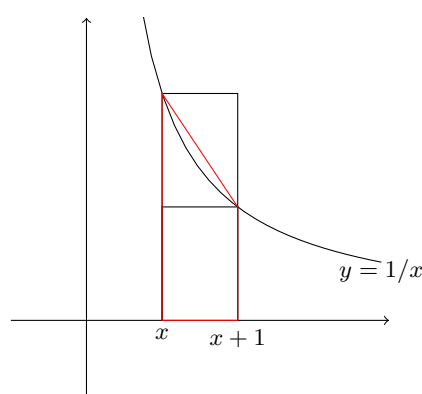
□

Correction de l'Exercice 14

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Il suffit d'utiliser la méthode de comparaison série-intégrale.



La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur tout segment $[k, k+1]$ avec k entier non nul, on obtient l'inégalité (E) suivante :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1} \leq H_n$$

ainsi : $\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$

b. Soit $u_n = H_n - \ln(n)$; $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ d'après l'inégalité (E) appliquée pour $k = n$. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Comme pour tout n , $u_n \in [0, 1]$, sa limite γ est dans cet intervalle.

c. Pour améliorer la minoration de γ , il faut une majoration plus fine de $\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$: on va vérifier que la courbe $y = \frac{1}{x}$ est sous sa corde sur le segment $[x, x+1]$: autrement dit que la partie du plan sous la courbe est dans le trapèze rouge de la figure d'aire $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$.

Soit $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$ de dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2(x+1) - 2x(x+1)^2 + (x+1)^2 + x^2}{2x^2(x+1)^2}$$

Le numérateur vaut donc $x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) \underbrace{(x+1-x)}_{-1} = (x+1-x)^2 = 1$. g est

croissante de limite nulle en $+\infty$ (car $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$) : g est une fonction négative sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout entier naturel k non nul, on a alors :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$\ln(n) \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} = H_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

D'où $u_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Par passage à la limite on obtient bien $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

2. On a aussi $w_k = \ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}$. Par l'inégalité (E) :

$$0 \leq w_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

la série de terme général $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ étant convergente (la suite $\frac{1}{k}$ est convergente de limite nulle), on somme les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à $+\infty$, et on obtient bien $0 \leq r_n \leq \frac{1}{n}$.

3.

a. $\int_{k-1}^k \frac{t-k+1}{t^2} dt = \left[\ln(t) + \frac{k-1}{t} \right]_{k-1}^k = w_k$ car $\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{k(k-1)}$ Aussi par changement affine $u = t - (k-1)$, $w_k = \int_0^1 \frac{u}{(u+k-1)^2} du$.

b. Soit $v_k = \int_0^1 \frac{u^2(1-u)^2}{(u+k-1)^5} du$. Une première intégration par parties avec les fonctions $f_1(u) = u^2(1-u)^2$ de dérivée $f_1'(u) = 2u(1-u)(1-2u)$ et $g_1(u) = -\frac{1}{4(u+k-1)^4}$ de dérivée $g_1'(u) = \frac{1}{(u+k-1)^5}$ donne alors :

$$v_k = [f_1(u)g_1(u)]_0^1 + \int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{2(u+k-1)^4} du = \int_0^1 \frac{u(1-u)(1-2u)}{2(u+k-1)^4} du.$$

Une deuxième intégration par parties avec les fonctions $f_2(u) = u(1-u)(1-2u)$ de dérivée $f_2'(u) = 6u^2 - 6u + 1$ et $g_2(u) = -\frac{1}{6(u+k-1)^3}$ de dérivée $g_2'(u) = \frac{1}{2(u+k-1)^4}$ donne alors :

$$v_k = [f_2(u)g_2(u)]_0^1 + \int_0^1 \frac{6u^2 - 6u + 1}{6(u+k-1)^3} du = \int_0^1 \frac{6u^2 - 6u + 1}{6(u+k-1)^3} du.$$

Une troisième intégration par parties avec les fonctions $f_3(u) = \frac{6u^2 - 6u + 1}{6}$ de dérivée $f_3'(u) = 2u - 1$ et $g_3(u) = -\frac{1}{2(u+k-1)^2}$ de dérivée $g_3'(u) = \frac{1}{(u+k-1)^3}$ donne alors :

$$v_k = [f_3(u)g_3(u)]_0^1 + \int_0^1 \frac{2u-1}{2(u+k-1)^2} du = \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} \right) + \int_0^1 \frac{2u-1}{2(u+k-1)^2} du.$$

Or $\int_0^1 \frac{2u-1}{2(u+k-1)^2} du = w_k + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u+k-1} \right]_0^1 = w_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = w_k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right)$.
On trouve alors :

$$w_k = v_k - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right).$$

c. Sur l'intervalle $[0, 1]$, $0 \leq u(1-u) \leq \frac{1}{4}$ car $u - u^2 = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2$.

Ainsi $0 \leq v_k \leq \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^5} = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{(k-1)^4} - \frac{1}{k^4} \right)$, soit :

$$0 \leq w_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} \right) \leq \frac{1}{64} \left(\frac{1}{(k-1)^4} - \frac{1}{k^4} \right).$$

Les séries de termes généraux $w_k, -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k-1)}, -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2}, \frac{1}{(k-1)^4} - \frac{1}{k^4}$ étant convergentes, en sommant pour k variant de $n+1$ à l'infini, on trouve alors :

$$0 \leq r_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leq \frac{1}{64n^4}.$$

Ceci montre que $r_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(1/n^4)$ donc $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{12}$ et $c = 0$.

□

Correction de l'Exercice 15

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. U_n est la somme partielle de rang n d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général $\frac{1}{k}$ est décroissant et tend vers 0 : la série est donc convergente ce qui équivaut à dire que la suite $(U_n)_n$ est convergente.

b. Le résultat demandé peut se prouver par récurrence sur n .

Initialisation : $U_1 = 1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k}$.

Hérédité : Supposons la relation vraie à l'ordre n . Alors comme $U_{2n+1} = U_{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$

$$U_{2n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

La relation à l'ordre n implique la relation à l'ordre $n+1$.

On a donc bien vérifié que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$ ce qui s'écrit aussi :

$$U_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

c. Sous cette dernière forme, on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$; Aussi $\lim_n U_{2n-1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$. $(U_n)_n$ a la même limite que sa suite extraite.

2.

a. Pour $k < n$, $R_k = \sum_{j=k+1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} + R_n$ d'où :

$$\sum_{k=0}^n R_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} + (n+1)R_n$$

La double somme s'effectue donc sur les indices (k, j) tels que $0 \leq k < j \leq n$. j varie donc de 1 à n et à j fixé, k varie de 0 à $j-1$: le nombre $\frac{(-1)^{j+1}}{j}$ se trouve donc j fois dans cette somme :

$$\sum_{k=0}^n R_k = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} + (n+1)R_n .$$

Si n est impair $\sum_{k=0}^n R_k = 1 + (n+1)R_n$ et si n est pair $\sum_{k=0}^n R_k = (n+1)R_n$.

$$\text{b. } H_n - U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k} = \sum_{p=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{2p} = H_{\lfloor n/2 \rfloor}. \text{ On obtient ainsi } U_n = H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Soit $\mathcal{R}_n = \sum_{k=0}^n R_k$. D'après ce qui précède :

$$\mathcal{R}_{2n} = (2n+1)R_{2n} = (2n+1)(\ln(2) - H_{2n} + H_n)$$

Par le développement donné $\ln(2) - H_{2n} + H_n = \frac{1}{4n} + o(1/n)$ d'où $\mathcal{R}_{2n} \sim \frac{1}{2}$. La suite $(\mathcal{R}_{2n})_n$ converge donc vers $\frac{1}{2}$. Comme $\mathcal{R}_{2n+1} = \mathcal{R}_{2n} + R_{2n+1}$, la suite $(\mathcal{R}_{2n+1})_n$ a même limite puisque R_n est le reste de rang n d'une série convergente.

Conclusion : $(\mathcal{R}_n)_n$ est une suite convergente de limite $\frac{1}{2}$ soit la série $\sum R_n$ est convergente

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{1}{2}.$$

3. u_n est le reste de rang $n-1$ d'une série alternée convergente par le théorème des séries alternées. Par ce théorème, on a de plus la majoration directe de ce reste $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.

On utilise la même méthode que précédemment.

Soit n fixé. Pour $k < n$, $u_k = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j^2} + u_n$ et donc

$$\mathcal{U}_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j^2} + nu_n$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j^2} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j^2} \sum_{k=1}^j 1$; d'où

$$\mathcal{U}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j} + nu_n = -U_n + nu_n .$$

Par la majoration de $|u_n|$ précédente, on a alors $\lim nu_n = 0$ ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim \mathcal{U}_n = -\lim U_n = -\ln(2) .$$

□

Correction de l'Exercice 16[Retour à l'énoncé](#)

1. On remarque que $v_n - L = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - L)}{n}$ et par inégalité triangulaire :

$$|v_n - L| \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |u_k - L|}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un rang N tel que :

$$n \geq N \implies |u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors pour $n > N$, $|v_n - L| \leq \frac{\sum_{k=0}^N |u_k - L|}{n} + \frac{\sum_{k=N+1}^n |u_k - L|}{n}$. La somme du second terme contient $n - N$ termes majorés par $\frac{\varepsilon}{2}$ donc en posant $S_N = \sum_{k=0}^N |u_k - L|$, on obtient :

$$n \geq N + 1 \implies |v_n - L| \leq \frac{S_N}{n} + \frac{n - N}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un rang N_1 pour lequel $n \geq N_1 \implies \frac{S_N}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Aussi en posant $N' = \max(N + 1, N_1)$, on obtient que si $n \geq N'$, $|v_n - L| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $(v_n)_n$ converge aussi vers L .

2.

a. Par une récurrence immédiate, pour tout entier naturel, $u_n \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$. Sur l'intervalle I considéré, $0 < \sin(x) < x$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\sin(\ell) = \ell$. La seule solution de cette équation est 0. La suite converge donc vers 0.

b. Comme $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, pour tout réel β non nul :

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\beta - 1 \right) \sim \frac{-\beta}{6} u_n^{\beta+2}.$$

Remarque : l'équivalence est vraie pour $\beta = 0$ mais ne présente pas d'intérêt ($0 \sim 0$).

c. En imposant $\beta = -2$, on obtient alors :

$$\lim u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3}.$$

Soit la suite $a_0 = u_0^{-2}$ et $a_n = u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ de limite $\frac{1}{3}$. En lui appliquant le théorème de Césaro :

$$\lim \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3} \implies u_n^2 \sim \frac{3}{n} \implies u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

d. u_n^2 est une suite à termes positifs tels que $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$. Par comparaison à une série de Riemann divergente (série harmonique), $\sum u_n^2$ est une série divergente.

u_n^3 est une suite à termes positifs tels que $u_n^3 \sim \frac{3\sqrt{3}}{n^{3/2}}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n^3$ est une série convergente.

3. Si $x \in]0, 1[$, $0 < x^2 < x < 1$. Par récurrence immédiate, $u_n \in]0, 1[$ pour tout n . De plus, $u_{n+1} < u_n$ donc la suite est décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$ vérifiant $\ell - \ell^3 = \ell$ soit $\ell = 0$.

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left((1 - u_n)^\beta - 1 \right) \sim -\beta u_n^{\beta+1}.$$

Cette fois on impose $\beta = -1$, et $\lim \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1$. Par le théorème de Césaro, $\lim \frac{1}{nu_n} = 1$ soit $u_n \sim \frac{1}{n}$.

4. $(u_n)_n$ est une suite à termes strictement positifs et strictement croissante : soit elle est bornée et elle converge vers une limite $\ell > 0$ vérifiant $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ soit elle diverge vers $+\infty$. L'équation proposée n'ayant pas de solution réelle, elle diverge vers $+\infty$.

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(\left(1 + \frac{1}{u_n^2}\right)^\beta - 1 \right) \sim \beta u_n^{\beta-2}$$

En choisissant $\beta = 2$, on obtient $\lim(u_{n+1}^2 - u_n^2) = 2$ puis par le théorème de Césaro $\lim \frac{u_n^2}{n} = 2$. Ainsi $u_n \sim \sqrt{2n}$ et $u_n^\alpha \sim 2^{\alpha/2} n^{\alpha/2}$. Par comparaison à une série de Riemann, la suite étant à termes positifs, $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -2$.

□

Correction de l'Exercice 17

[Retour à l'énoncé](#)

Comme pour tout couple de réels (a, b) , $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, en choisissant $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \sqrt{u_{n+1}}$, on obtient :

$$0 \leq \sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n+1}}{2}$$

Les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ étant convergentes, il en est de même de toutes leurs combinaisons linéaires donc de $\sum \left(\frac{u_n}{2} + \frac{u_{n+1}}{2} \right)$ et par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente.

□

Correction de l'Exercice 18

[Retour à l'énoncé](#)

Par une récurrence immédiate, $(u_n)_n$ est une suite à termes strictement positifs ; elle est donc croissante.

Supposons que la suite $(u_n)_n$ soit convergente de limite ℓ . Pour tout entier n , $u_0 \leq u_n \leq \ell$. Comme $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$:

$$0 \leq a_n \leq \ell(u_{n+1} - u_n).$$

La suite $(u_n)_n$ étant convergente, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente. Par comparaison entre séries à termes positifs, $\sum a_n$ est une série convergente.

Supposons maintenant que $\sum a_n$ est une série convergente. Alors comme $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$ et $u_n \geq u_0$, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{u_0}.$$

Par comparaison entre séries à termes positifs, la convergence de la série $\sum a_n$ implique la convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ donc la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Par double implication, on a bien vérifié que la convergence de la série $\sum a_n$ équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_n$.

□

Correction de l'Exercice 19

[Retour à l'énoncé](#)

1. $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(n^2 - 1) - 2\ln(n) = (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n) - \ln(n-1))$. Cette série apparaît donc comme une série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ avec $u_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$. Elle converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ est convergente, ce qui est bien le cas, $(u_n)_n$ étant de limite nulle.

De plus $\sum_{n=2}^N \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = u_{N+1} - u_2 \rightarrow -u_2 = -\ln(2)$.

2. $a_n = \ln(n+2) + a \ln(n+1) + b \ln(n) = (1+a+b)\ln(n) + a \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + b \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$; Cette expression est de limite nulle si et seulement si $a+b+1=0$. Aussi si $a+b+1 \neq 0$ la série $\sum a_n$ est divergente.

Dans le cas où $a+b+1=0$, on a alors :

$$a_n = a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $a+2b \neq 0$, $a_n \sim \frac{a+2b}{n}$ et par comparaison entre suites de signe constant, la série est divergente.

Si $a+2b=0$, la série est dominée par une série de Riemann convergente : elle est absolument convergente.

La série est convergente si et seulement si $a+b=-1$ et $a+2b=0$ autrement dit si et seulement si $(a,b)=(-2,1)$.

On a alors $a_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) - (\ln(n+1) - \ln(n)) = u_{n+1} - u_n$ avec $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

On se retrouve dans le même exemple que celui de la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = \lim a_n - a_1 = -\ln(2).$$

3. Montrons l'existence de réels (a,b,c) tels que :

$$4n-3 = a(n^2-4) + bn(n+2) + cn(n-2)$$

Il faut et il suffit que $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=2 \\ 4a=3 \end{cases}$ soit $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{8}$ et $c = -\frac{11}{8}$. En divisant par

$n(n^2 - 4)$ pour $n \geq 3$, on obtient alors :

$$u_n = \frac{4n-3}{n(n^2-4)} = \frac{3}{4} \frac{1}{n} + \frac{5}{8} \frac{1}{n-2} - \frac{11}{8} \frac{1}{n+2}.$$

En sommant de $n = 3$ à $n = N$, et avec un changement d'indice dans les deux dernières sommes, on obtient alors :

$$U_N = \sum_{n=3}^N u_n = \frac{3}{4} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \frac{5}{8} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n} - \frac{11}{8} \sum_{n=5}^{N+2} \frac{1}{n}.$$

Le terme en $\frac{1}{n}$ pour $5 \leq n \leq N-2$ a pour coefficient $a + b + c = 0$. Il reste donc :

$$U_N = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{8} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} \right) - \frac{11}{8} \sum_{n=N-1}^{N+2} \frac{1}{n}.$$

Les 6 termes contenant N sont de limite nulle quand N tend vers $+\infty$; la série converge et :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)} = \frac{3}{4} \frac{7}{12} + \frac{5}{8} \frac{25}{12} = \frac{167}{96}.$$

4. La famille de polynômes $\left((X-1)(X-2), (X-1), 1 \right)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ étagée en degré ; elle est libre de cardinal maximal (3) : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Il existe donc un unique triplet (a, b, c) tel que :

$$X^2 = a(X-1)(X-2) + b(X-1) + c ;$$

en évaluant en 1, $c = 1$; en évaluant en 2, $b + c = 4$ donc $b = 3$ et en comparant les termes en X^2 , $a = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $n^2 = (n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1$. Aussi pour $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Le terme général apparaît comme combinaison linéaire de termes de séries exponentielles convergentes : la série converge. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + 4 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}.$$

Après translations d'indices :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + 4 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

En utilisant le résultat $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, on trouve finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 5 + e + 3(e-1) + (e - \frac{3}{2}) = 5e + \frac{1}{2}.$$

□

Correction de l'Exercice 20[Retour à l'énoncé](#)

Dans cet exercice, dans la plupart des questions, il s'agit d'utilisation des théorèmes de comparaison : directement si la série est à termes positifs ou par développements limités pour les séries de signe non constant.

1. Posons $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$ et utilisons le critère de d'Alembert ($u_n > 0$) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Or $\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \sim \frac{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \frac{1}{\ln(n)} \rightarrow 0$ donc $\lim\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n = 1$ et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. La série est convergente.

2. Posons $u_n = \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$ et comparons u_n à $\frac{1}{n^a}$.

$$\ln(n^a u_n) = \sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right) + a \ln(n)$$

Comme $\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right) \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$, quelque soit a , $a \ln(n) = o\left(\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)\right)$ et donc $\lim \ln(n^a u_n) = -\infty$ d'où $u_n = o\left(\frac{1}{n^a}\right)$. En choisissant $a = 2$, on obtient par comparaison à une série de Riemann que la série donnée est convergente.

3. On commence par remarquer que $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et a pour limite 1 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi :

$$u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \sim \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1.$$

La dernière expression s'écrit aussi :

$$\exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}\right) - 1 \sim \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

On a utilisé $\exp(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Par relation d'équivalence, $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série proposée converge.

4. Il s'agit d'une série alternée. Le terme général tend bien vers 0. De plus par croissance de la fonction $\ln$, pour $n \geq 2$:

$$0 < \ln(n) \leq \ln(n + \sin^2(n)) \leq \ln(n+1) \leq \ln(n+1 + \sin^2(n+1))$$

ce qui prouve la décroissance à partir du rang 2 de $(|u_n|)_n$: la série répond aux hypothèses du théorème des séries alternées, elle converge.

5. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}}$. Pour $n = 1$, u_1 est bien défini et pour $n \geq 2$, $\sqrt{n} > \sqrt[n]{n}$ donc le dénominateur ne s'annule pas.

C'est une série alternée dont le terme général tend vers 0 mais on ne sait pas si $(|u_n|)_n$ est décroissante donc on ne peut pas utiliser le théorème des séries alternées. Effectuons un développement limité de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Aussi $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. La série $\sum v_n$ est divergente. Comme $u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum u_n$ est divergente comme somme d'une série divergente et d'une série convergente.

6. Soit $p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$ produit de termes strictement positifs.

$$\ln(p_n) = \sum_{k=2}^n u_k \text{ avec } u_k = \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Ainsi $u_n = -\frac{1}{2n} + v_n$ où la série $\sum v_n$ est convergente. On obtient alors

$$\ln(p_n) = -\frac{H_n}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n v_k$$

où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Par théorème de comparaison série intégrale ou en se référant à l'exercice

13, $(H_n - \ln(n))_n$ est convergente donc $\left(\ln(p_n) + \frac{\ln(n)}{2} \right)_n$ est convergente de limite ℓ . On

en déduit que $\lim p_n \sqrt{n} = e^\ell > 0$ donc $p_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt{n}}$. La série proposée est divergente par comparaison entre séries à termes positifs.

7. $\ln \left(\frac{n}{n-1} \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$; aussi :

$$\left(\ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right)^3 = \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + O(1/n^3) \right)^3 = \frac{1}{n^3} \left(1 + 3 \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \right) + \frac{3}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

D'où $\pi n^4 \left(\ln \left(\frac{n}{n-1} \right) \right)^3 = \pi n + \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Aussi :

$$u_n = \cos \left(\pi n^4 \left(\ln \frac{n}{n-1} \right)^3 \right) = (-1)^n \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

soit

$$u_n = (-1)^n \sin \left(\frac{7\pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{7(-1)^n \pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le terme général de la série est donc la somme du terme général d'une série alternée convergente et du terme d'une série absolument convergente (dominé par le terme $\frac{1}{n^2}$ d'une série de Riemann convergente) : la série proposée est donc convergente.

8. Posons $u_n = \frac{a + (-1)^n}{a + n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}}$. le terme dominant du dénominateur est n donc en le

mettant en facteur on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a + (-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} \right)^{-1} = \frac{a + (-1)^n}{n} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}})) \\ &= \frac{a}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{série alternée}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{absolue convergence}} \end{aligned}$$

$\sum \left(u_n - \frac{a}{n}\right)$ est donc une série convergente. $\sum u_n$ est une série convergente si et seulement si $a = 0$.

9. Par division de polynômes $2x^2 + ax + 1 = (2x + 1)\left(x + \frac{a-1}{2}\right) + \frac{3-a}{2}$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi \frac{2n^2 + an + 1}{2n + 1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{(a-1)\pi}{2} + \frac{(3-a)\pi}{2(2n+1)}\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{(a-1)\pi}{2} + \frac{(3-a)\pi}{2(2n+1)}\right). \end{aligned}$$

$(u_n)_n$ est de limite nulle si et seulement si $\sin\left(\frac{(a-1)\pi}{2}\right) = 0$ soit si et seulement si $\frac{a-1}{2} \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{a-1}{2} \notin \mathbb{Z}$, la série est divergente.

Étudions le cas où il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2p + 1$. Dans ce cas, $u_n = (-1)^{n+p} \sin\left(\frac{(1-p)\pi}{2n+1}\right)$. A partir d'un certain rang N , $\left|\frac{(1-p)\pi}{2n+1}\right| \leq \frac{\pi}{2}$, $(u_n)_n$ est une série alternée et comme $|u_n| = \sin\left(\left|\frac{(1-p)\pi}{2n+1}\right|\right)$, la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante (sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) : la série est donc convergente par le théorème des séries alternées. $\square$

Correction de l'Exercice 21

[Retour à l'énoncé](#)

1. L'expression $v_n = \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}$ a un sens pour tout $n \geq 1$ si et seulement si $\begin{cases} n^2 + an + 2 \geq 0 \\ n^2 + bn + 1 \geq 0 \end{cases}$.

La première inégalité est vérifiée pour $n = 1$ si et seulement si $a \geq -3$. Si $a \geq 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout entier naturel. Si $a \in [-3, 0]$, la fonction $f : x \mapsto x^2 + ax + 2$ est croissante sur $[-\frac{a}{2}, +\infty[$ donc sur $[2, +\infty[$; or $f(2) = 6 + 2a \geq 0$ donc f est positive pour tout entier $n \geq 2$. Comme $f(1)$ et $f(0)$ le sont aussi, la première inégalité est vérifiée pour tout n entier naturel.

Il reste à étudier la seconde inégalité. Elle est réalisée pour $n = 1$ si et seulement si $b \geq -2$. Si $b \in [-2, 2]$, le discriminant du trinôme $x^2 + bx + 1$ est négatif ou nul, le trinôme est positif sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{N}$. Si $b \geq 2$, le trinôme est positif sur $\mathbb{R}^+$.

Les termes de la suite $(u_n)_n$ sont donc tous définis si et seulement si $a \geq -3$ et $b \geq -2$.

2. Par développement limité d'ordre 2 des deux racines carrées (rappel : $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^3)$).

$$\begin{aligned}
v_n &= \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} = n \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} - n \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-b}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{n^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
&= \frac{a-b}{2} + \frac{4 - (a^2 - b^2)}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On remarque alors que pour $a \geq b$, $v_n > 0$ pour tout n ainsi que u_n . Par contre, si $a < b$, à partir d'un certain rang, v_n est négatif (son équivalent en $+\infty$ est négatif). A partir de ce rang n_0 , $v_n = -|v_n|$ et $u_n = (-1)^n |v_n|^n = (-1)^n (-v_n)^n$. De plus, $\ln |u_n| = n \ln |v_n|$. On pose $\alpha = \ln \left(\frac{|a-b|}{2} \right)$. On distingue alors différents cas lorsque $a \neq b$ suivant le signe de α : $\alpha = 0$ (soit $|a-b| = 2$), $\alpha < 0$ (soit $|a-b| < 2$) et $\alpha > 0$ (soit $|a-b| > 2$).

- Si $a = b$, $\frac{\ln(u_n)}{n} = \ln \left(\frac{1}{2n} \right) + \ln(1 + O(\frac{1}{n})) = -\ln(n) - \ln(2) + O(\frac{1}{n}) \sim -\ln(n)$.
 $\ln(n^2 u_n) = 2 \ln(n) + \ln(u_n) \sim -n \ln(n)$ de limite $-\infty$. On a alors $n^2 u_n$ de limite nulle et $u_n = o(\frac{1}{n^2})$. La série est absolument convergente.
- Si $\alpha < 0$, $\ln(|u_n|) \sim \alpha n$.
Comme précédemment, $\ln(n^2 |u_n|) = 2 \ln(n) + \ln(|u_n|) \sim \alpha n$ de limite $-\infty$. On a alors $n^2 u_n$ de limite nulle et $|u_n| = o(\frac{1}{n^2})$. La série est absolument convergente.
- Si $|a-b| = 2$, $a^2 - b^2 = 4(sb+1)$ où s désigne le signe de $a-b$.
 $\ln(|u_n|) = n \ln(1 - \frac{b}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))$ a pour limite $-\frac{b}{2}$. $|u_n|$ a une limite non nulle $e^{-\frac{b}{2}}$: la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$ (soit $|a-b| > 2$), $\ln(|u_n|) \sim \alpha n$, $|u_n|$ tend vers $+\infty$ et la série est divergente.

En conclusion la série converge si et seulement si $b-2 < a < b+2$ (avec $a \geq -3$ et $b \geq -2$) et dans tous ces cas elle converge absolument.

□

Correction de l'Exercice 22

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{k(k+1)}$.

$(S_n)_n$ étant une suite croissante, elle a le même comportement que toute suite extraite et même somme. En effet, si la suite $(S_n)_n$ diverge, toutes ses suites extraites divergent et si elle converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite. Il suffit donc d'étudier une suite extraite bien choisie.

Pour tout entier naturel n , $p_k = n$ si et seulement si $10^{n-1} \leq k \leq 10^n - 1$. En regroupant les entiers ayant le même nombre de chiffres on obtient alors :

$$S_{10^N-1} = \sum_{n=1}^N n \left(\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} \frac{1}{k(k+1)} \right).$$

Or $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; par télescopage

$$\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^n}.$$

D'où $S_{10^N-1} = 9 \sum_{n=1}^N \frac{n}{10^n}$.

Or pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. En prenant $x = \frac{1}{10}$, on obtient alors que S_{10^N-1} converge donc vers $\frac{9}{10} \frac{1}{(0,9)^2} = \frac{10}{9}$. La suite $(S_{10^N-1})_N$ étant convergente, la série proposée est convergente de somme $\frac{10}{9}$.

2. Par l'encadrement de n en fonction de p_n , on obtient en prenant le $\ln$ fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$p_n - 1 \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \leq p_n.$$

Si $b \geq 1$, $x \mapsto b^x$ est croissante et $\frac{b^{p_n}}{b} \leq b^{\frac{\ln(n)}{\ln(10)}} \leq b^{p_n}$. Or

$$b^{\frac{\ln(n)}{\ln(10)}} = e^{\frac{\ln(b) \ln(n)}{\ln(10)}} = n^{\frac{\ln(b)}{\ln(10)}}$$

D'où en posant $v_n = a^n n^\beta$ avec $\beta = \frac{\ln(b)}{\ln(10)}$, on obtient :

$$v_n \leq u_n \leq bv_n$$

Si $0 < b < 1$, la fonction $x \mapsto b^x$ est décroissante et $bv_n \leq u_n \leq v_n$. Dans les deux cas, par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ est convergente.

Comme il s'agit de séries à termes strictement positifs, on peut utiliser le critère de D'Alembert :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta \rightarrow a$$

Aussi si $a < 1$, les deux séries convergent et si $a > 1$, les deux séries divergent.

Il reste à étudier le cas $a = 1$ où $v_n = n^\beta$. La série associée est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\beta < -1$ soit $\ln(b) < -\ln(10)$ ce qui équivaut à $b < \frac{1}{10}$. En conclusion, la série proposée converge si et seulement si $a < 1$ ou $a = 1$ et $b < \frac{1}{10}$. □

Correction de l'Exercice 23

[Retour à l'énoncé](#)

1. Une récurrence donne le résultat : par hypothèse, $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$.

2. En prenant le logarithme de la relation, on a immédiatement pour n entier naturel :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -u_n$$

En sommant ces relations pour un indice variant de 0 à n , on obtient par télescopage :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) = - \sum_{k=0}^n u_k .$$

3.

a. Comme $(u_n)_n$ est strictement positive, $e^{-u_n} < 1$, donc $(u_n)_n$ est strictement décroissante ; étant minorée par 0, elle est convergente. Soit ℓ sa limite : par passage à la limite, elle vérifie $\ell(1 - e^\ell) = 0$, soit $\ell = 0$.

b. Par la relation obtenue à la question précédente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$. La série est donc divergente.

4.

a. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $y \in [0, x]$ tel que $\frac{e^x - 1}{x} = e^y \geq 1$. Ceci prouve que $x \leq e^x - 1$.

Pour la seconde inégalité, soit $f(x) = e^x - 1 - x - 2x^2$, fonction deux fois dérivable avec $f'(x) = e^x - 1 - 4x$ et $f''(x) = e^x - 4 < 0$ sur $[0, 1]$. Ainsi f' est décroissante ; comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $[0, 1]$, f y est donc décroissante :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(0) = 0$$

ce qui donne la seconde inégalité. On a donc pour $x \in]0, 1]$, $1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + 2x$.

b. La suite $(u_n)_n$ étant strictement décroissante, elle n'atteint pas sa limite et

$$0 < u_n \leq u_0 \leq 1 .$$

En utilisant la relation de récurrence et les inégalités précédentes :

$$1 \leq \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \leq 1 + 2u_n .$$

5. Il s'agit de prouver que $\lim nu_n = 1$ ou $\lim \frac{1}{nu_n} = 1$.

- directement : on n'utilise pas le théorème de Césaro mais on utilise le raisonnement utilisé dans la preuve de celui-ci. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N pour lequel

$$n \geq N \implies 0 < u_n \leq \frac{\varepsilon}{4} .$$

On obtient alors pour $k \geq N$,

$$1 \leq \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $n \geq N + 1$, en sommant pour k variant de N à $n - 1$, on obtient :

$$(n - N) \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_N} \leq (n - N)(1 + \frac{\varepsilon}{2})$$

soit :

$$\frac{A}{n} \leq \frac{1}{nu_n} - 1 \leq \underbrace{\frac{n - N}{n}}_{\leq 1} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{A}{n} \text{ avec } A = \frac{1}{u_N} - N .$$

Comme $\lim \frac{A}{n} = 0$, il existe un rang N_1 tel que pour $n \geq N_1$, $\left| \frac{A}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq \max(N + 1, N_1)$, $\left| \frac{1}{nu_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$ ce qui prouve le résultat attendu.

- en utilisant le théorème de Césaro :
si $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$, la question précédente donne par le théorème d'encadrement que $\lim v_n = 1$. Par le théorème de Césaro, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ converge vers 1 aussi. D'où

$$\frac{1}{nu_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k + \frac{1}{nu_0} \rightarrow 1 .$$

□

Correction de l'Exercice 24

[Retour à l'énoncé](#)

1. β_n est bien défini, tous les termes étant strictement positifs. Par définition de β_n , on

obtient en écrivant $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(1 + \frac{a}{n})(1 + \frac{b}{n})}{(1 + \frac{c}{n})(1 + \frac{d}{n})}$

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} - \beta_n &= \lambda \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{b}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{c}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{d}{n} \right) \\ &= \frac{\lambda + a + b - c - d}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Aussi si $\lambda \neq c + d - a - b$, la série est divergente et si $\lambda = c + d - a - b$, la série est absolument convergente.

2. La convergence de la série $\sum (\beta_{n+1} - \beta_n)$ équivaut à la convergence de la suite $(\beta_n)_n$. Pour $\lambda = c + d - a - b$, β_n a pour limite ℓ . En composant par exp, $n^{c+d-a-b} \alpha_n$ a pour limite e^ℓ , réel strictement positif. Ainsi $\alpha_n \sim \frac{e^\ell}{n^{c+d-a-b}}$. Par critère de comparaison entre séries à termes positifs, $\sum \alpha_n$ converge si et seulement si $c + d - a - b > 1$.

□

Correction de l'Exercice 25

[Retour à l'énoncé](#)

1. Par comparaison entre séries à termes positifs, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. On revient à la définition de l'équivalence :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, k \geq N \implies (1 - \varepsilon)a_k \leq b_k \leq (1 + \varepsilon)a_k .$$

Pour $n \geq N$, toutes les séries étant convergentes, on somme ces inégalités pour k variant de n à $+\infty$ et on obtient :

$$n \geq N \implies (1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} a_k .$$

ce qui prouve que les suites des restes $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right)_n$ et $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \right)_n$ sont équivalentes.

- 2.

a. La suite $(u_n)_n$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n-1} - u_n)$ est convergente.

$$\begin{aligned} b_n = u_{n-1} - u_n &= -\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{2n-1} \\ &= -\frac{1}{4n} \left(1 - \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{4n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $b_n \sim a_n = \frac{1}{4n^2}$. Comme $\sum a_n$ est convergente, il en est de même de $\sum b_n$ donc de $(u_n)_n$.

b. Par la première question $u_n - \ell = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2}$.

Par comparaison entre série et intégrale :

$$\frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+1)} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{4t^2} \leq \frac{1}{4k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{4t^2} = \frac{1}{4(k-1)} - \frac{1}{4k}.$$

Tous les termes étant des termes de séries convergentes, on trouve alors en sommant pour k variant de $n+1$ à $+\infty$:

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} \leq \frac{1}{4n}$$

d'où $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} \sim \frac{1}{4n}$ donc $u_n - \ell \sim \frac{1}{4n}$.

□

Correction de l'Exercice 26

[Retour à l'énoncé](#)

1. On a $b_1 = B_1$ et pour $n \geq 2$, $b_n = B_n - B_{n-1}$. ainsi :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 B_1 + \sum_{k=2}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=2}^n a_k B_{k-1},$$

or par décalage d'indice d'une unité $\sum_{k=2}^n a_k B_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k$ et on obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

2.

a. Cette question est un classique. Si $e^{i\theta} \neq 1$ (soit $\theta \neq 0$), il s'agit de la somme des n premiers termes d'une série géométrique de premier terme et de raison $e^{i\theta}$ donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^n e^{ki\theta} = \frac{e^{i\theta}(e^{ni\theta} - 1)}{e^{i\theta} - 1}.$$

En utilisant l'égalité $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha/2} \sin(\frac{\alpha}{2})$, on obtient alors après simplification :

$$S_n = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}.$$

On remarque que $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$. La suite $(S_n)_n$ est bornée. Si $\theta = 0$, $S_n = n$.

b. Si $\theta = 0$, on retrouve la série harmonique, série divergente.

Si $\theta \neq 0$, on utilise la transformation d'Abel précédente avec $a_k = \frac{1}{k}$ et $b_k = e^{ki\theta}$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \frac{e^{ni\theta}}{n} \text{ avec } u_k = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \frac{\sin(\frac{k\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{i \frac{(k+1)\theta}{2}}$$

Comme $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, $|u_k| \leq \frac{1}{k(k+1)|\sin(\frac{\theta}{2})|}$ et la série $\sum u_k$ est absolument convergente. Le reste $\frac{e^{ni\theta}}{n}$ a comme module $\frac{1}{n}$ et tend vers 0. On a donc vérifié que si $\theta \neq 0$, la série initiale est convergente.

3. On utilise une nouvelle fois la transformation d'Abel avec $b_k = (-1)^k$. Alors $B_n = 0$ si n est pair et -1 si n est impair, donc $|B_n| \leq 1$. En utilisant la transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + a_n B_n$$

avec $u_k = (a_k - a_{k+1})B_k$; or $|u_k| \leq |a_k - a_{k+1}| = |a_k| - |a_{k+1}|$ (car a_k et a_{k+1} sont de même signe et la suite $(|a_k|)_k$ est décroissante). La série $\sum |a_k| - |a_{k+1}|$ est convergente puisque $|a_k|$ a pour limite 0. Par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum u_k$ est absolument convergente et $\lim a_n B_n = 0$. Le terme de droite de l'égalité est donc convergent, il en est de même de la série initiale.

4. On utilise une nouvelle fois la transformation d'Abel avec $a_k = \frac{1}{k^2}$ et $b_k = \varphi(k)$.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) B_k + \frac{B_n}{n^2} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) B_k$$

Comme $B_n = \sum_{k=1}^n \varphi(k)$, et que φ est une bijection, B_n est la somme de n entiers naturels

non nuls ; aussi $B_n \geq \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Tous les termes étant positifs :

$$u_k = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) B_k \geq \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{2k+1}{2k(k+1)} \sim \frac{1}{k}$$

La série $\sum (\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}) B_k$ est positive et divergente, la série initiale diverge.

5. On utilise une nouvelle fois la transformation d'Abel. En posant $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$, on obtient :

$$a_n x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) U_k + a_n U_n .$$

Soit U la limite de $(U_n)_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_n x_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})(U_k - U) + a_n(U_n - U) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + a_n \right) U \\ &= a_1 U + a_n(U_n - U) + a_n y_n \text{ avec } y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})(U_k - U)}{a_n} \\ x_n &= \frac{a_1}{a_n} U + (U_n - U) + y_n \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont de limite nulle. Il reste à étudier la suite $(y_n)_n$. On revient à la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon, \exists N, k \geq N \implies |U_k - U| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la suite $(a_n)_n$ tendant vers $+\infty$, elle est strictement positive à partir d'un certain rang N_0 . Pour $n \geq \max(N+1, N_0)$, par inégalité triangulaire :

$$|y_n| \leq \frac{S}{a_n} + \frac{\sum_{k=N}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)}{a_n} \frac{\varepsilon}{2} \text{ avec } S = \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) |U_k - U|.$$

$$\text{Comme } 0 \leq \sum_{k=N}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_N \leq a_n, |y_n| \leq \frac{S}{a_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe N_1 tel que $n \geq N_1$, $0 \leq \frac{S}{a_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max(N+1, N_1, N_0)$, $|y_n| \leq \varepsilon$. Ainsi $(y_n)_n$ est de limite nulle. La suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

□

Correction de l'Exercice 27

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme suite des restes d'une série convergente, $(R_n)_n$ est une suite de limite nulle.

a. La série $\sum u_n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, inférieure à 1, elle est donc convergente et

$$R_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Aussi $v_n = \frac{1}{2^n} 2^{(n-1)\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \left(\frac{1}{2^{1-\alpha}} \right)^n$. Cette suite est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2^{1-\alpha}}$.

La série associée converge si et seulement si $2^{1-\alpha} > 1$, soit $1 - \alpha > 0$. La série converge si et seulement si $\alpha < 1$.

b. Comme $u_n = R_{n-1} - R_n$, $v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^\alpha}$.

- Si $\alpha = 1$, $v_n = 1 - \frac{R_n}{R_{n-1}}$.

Si v_n ne tend pas vers 0, la série est divergente.

Si $(v_n)_n$ est de limite nulle, $v_n \sim -\ln(1 - v_n) = \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)$ que l'on note w_n . La suite $(\ln(R_n))_n$ étant divergente de limite $-\infty$ ($(R_n)_n$ est de limite nulle), la

série $\sum w_n$ est divergente. Par comparaison entre séries à termes positifs, $\sum v_n$ est divergente.

Conclusion : pour $\alpha = 1$, la série $\sum v_n$ est divergente.

- La suite $(R_n)_n$ étant de limite nulle, à partir d'un certain rang N , $0 < R_{n-1} < 1$. Si $\alpha > 1$, $R_{n-1}^\alpha < R_n$ et $v_n \geq \frac{u_n}{R_{n-1}}$. La suite $(v_n)_n$ est minorée à partir du rang N par le terme général d'une série dont on vient de prouver la divergence : la série $\sum v_n$ est divergente lorsque $\alpha > 1$.

c. On suppose dans cette question que $\alpha < 1$. La suite $(R_n)_n$ est décroissante et comme dans la question précédente, il existe N tel que pour $n \geq N$, $0 < R_{n-1} < 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant croissante sur $]0, 1]$, elle est minorée par $\frac{1}{R_{n-1}^\alpha}$ sur le segment $[R_n, R_{n-1}]$; on a donc comme la longueur de ce segment est $R_n - R_{n-1} = u_n$:

$$0 \leq v_n \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}) .$$

La suite $(R_n^{1-\alpha})_n$ étant convergente de limite nulle, la série de terme général $\frac{1}{1-\alpha} (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha})$ est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.

2. On adapte les méthodes utilisées précédemment à ce nouveau cas. La suite $(S_n)_n$ est croissante et divergente de limite $+\infty$. La suite $(S_n)_n$ étant divergente, à partir d'un certain rang N , $S_n > 1$. On remarque aussi que $v_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha}$.

- Cas $\alpha = 1$:

Si v_n ne tend pas vers 0, la série est divergente.

Si $(v_n)_n$ est de limite nulle, $\sum v_n$ est de même nature que $-\sum \ln(1 - v_n)$. Comme $-\ln(1 - v_n) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ et que la suite $(\ln(S_n))_n$ est divergente, la série $-\sum \ln(1 - v_n)$ est divergente et $\sum v_n$ est divergente.

Conclusion : pour $\alpha = 1$, la série $\sum v_n$ est divergente.

- Cas $\alpha < 1$:

A partir du rang N défini précédemment, $v_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \geq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n}$.

La suite $(v_n)_n$ est minorée à partir du rang N par le terme général d'une série dont on vient de prouver la divergence : la série $\sum v_n$ est divergente.

- Cas $\alpha > 1$:

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$, elle est minorée par $\frac{1}{S_n^\alpha}$ sur le segment $[S_{n-1}, S_n]$ de longueur u_n ; on a donc :

$$0 \leq v_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} (S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha}) .$$

La suite $(S_n^{1-\alpha})_n$ étant convergente de limite nulle, la série de terme général $\frac{1}{1-\alpha} (S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha})$ est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ est convergente.

□

Correction de l'Exercice 28[Retour à l'énoncé](#)

1. f étant continue et bijective, elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Comme la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge, $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Ainsi f est strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même (ce qui impose notamment $f(0) = 0$).

Pour tout $k \in [n+1, 2n]$, $f(n) \leq f(k) \leq f(2n)$; aussi comme $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{f(k)}$, on obtient le résultat attendu :

$$0 \leq \frac{n}{f(2n)} \leq S_{2n} - S_n \leq \frac{n}{f(n)}.$$

2. f étant strictement croissante, $J = [f(1), +\infty[$ est donc l'image par f de $I = [1, +\infty[$ et est strictement inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. g est donc bien définie sur J .

3. Par le théorème de changement de variables, en posant $x = f(y)$, g est intégrable sur J si et seulement si $\varphi : y \mapsto \frac{yf'(y)}{f^2(y)}$ est intégrable sur I . Cette fonction étant continue et positive, son intégrale est convergente si et seulement si $\Phi(x) = \int_1^x \frac{yf'(y)}{f^2(y)} dy$ a une limite finie en $+\infty$. Φ étant croissante, il suffit que $(\Phi(2n))_n$ soit une suite convergente. Par une intégration par parties (les fonctions $y \mapsto y$ et $y \mapsto \frac{1}{f(y)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\Phi(2n) = \left[-\frac{y}{f(y)} \right]_1^{2n} + \int_1^{2n} \frac{dy}{f(y)} = -\frac{2n}{f(2n)} + \frac{1}{f(1)} + \int_1^{2n} \frac{dy}{f(y)}.$$

Par la première question, comme $\lim(S_{2n} - S_n) = 0$, par théorème d'encadrement, $\lim \frac{2n}{f(2n)} = 0$.

$\frac{1}{f}$ étant une fonction continue positive strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ équivaut, par le théorème de comparaison série et intégrale, à la convergence de $\int_1^{2n} \frac{dy}{f(y)}$.
 $(\Phi(2n))_n$ est une suite convergente; ϕ est intégrable sur I et g est intégrable sur J .

□

Correction de l'Exercice 29[Retour à l'énoncé](#)

1. f'' étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ est convergente et f' primitive de f'' a une limite finie ℓ_1 en $+\infty$.

Montrons par contraposition que $\ell_1 = 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\ell_1 > 0$.

Il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, $f'(x) \geq \frac{\ell_1}{2}$ et alors en intégrant sur le segment $[x_0, x]$,
 $f(x) \geq \frac{\ell_1(x-x_0)}{2}$ et f a une intégrale divergente sur $[x_0, +\infty[$.

Ainsi $\ell_1 \neq 0 \implies \int_0^{+\infty} f$ divergente. Par contraposition, comme l'intégrale est convergente, $\ell_1 = 0$.

2. Soit F une primitive de f . Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à F à l'ordre 2 entre x et $x+1$:

$$(*) F(x+1) - F(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{2} + \int_x^{x+1} \frac{(x+1-t)^2 f''(t)}{2} dt.$$

$\int_{\mathbb{R}^+} f$ étant convergente, F a une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x+1) - F(x) = 0$.

De plus, $0 \leq \left| \int_x^{x+1} \frac{(x+1-t)^2 f''(t)}{2} dt \right| \leq \int_x^{x+1} \frac{|f''(t)|}{2} dt$. Le terme majorant est de limite nulle en $+\infty$ par convergence de $\int_{\mathbb{R}^+} |f''|$; on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{(x+1-t)^2 f''(t)}{2} dt = 0.$$

f est donc de limite nulle en $+\infty$.

3. On reprend la formule de Taylor avec reste intégral tout d'abord appliquée à f sur le segment $[n, n+1]$:

$$f'(n) = \underbrace{f(n+1) - f(n)}_{a_n} - \underbrace{\int_n^{n+1} (n+1-t) f''(t) dt}_{b_n}$$

f ayant une limite en $+\infty$, la série $\sum a_n$ est convergente.

On majore b_n : $|b_n| \leq c_n = \int_n^{n+1} |f''(t)| dt$. Comme $\int_0^{n+1} |f''(t)| dt$ est convergente, par domination par une série convergente, $\sum b_n$ est absolument convergente. $\sum f'(n)$ est alors convergente comme somme de séries convergentes.

Pour étudier $\sum f(n)$, on reprend (*) :

$$f(n) = F(n+1) - F(n) - \frac{f'(n)}{2} - \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2 f''(t)}{2} dt$$

F ayant une limite en $+\infty$, la série $\sum (F(n+1) - F(n))$ est convergente. De plus, $\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f''(t) dt \right| \leq c_n$. La série $\sum c_n$ étant convergente (vu précédemment), il en est de même de $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t)^2 f''(t) dt$. Comme combinaison linéaire de séries convergentes, $\sum f(n)$ est convergente.

□

Correction de l'Exercice 30

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. La suite $(m_k)_k$ est de limite nulle et positive. En appliquant la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient immédiatement le résultat souhaité.

b. Par passage à la limite (en n) de l'inégalité $|a_k(n)| \leq m_k$ on obtient que pour tout k , $|b_k| \leq m_k$ et à partir du rang K , $|b_k| \leq \frac{1}{2}$ donc $1 + b_k > 0$ (et même $\frac{1}{2} \leq (1 + b_k) \leq \frac{3}{2}$).

Alors pour $N \geq K$, $P_N = P_K Q_N$ avec $Q_N = \prod_{k=K}^N (1 + b_k)$. Les termes de ce produit

sont tous positifs; on peut donc en prendre le logarithme $\ln(Q_N) = \sum_{k=K}^N \ln(1 + b_k)$. $|b_k|$ étant majorée par m_k , la série $\sum b_k$ est absolument convergente. Or $|\ln(1 + b_k)| \sim |b_k|$, donc $(\ln(Q_N))_{N \geq K}$ est une suite convergente comme suite des sommes partielles d'une série absolument convergente; il en est de même de $(Q_N)_N$ et donc de $(P_N)_N$.

Par le même raisonnement, pour tout n , $A(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k(n))$ est convergent.

c. Pour $k \geq K$, b_k et tous les nombres $a_k(n)$ sont dans le segment $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ où la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est maximale en $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\ln(1 + a_k(n)) - \ln(1 + b_k)| \leq \frac{2}{3} |a_k(n) - b_k| \leq \frac{4}{3} m_k.$$

En sommant ces inégalités à partir d'un rang $N \geq K$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{+\infty} \ln(1 + a_k(n)) - \sum_{k=N}^{+\infty} \ln(1 + b_k) \right| \leq \frac{4}{3} \sum_{k=N}^{+\infty} m_k.$$

Le terme majorant étant le reste d'une série convergente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $K_0 \geq K$ pour lequel pour tout $N \geq K_0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=N}^{+\infty} \ln(1 + a_k(n)) - \sum_{k=N}^{+\infty} \ln(1 + b_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe $N = K_0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=K}^{K_0-1} \ln(1 + a_k(n)) = \sum_{k=K}^{K_0-1} \ln(1 + b_k)$, il existe un rang N_0 tel que pour $n \geq N_0$:

$$\left| \sum_{k=K}^{K_0-1} \ln(1 + a_k(n)) - \sum_{k=K}^{K_0-1} \ln(1 + b_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

soit finalement

$$\left| \sum_{k=K}^{+\infty} \ln(1 + a_k(n)) - \sum_{k=K}^{+\infty} \ln(1 + b_k) \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=K}^{+\infty} \ln(1 + a_k(n)) = \sum_{k=K}^{+\infty} \ln(1 + b_k)$ et par composition par l'expo-

nentielle $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=K}^{+\infty} (1 + a_k(n)) = \prod_{k=K}^{+\infty} (1 + b_k)$. Comme produit fini de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{K-1} (1 + a_k(n)) = \prod_{k=1}^{K-1} (1 + b_k), \text{ et on obtient bien } \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + b_k).$$

2.

a. Par la formule de Moivre, $\sin(mx) = \text{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^m)$ soit en développant par

la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\sin(mx) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2(n-k)}(x) \sin^{2k+1}(x) \\ &= \sin(x) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1 - \sin^2 x)^{n-k} \sin^{2k}(x) \\ &= \sin(x) U(\sin(x)) \text{ avec } U(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1 - X^2)^{n-k} X^{2k}.\end{aligned}$$

U est un polynôme pair de degré au plus $2n$.

Le terme en X^{2n} est $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \neq 0$. C'est donc un polynôme de degré $2n$.

Cherchons ses racines positives appartenant à $]0, 1]$.

Soit r une telle racine et $x = \text{Arcsin}(r)$ alors $U(r) = 0$ équivaut à $\sin(mx) = 0$ et comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $x = \frac{k\pi}{m}$ avec $k \in [1, n]$. On a ainsi trouvé n racines positives distinctes.

Par parité de U , leurs opposées sont aussi racines : on a ainsi $2n$ racines distinctes pour un polynôme de degré $2n$. On a donc trouvé toutes les racines et elles sont simples :

$$U(X) = a_n \prod_{k=1}^n \left(X^2 - \sin^2 \left(\frac{k\pi}{m} \right) \right).$$

Le terme constant de U dans l'expression initiale est celui pour $k = 0$. On a donc :

$$U(0) = \binom{2n+1}{1} = m+1 = a_n (-1)^n \prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{m} \right)$$

soit $a_n = \frac{(-1)^n m}{\prod_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{m} \right)}$ ce qui donne bien alors :

$$\sin(mx) = m \sin(x) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/m)} \right).$$

b. En remplaçant x par $\frac{x}{2n+1}$, on obtient alors

$$\sin(x) = (2n+1) \sin \left(\frac{x}{2n+1} \right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2n+1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \right)$$

Pour $x = 0$ la formule est triviale.

Posons $a_k(n) = -\frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2n+1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}$ pour $k \leq n$ et $a_k(n) = 0$ pour $k > n$. On a alors :

$$\sin(x) = (2n+1) \sin \left(\frac{x}{2n+1} \right) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k(n)).$$

Soit k fixé. Pour $n \geq k$, $a_k(n) = -\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ a pour limite $-\frac{x^2}{k^2\pi^2}$ puisque $\sin y \sim y$ au voisinage de 0.

Pour appliquer ce qui précède, il faut trouver un nombre m_k majorant tous les $|a_k(n)|$ donc les $|a_k(n)|$ pour $n \geq k$, les autres étant nuls. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ (on peut le vérifier par étude de la fonction $x \mapsto \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$) et sur $\mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, aussi :

$$|a_k(n)| \leq \frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4k^2\pi^2}{\pi^2(2n+1)^2}} = \frac{4x^2}{k^2} = m_k$$

La série $\sum m_k$ étant convergente, la première question permet d'affirmer que :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) = x$, par produit de limites on trouve le résultat escompté :

$$\forall x, \sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right).$$

□

Correction de l'Exercice 31

[Retour à l'énoncé](#)

Par inégalité triangulaire inversée comme $\vec{x} - \vec{y} - (\vec{y} - \vec{z}) = -3\vec{y}$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| \geq \|\vec{x} - \vec{y} - (\vec{y} - \vec{z})\| = 3\|\vec{y}\|$$

Par permutation circulaire, on obtient alors :

$$\begin{cases} \|\vec{y} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{x}\| \geq 3\|\vec{z}\| \\ \|\vec{z} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 3\|\vec{x}\| \end{cases}$$

En additionnant ces trois inégalités, on a immédiatement le résultat souhaité.

□

Correction de l'Exercice 32

[Retour à l'énoncé](#)

Soit u le vecteur $\frac{a' - a}{N(a' - a)}$ si $a \neq a'$ et u quelconque de norme 1 si $a = a'$. On a donc $a' - a = \alpha u$. Soit D la droite $\{a + tu, t \in \mathbb{R}\}$. Alors $\mathcal{B}(a, r) \cap D = \{a + tu, t \in]-r, r[\}$ et $\mathcal{B}(a', r') \cap D = \{a' + tu, t \in]-r', r'[\}$ soit $\mathcal{B}(a', r') \cap D = \{a + tu, t \in]\alpha - r', \alpha + r'[\}$.

Aussi si $\mathcal{B}(a, r) = \mathcal{B}(a', r)$, $\begin{cases} -r = \alpha - r' \\ r = \alpha + r' \end{cases}$ soit $\alpha = 0$ (donc $a = a'$) et $r = r'$.

La réciproque est triviale : si $a = a'$ et $r = r'$, $\mathcal{B}(a, r) = \mathcal{B}(a', r)$.

□

Correction de l'Exercice 33[Retour à l'énoncé](#)

1. Le trinôme $t^2 + t + 1$ a un discriminant strictement négatif, il ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$ est bien définie pour tout couple (x, y) sur $\mathbb{R}$.

Elle est continue : l'image du segment $[0, 1]$ est un segment. $N_0(x, y)$ est bien défini (c'est même un maximum). De plus, φ est de limite nulle en $\pm\infty$: elle est donc bornée. $N_1(x, y)$ est défini pour tout élément de $\mathbb{R}^2$.

Posons $I_0 = [0, 1]$ et $I_1 = \mathbb{R}$. Vérifions les 3 axiomes d'une norme : dans la suite, $i \in \{0, 1\}$

- axiome de séparation : $N_i(x, y) = 0$ ($i \in \{0, 1\}$) si et seulement si pour tout réel $t \in I_i$, $|x + ty| = 0$. Le polynôme en t , $x + ty$, ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul donc $(x, y) = (0, 0)$.
- axiome d'homogénéité : Si $\lambda = 0$, on a bien $N_i(0, 0) = 0N_i(x, y)$. Soit λ non nul. Pour tout t in I_i :

$$\frac{|\lambda x + t\lambda y|}{1 + t + t^2} = |\lambda| \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} \leq |\lambda| N_i(x, y)$$

ce qui prouve que $N_i(\lambda x, \lambda y) \leq |\lambda| N_i(x, y)$. En remplaçant (x, y) par $(\lambda x, \lambda y)$ et λ par son inverse, on obtient l'inégalité inverse $N_i(x, y) \leq \frac{N_i(\lambda x, \lambda y)}{|\lambda|}$ ce qui prouve que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_i(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N_i(x, y).$$

- inégalité triangulaire : Pour tout quadruplet (x, y, x', y') , et tout $t \in I_i$:

$$\frac{|x + x' + t(y + y')|}{1 + t + t^2} \leq \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2} + \frac{|x' + ty'|}{1 + t + t^2} \leq N_i(x, y) + N_i(x', y')$$

$$\text{donc } N_i(x + x', y + y') \leq N_i(x, y) + N_i(x', y')$$

N_0 et N_1 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

2. Désignons par $\mathcal{B}_i$ la boule fermée centrée en $(0, 0)$ de rayon 1.

(x, y) est dans $\mathcal{B}_i$ si et seulement si pour tout $t \in I_i$, $\frac{x + ty}{1 + t + t^2} \in [-1, 1]$, ce qui équivaut à

$$\forall t \in I_i, \begin{cases} t^2 + t(1 - y) + (1 - x) \geq 0 \\ t^2 + t(1 + y) + (1 + x) \geq 0 \end{cases}$$

- Cas $i = 1$: le trinôme $t^2 + t(1 - y) + (1 - x)$ reste positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul soit :

$$(1 - y)^2 \leq 4(1 - x)$$

De même, $t^2 + t(1 + y) + (1 + x) \geq 0$ si et seulement si $(1 + y)^2 \leq 4(1 + x)$. La boule

unité $\mathcal{B}_1$ d'équations $\begin{cases} x \leq 1 - \frac{(1 - y)^2}{4} \\ x \geq -1 + \frac{(1 + y)^2}{4} \end{cases}$ est donc la partie colorée en bleu entre les deux paraboles.

Comme pour les éléments de cette boule, $-1 + \frac{(1 + y)^2}{4} \leq 1 - \frac{(1 - y)^2}{4}$, on a $y^2 \leq 3$.

Les points d'intersection des deux courbes $x = 1 - \frac{(1-y)^2}{4}$ et $x = -1 + \frac{(1+y)^2}{4}$ sont les points $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ et $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3})$

- Cas $i = 0$. cette boule unité contient la boule précédente car elle est constitué des éléments tels que pour tout $t \in [0, 1]$,
$$\begin{cases} t^2 + t(1-y) + (1-x) \geq 0 \\ t^2 + t(1+y) + (1+x) \geq 0 \end{cases}.$$

Soit $f(t) = t^2 + t(1-y) + (1-x)$. Ce trinôme admet son minimum en $t_0 = \frac{y-1}{2}$; la fonction est décroissante sur $]-\infty, t_0]$ et croissante sur $[t_0, +\infty[$

★ Si $y \in [1, 3]$, $y_0 \in [0, 1]$. Le trinôme est positif sur $[0, 1]$ si et seulement si son minimum est positif : on retrouve la condition précédente $(1-y)^2 \leq 4(1-x)$ soit $x \leq x_1(y) = 1 - \frac{(1-y)^2}{4}$.

★ Si $y < 1, y_0 < 0$, la fonction est croissante sur $[0, 1]$ donc f est minimale en 0. Il faut donc que $f(0) \geq 0$ soit $x \leq 1$

★ Si $y > 3, y_0 > 1$, la fonction est décroissante sur $[0, 1]$ donc f est minimale en 1. Il faut donc que $f(1) \geq 0$ soit $x + y \leq 3$

En échangeant (x, y) en $(-x, -y)$ on obtient les conditions pour que $t^2 + t(1+y) + (1+x)$ reste positif sur $[0, 1]$.

★ Si $y \in [-1, -3]$, $x \geq x_2(y) = -1 + \frac{(1+y)^2}{4}$.

★ Si $y > -1, x \geq -1$

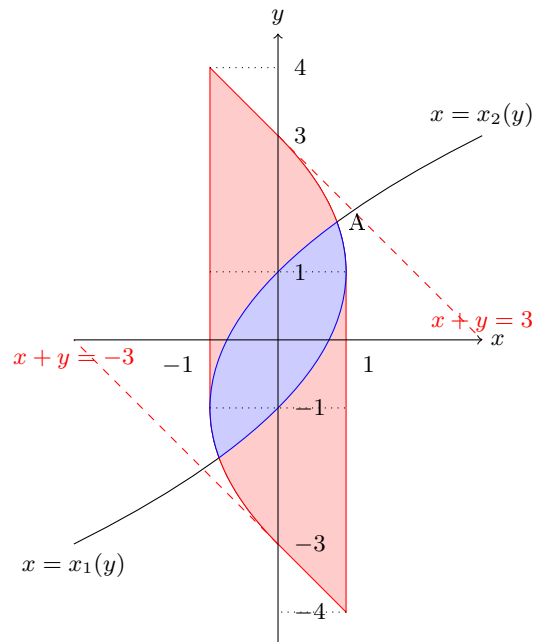
★ Si $y < -3, x + y \geq -3$

En résumé, les deux trinômes sont positifs sur $[0, 1]$ si il vérifie l'une des conditions suivantes :

- $y < -3$ et $-3 - y \leq x \leq 1$ (ceci impose $y \geq -4$) ;
- $-3 \leq y \leq -1$ et $x_2(y) \leq x \leq 1$;
- $-1 \leq y \leq 1$ et $-1 \leq x \leq 1$;
- $1 \leq y \leq 3$ et $-1 \leq x \leq x_1(y)$
- $y \leq 3$ et $-1 \leq x \leq 3 - y$ (ce qui impose $y < 4$)

La boule unité $\mathcal{B}_0$ est donc constitué de la partie du plan colorée en bleu ou en rouge, bords compris. Les boules sont bien symétriques par rapport à $(0, 0)$.

Le point A sur la figure ci-contre a pour coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$.



□

Correction de l'Exercice 34[Retour à l'énoncé](#)

Soit $E_{i,j}$ la matrice ayant un 1 en place (i, j) et des zéros partout ailleurs. Le produit $E_{1,1}E_{2,2}$ est nul donc pour toute norme N , $N(E_{1,1}E_{2,2}) = 0$; or $N(E_{1,1})N(E_{2,2})$ est le produit de deux termes non nuls ($N(A) = 0 \iff A = 0$) donc $N(E_{1,1})N(E_{2,2}) \neq N(E_{1,1}E_{2,2})$. Il n'existe donc pas de norme telle que $N(AB) = N(A)N(B)$ pour tout couple de matrices (A, B) .

□

Correction de l'Exercice 35[Retour à l'énoncé](#)

1. On développe les expressions avec le produit scalaire :

$$\|P+Q\|^2 + \|P-Q\|^2 = \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|P\|^2 + \|Q\|^2 - 2\langle P, Q \rangle = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2).$$

Cette égalité est l'identité du parallélogramme.

2.

a. Vérifions les trois axiomes :

- Séparation : $\|P\|_\alpha = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [0, n]$, $P(\alpha_k) = 0$. P de degré au plus n a $n+1$ racines : c'est le polynôme nul.
- Homogénéité : Pour tout réel λ et tout polynôme P , pour tout entier $k \in [0, n]$, $|(\lambda P)(\alpha_k)| = |\lambda| |P(\alpha_k)|$. En sommant ces $n+1$ égalités, on obtient directement le résultat : $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$.
- Inégalité triangulaire : Pour tout couple de polynômes (P, Q) et tout entier k , on a $|P(\alpha_k) + Q(\alpha_k)| \leq |P(\alpha_k)| + |Q(\alpha_k)|$. En sommant ces $n+1$ inégalités, on a bien $\|P+Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

b. Compte tenu des n racines de L_i de degré au plus n , $L_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - \alpha_j)$. Comme

$$L_i(\alpha_i) = 1, \text{ on trouve } \lambda_i \text{ et } L_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

c. $L_i + L_j(\alpha_k) = 0$ si $k \notin \{i, j\}$ et 1 sinon, donc $\|L_i + L_j\|_\alpha = 2$. De même, $L_i - L_j(\alpha_k) = 0$ si $k \notin \{i, j\}$, 1 si $k = i$ et -1 si $k = j$, donc $\|L_i - L_j\|_\alpha = 2$. Or $\|L_i\|_\alpha = \|L_j\|_\alpha = 1$. L'égalité du parallélogramme n'est pas vérifiée par $\|\cdot\|_\alpha$: ce n'est pas une norme euclidienne.

3. Si $P \mapsto \|P\|'_\alpha$ est une norme euclidienne, elle provient d'un produit scalaire donné par l'égalité de polarisation :

$$2\langle P, Q \rangle = \|P+Q\|'_\alpha - \|P\|'_\alpha - \|Q\|'_\alpha = 2 \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k).$$

Vérifions que $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$ est un produit scalaire. Le côté bilinéaire et symétrique est trivial. $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)^2 \geq 0$ et il y a égalité si et seulement si pour tout k ,

$P(\alpha_k) = 0$ ce qui conduit à $P = 0$ (mêmes arguments que dans la question 2.a).

Comme $\|P\|'_\alpha = \sqrt{\langle P, P \rangle}$, $\|\cdot\|'_\alpha$ est bien une norme euclidienne.

a. $\|P\|_\alpha^2 = \|P\|'_\alpha^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} |P(\alpha_i)P(\alpha_j)|$, on peut choisir $e = 1$.

Comme pour tout k , $|P(\alpha_k)| \leq \|P\|'_\alpha$, on peut choisir $f = n + 1$.

Ce n'est pas le plus petit f possible : en effet, si $(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n)$ sont $2(n+1)$ réels, en

utilisant le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on obtient $\sum_{k=0}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}$.

En choisissant $a_k = 1$ et $b_k = |P(\alpha_k)|$, on obtient $\|P\|_\alpha \leq \sqrt{n+1} \|P\|'_\alpha$. On ne peut plus diminuer f car le polynôme constant 1 transforme cette inégalité en égalité.

□

Correction de l'Exercice 36

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $x = (0, 0)$, pour tout $t > 0$, $\frac{x}{t} = (0, 0) \in K$ aussi $N(0, 0) = \inf \mathbb{R}^{+*} = 0$.

O étant intérieur à K , il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ pour la norme euclidienne centrée en O de rayon $r > 0$ incluse dans K .

Soit x autre que $(0, 0)$: Posons $I_x = \left\{ t > 0 \mid \frac{x}{t} \in K \right\}$. $N(x)$ est défini si et seulement si I_x est non vide car I_x est minoré par 0. Comme $\alpha \frac{x}{\|x\|}$ est de norme α , cet élément est dans

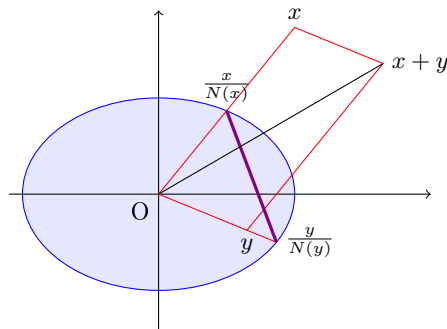
$\mathcal{B}$ donc dans K pour $\alpha < r$ et si $0 < \alpha < r$, $\frac{\|x\|}{\alpha}$ est dans I_x : I_x est non vide ; $N(x)$ est donc bien défini.

K étant majoré, il existe M tel que $\forall y \in K, \|y\| \leq M$. Ainsi si t est élément de I_x , $\frac{\|x\|}{t} \leq M$ d'où $t \geq \frac{\|x\|}{M}$ et $N(x) \geq \frac{\|x\|}{M} > 0$.

Par définition d'une borne inférieure, il existe pour tout entier naturel n non nul un élément t_n de I_x tel que $N(x) \leq t_n \leq N(x) + \frac{1}{n}$. $(t - n)_n$ est une suite de réels non nuls de limite $N(x)$ non nul. La suite $x_n = \frac{x}{t_n}$ est une suite d'éléments de K de limite $\frac{x}{N(x)}$; K étant fermé, cet élément appartient à K donc $N(x)$ est élément de I_x : c'est donc un minimum.

2. Par définition, $N(x) \geq 0$ pour tout x et dans la question précédente, on a démontré que $N(x) = 0$ si et seulement si $x = (0, 0)$. L'axiome de séparation est bien vérifié.

Si $\lambda = 0$ ou $x = (0, 0)$: $N(\lambda x) = 0 = \lambda N(x)$. Soit λ non nul et x différent de $(0, 0)$. $t \in I_x$ équivaut alors à $\lambda t \in I_{\lambda x}$ pour $\lambda > 0$. Comme K est symétrique par rapport à O , $\frac{\lambda x}{t} \in K$ équivaut à $-\frac{\lambda x}{t} \in K$. Ainsi $t \in I_x$ équivaut alors à $|\lambda|t \in I_{\lambda x}$. L'application $t \mapsto |\lambda|t$ étant croissante, elle transforme le minimum de I_x en le minimum de $I_{\lambda x}$. On a donc $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. L'axiome d'homogénéité a bien été vérifié dans tous les cas.



K est en bleu sur cette figure.

L'inégalité triangulaire est triviale si x ou y est nul. Supposons x et y différents de $(0,0)$ et de somme non nulle. Les éléments $\frac{x}{N(x)}$ et $\frac{y}{N(y)}$ sont des éléments de K par la première question et comme K est convexe, le segment joignant ces points (en violet sur la figure ci-contre) est inclus dans K .

On va donc rechercher un point sur ce segment appartenant à la droite dirigée par $x+y$. On cherche $\alpha \in [0,1]$ tel que $\alpha \frac{x}{N(x)} + (1-\alpha) \frac{y}{N(y)}$ soit colinéaire à $x+y$. Il suffit que $\frac{\alpha}{N(x)} = \frac{1-\alpha}{N(y)}$ ce qui donne $\alpha = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}$ (qui appartient bien à $[0,1]$). Pour cet α :

$$\alpha \frac{x}{N(x)} + (1-\alpha) \frac{y}{N(y)} = \frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in K$$

$N(x)+N(y)$ est élément de I_{x+y} donc $N(x)+N(y) \geq \inf I_{x+y} = N(x+y)$.

Il reste le cas où $x+y=0$ et on a alors $N(x+y)=0 \leq N(x)+N(y)$.

3. Si $x \in K$, $1 \in I_x$ et $N(x) \leq 1$.

Réciproquement si $N(x) \leq 1$ et x non nul, $x_I = \frac{x}{N(x)} \in K$ mais comme $x = N(x)x_I$, x appartient au segment $[Ox_I]$ et est élément de K . On a ainsi prouvé que la boule unité fermée pour la norme N est K .

□

Correction de l'Exercice 37

[Retour à l'énoncé](#)

1. Commençons par le cas $0 \leq x$ et $0 \leq y$ et posons $f(t) = tx^p + (1-t)y^p - (tx + (1-t)y)^p$. Si $x = y$, l'inégalité est triviale ; c'est une égalité. Dans la suite on suppose $x \neq y$. Cette fonction est indéfiniment dérivable ; $f'(t) = x^p - y^p - p(x-y)(tx + (1-t)y)^{p-1}$ et $f''(t) = -p(p-1)(x-y)^2(tx + (1-t)y)^{p-2} > 0$. f' est donc strictement décroissante donc sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\forall t \in [0,1], f'(1) = x^p - y^p - p(x-y)x^{p-1} \leq f'(t) \leq f'(0) = x^p - y^p - p(x-y)y^{p-1}.$$

On a

$$f'(0) = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k - py^{p-1} = (x-y) \sum_{k=0}^{p-2} (x^{p-1-k} - y^{p-1-k}) y^k$$

x et y étant positifs, $x^{p-1-k} - y^{p-1-k}$ a le signe de $(x-y)$; aussi la somme a le signe de $x-y$ et $f'(0) > 0$ (car $x \neq y$). De même, en échangeant le rôle de x et y , $-f'(1) = y^p - x^p - p(y-x)x^{p-1} > 0$. f' admet un unique zéro t_0 sur $[0,1]$: f est croissante sur $[0,t_0]$ et décroissante sur $[t_0,1]$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, f reste positive sur $[0,1]$:

$$\forall t \in [0,1], (tx + (1-t)y)^p \leq tx^p + (1-t)y^p$$

Dans le cas général où le signe de x et y n'est pas connu, on utilise l'inégalité triangulaire puis le résultat précédent appliqué à $|x|$ et $|y|$:

$$\forall t \in [0, 1]; |tx + (1-t)y|^p \leq (t|x| + (1-t)|y|)^p \leq t|x|^p + (1-t)|y|^p.$$

De plus, l'inégalité est stricte pour $t \in]0, 1[$.

2.

a. $\|x\|_p = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$ autrement dit si et seulement si $x = 0$.

Pour tout x et tout réel λ :

$$\|\lambda x\|_p = (|\lambda x_1|^p + |\lambda x_2|^p)^{1/p} = (|\lambda|^p(x_1^p + x_2^p))^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p.$$

b. Soit $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ éléments de $\mathcal{B}$. Posons $z = tx + (1-t)y$ avec $t \in [0, 1]$. Par la première question pour $i = 1$ ou $i = 2$:

$$|z_i|^p = |tx_i + (1-t)y_i|^p \leq t|x_i|^p + (1-t)|y_i|^p$$

En additionnant ces inégalités pour $i = 1$ et $i = 2$, on obtient :

$$\|z\|_p^p \leq t\|x\|_p^p + (1-t)\|y\|_p^p \leq t + (1-t) = 1$$

Le segment $[0, 1]$ est inclus dans $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}$ est convexe.

Soit x et y éléments de $\mathbb{R}^2$. Si l'un des deux est nul, l'inégalité triangulaire est triviale. Supposons les non nuls. On utilise le même raisonnement que dans l'exercice précédent en remplaçant K par $\mathcal{B}$. Par le critère d'homogénéité $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ vérifie $\|x'\|_p = 1$ et x' est

élément de $\mathcal{B}$. De même, $y' = \frac{y}{\|y\|_p}$ est dans $\mathcal{B}$. Du coup, en choisissant $t = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$, on obtient par convexité de $\mathcal{B}$ que

$$tx + (1-t)y = \frac{x+y}{\|x\|_p + \|y\|_p} \in \mathcal{B},$$

soit par homogénéité $\left\| \frac{x+y}{\|x\|_p + \|y\|_p} \right\|_p = \frac{\|x+y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \leq 1$, ce qui donne l'inégalité triangulaire si x et y ne sont pas nuls.

3. Pour $p = 2$, on retrouve la norme euclidienne classique. montrons que c'est la seule valeur de p possible. Si c'est une norme euclidienne, elle vérifie l'égalité du parallélogramme : pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$. En imposant $x = (1, 1)$, $y = (1, -1)$, $x+y = (2, 0)$ et $x-y = (0, 2)$, on obtient $8 = 4 \cdot 2^{2/p}$ soit $2^{2/p} = 2$ donc $p = 2$.

□

Correction de l'Exercice 38

[Retour à l'énoncé](#)

Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Soit Π le plan engendré par ces deux vecteurs et F un supplémentaire de celui-ci dans E .

Alors $\vec{u}_n = a_n \vec{u} + b_n \vec{v} + \vec{u}'_n$ et $\vec{v}_n = c_n \vec{u} + d_n \vec{v} + \vec{v}'_n$, où $\vec{u}'_n$ et $\vec{v}'_n$ sont éléments de F . Par convergence de la suite $(\vec{u}_n)_n$ vers u , $(a_n)_n$ est de limite $a = 1$, $(b_n)_n$ est de limite $b = 0$.

Par convergence de la suite $(\vec{v}_n)_n$ vers v , $(d_n)_n$ est de limite $d = 1$, $(c_n)_n$ est de limite $c = 0$.

$\vec{u}_n$ étant colinéaire à $\vec{v}_n$, il existe λ_n tel que $\vec{u}_n = \lambda_n \vec{v}_n$ ce qui impose $a_n = \lambda c_n$ et

$b_n = \lambda_n d_n$ d'où $a_n d_n - b_n c_n = 0$. Les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ et $(d_n)_n$ étant convergentes, par passage à la limite, $ad - bc = 0$ ce qui est en contradiction avec $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1)$.

□

Correction de l'Exercice 39

[Retour à l'énoncé](#)

1. $(I_p - A)A_n = I_p - A^{n+1}$. Or $A^{n+1} = A_{n+1} - A_n$ a pour limite $B - B = 0$. Le membre de droite converge donc vers I_p . L'application $M \mapsto (I_p - A)M$ étant linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, elle est continue. Le membre de gauche converge donc vers $(I_p - A)B$. On a ainsi $(I_p - A)B = I_p$. En prenant le déterminant de cette expression, on vérifie que $I_p - A$ est de déterminant non nul et est donc inversible et on a alors $B = (I_p - A)^{-1}$.

2. Si $A = 2I_p$, $I_p - A$ est inversible et $A_n = \sum_{k=0}^n 2^k I_p = (2^{n+1} - 1)I_p$: c'est une suite divergente.

□

Correction de l'Exercice 40

[Retour à l'énoncé](#)

Posons $\vec{y}_n = \vec{x}_n + \lambda \vec{x}_{n+1}$. Il est immédiat que si $(\vec{x}_n)_n$ converge vers $\vec{x}$ la suite $(\vec{y}_n)_n$ converge vers $(1 + \lambda)\vec{x}$.

Étudions la réciproque. Montrons que si $(\vec{y}_n)_n$ converge vers $\vec{y}$, $(\vec{x}_n)_n$ converge vers $\frac{1}{1 + \lambda}\vec{y}$.

Comme λ est non nul :

$$\vec{x}_n = \frac{1}{\lambda}(\vec{y}_{n-1} - \vec{x}_{n-1}) = \frac{1}{\lambda}\vec{y}_{n-1} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{y}_{n-2} + \frac{1}{\lambda^2}\vec{x}_{n-2}$$

et de proche en proche (ou par un calcul avec télescopage) :

$$\vec{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} \vec{y}_{n-1-k} - \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^n} \vec{x}_0.$$

Le terme $\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^n} \vec{x}_0$ est de limite nulle puisque $|\lambda| > 1$.

Pour le premier terme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} \vec{y}_{n-1-k}$, on peut l'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} \vec{y}_{n-1-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (\vec{y}_{n-1-k} - \vec{y})}{\lambda^{k+1}}}_{\vec{z}_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} \vec{y}$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}$ est la somme partielle d'une série géométrique de premier terme $\frac{1}{\lambda}$ et de raison $-\frac{1}{\lambda}$ de module strictement inférieur à 1 : elle converge vers $\frac{1}{1 + \lambda}$.

Il reste donc à prouver que le premier terme est de limite nulle. Or :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (\vec{y}_{n-1-k} - \vec{y})}{\lambda^{k+1}} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k} (\vec{y}_k - \vec{y})}{\lambda^{n-k}} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|\vec{y}_k - \vec{y}\|}{|\lambda|^{n-k}} = a_n$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un rang N pour lequel :

$$k \geq N \implies \|\vec{y}_k - \vec{y}\| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| - 1)}.$$

Aussi pour $n \geq N$:

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda|^n} \sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{y}_k - \vec{y}\| |\lambda|^k}_A + \sum_{k=N-1}^{n-1} \frac{1}{|\lambda|^{n-k}} \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| - 1)} \leq \frac{A}{\lambda^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^k} \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| - 1)} = \frac{A}{\lambda^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un rang N' tel que

$$n \geq N' \implies |A\lambda|^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour

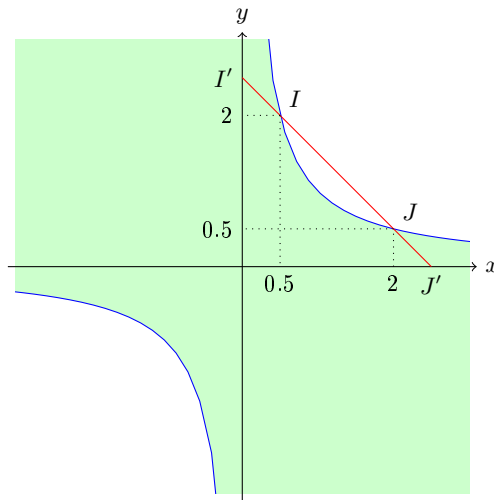
$$n \geq \max(N, N') \implies 0 \leq a_n \leq \varepsilon.$$

$(a_n)_n$ et donc $(\|\vec{z}_n\|)_n$ est de limite nulle donc $\lim \vec{z}_n = \vec{0}$. Ainsi $(\vec{x}_n)_n$ est convergente.

□

Correction de l'Exercice 41

[Retour à l'énoncé](#)



1. A est la courbe ci-contre (en bleu). Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy - 1.$$

f étant continue, $A = f^{-1}(\{0\})$ est donc fermé.

Les éléments $M_n = (1 + \frac{1}{n}, 1)$ sont des éléments du complémentaire de A et la suite M_n converge vers $(1, 1)$ élément de A : le complémentaire de A n'est pas fermé, A n'est pas ouvert. A n'est pas borné car il contient les points $(n, \frac{1}{n})$.

$I = (0.5, 2)$ et $J = (2, 0.5)$ sont éléments de A et leur milieu n'appartient pas à A : A n'est pas convexe.

On aurait pu aussi choisir (x, y) élément de A , le symétrique de A par rapport à $(0, 0)$ est aussi élément de A et leur milieu $(0, 0)$ n'est pas élément de A .

2. A' est la partie en vert sur la figure. $A' = f^{-1}(-\infty, 0]$ est donc ouvert.

La suite $x_n = (1 - \frac{1}{n}, 1)$ avec $n \geq 1$ est une suite d'éléments de A' qui converge vers un élément de A : A' n'est pas fermé.

A' n'est pas borné : les points $(-n, 1)$ sont éléments de A' . Les points $I' = (0, 2.5)$ et $J' = (2.5, 0)$ sont éléments de A' contrairement à leur milieu : A' n'est pas convexe.

3. L'application $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 1$ étant continue (polynomiale en (x, y)), $g^{-1}(\mathbb{R}^{*-})$ est un ouvert. Ce n'est pas un fermé car la suite $x_n = (1 - \frac{1}{n}, 0)$ avec $n \geq 1$ est une suite de

points de B qui converge vers un point n'appartenant pas à B : B n'est pas fermé.

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \text{ donc lorsque } (x, y) \in B, |y| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } |x + \frac{y}{2}| \leq 1, \text{ ce qui}$$

impose $|x| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$: B est borné.

Montrons que B est convexe :

soient (x, y) et (x', y') éléments de B et $t \in [0, 1]$ et $(x_1, y_1) = t(x, y) + (1-t)(x', y')$.

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = t^2(x^2 + xy + y^2) + (1-t)^2(x'^2 + x'y' + y'^2) + t(1-t)(2xx' + 2yy' + xy' + x'y)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$.

Avec $\alpha = x + \frac{y}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}y}{2}, \alpha' = x' + \frac{y'}{2}, \beta' = \frac{\sqrt{3}y'}{2}$, on obtient :

$$xx' + \frac{xy' + x'y}{2} + yy' \leq \sqrt{x^2 + xy + y^2}\sqrt{x'^2 + x'y' + y'^2} \leq 1$$

soit

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 \leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1$$

Remarque : on peut démontrer tous ces résultats par une méthode plus rapide en vérifiant que $\Phi : ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + \frac{xy' + x'y}{2} + yy'$ est un produit scalaire. dans ce cas, B est la boule ouverte unité (donc ouvert, borné et convexe). Φ est bilinéaire et symétrique. De plus, $\Phi((x, y), (x, y)) = x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ et cette quantité est nulle si et seulement si $y = 0$ et $x + \frac{y}{2} = 0$ soit $(x, y) = (0, 0)$.

B est la boule ouverte unité (donc ouvert, borné et convexe) associée à la norme euclidienne provenant de Φ .

4. C est constitué des complexes $(x + iy)$ tels que $x^2 - y^2 \leq 1$.

$z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ étant continue ainsi que $z \mapsto z^2$, $f : z \mapsto \operatorname{Re}(z^2)$ est continue, donc C est un fermé. Ce n'est pas un ouvert car son complémentaire n'est pas fermé : pour tout n non nul $z_n = 1 + \frac{1}{n}$ n'appartient pas à C et cette suite converge vers $(1, 0)$ élément de C .

L'ensemble des complexes de partie réelle nulle sont éléments de C : C n'est pas borné.

Soit $z = 2 + 2i$ est élément de C ainsi que son conjugué : leur milieu n'est pas élément de C .

□

Correction de l'Exercice 42

[Retour à l'énoncé](#)

Soit x et y des éléments de E adhérents à C . Il existe $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ suites d'éléments de C de limite x et y . Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y = \lim tx_n + (1-t)y_n$. Comme C est convexe, pour tout n , $tx_n + (1-t)y_n \in C$ et donc $tx + (1-t)y$ est adhérent à C : $\overline{C}$ est convexe.

Soient x et y des éléments de E intérieurs à C . Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset C$ et $\mathcal{B}(y, r) \subset C$ (on peut choisir le même rayon pour ces 2 boules ouvertes quitte à diminuer l'un des deux). Soit $t \in [0, 1]$ et $z = tx + (1-t)y$. Montrons que $\mathcal{B}(z, r)$ est incluse dans C . Soit $z_1 \in \mathcal{B}(z, r)$ par définition $\|z_1 - z\| < r$. En translatant x, y et z de $v = z_1 - z$, on définit $x_1 = x + v$ et $y_1 = y + v$. Comme $\|v\| < r$, $x_1 \in \mathcal{B}(x, r) \subset C$ et $y_1 \in \mathcal{B}(y, r) \subset C$; or $z = tx_1 + (1-t)y_1$ donc z_1 est élément de C . z est intérieur à C : $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

□

Correction de l'Exercice 43[Retour à l'énoncé](#)

1. On remarque d'abord que si α est élément de G , $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. En effet par récurrence on vérifie que pour tout n entier naturel, $n\alpha \in G$ puis les opposés de ces éléments sont dans G .

a. a est bien défini : G contient au moins un élément non nul x et $|x|$ appartient à $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Montrons par l'absurde que a est élément de G . Supposons que a n'est pas élément de G : $a > 0$ car 0 est élément de G . Par définition de la borne inférieure, il existe x élément de G tel que $a < x < 2a$ et y élément de G tel que $a < y < x$. L'élément $x - y$ est élément de G et vérifie $0 < x - y < a$ ce qui est en contradiction avec la définition de a .

b.

- Cas $a > 0$: Par la remarque du début de correction, $a\mathbb{Z} \subset G$.
Réciproquement, soit x un élément de G et n la partie entière de $\frac{x}{a}$ alors il existe $r \in [0, a[$ tel que $x = na + r$. Comme $r = x - na$ est élément de G (différence d'éléments de G) et n'appartient pas à $G \cap \mathbb{R}_+^*$ dont a est le minimum $r = 0$ et $x \in a\mathbb{Z}$. On a vérifié par double inclusion que $G = a\mathbb{Z}$.
- Cas $a = 0$: Soit x un réel, r un réel strictement positif. On cherche à montrer qu'il existe un élément de G dans l'intervalle $I =]x - r, x + r[$. Comme $a = 0$, il existe un réel α appartenant à G tel que $0 < \alpha < r$. Soit n la partie entière de $\frac{x}{\alpha}$ alors $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$ donc $x - r < x - \alpha < n\alpha \leq x < x + r$. Comme $\alpha \in G$, il en est de même de $n\alpha$: tout réel est adhérent à G .

2. $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \{\alpha m + \beta n, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$: il est non vide et non réduit à $\{0\}$ (il contient α et β) et la différence de deux éléments de G appartient à G . Soit $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Si $a > 0$, d'après la question précédente, $G = a\mathbb{Z}$ donc il existe p et q entiers naturels non nuls tels que $\alpha = pa$ et $\beta = qa$. Ainsi $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Par contraposition, si $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, $a = 0$ et G est dense dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement supposons que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Soit $\gamma = \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$. Tout élément $x = m\alpha + n\beta$ s'écrit alors $x = (mp + nq)\gamma$ donc $G \subset \gamma\mathbb{Z}$ et $]\gamma, 2\gamma[\cap G = \emptyset$; G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Par contraposition, si G est dense, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.

3. Par définition, $T \in P(f)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. $P(f)$ est non vide car il contient 0 . Si T et T' sont des périodes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T - T') = f(x + T) = f(x).$$

$T - T'$ est une période : $P(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Soit $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $P(f)$ de limite T . Par continuité de f , pour tout x , $f(x + T) = \lim f(x + T_n) = f(x)$. Ainsi T appartient aussi à $P(f)$: $P(f)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Soit a et b deux périodes tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$: ce sont donc deux nombres non nuls distincts. a et b étant éléments de $P(f)$, $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset P(f)$, donc $\overline{G} = \mathbb{R} \subset \overline{P(f)} = P(f)$ donc $P(f) = \mathbb{R}$. Aussi pour tout réel x , $f(x + 0) = f(0)$ donc f est constante.

4. $f + g$ étant de période c , $f(x + c) + g(x + c) = f(x) + g(x)$ donc

$$\forall x \Delta(x) = f(x + c) - f(x) = g(x) - g(x + c)$$

f ayant comme période a , Δ a comme période a ; de même, g ayant comme période b , Δ a comme période b . Si $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont rationnels, $\frac{a}{b}$ est rationnel. Par contraposition, $\frac{a}{c}$ ou $\frac{b}{c}$ est irrationnel. Par la question précédente, si $\frac{a}{c} \notin \mathbb{Q}$, f est constante et si $\frac{b}{c} \notin \mathbb{Q}$, g est constante.

□

Correction de l'Exercice 44

[Retour à l'énoncé](#)

1. Pour tout n , $u_n(\alpha) > 0$. La seule limite infinie possible est donc $+\infty$. Si L est un réel, par passage à la limite, $L^2 = L$ donc $L \in \{0, 1\}$.

2. Par récurrence immédiate, $\alpha \mapsto u_n(\alpha)$ est strictement croissante. Si α et β sont dans E_L , et $\gamma \in]\alpha, \beta[$, $u_n(\alpha) < u_n(\gamma) < u_n(\beta)$ et par théorème d'encadrement, $\gamma \in E_L$. E_L est donc un intervalle.

3. Si $\alpha > 1$, par récurrence, pour tout n , $u_n(\alpha) > 1$ et $u_{n+1}(\alpha) > u_n(\alpha)$. La suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et ne peut converger ni vers 0 ni vers 1. Elle ne peut pas converger, donc étant croissante, elle diverge vers $+\infty$. Ainsi $]1, +\infty[\subset E_{+\infty}$.

Soit $A_n = \{\alpha > 0, u_n(\alpha) > 1\}$. $\alpha \mapsto u_n(\alpha)$ est par récurrence une fonction continue donc A_n est un ouvert. Si $(u_n(\alpha))_n$ diverge vers $+\infty$, à partir d'un certain rang, $\alpha \in A_n$ donc $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Réciproquement, si $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, il existe p tel que $\alpha \in E_p$ et le même raisonnement que précédemment prouve que la suite $(u_n(\alpha))_n$ est croissante à partir du rang p et diverge vers $+\infty$ donc $\alpha \in E_{+\infty}$.

Ainsi $E_{+\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et comme union d'ouverts c'est un ouvert.

□

Correction de l'Exercice 45

[Retour à l'énoncé](#)

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si $P + c$ admet α comme racine multiple, $P(\alpha) + c = P'(\alpha) = 0$ donc α est aussi racine de P' .

1. Aussi si $c \notin \Omega_P$, $c = -P(\alpha)$ où α est racine de P' . Le nombre de racines de P' étant fini (car P' est non nul), $\mathbb{C} \setminus \Omega_P$ est fini.

2. Soit n le degré de P ; P n'étant pas constant, $n \geq 2$. Si Ω_P est non vide et c un élément de Ω_P , $P + c$ a n racines distinctes $\alpha_1(c) < \alpha_2(c) < \dots < \alpha_n(c)$ et $P + c$ change de signe en chaque racine.

Quitte à changer P en $-P$, on peut supposer que le terme dominant de P est strictement positif donc P est positif au voisinage de $+\infty$.

Par le théorème des accroissements finis, pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il y a une racine β_i de P' ; aussi P' est scindé à racines simples $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$. Comme $P + c$ change de signe en chaque $\alpha_i(c)$ et est positif sur $]\alpha_n(c), +\infty[$; sur l'intervalle $]\alpha_i(c), \alpha_{i+1}(c)[$, $(-1)^{n-i}(P + c)$ est strictement positif donc $(-1)^{n-i}(P(\beta_i) + c) > 0$.

Réciproquement supposons que $(-1)^{n-i}(P(\beta_i) + c)$ est strictement positif pour tout

i. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour i compris entre 1 et $n-1$, comme $(P(\beta_i) + c)(P(\beta_{i+1}) + c) < 0$, $P + c$ admet une racine $\alpha_{i+1}(c)$ sur $J_i =]\beta_i, \beta_{i+1}[$.
 $(P + c)(\beta_n) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) + c = +\infty$, $P + c$ admet donc une racine $\alpha_n(c)$ sur $] \beta_n, +\infty[$.
 $(-1)^n (P(\beta_1) + c) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1)^n (P(x) + c) = +\infty$, $P + c$ admet donc une racine $\alpha_1(c)$ sur $] -\infty, \beta_1[$.

$P + c$ a n racines distinctes : c est élément de Ω_P . Ainsi, $c \in \Omega_P$ si et seulement si $\forall i \in [1, n-1], (-1)^{n-i} (P(\beta_i) + c) > 0$. Ω_P apparait comme intersection d'intervalles ouverts : c'est un intervalle ouvert.

Les inégalités pour $n-1$ et $n-2$ si $n \geq 3$ donnent $-P(\beta_{n-2}) < c < -P(\beta_{n-1})$ donc Ω_P est borné. Si $n = 2$, $\Omega_P = \{c, c < -P(\beta_1)\}$ n'est pas borné.

□

Correction de l'Exercice 46

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $f(x) = f(y)$, alors $|x - y| \leq 0$ donc $x = y$. L'application est injective.
 En appliquant la relation (R) au couple $(x, y) = (0, 1)$, on obtient $|f(0) - f(1)| \geq 1$ mais comme $f(0)$ et $f(1)$ appartiennent au segment $[0, 1]$, $|f(0) - f(1)| \leq 1$; ainsi $|f(0) - f(1)| = 1$.
 $f(0)$ et $f(1)$ sont deux points de $[0, 1]$ distants de 1; aussi $(f(0), f(1)) = (0, 1)$ ou $f(0), f(1) = (1, 0)$. f étant continue, l'image de I par f est un intervalle inclus dans I contenant 0 et 1; donc $f(I) = I$ et f est surjective.

2. f étant continue et injective, elle est strictement monotone.

Si f est strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En appliquant $\mathcal{R}$ aux couples $(0, x)$ et $(1, x)$, on obtient $f(x) = |f(x)| \geq x$ puis $1 - f(x) = |1 - f(x)| \geq 1 - x$ donc

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = x.$$

Si f est strictement décroissante, la même démarche conduit à $1 - f(x) \geq x$ puis $f(x) \geq 1 - x$ soit $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 - x$.

Deux fonctions conviennent (on vérifie qu'elles vérifient bien la relation $\mathcal{R}$) $f(x) = x$ et $f(x) = 1 - x$.

□

Correction de l'Exercice 47

[Retour à l'énoncé](#)

On remarque d'abord que f est paire car $f(-x) = f(x^2) = f(x)$.

Par récurrence sur n , on a pour tout x , $f(x^{2^n}) = f(x)$ et en appliquant cette relation à $x^{2^{-n}}$, $f(x) = f(\frac{1}{x^{2^n}})$.

Si $x \in [0, 1[$, $(x^{2^n})_n$ a pour limite 0 et par continuité de la fonction, $f(x) = \lim f(x^{2^n}) = f(0)$.

La fonction est constante sur $[0, 1[$, puis par par continuité sur $[0, 1]$.

Soit $x > 1$, la suite $(x^{2^{-n}})_n$ tend vers 1, aussi par continuité

$$f(x) = \lim f(\frac{1}{x^{2^n}}) = f(1) = f(0).$$

f est constante sur $\mathbb{R}^+$ et par parité sur $\mathbb{R}$.

□

Correction de l'Exercice 48[Retour à l'énoncé](#)

1. En prenant $y = 0$ dans la relation, on obtient $\forall x, f(x)^2(1 - f(0)^2) = 0$ donc si $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ pour tout x .

2. En choisissant $x = y = \frac{a}{2}$, on obtient que si $f(a) = 0$, $f(\frac{a}{2}) = 0$ puis par récurrence $f(\frac{a}{2^n}) = 0$. Comme la suite $\left(\frac{a}{2^n}\right)_n$ est de limite nulle, par continuité en 0, $f(0) = 0$. Ainsi, compte-tenu de la question précédente, f s'annule si et seulement si c'est la fonction nulle.

3. La fonction nulle est solution. Soit f une autre solution : elle ne s'annule pas et étant continue, elle est de signe constant. Posons $g = \ln(|f|)$ On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y).$$

En prenant $y = 0$, on obtient $g(0) = 0$.

En choisissant $x = y$, on a alors pour tout x , $g(2x) = 4g(x) = 2^2g(x)$. La relation appliquée à (nx, x) donne alors une relation de récurrence $g((n+1)x) = 2g(nx) + 2g(x) - g((n-1)x)$. Par récurrence, on prouve alors que pour tout entier naturel $g(nx) = n^2g(x)$. Cette relation est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$. Si l'hypothèse est réalisée aux rang n et $n-1$:

$$g((n+1)x) = (2n^2 + 2 - (n-1)^2)g(x) = (n^2 + 2n + 1)g(x) = (n+1)^2g(x).$$

Si $x = -y$, $g(2x) = 2g(x) + 2g(-x) = 4g(x)$ donc g est paire. Pour tout réel x et tout entier relatif n , $g(nx) = n^2g(x)$.

Soient $r = \frac{p}{q}$ un nombre relatif $((p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, et x un réel. Posons $y = \frac{x}{q}$ alors $py = rx$ et $qy = x$ aussi : $p^2g(y) = g(rx)$ or $g(x) = q^2g(y)$ donc pour tout rationnel r et tout réel x , $g(rx) = \frac{p^2}{q^2}g(x) = r^2g(x)$. En particulier si r est rationnel, $g(r) = r^2g(1)$.

Si x est réel, c'est la limite d'une suite de rationnels $(r_n)_n$. g étant continue comme composée de fonctions continues,

$$g(x) = \lim g(r_n) = \lim r_n^2g(1) = x^2g(1)$$

En posant $a = g(1)$, on obtient $g(x) = ax^2$ et $|f(x)| = e^{ax^2}$. f étant de signe constant, $\forall x, f(x) = e^{ax^2}$ ou $\forall x, f(x) = -e^{ax^2}$.

Vérifions qu'elles conviennent :

$$e^{a(x+y)^2}e^{a(x-y)^2} = e^{a2x^2 + 2y^2} = (e^{ax^2}e^{ay^2})^2$$

Si f est solution, $-f$ est aussi solution. Les solutions qui conviennent sont donc la fonction nulle, les fonctions $f_a : x \mapsto e^{ax^2}$ et leurs opposées.

□

Correction de l'Exercice 49[Retour à l'énoncé](#)

1. f étant lipschitzienne de rapport $k < 1$, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}|.$$

Ainsi par itération ou récurrence : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$. Comme $k < 1$, la série $\sum k^n$ est convergente, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente donc convergente ce qui implique la convergence de la suite $(u_n)_n$. Soit ℓ sa limite. Comme I est fermé, la suite convergente $(u_n)_n$ d'éléments de I converge dans I : ℓ est élément de I . Par continuité de la fonction en ℓ , la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$: ℓ est un point fixe de f .

2. Soit ℓ et ℓ' deux points fixes de f . Comme $|f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$, $(1 - k)|\ell - \ell'| \leq 0$ ce qui impose comme $k < 1$, $|\ell - \ell'| \leq 0$ soit $\ell = \ell'$. f a donc un unique point fixe sur I .

□

Correction de l'Exercice 50

[Retour à l'énoncé](#)

Il faut donc prouver que pour tout couple (x, y) , $\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|x - y\|$. On distingue 3 cas :

- x et y sont de normes inférieures à 1 :
 $f(x) - f(y) = x - y$ et donc $\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|x - y\|$.
- x et y sont de norme supérieure à 1 : On a alors

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} = \frac{x - y}{\|x\|} + \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right)y,$$

donc par inégalité triangulaire :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} + \frac{|\|y\| - \|x\||}{\|x\|}$$

Or par inégalité triangulaire inversée : $|\|y\| - \|x\|| \leq \|x - y\|$. Comme $\|x\| \geq 1$, on trouve bien $\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|x - y\|$.

- L'un des deux termes est de norme inférieure à 1 et l'autre supérieure. Par symétrie, on peut supposer x de norme inférieure à 1 et y de norme supérieure. On commence comme dans le cas précédent :

$$f(x) - f(y) = x - \frac{y}{\|y\|} = x - y + \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)y,$$

donc par inégalité triangulaire :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + (\|y\| - 1)\|y\|$$

Comme $\|x\| \leq 1$:

$$\|y\| - 1 \leq \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

ce qui permet de vérifier que $\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|x - y\|$.

□

Correction de l'Exercice 51

[Retour à l'énoncé](#)

Soit C le convexe. Soit a et b deux éléments de $f(C)$ et S le segment d'extrémités a et b . Il existe x et y éléments de C tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. L'application ϕ de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ $t \mapsto f(tx + (1 - t)y)$ est continue comme composée d'applications continues : l'image de I

par cette implication est un intervalle $\phi(I)$ est un intervalle contenant $a = \phi(1)$ et $b = \phi(0)$. Ainsi $S \subset \phi(I) \subset f(C)$. Donc $f(C)$ est un convexe de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle.

□

Correction de l'Exercice 52

[Retour à l'énoncé](#)

1. $\{\|x - y\|, y \in A\}$ est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré par 0 : il admet une borne inférieure.

2. Soit x et x' deux éléments de E . Pour tout y élément de A :

$$d(x, A) \leq \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

Aussi comme pour tout y de A , $\|x' - y\| \geq d(x, A) - \|x - x'\|$, par définition d'une borne inférieure :

$$d(x', A) \geq d(x, A) - \|x - x'\| \implies d(x, A) - d(x', A) \leq \|x - x'\|.$$

En échangeant les rôles de x et x' , $d(x', A) - d(x, A) \leq \|x - x'\|$. Ainsi :

$$|d(x, A) - d(x', A)| \leq \|x - x'\|.$$

L'application $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne donc continue.

3. Par définition, $d(x, A) = 0$ équivaut à $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, \|y - x\| < \varepsilon$. ce qui équivaut à toute boule ouverte centrée en x rencontre A qui est la définition d'un point adhérent.

4. Soit $x \in A$. Comme x n'appartient pas à $\overline{B}$, $d(x, B) > 0$. Soit $U = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{d(x, B)}{2})$;

Comme union d'ouverts, U est ouvert. De même, soit $V = \bigcup_{x \in B} B(x, \frac{d(x, A)}{2})$ ouvert de E comme union d'ouverts.

Comme $x \in B(x, r)$ pour tout $r > 0$, $A \subset U$ et $B \subset V$.

Soit $z \in U$. Il existe x élément de A tel que $\|x - z\| < \frac{d(x, B)}{2}$.

Pour tout y de B , $\|x - z\| < \frac{\|x - y\|}{2}$; aussi par inégalité triangulaire inversée :

$$\|y - z\| \geq \|y - x\| - \|x - z\| > \frac{\|y - x\|}{2} \geq \frac{d(y, B)}{2}$$

donc z n'est pas élément de V : U et V sont disjoints.

5. L'application $y \mapsto \|x - y\|$ est continue de A dans $\mathbb{R}$. A étant fermé borné, elle est bornée et atteint ses bornes notamment sa borne inférieure : il existe y_x de A tel que $d(x, A) = \|x - y_x\|$. Supposons A fermé non vide non borné. Soit $d = d(x, A)$ et $B_f(x, d + 1)$ la boule fermée de centre x et de rayon $d + 1$. Posons $K = A \cap B_f(x, d + 1)$. Comme intersection de fermés, K est fermé. Étant inclus dans une boule fermée, K est borné. Par définition d'une borne inférieure, il existe un élément de A dans $B(x, d + 1)$ donc dans K : K est non vide; on peut appliquer le résultat précédent :

$$\exists y_x \in K, \forall y \in K, \|x - y_x\| \leq \|x - y\| \leq d + 1$$

Soit y élément de A n'appartenant pas à K . Alors $\|x - y\| > d + 1 \geq \|x - y_x\|$. On a vérifié que pour tout y de A , $\|x - y_x\| \leq \|x - y\|$ soit $d(x, A) = \|x - y_x\|$.

6. Supposons l'existence de y_0 et y_1 éléments de C tels que $d(x, C) = \|x - y_0\| = \|x - y_1\|$; Soit $z = \frac{y_0 + y_1}{2}$ milieu de y_0 et y_1 . Par convexité de C , z est élément de C . Comme $2(x - z) = (x - y_0) + (x - y_1)$ et $y_0 - y_1 = (x - y_0) - (x - y_1)$ (ou en utilisant le fait que le triangle xy_0y_1 étant isocèle, $z - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{2}$ est orthogonal $x - z$) :

$$4\|x - z\|^2 + \|y_0 - y_1\|^2 = 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y_1\|^2) = 4d^2$$

Or $d \leq \|x - z\|$, donc $\|y_0 - y_1\|^2 \leq 0$ soit $y_0 = y_1$.

7. y est élément de F' si et seulement si il existe un élément x de F tel que $y \in B_f(x, r)$ autrement dit si et seulement si il existe x élément de F tel que $\|y - x\| \leq r$ ce qui équivaut à $d(y, F) \leq r$.

Aussi F' est l'image réciproque de $] - \infty, r]$ par l'application continue $y \mapsto d(y, F)$: c'est donc un fermé.

□

Correction de l'Exercice 53

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $g(\vec{x}) = \|f(\vec{x}) - \vec{x}\|$. g est continue de K dans $\mathbb{R}$: g est bornée sur K et admet un minimum a . Soit $\vec{y}$ tel que $a = g(\vec{y})$. Si a n'est pas nul, $f(\vec{y}) = \vec{y}_1 \neq \vec{y}$ donc comme $\vec{y}_1 \in K$,

$$g(\vec{y}_1) = \|f(\vec{y}_1) - \vec{y}_1\| = \|f(\vec{y}_1) - f(\vec{y})\| < \|\vec{y}_1 - \vec{y}\| = g(\vec{y})$$

Ainsi $a \neq 0 \implies g(\vec{y}_1) < g(\vec{y}) = a$. Par contraposition, a étant le minimum de $g(K)$, $a = 0$ donc $\vec{y}$ est un point fixe de F .

□

Correction de l'Exercice 54

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme $\{x, \|x\| \leq B\} \subset E$, $\inf\{f(x), x \in E\} \leq \inf\{f(x), \|x\| \leq B\}$.

Si $\|x\| \geq B$, $f(x) \geq f(0) \geq \inf\{f(x), \|x\| \leq B\}$.

Ainsi pour tout x , $f(x) \geq f(0) \geq \inf\{f(x), \|\vec{x}\| \leq B\}$ donc

$$\inf\{f(x), x \in E\} \geq \inf\{f(x), \|x\| \leq B\}.$$

Par double inégalité, on a vérifié que $\inf\{f(x), x \in E\} = \inf\{f(x), \|x\| \leq B\}$. La boule fermée de centre 0 et de rayon B étant un fermé borné, f y est bornée et atteint ses bornes, notamment sa borne inférieure qui est donc un minimum.

2. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $P \mapsto \|g - P\|_{S, \infty}$. $\|\cdot\|_{S, \infty}$ étant une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur S , par inégalité triangulaire : $|f(P) - f(Q)| \leq \|P - Q\|_{S, +\infty}$.

$P \mapsto \|P\|_{S, \infty}$ est une norme sur E (si P est nul sur $[a, b]$, ayant une infinité de zéros, c'est le polynôme nul). f est lipschitzienne pour cette norme et donc est continue.

De plus par inégalité triangulaire inversée, $\|g - P\|_{S, \infty} \geq \|P\|_{S, \infty} - \|g\|_{S, \infty}$ donc f tend vers l'infini lorsque $\|P\|_{S, \infty}$ tend vers l'infini. Il ne reste plus qu'à appliquer la première question.

□

Correction de l'Exercice 55[Retour à l'énoncé](#)**1.** Par opérations usuelles $(ge^\varphi)' = (g' + g\varphi')e^\varphi$.**2.** On pose $g(x) = (f(x) - f(b))$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x-b}$. Si $h = ge^\varphi$, h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $h(a) = h(b) = 0$. Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$ soit comme $e^{\varphi(c)} \neq 0$:

$$0 = g'(c) + \varphi'(c)g(c) = f'(c) - \frac{f(c) - f(b)}{(c-b)^2}$$

ce qui équivaut au résultat souhaité.

3. Soit $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ primitive de f s'annulant en a . L'inégalité initiale s'écrit alors :

$$F'(t) - \alpha F(t) \leq g(t)$$

et en multipliant par $e^{-\alpha t}$, on a alors sur $[a, b]$, en posant $H(t) = F(t)e^{-\alpha t}$, $H'(t) \leq g(t)e^{-\alpha t}$. En intégrant cette relation sur le segment $[a, t]$, on obtient alors

$$F(t)e^{-\alpha t} = H(t) = H(t) - H(a) \leq \int_a^t g(s)e^{-\alpha s} ds.$$

En multipliant par $e^{\alpha t}$ réel strictement positif, on obtient alors

$$F(t) \leq e^{\alpha t} \int_a^t g(s)e^{-\alpha s} ds.$$

Il suffit alors de multiplier par $\alpha > 0$ et d'ajouter $g(t)$ pour obtenir à partir de l'inégalité initiale :

$$f(t) \leq g(t) + \alpha \int_a^t f(s)ds \leq g(t) + \alpha e^{\alpha t} \int_a^t g(s)e^{-\alpha s} ds.$$

□

Correction de l'Exercice 56[Retour à l'énoncé](#)**1.****a.** $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites de réels positifs et comme

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0,$$

à partir du rang 1, $u_n \geq v_n$. Aussi à partir de ce rang $v_n \leq u_{n+1} \leq u_n$ et $v_{n+1} \geq \sqrt{v_n^2} = v_n$ donc pour $n \geq 1$:

$$v_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

De plus $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ donc $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{u_1 - v_1}{2^{n-1}}$. A partir du rang 1, une des suites est croissante, l'autre est décroissante, et la différence tend vers 0 : les deux suites sont donc adjacentes ; par théorème, elles sont convergentes de même limite.**b.** Si on échange a et b , on ne change que les termes d'ordre 0 des deux suites. Aussi on ne change pas la limite : $\ell(a, b) = \ell(b, a)$.

Par récurrence immédiate, multiplier les termes initiaux par λ induit une multiplication par λ de tous les termes des deux suites, donc de la limite.

2.

a. Posons $a = 1$ et $b = 0$. Alors comme $v_n = 0$ implique $v_{n+1} = 0$, la suite $(v_n)_n$ est la suite identiquement nulle et $f(0) = \ell(1, 0) = 0$.

Si $a = b = 1$, pour tout n , $u_n = v_n = 1$ donc $f(1) = \ell(1, 1) = 1$.

Par la question **1.b** (avec $\lambda = x$),

$$f(x) = \ell(1, x) = \ell(x, 1) = x\ell\left(1, \frac{1}{x}\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x > 0$; soit $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x}$.

Soient $a = 1$, $b = x$ et $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites associées. Soient $a' = u_1 = \frac{1+x}{2}$, $b' = v_1 = \sqrt{x}$ et $(u'_n)_n$ et $(v'_n)_n$ les suites associées. Comme $u_{n+1} = u'_n$ et $v_{n+1} = v'_n$, les 4 suites ont même limite et :

$$f(x) = \ell\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2}\ell\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$

b. Comme pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n \leq \ell(a, b) \leq u_n$, on obtient pour $n = 1$, $a = 1$ et $b = x$, $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$.

3.

a. Par le théorème des fonctions monotones, en tout point a de $\mathbb{R}^{+*}$, g a une limite à droite et à gauche vérifiant :

$$g(a^-) = \lim_{a^-} g \leq g(a) \leq \lim_{a^+} g = g(a^+).$$

La fonction $h : x \mapsto \frac{g(x)}{x}$ a donc pour limite $\frac{g(a^+)}{a}$ à droite de a et $\frac{g(a^-)}{a}$ à gauche de a mais h étant décroissante :

$$h(a^-) = \frac{g(a^-)}{a} \geq h(a) = \frac{g(a)}{a} \geq \frac{g(a^+)}{a}.$$

Les deux lignes d'inégalités vues précédemment donnent alors $g(a^-) = g(a) = g(a^+)$. g est continue en tout point de $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Soient deux couples de suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(u'_n)_n, (v'_n)_n$ définies par les relations initiales avec $u_0 = u'_0 = 1$, $v_0 = x$ et $v'_0 = x'$ avec $x \leq x'$. On vérifie par récurrence sur n que $u_n \leq u'_n$ et $v_n \leq v'_n$ pour tout n et, par passage à la limite, on obtient $f(x) \leq f(x')$, f est donc croissante.

Or $\frac{f(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc comme composée d'une fonction croissante f avec une fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante; la question précédente permet alors d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. f étant croissante et positive, elle a une limite $f(0^+)$ positive ou nulle. Par passage à la limite de $f(x) = \frac{1+x}{2}f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$, on obtient $f(0^+) = \frac{f(0^+)}{2}$ donc $f(0^+) = 0 = f(0)$: f est continue en 0.

4. Comme $f(1) = 1$, l'inégalité de la question **2.b** donne alors à droite de 1 :

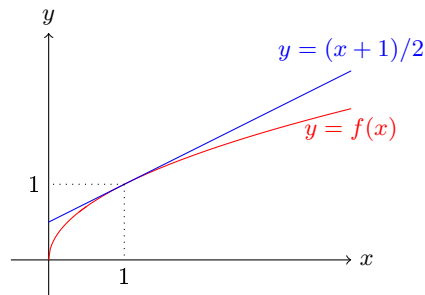
$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \leq \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Par théorème d'encadrement, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ a une limite à droite de 1 qui vaut $\frac{1}{2}$: f est dérivable à droite de 1 de dérivée $\frac{1}{2}$.
A gauche de a , la division par $x - 1$ change le signe des inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \geq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq \frac{1}{2},$$

le même raisonnement conduit à la dérivabilité à gauche avec comme nombre dérivé $\frac{1}{2}$: ayant même nombre dérivé à droite et à gauche de 1, f est dérivable en 1 avec $f'(1) = \frac{1}{2}$.
En utilisant une nouvelle fois l'inégalité de la question 2.b, $f(x) \geq \sqrt{x}$, on obtient que pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. f n'est pas dérivable en 0 et la tangente au graphe est verticale.

5.



Comme $\frac{f(x)}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right)$, par composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

le graphe admet comme direction asymptotique l'axe des abscisses.

La tangente en 1 a pour équation $y = \frac{x+1}{2}$.

□

Correction de l'Exercice 57

[Retour à l'énoncé](#) Les seuls problèmes sont en 1 et -1 . Par parité de la fonction il suffit de vérifier la fonction au voisinage de 1. Sur $[1, +\infty[$ la fonction étant nulle, elle est indéfiniment dérivable et toutes ses dérivées sont nulles.

A gauche de 1, comme $x^2 - 1$ tend vers 0 par valeurs négatives, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$. Sur $] -1, 1]$, f est continue et indéfiniment dérivable sur $[0, 1]$.

Sur $] -1, 1[$, f est indéfiniment dérivable comme composée de fonctions indéfiniment dérivables.

Montrons par récurrence sur k que pour $x \in] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k}} \exp(1/(x^2 - 1))$ avec P_k fonction polynomiale.

Pour $k = 0$, $P_0(x) = 1$. La propriété est vérifiée.

Supposons que pour $x \in] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k}} \exp(1/(x^2 - 1))$ avec $P_k \in \mathbb{R}[X]$. Par les règles usuelles de dérivation :

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{P'_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k}} - \frac{4kxP_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k+1}} - \frac{2xP_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k+2}} \right) \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right).$$

Ainsi $f^{(k+1)}(x) = \frac{P_{k+1}(x)}{(x^2 - 1)^{2k+2}} \exp(1/(x^2 - 1))$

avec $P_{k+1}(x) = (x^2 - 1)^2 P'_k(x) - 4kx(x^2 - 1)P_k(x) - 2xP_k(x)$. Par récurrence, on a bien vérifié que pour tout entier naturel k , sur $] -1, 1[$, $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x^2 - 1)^{2k}} \exp(1/(x^2 - 1))$ avec

$P_k \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{(k)}(x) = 0$ par prédominance de l'exponentielle. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$. Comme $f^{(k)}(1^-) = f^{(k)}(1^+) = 0$, f est bien indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. □

Correction de l'Exercice 58

[Retour à l'énoncé](#)

1. Arcsin est dérivable indéfiniment sur $] -1, 1[$ comme fonction réciproque de sin sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la dérivée ne s'annule pas, f est donc deux fois dérivable. Par les règles de dérivation usuelles :

$$f'(x) = \frac{2 \operatorname{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + x \frac{2 \operatorname{Arcsin}(x)}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

ce qui donne bien la relation demandée : $(1-x^2)f''(x) = xf'(x) + 2$.

2. On utilise la formule de Leibniz pour dériver p fois cette relation. Comme $(1-x^2)$ a des dérivées nulles à partir de l'ordre 3 et x à partir de l'ordre 2, il reste pour $x \in] -1, 1[$:

$$(1-x^2)f^{(p+2)}(x) - 2pxf^{(p+1)}(x) - p(p-1)f^{(p)}(x) = xf^{(p+1)}(x) + pf^{(p)}(x)$$

ce qui donne en 0, $f^{(p+2)}(0) = p^2 f^{(p)}(0)$. Ainsi comme $f'(0) = 0$, toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent en 0 (ce qui était prévisible puisque f est paire, ses dérivées d'ordre impair sont impaires) et $f^{(2q)}(0) = 4(q-1)^2 f^{(2(q-1))}(0)$ pour $q \geq 2$. Comme $f''(0) = 2$, en utilisant la relation pour q variant de 2 à $n+1$, on obtient $f^{(2n+2)}(0) = 4^n (n!)^2 f''(0) = 2^{2n+1} (n!)^2$. On peut utiliser une nouvelle fois la formule de Leibniz pour calculer les dérivées de f comme produit de Arcsin avec elle-même. Arcsin étant impaire, toutes ses dérivées d'ordre pair sont impaires et s'annulent en 0, d'où

$$\begin{aligned} f^{2n+2}(0) &= \sum_{p=0}^{2n+2} \binom{2n+2}{p} \operatorname{Arcsin}^{(p)}(0) \operatorname{Arcsin}^{(2n+2-p)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k+1} \operatorname{Arcsin}^{(2k+1)}(0) \operatorname{Arcsin}^{(2n-2k+1)}(0) \end{aligned}$$

Il reste à calculer la valeur des dérivées en 0 de Arcsin. On peut passer par les développements limités. Le développement limité d'ordre $2n$ de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k} + o(x^{2n})$ avec

$$a_k = \frac{1 * 3 * \dots * (2k-1)}{2 * 4 * 6 * \dots * 2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Alors en intégrant, comme $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$, $\operatorname{Arcsin}(x) = \sum \frac{a_k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

Par unicité des développements limités, $\operatorname{Arcsin}^{(2k+1)}(0) = (2k+1)! \frac{a_k}{2k+1} = \frac{((2k)!)^2}{2^{2k} (k!)^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{2k+1} \operatorname{Arcsin}^{(2k+1)}(0) \operatorname{Arcsin}^{(2n-2k+1)}(0) &= \frac{(2n+2)! ((2k)!)^2 ((2n-2k)!)^2}{(2k+1)! (2n-2k+1)! k!^2 ((n-k)!)^2 2^{2n}} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n}} \frac{(2k)!(2n-2k)!}{(2k+1)(2n-2k+1) ((k!(n-k)!)^2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2k)!(2n-2k)!}{(2k+1)(2n-2k+1) ((k!(n-k)!)^2)} = \frac{2^{2n}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(0) = \frac{2^{4n+1} (n!)^2}{(2n+2)!}.$$

□

Correction de l'Exercice 59[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme $1 = \frac{1}{2i}(x+i - (x-i))$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a} = (x-a)^{-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$ étant indéfiniment dérivable de dérivée n -ième $x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, f est indéfiniment dérivable et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right) = \Im m \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} \right).$$

En effet, x étant réel, $\frac{1}{(x-i)^{n+1}}$ et $\frac{1}{(x+i)^{n+1}}$ sont des complexes conjugués. La partie imaginaire d'un complexe étant majorée en valeur absolue par son module, $|x+i| \geq 1$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{|x+i|^{n+1}} \leq n!.$$

2. D'après l'expression de $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right)$ obtenue en première question, les racines complexes x de $f^{(n)}$ vérifient $(x-i)^{n+1} = (x+i)^{n+1}$. On a alors $|x-i|^n = |x+i|^n$ soit $|x-i| = |x+i|$. Le point d'affixe x est sur la médiatrice des points d'affixe i et $-i$: ce sont donc des racines réelles.

$-i$ n'étant pas racine de $(x-i)^{n+1} = (x+i)^{n+1}$, en divisant par $(x+i)^{n+1}$, on obtient que x est racine de $f^{(n)}$ si et seulement si $\frac{x-i}{x+i}$ est une racine d'ordre $n+1$ de l'unité autrement dit :

$$\exists k \in [0, n], \frac{x-i}{x+i} = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$$

soit en multipliant par $x+i$, $(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}})x = i(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n+1}})$. Cette dernière équation admet une solution si et seulement si $k \neq 0$ soit pour $1 \leq k \leq n$. On a ainsi n racines distinctes. Comme $1 - e^{i\theta} = -2i \sin(\theta) e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $1 + e^{i\theta} = 2 \cos(\theta) e^{\frac{i\theta}{2}}$, on obtient $x_k = -\frac{\cos(\frac{k\pi}{n+1})}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})}$ pour $k \in [1, n]$. □

Correction de l'Exercice 60[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $\Phi(x) = \|F(x)\|^2 = \langle F(x), F(x) \rangle$. F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, Φ l'est aussi et $\Phi'(x) = 2\langle F(x), F'(x) \rangle$ (composition du produit scalaire et de $x \mapsto (F(x), F(x))$). Ainsi comme $\Phi(a) = \Phi(b)$, Φ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\Phi'(c) = 2\langle F(c), F'(c) \rangle = 0$ autrement dit tels que $F(c)$ et $F'(c)$ sont orthogonaux.

2. Soit $D(x) = \det(F(a), F(b), F(x))$. L'application $u \mapsto \det(F(a), F(b), u)$ étant linéaire et F étant continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, il en est de même de D et

$$D'(x) = \det(F(a), F(b), F'(x)).$$

Comme $D(a) = D(b) = 0$, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $D'(c) = 0$ et donc $(F(a), F(b), F'(c))$ est une famille liée. $(F(a), F(b))$ étant une famille libre, ceci implique

que le vecteur $F'(c)$ est combinaison linéaire de $F(a)$ et $F(b)$. Si $n > 3$, ce résultat n'est plus vrai. Voici un contre-exemple avec $E = \mathbb{R}^4$. Soit $F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. $F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

forment une famille libre et $F'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$ s'écrit $aF(0) + bF(1)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \\ b = 2x \\ b = 3x^2 \end{cases}$$

les équations $1 = 2x$ et $1 = 3x^2$ sont incompatibles.

□

Correction de l'Exercice 61

[Retour à l'énoncé](#)

1. $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ donne pour $p \geq 1$:

$$I_{p,q} = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}x^p}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$

En itérant cette relation (ou par récurrence sur k), on obtient que pour $k \leq p$:

$$I_{p,q} = \frac{p \cdots (p-k+1)}{(q+1) \cdots (q+k)} I_{p-k,q+k} = \prod_{j=1}^k \frac{p+1-j}{q+j} I_{p-k,q+k}$$

soit pour $k = p$: $I_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2) \cdots (q+p)} I_{0,p+q} = \frac{p!q!}{(p+q)!} I_{0,p+q}$.

Or $I_{0,n} = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Remarque : ce calcul est à savoir faire, il intervient dans beaucoup d'exercices.

2. On cherche donc à calculer $D_n(1)$. Soit L_i la ligne i de A_n . L'application $\Phi : L_{n+1} \mapsto$

$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$ est une application linéaire. Comme composée de Φ et de

$L : x \mapsto \left(\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \dots, \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$, D_n est de même classe que L , donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a alors comme $L^{(k)}(x) = \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}, \frac{x^{n+1-k}}{(n+1-k)!}, \dots, \frac{x^{2n-k}}{(2n-k)!} \right)$

$$D_n^{(k)}(x) = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \\ L^{(k)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \frac{1}{n!} \\ 1 & \frac{1}{2} & \vdots & & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(i-1)!} & \dots & \frac{1}{(i+j-2)!} & \dots & \frac{1}{(i+n-1)!} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{(n+j-2)!} & \dots & \frac{1}{(2n-1)!} \\ \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} & \dots & \frac{x^{n+j-k-1}}{(n-1+j-k)!} & \dots & \frac{x^{2n-k}}{(2n-k)!} \end{vmatrix}.$$

En développant D_n suivant la dernière ligne de $M_n(x)$, on obtient $D_n(x) = \sum_{k=n}^{2n} a_k x^k$ où les a_k ne dépendent que des n premières lignes de $M_n(x)$ (identiques à celles de A_n), donc indépendantes de x . $(2n)!a_n$ est le cofacteur du terme placé ligne $n+1$ colonne $n+1$ donc $a_{2n} = \frac{\Delta_{n-1}}{(2n)!}$. D_n est donc un polynôme de degré au plus $2n$ admettant 0 comme racine d'ordre au moins n . D'_n admet donc 0 comme racine d'ordre au moins $n-1$ et $D_n(0) = 0$.

On remarque que pour k compris entre 1 et n , $L^{(k)}(1) = L_{n+1-k}$ donc la matrice dont $D_n^{(k)}(1)$ est le déterminant a deux lignes identiques ce qui prouve que $D_n^{(k)}(1) = 0$. 1 annule D'_n et ses $n-1$ premières dérivées, c'est une racine de D'_n d'ordre au moins n .

Aussi D'_n est un polynôme de degré au plus $2n-1$ dont on connaît $2n-1$ racines (il n'y en a donc pas d'autres) et dont le coefficient de x^{2n-1} est $2na_n = \frac{\Delta_{n-1}}{(2n-1)!}$ donc

$$D'_n(x) = \frac{\Delta_{n-1}}{(2n-1)!} x^{n-1} (x-1)^n$$

D_n est la primitive de D'_n qui s'annule en 0; ainsi

$$D_n(x) = \frac{\Delta_{n-1}}{(2n-1)!} \int_0^x t^{n-1} (t-1)^n dt.$$

Finalement on obtient donc la relation de récurrence suivante

$$\Delta_n = \frac{(-1)^n \Delta_{n-1} I_{n-1,n}}{(2n-1)!} = \frac{(-1)^n n! (n-1)!}{(2n-1)! (2n)!} \Delta_{n-1}.$$

avec $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$. Ainsi comme $\Delta_n = \prod_{k=2}^n \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \Delta_1$:

$$\Delta_n = \prod_{k=2}^n \frac{(-1)^k k! (k-1)!}{(2k-1)! (2k)!} \Delta_1 = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \left(\prod_{k=2}^{n-1} k! \right)^2}{\prod_{k=1}^{2n} k!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\prod_{k=2}^{n-1} k!}{\prod_{k=n+1}^{2n} k!}.$$

□

Correction de l'Exercice 62[Retour à l'énoncé](#)

1. $x'(t) = -3a \sin(t) \cos^2(t)$ et $y'(t) = 3b \cos(t) \sin^2(t)$ s'annulent simultanément en 0 : $F(0)$ n'est pas un point régulier.

$$m(t) = \frac{b \sin^3(t)}{a \cos^3(t) - 1}. \text{ En } 0, \sin(t) \sim t \text{ et comme } \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \cos^3(t) - 1 \sim -\frac{3t^2}{2},$$

ainsi $m(t) \sim -\frac{2bt}{3a}$ et est donc de limite nulle.

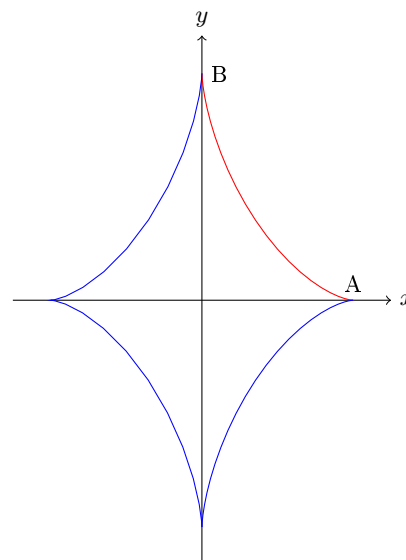
$m(t)$ est la tangente de l'angle que fait $AF(t)$ avec l'axe des abscisses : cet angle tend vers 0 lorsque t tend vers 0. La position limite de la droite est donc horizontale : la tangente est horizontale. Comme $x(t) = a \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $y(t) = b \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, l'étude faite précédemment permet d'affirmer que la tangente en $B = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est verticale (échange des rôles de x et y).

2. La fonction $F : t \mapsto (a \cos^3(t), b \sin^3(t))$ est 2π -périodique. $F(t) = F(t')$ si et seulement si t et t' ont même cosinus et même sinus. Le domaine propre est donc de longueur 2π .

On remarque que $F(t + \pi) = -F(t)$. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur π puis de faire une symétrie par rapport à l'origine pour connaître l'ensemble de la courbe. De plus, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Les points $F(t)$ et $F(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Le domaine d'étude se réduit donc à $D_e = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Une symétrie par rapport à l'axe des abscisses donnera la courbe pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et on complète par symétrie par rapport à O .

Sur D_e , x est décroissante et y croissante. On a donc le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	—	0
$x(t)$	a	↘	
$y(t)$		↗	
$y'(t)$	0	+	0



En rouge, la partie de courbe obtenue par l'étude initiale avant symétries.

3. En un point régulier, un vecteur directeur de la tangente est

$$F'(t) = 3 \sin(t) \cos(t) (-a \cos(t), b \sin(t))$$

colinéaire à $\vec{T} = (-a \sin(t), b \cos(t))$, aussi vecteur directeur de la tangente dans les points non réguliers. L'équation de la normale est donc :

$$-a \cos(t) (x - a \cos^3(t)) + b \sin(t) (y - b \sin^3(t)) = 0.$$

Cette normale passe par O si et seulement si $a^2 \cos^4(t) - b^2 \sin^4(t) = 0$ soit $\tan(t) = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$. Il y a donc deux normales (deux points symétriques par rapport à O ont des normales respectant cette symétrie et donc ont même normale si elle passe par O) d'équations respectives : $-\sqrt{ax} + \sqrt{by} = 0$ et $\sqrt{ax} + \sqrt{by} = 0$.

Les vecteurs directeurs de ces droites sont respectivement $\sqrt{b}, \sqrt{a}$ et $-\sqrt{b}, \sqrt{a}$. Ils sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul soit $a = b$. Dans ce cas, les droites considérées sont les droites d'équations $y = \pm x$.

□

Correction de l'Exercice 63

[Retour à l'énoncé](#)

$F : t \mapsto (x(t), y(t))$ est 2π -périodique donc $\Gamma = F(I)$ où I est un segment de longueur 2π . $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Les points $F(t)$ et $F(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : on peut réduire l'étude au domaine $D_e = [0, \pi]$ puis faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour décrire un intervalle de longueur 2π . On commence par étudier les variations de x et y . x et y sont dérivables et :

$$x'(t) = -3(\sin(t) + \sin(3t) + 2\sin(2t)) = -6\sin(2t)(\cos(t) + 2)$$

$$y'(t) = 3(\cos(t) + \cos(3t) + 2\cos(2t)) = 6\cos(2t)(\cos(t) + 2)$$

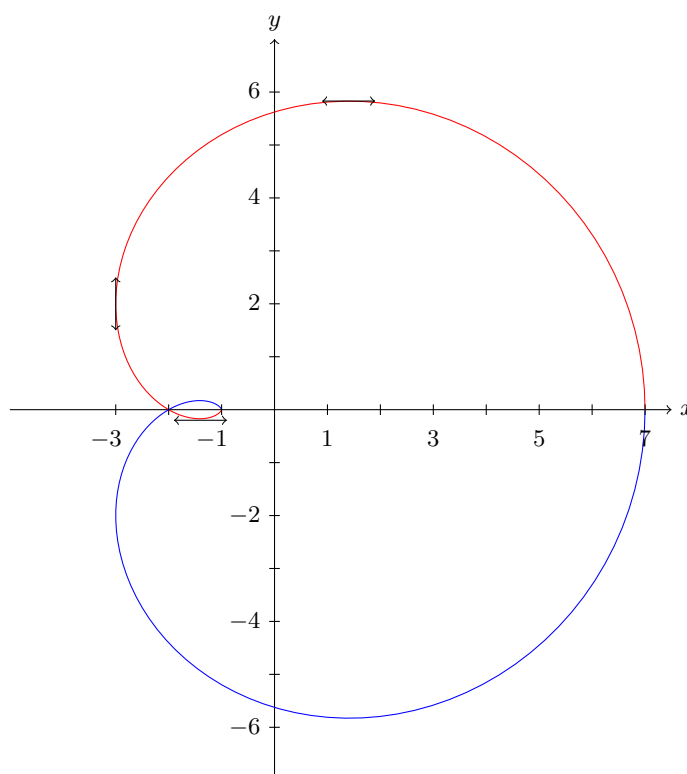
par les formules $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

$x'(t)$ a le même signe que $\sin(2t)$, négatif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positif sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $y'(t)$ a le même signe que $\cos(2t)$ donc positif sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. En $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{3\pi}{4}$, y' s'annule et pas x' ; la tangente est horizontale; pour $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$, x' s'annule et y' ne s'annule pas : la tangente est verticale.

On obtient le tableau de variations suivant :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π		
$x'(t)$	0	−	−	0	+	+	0
$x(t)$	7	$\searrow \sqrt{2}$	−3	$\nearrow -\sqrt{2}$	−1		
$y(t)$	0	$\nearrow 3+2\sqrt{2}$	$\searrow 2$	$\nearrow -3+2\sqrt{2}$	0		
$y'(t)$		+	0	−	−	0	+

D'où la figure où figure en rouge la partie obtenue lorsque t varie de 0 à π et en bleue la partie obtenue par symétrie :



Par les formules $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ et $\cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos(a)$:

$$y(t) = 2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \left(3 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right) = 8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos^3\left(\frac{t}{2}\right)$$

On se limite à $t \in [0, \pi]$ $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) = 0$ équivaut à $t \in \{0, \frac{2\pi}{3}\}$ et $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ équivaut à $t = \pi$. Ainsi $F(0) = (7, 0)$, $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-2, 0)$ (qui est le point double) et $F(\pi) = (-1, 0)$.

□

Correction de l'Exercice 64

[Retour à l'énoncé](#)

$F : t \mapsto (x(t), y(t))$ est défini si et seulement si $\sin(t) > 0$ donc sur le domaine $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$

avec $I_k =]2k\pi, (2k+1)\pi[$. Comme F est 2π -périodique $F(D) = F(I_0)$.

De plus $x(t) = x(\pi - t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. Les points $F(\pi - t)$ et $F(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Il suffit donc d'étudier l'arc paramétré correspondant à $t \in J =]0, \frac{\pi}{2}]$ puis de faire une symétrie par rapport à Ox pour connaître toute la courbe.

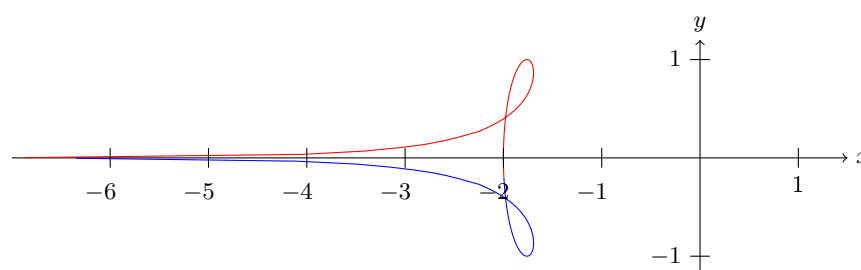
Sur J , x et y sont dérivables et

$$x'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - 2 \cos(t) = \frac{\cos(t)(1 - 2 \sin(t))}{\sin(t)} \quad y'(t) = 2 \cos(2t) .$$

D'où le tableau de variations suivant :

D'ou le tableau de variations suivant :					
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$x'(t)$		+	0	-	-
$x(t)$	$-\infty$	$-\ln(2) - 1$	$-\frac{\ln(2)}{2} - \sqrt{2}$	-2	
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	
$y'(t)$		+	+	0	-

La droite $y = 0$ est donc une asymptote.



En rouge, la partie de courbe obtenue par l'étude initiale avant symétries.

□

Correction de l'Exercice 65

[Retour à l'énoncé](#)

1. L'image de $[0, 1]$ par $e^n f$ (fonction croissante et continue) est $S_n = [e^n f(0), e^n f(1)]$.

Soit $p_n = E(e^n f(0))$ et $q_n = E(e^n f(1))$. Pour tout entier k compris entre 1 et $q_n - p_n$, $p_n + k$ est élément de S_n . L'ensemble des x tels $e^n f(x) = p_n + k$ est un fermé de $[0, 1]$ puisque f est continue; soit x_k la borne inférieure de celui-ci, on a donc $e^n f(x_k) = p_n + k$. On pose $x_0 = 0$. Si $x_{q_n - p_n} \neq 1$, on pose alors $x_{q_n - p_n + 1} = 1$ et $N = q_n + p_n + 1$ et sinon on pose $N = q_n - p_n$.

$e^n f$ étant croissante, on a $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1$. On a donc une subdivision finie de $[0, 1]$.

De plus si $x_k \leq x < x_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq N - 2$,

$$p_n + k = e^n f(x_k) \leq e^n f(x) < p_{n+k+1} = e^n f(x_{k+1})$$

la seconde inégalité étant stricte par la définition de x_{k+1} et donc $E(e^n f(x)) = p_n + k$ donc $g_n(x) = f(x_k)$. la fonction g_n est constante sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. Si $N = q_n - p_n$, ce qui précède est encore vrai pour $k = N - 1$.

Si $N = q_n - p_n + 1$, pour $x \in [x_{N-1}, 1]$, $E(e^n f(x)) = q_n$, et g_n est constante sur $[x_{N-1}, 1]$. g_n est bien une fonction en escalier (elle est constante sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$).

2. De plus, pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$, $|e^n f(x) - e^n f(x_k)| < 1$ donc $|e^n f(x) - e^n g_n(x)| < 1$ soit

$$|f(x) - g_n(x)| \leq e^{-n}.$$

Il ne reste que le cas où $x = 1$. Alors $g_n(1) = e^{-n} q_n$ et on a encore l'inégalité précédente. Ainsi $\|g_n - f\|_\infty \leq e^{-n}$. Comme la suite $(e^{-n})_n$ est de limite nulle, la suite $(g_n)_n$ converge donc bien uniformément vers f .

□

Correction de l'Exercice 66

[Retour à l'énoncé](#)

1. g est dérivable et $g'(t) = 3(1 - 4t^2)$. Sur $[0, 1]$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	1	-1

2. Prouvons la propriété demandée par récurrence sur n .

Initialisation : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq f_0(x) = x$.

Hérédité : Supposons que pour un n donné : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq f_n(x) \leq x$.

Pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{3}$ est aussi élément de $[0, 1]$ aussi

$$0 \leq f_n\left(\frac{x}{3}\right) \leq \frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Comme $f_n\left(\frac{x}{3}\right) \in [0, \frac{1}{3}]$, et par la première question :

$$f_{n+1}(x) = g\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right) \geq 0$$

Comme $f_n(x)$ est positif

$$f_{n+1}(x) \leq 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) \leq 3 \times \frac{x}{3} = x$$

ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

Ainsi pour tout n et tout $x \in [0, 1], 0 \leq f_n(x) \leq x$.

3. On utilise la formule suivante $\sin(x) = 3\sin(\frac{x}{3}) - 4\sin^3(\frac{x}{3})$. Ainsi

$$(*) f_{n+1}(x) - \sin(x) = g(f_n(\frac{x}{3})) - g(\sin(\frac{x}{3}))$$

on opère de nouveau par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$, par la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à la fonction $\sin$ à l'ordre 4 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\cos(t)}{24} (x-t)^4 dt$$

Ainsi comme $\cos$ est positif sur $[0, 1]$ et que $0 \leq \sin(x) \leq x$:

$$|f_0(x) - \sin(x)| = x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{24} (x-t)^4 dt \leq \frac{x^3}{6}$$

On peut donc choisir $a_0 = \frac{1}{6}$.

Hérédité : on suppose que pour un n donné et pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - \sin(x)| \leq a_n x^3$.
 Pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{3}$ est élément de $[0, \frac{1}{3}] \subset [0, 1]$; ainsi $f_n(\frac{x}{3})$ et $\sin(\frac{x}{3})$ sont élément de $[0, \frac{1}{3}]$.
 Sur $[0, \frac{1}{2}]$, g' décroît de 3 à 0 donc $|g'|$ est majorée par 3. Par l'inégalité des accroissements finis : et compte-tenu de la relation (*)

$$|f_{n+1}(x) - \sin(x)| \leq 3|f_n(\frac{x}{3}) - \sin(\frac{x}{3})| \leq 3a_n \frac{x^3}{27} = \frac{a_n}{9} x^3$$

Il suffit donc de choisir $a_{n+1} = \frac{a_n}{9}$ pour obtenir la propriété souhaitée à l'ordre $n+1$. La suite géométrique de premier terme $\frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{9}$ convient. On a donc trouvé que la propriété demandée est réalisée avec, pour tout n , $a_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \frac{1}{6}$.

4. Sur l'intervalle $[0, 1]$, on a ainsi pour tout n , $|f_n(x) - \sin(x)| \leq a_n$. La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément vers la fonction sin.

Si x est élément de $I_p = [0, 3^p]$, $\frac{x}{3}$ est élément de I_{p-1} . Montrons par récurrence sur p que $(f_n)_n$ converge vers sin sur I_p .

La convergence uniforme sur I_0 a été vu précédemment.

Supposons que $(f_n)_n$ converge vers sin sur I_p . Pour x dans I_{p+1} , comme $\frac{x}{3}$ est élément de I_p et que pour $n \geq 1$, $(f_n(x) = 3f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4f_{n-1}^3(\frac{x}{3}))$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente de limite $3 \sin 3 \sin(\frac{x}{3}) - 4 \sin^3(\frac{x}{3}) = \sin(x)$. L'hérédité est donc prouvée.

f_n est convergente de limite sin sur $\bigcup I_p = \mathbb{R}^+$.

f_0 est impaire donc par récurrence f_n est impaire. Ainsi sur $\mathbb{R}^-$, f_n est convergente de limite sin.

La suite f_n est convergente de limite sin.

5. La convergence sur $[0, 1]$ a été vu précédemment grâce à l'inégalité $|f_n(x) - \sin(x)| \leq a_n$ sur $[0, 1]$.

Par récurrence, f_n est polynomiale; Si f_n est un polynôme de degré d_n , f_{n+1} est un polynôme de degré $3d_n$. Ce sont des polynômes non constants. $f_n - \sin$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas convergence uniforme.

□

Correction de l'Exercice 67

[Retour à l'énoncé](#)

1. Le polynôme L_i devant admettre comme racines les d nombres a_j pour $j \neq i$ et étant de degré au plus d , ce sont ses seules racines et elles sont simples. Ainsi si L_i existe, il est de la forme $\lambda_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} (X - a_j)$. La condition $L_i(a_i) = 1$ impose alors de choisir

$$\lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}. \text{ Le polynôme } L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \text{ convient.}$$

a. $P - \sum_{i=0}^d P(a_i)L_i$ est un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ admettant tous les a_i comme racines : il a donc au moins $d + 1$ racines. Ayant plus de racines que son degré, c'est le polynôme nul. Remarque : cette famille de polynômes, appelée polynômes de Lagrange associés à $(a_0, a_1, \dots, a_d)$, est une famille génératrice minimale (de cardinal $d + 1 = \dim E$) ; c'est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

2. D'après ce qui précède, pour tout x réel, $P_n(x) = \sum_{i=0}^d P_n(a_i)L_i(x)$. Par passage à la limite, comme $(P_n)_n$ converge vers f :

$$f(x) = \sum_{i=0}^d f(a_i)L_i(x)$$

f est donc combinaison linéaire des L_i éléments de E : c'est un élément de E .

De plus, par inégalité triangulaire, pour tout x , $|P_n(x) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^d |P_n(a_i) - f(a_i)||L_i(x)|$.

Aussi, en restreignant x au segment $[0, 1]$:

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \sum_{i=0}^d |P_n(a_i) - f(a_i)| \|L_i\|_\infty$$

Le majorant étant de limite nulle, $\lim \|P_n - f\|_\infty$ est de limite nulle ce qui prouve la convergence uniforme de $(P_n)_n$ vers f .

3. Soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = e^x$ et l'exponentielle n'est pas polynomiale. Cette dernière assertion peut se justifier par le fait qu'aucun polynôme ne vérifie $P = P'$.

□

Correction de l'Exercice 68

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ et que $\cosh u \geq 0$, $\cosh u = \sqrt{1 + t^2}$ donc

$$e^u = \cosh(u) + \sinh(u) = t + \sqrt{1 + t^2} \iff u = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}).$$

Lorsque t varie de 0 à x , u varie de 0 à $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = u_x$. Comme la dérivée de $\sinh$ est $\cosh$, on obtient :

$$I(x) = \int_0^{u_x} \frac{\cosh(u)}{\sqrt{1 + \sinh^2 u}} du = \int_0^{u_x} du = u_x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

2.

a. Pour $x \leq 0$ et pour k compris entre 0 et n , $n^2 \leq n^2 + k^x \leq n^2 + 1$, donc :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq f_n(x) \leq \frac{n}{n} = 1$$

Comme $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1$, par théorème d'encadrement, $f_n(x)$ converge vers 1.

b. Pour $x \in]0, 2[$ et pour k compris entre 0 et n , $n^2 + 1 \leq n^2 + k^x \leq n^2 + n^x$, donc :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq f_n(x) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Comme $x < 2$, $n^x = o(n^2)$. Les deux termes encadrant $f_n(x)$ ont donc encore 1 comme limite. Aussi pour $x \in]0, 2[$, $\lim f_n(x) = 1$.

c. Pour $x = 2$:

$$f_n(2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}}$$

On reconnaît l'expression d'une somme de Riemann de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $[0, 1]$ aussi

$$\lim_n f_n(2) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

d. Pour $x > 2$ et $\alpha < 1$, on coupe la somme définissant $f_n(x)$ en termes inférieurs à n^α et termes supérieurs à n^α . Soit p la partie entière de n^α . Pour k compris entre 1 et p , $n^2 + k^x \geq n^2 + 1$ aussi :

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^x}} \leq \frac{p}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Pour k compris entre $p+1$ et n , $n^2 + k^x \geq n^2 + n^{\alpha x}$, aussi :

$$\sum_{k=p+1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^x}} \leq \frac{n-p}{\sqrt{n^2 + n^{\alpha x}}} \leq \frac{n - n^\alpha + 1}{\sqrt{n^2 + n^{\alpha x}}}$$

Choisissons $\frac{2}{x} < \alpha < 1$ soit $x > \alpha x > 2$. Alors $\frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}} \sim n^{\alpha-1}$ et $\lim_n \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$.

Pour ce choix de α , $n - n^\alpha + 1 \sim n$ et $n^2 + n^{\alpha x} \sim n^{\alpha x}$ et $\frac{n - n^\alpha + 1}{\sqrt{n^2 + n^{\alpha x}}} \sim n^{1-\alpha x/2}$ donc est de limite nulle.

Ainsi comme $0 \leq f_n(x) \leq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{n - n^\alpha + 1}{\sqrt{n^2 + n^{\alpha x}}}$, par théorème d'encadrement, $f_n(x)$ est de limite nulle.

Conclusion : la suite f_n tend vers la fonction en escalier définie par $f(x) = 1$ pour $x < 2$, $f(2) = \ln(1 + \sqrt{2})$ et $f(x) = 0$ pour $x > 2$.

□

Correction de l'Exercice 69

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme pour tout n , $f(a) - f_n(x_n) = f(a) - f(x_n) + f(x_n) - f_n(x_n)$ par inégalité triangulaire :

$$|f(a) - f_n(x_n)| \leq |f(a) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe un rang n_1 tel que :

$$n \geq n_1 \implies \forall x, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en particulier $n \geq n_1 \implies |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Les $(f_n)_n$ étant continues sur I et la convergence étant uniforme, f est continue sur I , donc $f(x_n)$ a pour limite $f(a)$. Aussi il existe un rang n_2 tel que :

$$n \geq n_2 \implies |f(a) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par addition des deux inégalités :

$$n \geq \max(n_1, n_2) \implies |f(a) - f_n(x_n)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a)$.

2. Pour tout x , $f(x) - \ell = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - \ell_n + \ell_n - \ell$ et par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe un rang N tel que :

$$n \geq N \implies \forall x > 0, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient alors

$$n \geq N \implies |\ell - \ell_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fixons $n = N$. Alors :

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(x) - \ell_N|.$$

Par définition de la limite, on a alors :

$$\exists A > 0, x > A \implies |f_N(x) - \ell_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

d'où $x > A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui prouve le résultat recherché. □

Correction de l'Exercice 70

[Retour à l'énoncé](#)

Pour tout réel x , $\left| \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$. La série de fonctions continues est normalement convergente sur $\mathbb{R}$: leur somme est donc bien définie et continue.

On remarque que

$$f(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^n} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n} = 2(f(x) - \sin(x))$$

Si on suppose f dérivable en 0, on a alors $2f'(0) = 2f'(0) - 2\cos(0)$ ce qui est faux car $\cos(0) = 1$. Aussi par contraposition $\cos(0) \neq 0$ implique que f n'est pas dérivable en 0. □

Correction de l'Exercice 71

[Retour à l'énoncé](#)

1. Il s'agit de séries de Riemann : $\zeta(x)$ est défini si et seulement si $x > 1$.

Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-\ln(n)x}$. f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$. Sur tout intervalle $I_a = [a, +\infty[$ avec $a > 1$, on a pour tout x de I :

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq |f_n^{(p)}(a)| = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$$

avec $1 < c < a$. La série des dérivées p -*ime* est donc normalement convergente sur tout intervalle I_a donc sur tout segment $[a, b]$ inclus dans le domaine de définition. ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Chaque fonction f_n est décroissante et positive, il en est de même de ζ .

2. Posons ζ étant décroissante sur $]1, +\infty[$ a une limite finie en 1 si et seulement si elle est majorée et dans le cas contraire sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Soit $\zeta_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$ la somme partielle de rang n de la série; la série étant à termes positifs, pour tout n , $\zeta(x) \geq \zeta_n(x)$. Si ζ est borné sur $]1, +\infty[$ par M , il en est de même de ζ_n et par continuité de ζ_n en 1, $\zeta_n(1) \leq M$. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et n'est donc pas bornée. Par contraposition, ζ n'est pas bornée, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.
 $t \mapsto t^{-x}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$, pour $k \geq 2$:

$$(*) \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^x}$$

la première inégalité étant encore valable pour $k = 1$. $\int_1^\infty \frac{dt}{t^x}$ étant convergente pour $x > 1$, on obtient par sommation :

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

aussi $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

3. En sommant les inégalités $(*)$ pour $k \geq n+1$:

$$\int_{n+1}^\infty \frac{dt}{t^x} = \rho_n(x) = \frac{(n+1)^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^x} \leq \int_n^\infty \frac{dt}{t^x} = \frac{n^{1-x}}{x-1}$$

$\frac{(n+1)^{1-x}}{x-1}$ et $\frac{n^{1-x}}{x-1}$ sont négligeables devant n^{-x} en $+\infty$; aussi $\rho_n(x) = o(n^{-x})$.
 En choisissant $n = 2$,

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \rho_2(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o(2^{-x})$$

donc ζ a pour limite 1 en $+\infty$ et $\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

□

Correction de l'Exercice 72

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si f est continue, par théorèmes généraux, il en est de même de $T(f)$. De plus, si f est bornée, pour tout x , $|T(f)(x)| \leq (1 + |a|)\|f\|_\infty$, donc $T(f)$ est bornée. T est bien une application de E dans E .

Il est clair que pour tout x réel, tout réel λ et tout couple (f, g) de fonctions de E :

$$T(\lambda f + g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

T est donc linéaire : c'est un endomorphisme de E .

Il reste à prouver le caractère bijectif de T . On va procéder par analyse-synthèse. Soit g

élément de E (donc continue et bornée) telle que $T(f) = g$. Pour tout x et tout entier naturel n , $g(b^n x) = f(b^n x) - a f(b^{n+1} x)$ soit $a^n g(b^n x) = a^n f(b^n x) - a^{n+1} f(b^{n+1} x)$. aussi par télescopage :

$$f(x) - a^{n+1} f(b^{n+1} x) = \sum_{k=0}^n a^k g(b^k x)$$

La série de terme général $a^k g(b^k x)$ est normalement convergente car pour tout réel x , $|a^k g(b^k x)| \leq |a|^k \|g\|_\infty$, le majorant étant le terme général d'une série géométrique convergente puisque $|a| < 1$.

De même, puisque f est supposée bornée, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} f(b^{n+1} x) = 0$. Ainsi si g a un antécédent, celui-ci est donnée par la formule $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^n x)$.

Vérifions que f convient (autrement dit que f est un élément de E dont l'image par T est g).

Comme somme d'une série de fonctions continues normalement convergente, f est bien continue.

De plus, la série étant absolument convergente, pour tout x :

$$|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n |g(b^n x)| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n \right) \|g\|_\infty = \frac{\|g\|_\infty}{1 - |a|}$$

f est bien bornée sur $\mathbb{R}$. Par définition de T :

$$T(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^n x) - a \sum_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^{n+1} x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^n g(b^n x) - a^{n+1} g(b^{n+1} x))$$

et par télescopage $T(f)(x) = g(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} a^n g(b^n x) = g(x)$ (rappel : la série $\sum u_n - u_{n+1}$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge).

T est bien un automorphisme de E .

□

Correction de l'Exercice 73

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{1 + (nx \ln n)^2}$. En tout point x , la série est alternée, avec un terme général dont la valeur absolue décroît et tend vers 0. Ainsi par le théorème des séries alternées,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{1 + (nx \ln n)^2} \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

2. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, la série est absolument convergente.

Pour x non nul, $|f_n(x)| \sim \frac{1}{|x| n^2 \ln^2(n)} = o(n^{-2})$. par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum |f_n(x)|$ est convergente. La série est absolument convergente en tout point.

Soit $c > 0$. $x \mapsto \frac{x}{1 + c^2 x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $x \mapsto \frac{1 - c^2 x^2}{(1 + c^2 x^2)^2}$ et est donc

maximale en $\frac{1}{\sqrt{c}}$. Soit pour $n \geq 2$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$, $|f_n(x_n)| = \frac{1}{2\sqrt{n} \ln(n)}$. or $\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ est négligeable devant $f_n(x_n)$ et est le terme général d'une série divergente, aussi $\sum |f_n(x_n)|$ est divergente : il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$.

3. En tout point x , la série est alternée, avec un terme général dont la valeur absolue décroît et tend vers 0. Par théorème sur les séries alternées, en appelant S_n la somme partielle de rang n :

$$|f(x) - S_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}$$

Le reste tend uniformément vers 0 : il y a convergence uniforme.

□

Correction de l'Exercice 74

[Retour à l'énoncé](#)

1. Aucune fonction de la série n'étant définie en 1, f ne l'est pas non plus.

Si $|x| < 1$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^{2n}} \sim x^n$ donc $|f_n(x)| \sim |x|^n$. La série géométrique $\sum x^n$ de raison x étant absolument convergente, la série définissant f est absolument convergente.

Si $|x| > 1$, $f_n(x) \sim -\frac{x^n}{x^{2n}} \sim -\left(\frac{1}{x}\right)^n$ donc $|f_n(x)| \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$. La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{x}\right)^n$ de raison $\frac{1}{x}$ étant absolument convergente, la série définissant f est absolument convergente. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

La fonction $g : u \mapsto \frac{u}{1-u^2}$ fonction impaire de dérivée $u \mapsto \frac{1+u^2}{(1-u^2)^2}$ est croissante sur chaque intervalle où elle est définie.

Soit $S = [a, b]$ un segment inclus dans $[-1, 1]$ et $c = \max(|a|, |b|) < 1$. $S \subset [-c, c]$. Pour tout x de S , $|x^n| \leq c^n$ aussi $|f_n(x)| \leq f_n(c)$. Comme $\sum f_n(c)$ est convergente, la série $\sum f_n$ de fonctions continues est normalement (donc uniformément) convergente sur tout segment inclus dans $] -1, 1[$: par théorème, f y est continue.

Soit $S = [a, b] \subset]1, +\infty[$. La fonction f_n est croissante et négative, donc pour tout x de S , $|f_n(x)| \leq |f_n(a)|$. Par les mêmes arguments, f est continue sur $]1, +\infty[$.

Soit $S = [-b, -a] \subset]-\infty, -1[$. Par parité de $|f_n|$, on obtient une nouvelle fois pour tout x de S , $|f_n(x)| \leq |f_n(a)|$ et cette majoration prouvant la convergence normale sur tout segment inclus dans $] -\infty, -1[$ de la série de fonctions continues $\sum f_n$, f est continue sur $] -\infty, -1[$. Conclusion : f est continue sur son domaine de définition.

2. Soit $\phi_x : t \mapsto \frac{x^t}{1-x^{2t}}$ avec $t \geq 1$. Comme $\phi_x(t) = g(x^t)$, si $x < 1$, c'est une fonction décroissante et positive. Par théorème de comparaison série et intégrale, $\int_1^\infty \phi_x(t) dt$ et $\sum \phi_x(n)$ sont de même nature. Comme $\phi_x(n) = f_n(x)$, la fonction ϕ_x est intégrable sur $[1, +\infty[$. Posons $S_n(x) = \sum_{p=1}^n \phi_x(p) = \sum_{p=1}^n f_p(x)$. Par décroissance de ϕ_x sur $[p, p+1]$ pour $p \geq 1$, on obtient que :

$$(*) \quad \phi_x(p+1) \leq \int_p^{p+1} \phi_x(t) dt \leq \phi_x(p)$$

En sommant ces inégalités de 1 à $n-1$ et en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales :

$$S_n(x) - \frac{x}{1-x^2} \leq \int_1^n \phi_x(t) dt \leq S_{n-1}(x)$$

et en passant à la limite :

$$f(x) - \frac{x}{1-x^2} \leq \int_1^\infty \phi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_1^\infty \phi_x(t) dt + \frac{x}{1-x^2}$$

Dans l'intégrale de ϕ_x , soit le changement de variable $u = x^t$ (de réciproque $t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$) de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[1, +\infty[$ sur $]0, x]$. Par théorème, l'intégrale obtenue reste convergente et :

$$I(x) = \int_1^\infty \phi_x(t) dt = \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\ln(x)} \left[\ln \left(\frac{1-u}{1+u} \right) \right]_0^x = \frac{1}{\ln(x)} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

Au voisinage de 1 à gauche, $I(x) \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}$ puisque $\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ et $\ln(x) \sim x-1$. Comme $\frac{x}{1-x^2} = o(I(x))$, on obtient $I(x) + o(I(x)) \leq f(x) \leq I(x)$ soit $f(x) \underset{1^-}{\sim} I(x) \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

Lorsque $x > 1$, la fonction Φ_x est croissante ce qui échange le signe des inégalités dans (*).

Par le même raisonnement on a alors en posant encore $I(x) = \int_1^\infty \phi_x(t) dt$

$$I(x) - \frac{x}{x^2-1} \leq f(x) \leq I(x)$$

Le changement de variable $u = t^x$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$; il conserve donc la convergence des intégrales et

$$I(x) = \frac{1}{\ln(x)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{\ln(x)} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_x^{+\infty} = \frac{-1}{\ln(x)} \ln \left(\frac{x-1}{1+x} \right)$$

Comme $\frac{x}{x^2-1}$ est encore négligeable devant $I(x)$ (même argument qu'à gauche), on obtient $f(x) \underset{1^+}{\sim} -\frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

En conclusion $f(x) \underset{1}{\sim} -\frac{\ln(|x-1|)}{|x-1|}$.

□

Correction de l'Exercice 75

[Retour à l'énoncé](#)

1. f_0 étant continue, elle est bornée sur $[a, b]$. Montrons par récurrence sur n que pour tout n la propriété H_n :

$$\forall x \in [a, b], |f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$$

est vérifiée.

Initialisation : $\forall x \in [a, b], |f_0(x)| \leq \|f\|_\infty$ par définition de $\|f\|_\infty$.

Hérédité : On suppose que pour un entier n donné, H_n est vérifiée.

Alors pour tout x de $[a, b]$:

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)| dt \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} \int_a^x (t-a)^n dt \leq \frac{\|f\|_\infty}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ce qui prouve H_{n+1} . La propriété a donc été vérifiée par récurrence.

Ainsi pour tout x de $[a, b]$, $|f_n(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$. La série $\sum \frac{(b-a)^n}{n!}$ est convergente (série exponentielle), donc la série $\sum f_k$ est normalement convergente.

2. f_0 est continue. Si f_n est continue, f_{n+1} étant la primitive de f_n qui s'annule en a , f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue. Par récurrence, toutes les fonctions f_n sont donc continues.

g_0 comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues est continue. Pour $n \geq 1$, on a vu précédemment que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f_{n-1} . Aussi g_1 est la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la série dérivée $\sum_{n \geq 1} f_{n-1}$ soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[a, b]$ de somme g_0 ; par théorème de dérivation terme à terme d'une série, g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g'_1 = g_0$.

Par récurrence, vérifions que pour tout n , g_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

L'initialisation de la récurrence vient d'être faite.

Supposons g_n de classe $\mathcal{C}^n$. Alors g_{n+1} est la somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la série dérivée $\sum_{k \geq n+1} f_{k-1}$ soit $\sum_{k \geq n} f_k$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[a, b]$ de somme g_n ; par théorème de dérivation terme à terme d'une série, g_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g'_{n+1} = g_n$. g_n étant de classe $\mathcal{C}^n$, g_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On a bien vérifié par récurrence que pour tout n , g_n est de classe $\mathcal{C}^n$.

3. Dans la question précédente, on a vu que $g'_1 = g_0 = f_0 + g_1$. g_1 est donc la solution de l'équation différentielle $g'_1 - g_1 = f_0$ qui s'annule en a . Une solution de l'équation homogène associée est $t \mapsto e^t$. La fonction $h : t \mapsto e^{-t}g(t)$ vérifie $h'(t) = e^{-t}f_0(t)$. Comme $h(a) = 0$, $h(x) = \int_a^x e^{-t}f_0(t)dt$ et $g_1(x) = e^x \int_a^x e^{-t}f_0(t)dt$.

□

Correction de l'Exercice 76

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $g_0(x) = \frac{1}{x}$ et pour n entier naturel non nul, $g_n(x) = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2 - n^2}$. f_N est la somme partielle de rang N de la série $\sum g_n$.

g_n est définie en dehors de $\{\pm n\}$. Toutes les fonctions g_n sont définies en x si et seulement si $x \notin \mathbb{Z}$. Pour x non entier relatif, $|g_n(x)| \sim \frac{2x}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série est absolument convergente et f est définie.

Conclusion : le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Les fonctions g_n sont de classe $\mathcal{C}^1$. $g'_0(x) = \frac{-1}{x^2}$ et pour n non nul $g'_n(x) = -\frac{2(x^2 + n^2)}{(x^2 - n^2)^2}$.

Comme $|g'_n(x)| \sim \frac{2}{n^2}$ la série $\sum g'_n$ est convergente. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $I_p =]p, p+1[$. Pour $n \geq p+1$ et $x \in I_p$, $|x^2 + n^2| < (p+1)^2 + n^2$ et $|x^2 - n^2| = n^2 - x^2 < n^2 - p^2$ donc $|g'_n(x)| < \frac{(p+1)^2 + n^2}{(n^2 - p^2)^2} = v_n$. Ainsi comme $\sum v_n$ est convergente, pour $n \geq p$, le reste

R_n de rang n de la série dérivée ($R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} g'_k(x)$) est majorée par le reste d'une série

convergente : la convergence de la série dérivée est uniforme sur I_p . Par parité de g'_n , il en est de même sur $J_p =]-(p+1), -p[$.

Par théorème de dérivation terme à terme d'une série, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les intervalles I_p ou J_p . Leur union formant D , f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

2. On remarque que g_n est impaire. Toutes les fonctions f_N sont impaires : leur limite f est impaire.

Le domaine de définition est invariant par translation de 1 ce qui amène à calculer :

$$f_N(x+1) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = f_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}$$

et en passant à la limite $f(x+1) = f(x)$. f est périodique de période 1.

□

Correction de l'Exercice 77

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si x est différent de 0, $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{x^2 n^{a+1}} = \frac{1}{|x| n^{a+1}}$. Comme $a+1 > 1$, par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente : $f(x)$ est bien définie. $f_n(0) = 0$ pour tout n , donc $f(0)$ est bien définie et $f(0) = 0$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire (chaque fonction f_n est impaire).

Pour $x \in [\alpha, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{|x| n^{a+1}} \frac{1}{|\alpha| n^{a+1}}$: le majorant étant le terme d'une série convergente indépendant de x , la série converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$. Comme chaque fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la convergence étant normale sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset [\alpha, +\infty[$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, f y est continue et par parité f est aussi continue sur $\mathbb{R}^{-*}$.

2. La suite f_n est de limite nulle en $+\infty$. Pour tout $x \geq 1$ et tout entier naturel n non nul :

$$|f(x)| \leq |f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)| + |\sum_{k=1}^n f_k(x)| \leq |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| + |\sum_{k=1}^n f_k(x)| \leq R_n + \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

avec $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{a+1}}$. $r - n$ étant le reste d'une série convergente, sa limite est nulle en $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et en particulier $|R_N| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\sum_{k=1}^N f_k(x)$ est une somme (finie) de fonctions de limite nulle en $+\infty$, la limite est nulle en $+\infty$. Ainsi

$$\exists A > 0, x > A \implies \sum_{k=1}^N f_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies |f(x)| \leq \varepsilon.$$

f est de limite nulle en $+\infty$.

3. f_n est dérivable de dérivée $f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{n^a(1 + nx^2)^2}$. F_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Ainsi :

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{a+\frac{1}{2}}}.$$

La série est normalement convergente si et seulement si $a + \frac{1}{2} > 1$ soit $a > \frac{1}{2}$.

Remarque : par parité, la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 si $a > \frac{1}{2}$.

4. Le dénominateur de ϕ_a est croissant donc ϕ_a est décroissante. Aussi sur l'intervalle $[n, n+1]$ avec $n \geq 1$ et $x > 0$, $\phi_a(n)$ est un majorant et :

$$\phi_a(n) = \frac{f_n(x)}{x} \geq \int_n^{n+1} \phi_a(t) dt \geq \int_n^{n+1} \phi_{1/2}(t) dt$$

Par comparaison série-intégrale, la série étant convergente pour $a = \frac{1}{2}$, $\phi_{1/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\frac{f(x)}{x} \geq \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+tx^2)} = \frac{2}{x} \left[\text{Arctan}(x\sqrt{t}) \right]_1^\infty$$

soit $f(x) \geq \pi - 2\text{Arctan}(x)$ et pour $x > 1$, comme $\text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{4}$, $f(x) \geq \frac{\pi}{2}$. Comme $f(0) = 0$, f n'est pas continue en 0 (si f était continue en 0, par continuité on aurait $f(0) \geq \frac{\pi}{2}$).

5.

a. f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$. Ainsi comme $|1-nx^2| \leq 1+nx^2$ pour tout x non nul :

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^2x^2}$$

aussi sur tout segment $S = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^{+*}$, f'_n est majorée par $\frac{1}{n^2\alpha^2}$ terme général d'une série convergente. La série des dérivées converge donc normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, f somme de la série est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$.

b. $x \mapsto \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(1+nx^2)}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$; elle est donc de limite finie en 0 si elle est bornée et de limite $+\infty$ dans le cas contraire. Or si elle est bornée par M , pour tout N , $0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq M$ et par continuité en 0, $0 \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq M$ or la série harmonique n'est pas bornée. Par contraposition, $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ n'est pas bornée et diverge donc en 0 vers $+\infty$.

Cette quantité est la limite du taux d'accroissement en 0 puisque $f(0) = 0$: f n'est pas dérivable en 0.

c. On remarque que $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}$ et

$$0 \leq \frac{1}{n^2x} - f_n(x) = \frac{1}{n^2x} - \frac{x}{n(1+x^2)} = \frac{1}{n^2x(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^3x^3}$$

Tous les termes étant des termes généraux de séries convergentes, en sommant de 1 à l'infini, on obtient :

$$0 \leq \frac{\zeta(2)}{x} - f(x) \leq \frac{\zeta(3)}{x^3} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x}$.

d. ϕ_1 étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on obtient que pour $n \geq 2$:

$$\int_n^{n+1} \phi_1(t) dt \leq \frac{f_n(x)}{x} \leq \int_{n-1}^n \phi_1(t) dt$$

l'inégalité de gauche étant encore valable pour $n = 1$. ϕ_1 étant intégrable sur $[1, +\infty[$ (la série étant intégrale) en sommant de 1 à $+\infty$, on obtient :

$$I_1(x) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{1+x^2} + I_1(x)$$

où $I_1(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx^2)}$. Or comme $1 = (1+tx^2) - tx^2$, $\frac{1}{t(1+tx^2)} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$ et ainsi

$$I_1(x) = \left[\ln \left(\frac{t}{1+tx^2} \right) \right]_1^{+\infty} = -2 \ln(x) + \ln(1+x^2)$$

D'où $I_1(x) \sim -2 \ln(x) \sim \frac{1}{1+x^2} + I_1(x)$ ce qui prouve que $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln(x)$ puisque $1 \leq \frac{f(x)}{x I_1(x)} \leq 1 + \frac{1}{I_1(x)(1+x^2)}$ et donc par théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x I_1(x)} = 1$. Finalement $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln(x)$. □

Correction de l'Exercice 78

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(n\sqrt{x})}{1+x^3+x^6+\dots+x^{3n}}$. f_n est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et en $+\infty$, $f_n(x) \sim \frac{\pi}{2x^{3n}}$ et est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. U_n est donc bien défini. Pour $x \neq 1$:

$$D_n(x) = 1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} = \sum_{k=0}^n x^{3k} = \frac{x^{3n+3} - 1}{x^3 - 1}$$

Aussi si $x < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \frac{1}{1-x^3}$ et si $x \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}(1-x^3) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, pour tout n et tout réel $x > 0$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2(1+x^3)} = \phi(x)$ où ϕ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème de convergence dominée, $(U_n)_n$ est une suite convergente de limite $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

$$\lim U_n = \int_0^1 \frac{\pi}{2}(1-x^3) dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

□

Correction de l'Exercice 79

[Retour à l'énoncé](#)

L'intégrale est bien définie puisque la fonction $x \mapsto nf(x) \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n^3}$ est nulle en dehors du segment $S = [a, b]$ donc l'intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment. Pour étudier la suite donnée, on se limite aux entiers naturels n tels que $n \geq \max(a^2, b^2)$ afin que l'expression $1 - \frac{x^2}{n}$ reste positive. Soit le changement de variable $y = nx$ changement affine qui ne change donc pas la nature de l'intégrale. On a alors :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{n}\right) \left(1 - \frac{y^2}{n^3}\right)^{n^3} dy = \int_{\mathbb{R}} f_n(y) dy$$

avec $f_n(y) = f\left(\frac{y}{n}\right) \left(1 - \frac{y^2}{n^3}\right)^{n^3}$ Comme $\left(1 - \frac{y^2}{n^3}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln(1 - \frac{y^2}{n^3})}$ et que f est continue, $\lim_n f_n(y) = f(0)e^{-y^2} = f(y)$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle y est bornée. Soit $M = \max(|f|)$. De plus comme $\ln(1-t) \leq -t$ pour $t \in [0, 1[$ (ce qui peut se vérifier en étudiant la fonction $t \mapsto t + \ln(1-t)$), on obtient avec la croissance de la fonction exponentielle que

$$|f_n(y)| \leq M e^{n^3 \ln(1 - \frac{y^2}{n^3})} \leq M e^{-y^2} = \varphi(y).$$

Comme $\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $\frac{1}{y^2}$ au voisinage de l'infini, elle est intégrable. Par théorème de convergence dominée :

$$\lim I_n = f(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = f(0)\sqrt{\pi}$$

la deuxième égalité étant obtenue par parité de la fonction $y \mapsto e^{-y^2}$.

□

Correction de l'Exercice 80

[Retour à l'énoncé](#)

1. Pour $x < 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc $f(x)$ n'est pas défini. Pour $x \geq 0$:

$$0 \leq f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

On a donc $\|f_\infty\| \leq \frac{1}{1+n^2}$.

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$. Chaque fonction f_n étant continue et la convergence de la série étant normale, f est continue sur $D = \mathbb{R}^+$.

2. Pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(x) = -\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$. Sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $|f'_n(x)| \leq |f'_n(a)| \leq e^{-na}$; la série $\sum e^{-na}$ est une série géométrique de raison $e^{-a} < 1$ et est donc convergente. La série $\sum f'_n$ est donc normalement convergente sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{-nx}}{1+n^2}$.

3. f_n est positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$I_n = \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{n(n^2+1)} [e^{-nx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{n(n^2+1)}.$$

Comme $\sum_{n \geq 1} I_n$ est convergente, par théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

□

Correction de l'Exercice 81

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^3 x^3 + n + 1}$, fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

On remarque que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle et pour tout n , et tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leq f_0(x) = 1$. Par le théorème de convergence dominée, I_n a pour limite 0.

On pourrait calculer I_n mais le calcul est laborieux. On va donc essayer de majorer I_n pour $n \geq 2$. On peut remarquer que pour tout n ,

$$0 \leq f_n(x) \leq g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2 x^2 + n} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Or

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{n x^2 + 1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n\sqrt{n}} [\text{Arctan}(\sqrt{n}x)]_{1/n}^1$$

Comme

$$[\text{Arctan}(\sqrt{n}x)]_{1/n}^1 = \text{Arctan}(\sqrt{n}) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \text{Arctan}(\sqrt{n}) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\pi}{2}$$

Le terme majorant est la somme de deux termes généraux de séries convergentes : c'est le terme général d'une série convergente : $\sum I_n$ est donc une série convergente.

□

Correction de l'Exercice 82

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $f_n : x \rightarrow \frac{(-1)^{n-1}n}{x^2+n^2}$. f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\sum f_n(x)$ est une série alternée pour tout x . Vérifions sa convergence :

- le terme général tend bien vers 0.

- la fonction $t \mapsto \frac{t}{x^2+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$. Elle est donc décroissante sur $]x, +\infty[$. Aussi dès que $n > x$, $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$. La suite $(|f_n(x)|)_n$ est donc décroissante à partir d'un certain rang

Par le théorème des séries alternées, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

f_n est dérivable et $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}2nx}{(x^2+n^2)^2}$. comme $2n|x| \leq x^2+n^2$ (car $(|x|-n)^2 \geq 0$),

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum f'_n$ est normalement convergente. Par théorème de dérivation des sommes de

séries, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}nx}{(x^2+n^2)^2}$.

2. Pour tout $r > 0$, $g_r : t \mapsto e^{-rt} \cos(xt)$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et majorée par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-rt}$ intégrable : elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

g_r est la partie réelle de la fonction $t \mapsto e^{(-r+ix)t}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque son module est la fonction $t \mapsto e^{-rt}$. Une primitive de $t \mapsto e^{(-r+ix)t}$ est $\frac{e^{(-r+ix)t}}{ix-r}$ donc :

$$I_r = \int_0^{+\infty} e^{-rt} \cos(xt) dt = \Re e \left(\left[\frac{e^{(-r+ix)t}}{ix-r} \right]_0^{+\infty} \right) = \Re e \left(\frac{1}{r-ix} \right) = \frac{r}{r^2+x^2}.$$

Remarque : ce dernier résultat peut aussi s'obtenir en ne passant pas par $\mathbb{C}$ et en faisant deux intégrations par parties.

3. Pour $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$. Aussi pour $t > 0$:

$$\frac{\cos(xt)}{1+e^t} = \frac{e^{-t} \cos(xt)}{1+e^{-t}} = e^{-t} \cos(xt) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} \cos(xt).$$

$$\text{Ainsi } g(t) = \frac{\cos(xt)}{1+e^t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g_n(t).$$

La série $\sum I_n$ n'étant pas convergente, on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

g est une fonction continue intégrable sur $]0, +\infty[$ car majorée par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-t}$. A t et x fixés, la série $\sum (-1)^{n-1} g_n(t)$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. Par théorème des séries alternées, on a alors la majoration du reste d'ordre n par $|g_{n+1}(t)|$ soit :

$$|g(t) - \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} g_r(t)| \leq |g_{n+1}(t)| \leq e^{-(n+1)t}$$

Toutes les fonctions intervenant dans cette inégalité étant intégrables sur $]0, +\infty[$, on obtient que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t} dt - \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} I_r \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1}$$

ce qui prouve que la série $\sum_{r \geq 1} (-1)^{r-1} I_r$ est convergente de somme $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t} dt$. Or $I_r = f_r(x)$. La somme étant unique, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+e^t} dt$. □

Correction de l'Exercice 83

[Retour à l'énoncé](#)

1. $f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t^n}$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ pour tout entier naturel n : a_n est défini pour tout n .

$g_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente en $+\infty$ à $t \mapsto \frac{1}{t^n}$; elle est donc intégrable (ce qui équivaut à u_b est défini) si et seulement si $n \geq 2$.

2. $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée. Comme $f_n(t) = 1 - \frac{1}{1+t^n}$, si $t \in [0, 1]$, $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$. En intégrant sur le segment $[0, 1]$, la suite $(a_n)_n$ est décroissante. De plus la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle et est majorée par la fonction intégrable f_0 . Par le théorème de convergence dominée, la suite $(a_n)_n$ est de limite nulle. Par le théorème des séries alternées, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

3. Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $]0, 1]$ dans lui-même conserve l'intégrabilité et

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x}{1+x} x^{-1+1/n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln(x)}{n}}}{1+x} dx$$

La dérivée seconde de $\exp$ étant majorée par 1 sur $\mathbb{R}^-$, l'inégalité de Taylor Lagrange permet d'affirmer que pour tout y négatif :

$$|e^y - 1 - y| \leq \frac{y^2}{2}$$

ainsi, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$(*) \quad \left| x^{1/n} - 1 - \frac{\ln(x)}{n} \right| \leq \frac{\ln^2(x)}{2n^2}$$

Les fonctions continues sur $]0, 1]$ $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{1+x}$ étant négligeables au voisinage de 0 devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable sur $]0, 1]$, elles sont intégrables sur $]0, 1]$. Ainsi en multipliant les termes de $(*)$ par $\frac{1}{n(1+x)}$ et en intégrant sur $]0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{n(1+x)} \left| x^{1/n} - 1 - \frac{\ln(x)}{n} \right| dx \leq \frac{1}{2n^3} \int_0^1 \frac{\ln^2(x) dx}{1+x}$$

Or pour toute fonction continue h , $|\int_0^1 h| \leq \int_0^1 |h|$, d'où

$$\left| a_n - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln(x) dx}{1+x} \right| \leq \frac{1}{2n^3} \int_0^1 \frac{\ln^2(x) dx}{1+x}$$

soit : $a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ avec $\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$ et $\beta = \int_0^1 \frac{\ln(x) dx}{1+x}$.
Il reste à calculer β . Pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\frac{\ln(x)}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \ln(x)$$

Soit $h_n : x \mapsto (-1)^n x^n \ln(x)$; alors $|h_n| : x \mapsto -x^n \ln(x)$ est une fonction continue sur $]0, 1]$ prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ et par une intégration par parties généralisées :

$$I_n = - \int_0^1 x^n \ln(x) dx = - \left[\frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} \right]_{x \rightarrow 0}^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Par le théorème d'intégration terme à terme d'une série, comme $\sum \int_{]0,1[} |h_n|$ est convergente (série de Riemann), on obtient :

$$\beta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

On cherche alors à comparer β et $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. On remarque que

$$\zeta(2) + \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2} = \frac{\zeta(2)}{2}$$

donc $\beta = \frac{-\zeta(2)}{2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

4. La suite de fonctions $g_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^n}$ est une suite de limite g définie par

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1/2 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}. \text{ Cette fonction est continue par morceaux sur } \mathbb{R}^+. \text{ Toutes les}$$

fonctions g_n pour $n \geq 2$, sont majorées par la fonction continue ϕ définie par $\phi(t) = 1$ si $t \leq 1$ et $\phi(t) = \frac{1}{t^2}$ si $t > 1$. Comme ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$, par théorème de convergence dominée, $(u_n)_n$ est convergente et

$$\ell = \lim_n u_n = \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

On a alors : $u_n - 1 = \int_0^1 (g_n(t) - 1) dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = -a_n + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$.

Soit $b_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$. Le changement de variable $x = \frac{1}{t^n}$ de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $[1, +\infty[$ dans $]0, 1]$ conserve l'intégrabilité et

$$b_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x}{1+x} x^{-1-1/n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\ln(x)}{n}}}{1+x} dx$$

Par l'inégalité de Taylor Lagrange, pour tout $y > 0$ (le majorant de l'exponentielle sur $[0, y]$ étant e^y :

$$|e^y - 1 - y| \leq \frac{e^y y^2}{2}$$

soit pour $y = -\frac{\ln(x)}{n}$ avec $x \in]0, 1]$ et $n \geq 2$

$$\frac{1}{n(1+x)} \left| x^{-1/n} - 1 + \frac{\ln(x)}{n} \right| \leq \frac{1}{n^3} \frac{\ln^2(x)}{x^{1/n}(x+1)} \leq \frac{1}{n^3} \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$$

$x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, 1[$ et dominée au voisinage de 0 par la fonction intégrable $x \mapsto x^{-3/4}$: elle est donc intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi par intégration on obtient :

$$b_n - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\beta}{n^2} = O(1/n^3) \text{ soit } b_n = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o(1/n^2)$$

et finalement $u_n - 1 = b_n - a_n = -\frac{\pi^2}{6n^2} + o(1/n^2)$ ce qui équivaut à $u_n - 1 \sim -\frac{\pi^2}{6n^2}$. $\square$

Correction de l'Exercice 84

[Retour à l'énoncé](#)

1. $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et majorée sur $[1, +\infty[$ par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-t}$: elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$: G est bien défini.

2.

a. Soit $\phi(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \phi(x, t)$ est continue.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue.

- Pour tout couple (x, t) de réels positifs, $|\phi(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto \phi(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (ainsi $f(x)$ est défini).

Par théorème des intégrales à paramètres, f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, φ est dérivable par rapport à x et $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$; cette dérivée vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- Pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et tout couple $(x, t) \in S \times \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq e^{-at^2} = o(t^{-2})$$

la fonction dominante étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $a > 0$.

Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

Ainsi $f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$. Par le changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$, on obtient alors :

$$f(x) - f'(x) = \frac{G}{\sqrt{x}}$$

b. Cette équation différentielle est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution de l'équation sans second membre est $x \mapsto e^x$. Soit $y(x) = \lambda(x)e^x$ (méthode de variation de la constante) solution de l'équation différentielle proposée. On a alors $\lambda'(x)e^x = -\frac{G}{\sqrt{x}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car équivalente à $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de l'infini.

Comme $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est la primitive de $t \mapsto -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ de limite nulle en $+\infty$. On a donc l'existence d'une constante C telle que :

$$\forall x > 0, f(x) = \left(C + G \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right) e^x.$$

On remarque que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$) et positive : elle a une limite en $+\infty$ (on peut même démontrer que cette limite vaut 0 en calculant $\lim f(n)$ et en utilisant le théorème de convergence dominée). Ainsi $f(x)e^{-x}$ est de limite nulle en $+\infty$ et donc $C = 0$.

c. Par l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et la continuité de f en 0 vues précédemment, un passage à la limite en 0 donne :

$$G \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

or le changement de variable bijectif $t = u^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même donne $\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2G$ donc $G^2 = \frac{\pi}{4}$. G étant positif, $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.

a. Par le théorème fondamental de l'intégration, h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(x) = e^{-x^2}$.
 $\Phi(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ et continue (donc φ est définie). De plus, elle est dérivable par rapport à x et $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$, fonction continue et bornée sur tout ensemble $[a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$. φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\varphi'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

b. Le changement de variable affine $u = xt$ donne alors

$$\varphi'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2h'(x)h(x)$$

donc il existe une constante C telle que pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) + h^2(x) = C$. Comme $h(0) = 0$ et $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{4}$.

c. Comme h a comme limite G en $+\infty$, d'après la relation précédente, φ a une limite en $+\infty$. Calculons la limite de $\varphi(n)$ avec n entier naturel. Soit $f_n(t) = \frac{e^{-n^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. La suite $(f_n)_n$ a pour limite la fonction nulle et est dominée par la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$: par le théorème de convergence dominée $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$. Le passage à la limite en $+\infty$ de la relation trouvée dans la question précédente donne alors : $G^2 = \frac{\pi}{4}$.
On retrouve bien $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

□

Correction de l'Exercice 85

[Retour à l'énoncé](#)

1. Pour tout x réel, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}$ est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et majorée par la fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$; ainsi f_x est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc $I(x)$ est défini. Le domaine de définition de I est donc $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}$ étant continue pour tout t positif et dominée par une fonction intégrable, I est donc continue.

$$\mathbf{2.} \quad I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \left[\frac{\text{Arctan}(t)}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Soit x_n une suite de limite $+\infty$. La suite f_{x_n} a pour limite la fonction continue par morceaux Φ donnée par

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \in]0, 1[\\ 1/4 & \text{si } t = 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et est dominée par ϕ . Par le théorème de convergence dominée, $\lim I(x_n) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Par caractérisation séquentielle de la limite, I est de limite $\frac{\pi}{4}$ en $+\infty$.

Soit y_n une suite de limite $-\infty$. La suite f_{y_n} a pour limite la fonction Ψ définie par

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in]0, 1[\\ 1/4 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et est dominée par ϕ . Par le théorème de convergence dominée, $\lim I(y_n) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Par caractérisation séquentielle de la limite, I a pour limite $\frac{\pi}{4}$ en $-\infty$.

3. Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même, il conserve donc l'intégrabilité des fonctions et ainsi :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2(1+u^{-2})(1+u^{-x})} = \int_0^{+\infty} \frac{u^x du}{(1+u^2)(1+u^x)}$$

ainsi $2I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout x , $I(x) = \frac{\pi}{4}$.

□

Correction de l'Exercice 86

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $f(x, t) = \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ est continue par rapport à x et par rapport à t . De plus, $f(x, t)$ est prolongeable en 0 et $|f(x, t)| \leq |x|e^{-t}$ (puisque pour tout u , $|\sin(u)| \leq |u|$) donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$x \mapsto f(x, t)$ est indéfiniment dérivable par rapport à t et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = t^{k-1} \sin\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right) e^{-t}$.

Les fonctions $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont continues par rapport à x et par rapport à t . De plus pour tout couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \phi_k(t) = t^{k-1} e^{-t}$. ϕ_k est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $k \geq 1$ et est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car négligeable devant $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. De plus, on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$. Pour tout x , $\cos(xt)e^{-t}$ est la partie réelle de $\phi(t) = e^{(ix-1)t}$. Comme $|\phi(t)| = e^{-t}$ est intégrable, ϕ l'est aussi et :

$$F'(x) = \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) = \Re \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} = \Re \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc il existe C tel que $F(x) = \text{Arctan}(x) + C$. Comme $F(0) = 0$, $F(x) = \text{Arctan}(x)$.

□

Correction de l'Exercice 87

[Retour à l'énoncé](#)

1. Par définition de la limite, il existe A tel que

$$|x| > A \implies |f(x)| \leq 1$$

Sur le segment $[-A, A]$, $|f|$ étant continue, elle est bornée. Soit M_1 un de ses majorants. $M = \max(M_1, 1)$ est donc un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$: f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Par le changement de variable affine $u = \frac{y-x}{\sqrt{2t}}$ (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}$ dans lui-même), $P_t f(x)$ est défini si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2} du$ est convergente et on a alors

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2} du.$$

Comme pour tout u réel, $|f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2}| \leq g(u) = Me^{-u^2}$ (fonction intégrable), la fonction continue $u \mapsto f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $x \mapsto f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2}$ est continue. Compte-tenu de la domination vue précédemment et de la nouvelle expression de $P_t f(x)$, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, $P_t f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x_n)_n$ une suite de limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Posons $\phi_n(u) = \frac{f(\sqrt{2t}u+x_n)e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}}$. $(\phi_n)_n$ est de limite la fonction nulle et dominée par g donc par théorème de convergence dominée $\lim P_t f(x_n) = 0$. Par caractérisation séquentielle de la limite, $P_t(f)$ est de limite nulle en $\pm\infty$.

3. Pour tout x réel, la fonction $(t, u) \mapsto f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (donc continue par rapport à t et par rapport à u) et $u \mapsto f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2}$ est intégrable et dominée par g . Aussi par théorème de continuité des intégrales à paramètre, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{2t}u+x)e^{-u^2} du$ est continue. Aussi :

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-u^2} du = \frac{2f(x)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = f(x).$$

4. Soit M_3 un majorant de $|f^{(3)}|$ sur $\mathbb{R}$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x+u\sqrt{2t}) - f(x) - u\sqrt{2t}f'(x) - tu^2f''(x) \right| \leq \frac{M_3\sqrt{2}|u^3|t^{3/2}}{3}.$$

Comme pour tout entier k , $u \mapsto u^k e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ intégrable au voisinage de $\pm\infty$, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$.

En multipliant l'inégalité précédente par $\frac{e^{-u^2}}{t}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left| \frac{\sqrt{\pi}(P_t f(x) - f(x))}{t} - \frac{f'(x)\sqrt{2}}{\sqrt{t}} I_1 - f''(x) I_2 \right| \leq \frac{M_3\sqrt{2}\sqrt{t}}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^3 e^{-u^2} du.$$

Or $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} du = \left[\frac{e^{-u^2}}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Le majorant dans l'inégalité du majorant étant nul lorsque t tend vers 0, on a donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = f''(x) \frac{I_2}{\sqrt{\pi}}$$

Les fonctions $u \mapsto -\frac{e^{-u^2}}{2}$ et $u \mapsto u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et leur produit étant de limite nulle en $\pm\infty$, par intégration par parties :

$$I_2 = \left[-\frac{ue^{-u^2}}{2} \right]_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow +\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

d'où $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} = f''(x)$.

□

Correction de l'Exercice 88

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $\gamma(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. Or à x fixé, $\gamma(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ donc $t \mapsto \gamma(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$. Pour $x > 0$, $\gamma(x, t)$ est négligeable devant $t \mapsto e^{-t/2}$ au voisinage de $+\infty$: elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

Soit $S = [a, b]$ inclus dans $\mathcal{D}$ et $x \in S$. Pour tout $0 < t < 1$, $0 < t^x < t^a$ et pour $t > 1$, $0 < t^x < t^b$; aussi

$$0 \leq \gamma(x, t) \leq \gamma(a, t) + \gamma(b, t) = \phi_S(t).$$

ϕ_S étant une fonction de domination intégrale, Γ est continue sur $\mathcal{D}$.

2. $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -e^{-t}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et leur produit étant de limite nulle en $+\infty$, une intégration par parties généralisée donne alors :

$$\Gamma(n+1) = [-t^n e^{-t}]_0^{t \rightarrow +\infty} + n\Gamma(n-1)$$

soit $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, on obtient par itération de la relation trouvée ou par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. γ est indéfiniment dérivable par rapport à x et $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t) = \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}$. $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}$ est continue par rapport à x et par rapport à t . de plus pour tout $x > 0$, $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t) = o(t^{x/2-1})$ au voisinage de 0 (car $\lim_{t \rightarrow 0} \ln^k(t) t^{x/2} = 0$) donc $t \mapsto \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t) = o(e^{-t/2})$ donc $t \mapsto \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, comme précédemment pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et tout réel $t > 0$:

$$\left| \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(a, t) \right| + \left| \frac{\partial^k \gamma}{\partial x^k}(b, t) \right|$$

ce qui permet d'affirmer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. Soit $\phi_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

Soit $t > 0$ donné. Dès que $n > t$, $\phi_n(t) = t^{x-1} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})}$ et donc $\lim \phi_n(t) = \gamma(x, t)$.

Comme $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout $u \in [0, 1[$ (si on veut vérifier cette inégalité, on peut étudier la fonction $u \mapsto \ln(1-u) + u$) donc pour $t \leq n$, $\phi_n(t) \leq \gamma(x, t)$ et cette inégalité est aussi vérifiée lorsque $t > n$.

$t \mapsto \gamma(x, t)$ étant intégrable, par le théorème de convergence dominée, on obtient le résultat souhaité

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Par le changement de variable $t = ns$, on a alors :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^n ds.$$

Soit $y > 0$ et n entier naturel. Posons $I(x, n) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^n ds$. Les fonctions $s \mapsto s^x$ et $s \mapsto (1-s)^n$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et leur produit étant nul en 0, on obtient par intégration par parties généralisée :

$$I(x, n) = \left[\frac{s^x (1-s)^n}{x} \right]_0^1 + \frac{n}{x} I(x+1, n-1) = \frac{n}{x} I(x+1, n-1)$$

et en réitérant cette relation pour "descendre" l'entier naturel à 0 :

$$I(x, n) = \frac{n! I(x+n, 0)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}$$

soit

$$I(x, n) = \frac{n! \int_0^1 t^{x+n-1} dt}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

ce qui donne le résultat attendu

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

□

Correction de l'Exercice 89

[Retour à l'énoncé](#)

1. $\left| \frac{x^{2n-1}}{2n} \right|$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ donc $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n}$ est une série alternée ; comme $\left(\frac{1}{2n} \right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle, la série est convergente. Ainsi le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n}$$

est le segment $[-1, 1]$.

On connaît le développement en série entière de $\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^n}{n}$ pour $u \in]-1, 1[$ aussi

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n}$$

d'où pour $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n} = -\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$$

2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n(2n-1)}$ est convergente : le rayon de convergence est supérieur ou égal à

1. Pour $x > 1$, le terme général ne tend plus vers 0. Le rayon de convergence est égal à 1 et le domaine de définition est $[-1, 1]$

Soit f la somme de cette série entière. Par théorème, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$ et les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Comme $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$, f' est la primitive de f'' qui s'annule en 0, soit

$$f'(x) = -\operatorname{Arctan}(x) .$$

De même comme $f(0) = 0$, une intégration par parties donne pour $x \in] -1, 1[$:

$$f(x) = -\int_0^x \operatorname{Arctan}(t) dt = -x \operatorname{Arctan}(x) + \int_0^x \frac{t dt}{1+t^2} = -x \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} .$$

La série est normalement convergente sur son domaine de définition car pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout entier naturel non nul

$$\left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)} \right| \leq \frac{1}{2n(2n-1)} .$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$ étant continues et la convergence de la série étant normale, par théorème de continuité de la somme, f est continue sur $[-1, 1]$. Ainsi

$$\forall x \in [-1, 1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)} = -x \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} .$$

3. Posons pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{(n+2)!}{3 \times 6 \times \dots \times (3n)}$. On a alors :

$$a_n = \frac{(n+2)!}{3^n n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{3^n} = \frac{2 \binom{n+2}{2}}{3^n} .$$

Comme $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$, par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence est égal à 3.

Pour $x = \pm 3$, $|a_n x^n| \sim n^2$; le terme général ne tend pas vers 0, la série est divergente. Ainsi le domaine de définition est $] -3, 3[$.

Comme pour $|y| < 1$, $\frac{1}{(1-y)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2+n}{2} y^n$, en posant $y = \frac{x}{3}$, on obtient que pour $x \in] -3, 3[$

$$\frac{27}{(3-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2+n}{2} \frac{x^n}{3^n}$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 2 \left(-1 + \frac{27}{(3-x)^3} \right) = \frac{2(x^3 - 27x^2 + 27x)}{(3-x)^3}.$$

4. La série $\sum \frac{1}{2n+1}$ est divergente alors que la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée convergente (la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0) ; le domaine de convergence est donc $[-1, 1[$.

Pour $x \in [-1, 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Lorsque $x \in]0, 1[$, posons $y = \sqrt{x}$.

On a alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1} = \frac{g(y)}{y}$ où $g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$. g est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 ; elle est donc dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme aussi, pour $y \in] -1, 1[$,

$$g'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n} = \frac{1}{1-y^2}.$$

Comme $g(0) = 0$, $g(y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$. Ainsi pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$.

De même, pour $x \in] -1, 0]$, posons $y = \sqrt{-x}$.

On a alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{2n+1} = \frac{g(y)}{y}$ où $g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{2n+1}$, où on reconnaît le

développement en série entière de Arctan. Ainsi pour $x \in [-1, 0[$, $f(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$.

Remarque : la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$. En effet, par le développement trouvé précédemment elle est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$ et par les théorèmes généraux de dérivation, elle est indéfiniment dérivable sur $] -\infty, 0[$.

5. Soit $a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. La suite $(a_{2n} x^{2n})_n$ est bornée si et seulement

si $|x| < 1$, la suite $(a_{2n+1} x^{2n+1})_n$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$. La suite $(a_n x^n)_n$ est donc bornée si et seulement si $|x| < 1$: le rayon de convergence est égal à 1.

Pour $x = \pm 1$, le terme général ne tend pas vers 0 car $(a_{2n})_n$ n'est pas bornée. Aussi le domaine de convergence est $] -1, 1[$.

Pour $x \in] -1, 1[$, les deux séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ étant convergentes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n} = f(x^2)$ avec $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n$. Pour $|y| < 1$, $\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) y^n$ soit

$$\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}. \text{ Ainsi } f(y) = \frac{y}{(1-y)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; c'est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1; aussi par théorème de dérivation des séries entières, g est dérivable pour $x \in]-1, 1[$ et $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$.

$$\text{Comme } g(0) = 0, g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

$$\text{Finalement pour } x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

6. le rayon de convergence est infini car la suite $\left(\frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!} \right)_n$ est bornée pour tout x ; le domaine de définition est donc $\mathbb{R}$.

Or $\sin(n\alpha)x^n = \Im(e^{i\alpha}x)^n$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(e^{i\alpha}x)^n}{n!}$ est une série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{i\alpha}x)^n}{n!} = e^{e^{i\alpha}x} = e^{x \cos(\alpha) + ix \sin(\alpha)}$$

la partie imaginaire de cette égalité donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!} = \Im \left(e^{x \cos(\alpha)} e^{ix \sin(\alpha)} \right) = e^{x \cos(\alpha)} \sin(x \sin(\alpha)).$$

7. $u_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 t(1-t) \dots (n-1-t) dt$. Pour $k \geq 1$ et tout $t \in [0, 1]$, $k-t \geq k-1$.

Aussi :

$$|u_n| \geq (n-2)! \int_0^1 t(1-t) dt = (n-2)! \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{(n-2)!}{6}.$$

Pour tout $r > 0$, $\lim(n-2)!r^n = +\infty$. La suite $(u_n x^n)_n$ n'est bornée que pour $x = 0$. La série n'est définie qu'en 0 et sa somme y est nulle.

8. a_n est le terme général du produit de Cauchy des suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ de termes généraux :

$$b_n = 1 \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{n!}.$$

$\sum a_n x^n$ est donc le produit de Cauchy des séries $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence respectifs 1 et $+\infty$. Aussi le rayon de convergence de la série proposée est supérieur ou égal à 1.

Comme $(a_n)_n$ n'est pas de limite nulle, la série $\sum a_n$ diverge; le rayon de convergence vaut au plus 1.

La série a un rayon de convergence égal à 1 et diverge en ± 1 . Le domaine de définition est donc $] -1, 1[$ et par théorème sur le produit de Cauchy de séries entières, pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \frac{e^x}{1-x}.$$

□

Correction de l'Exercice 90[Retour à l'énoncé](#)

1. La suite $(nx^n)_n$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$; ainsi $R = 1$. Comme $n = \binom{n}{1}$, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

La suite $(n^2x^n)_n$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$; ainsi $R = 1$.

Or $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ intervient dans le développement en série entière de $(1-x)^{-3}$.

Les polynômes $(X+2)(X+1)$, $X+1$ et 1 forment une famille étagée en degré de $\mathbb{R}_2[X]$, c'en est donc une base comme famille libre maximale. Aussi il existe (a, b, c) tels que

$$X^2 = a(X+2)(X+1) + b(X+1) + c$$

Le terme de plus haut degré donne $a = 1$. En évaluant en -1 , $c = 1$ puis en évaluant en -2 (ou en 0), $b = -3$. Ainsi :

$$n^2x^n = 2\binom{n+2}{2}x^n - 3\binom{n+1}{1}x^n + x^n.$$

On reconnaît les termes généraux de développements en série entière usuels :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2-3(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Pour $n = 0$, $a_n = 0$ et pour $n \geq 1$, $\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$. la suite $\left(\frac{r^n}{(n-1)!}\right)_n$ est bornée pour tout $r > 0$. Le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ est donc infini. Pour tout x réel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = xe^x.$$

2. Soit $r \geq 0$. La suite $(a_n^2 r^n)_n$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n(\sqrt{r})^n)_n$ autrement dit si $\sqrt{r}$ appartient à l'intervalle $[0, R]$ ou $[0, R[$. Le rayon de convergence de $\sum a_n^2 x^n$ est donc égal à R^2 .

Soit $0 < \rho < R$. La suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée ainsi $a_n = O(\rho^{-n})$ et pour tout $r > 0$:

$$\frac{|a_n| r^n}{n!} = O\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Dominée par une série exponentielle, la série $\sum \frac{a_n r^n}{n!}$ est convergente pour tout $r > 0$. Aussi le rayon de convergence est infini.

□

Correction de l'Exercice 91[Retour à l'énoncé](#)

Soit $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ suite ne s'annulant pas. alors :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+3)}$$

Comme la limite de ce rapport est $\frac{1}{4}$, par le critère de d'Alembert des séries entières, le rayon de convergence est égal à 4.

Soit $x \in]-4, 4[$. Posons $f_n(t) = t^n(1-t)^n x^n$. On remarque alors que $a_n x^n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

Pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4} \implies |f_n(t)| \leq \left(\frac{x}{4}\right)^n$.

Compte-tenu du choix de x , la série géométrique de terme général $\left(\frac{x}{4}\right)^n$ est convergente. La série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0, 1]$ et de somme $f : x \mapsto \frac{1}{1 - xt + xt^2}$. Par théorème d'intégration terme à terme d'une série normalement convergente sur un segment, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n+1)!} = \int_0^1 \frac{dt}{1 - xt + xt^2} = F(x).$$

Il reste à calculer cette intégrale. Pour $x \neq 0$:

$$1 - xt + xt^2 = x \left(t^2 - t + \frac{1}{x} \right) = x \left(\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{4-x}{4x} \right).$$

La forme de la primitive dépend du signe de $b = \frac{4-x}{4x}$.

Si $0 < x < 4$, $b > 0$ et

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 - xt + xt^2} = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + b} = \frac{\left[\operatorname{Arctan} \frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{b}} \right]_0^1}{x\sqrt{b}} = \frac{2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2\sqrt{b}} \right)}{x\sqrt{b}}$$

soit finalement

$$F(x) = \frac{4 \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{4-x}}}{\sqrt{x(4-x)}}$$

On vérifie que la limite en 0 est bien $F(0) = 1$.

Lorsque $-4 < x < 0$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 - xt + xt^2} = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + b} = \frac{1}{2x\sqrt{-b}} \left[\ln \left| \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{-b}}{\left(t - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{-b}} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{x\sqrt{-b}} \ln \left| \frac{1 - 2\sqrt{-b}}{1 + 2\sqrt{-b}} \right|$$

$$\text{Comme } \sqrt{-b} \geq \frac{1}{2}, \text{ finalement } F(x) = \frac{2 \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{x-4}{x}} - 1}{\sqrt{\frac{x-4}{x}} + 1} \right)}{\sqrt{x(x-4)}}.$$

□

Correction de l'Exercice 92[Retour à l'énoncé](#)

1. Posons $f(x) = \text{Arctan}(x+1)$. Cette fonction est continument dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2+1}$, soit $f'(x) = \frac{1}{(x+1+i)(x+1-i)}$.
Ainsi comme $(x+1+i) - (x+1-i) = 2i$:

$$f'(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x+1-i} - \frac{1}{x+1+i} \right) = \Im m \left(\frac{1}{x+1-i} \right).$$

Comme $(1-i) = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $\frac{1}{x+1-i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{1+y}$ où $y = \frac{xe^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. Pour $|y| < 1$ soit $|x| < \sqrt{2}$, on a le développement en série entière suivant :

$$\frac{1}{x+1-i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n e^{\frac{ni\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$$

et en prenant la partie imaginaire :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{(n+1)\pi}{4}) x^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}.$$

D'après ce qui précède, le rayon de convergence est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$ et pour $x = \sqrt{2}$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge ; le rayon de convergence est donc égal à $\sqrt{2}$.

f' étant développable en série entière de rayon de convergence $\sqrt{2}$, il en est de même de f et comme $f(0) = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, on a par intégration terme à terme du développement précédent :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{(n+1)\pi}{4}) x^{n+1}}{(n+1)(\sqrt{2})^{n+1}}.$$

2. Soit $f(x) = \ln(1 + 2 \cosh(\alpha) x + x^2)$. Les racines du trinôme $1 + 2 \cosh(\alpha) x + x^2$ sont $-e^\alpha$ et $-e^{-\alpha}$. f est donc définie en dehors du segment de bornes $-e^\alpha$ et $-e^{-\alpha}$. Pour $x > -e^{-|\alpha|}$, on a alors :

$$f(x) = \ln(x + e^\alpha) + \ln(x + e^{-\alpha}) = \ln(1 + xe^{-\alpha}) + \ln(1 + xe^\alpha)$$

$\ln(1 + xe^{-\alpha})$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R_1 = e^\alpha$ sous la forme :

$$\ln(1 + xe^{-\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n e^{-n\alpha}}{n}.$$

De même, $\ln(1 + xe^\alpha)$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R_2 = e^{-\alpha}$ sous la forme :

$$\ln(1 + xe^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n e^{n\alpha}}{n}.$$

R_1 et R_2 sont distincts car α n'est pas nul. f est donc développable en série entière de rayon de convergence $\inf(R_1, R_2) = e^{-|\alpha|}$ et

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cosh(n\alpha) x^n}{n}.$$

3. Soit $f(x) = \ln(1 + 2 \cos(\alpha) x + x^2)$. Les racines du trinôme $1 + 2 \cosh(\alpha) x + x^2$ sont $-e^{i\alpha}$ et $-e^{-i\alpha}$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire, 1 ou -1 est à exclure. Si $\cos(\alpha) = 1$, $f(x) = \ln((1+x)^2)$. Cette fonction est développable en série entière pour $x \in]-1, 1[$ avec un rayon de convergence égal à 1 et par développement usuel :

$$f(x) = 2 \ln(1+x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Si $\cos(\alpha) = -1$, $f(x) = \ln((1-x)^2)$. Cette fonction est développable en série entière pour $x \in]-1, 1[$ avec un rayon de convergence égal à 1 et par développement usuel :

$$f(x) = 2 \ln(1-x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, on ne peut pas utiliser la méthode précédente car les racines sont complexes. On utilise alors la méthode de la première question en dérivant la fonction. f est continument dérivable et :

$$f'(x) = \frac{2(x + \cos(\alpha))}{(x + \cos(\alpha + i \sin(\alpha)))(x + \cos(\alpha - i \sin(\alpha)))} = \frac{1}{x + e^{i\alpha}} + \frac{1}{x + e^{-i\alpha}} = 2\Re\left(\frac{1}{x + e^{i\alpha}}\right);$$

et pour x tel que $|x| < 1$:

$$\frac{1}{x + e^{i\alpha}} = \frac{e^{-i\alpha}}{1 + xe^{-i\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-(n+1)i\alpha}$$

d'où

$$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos((n+1)\alpha) x^n$$

La suite $(\cos((n+1)\alpha))_n$ étant de limite non nulle, la série entière précédente diverge en 1 : son rayon de convergence vaut 1. f est donc développable en série entière de rayon de convergence 1 et comme $f(0) = 0$:

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n\alpha) x^n}{n}.$$

□

Correction de l'Exercice 93

[Retour à l'énoncé](#)

1. Pour tout réel x , la suite de terme général $\frac{x^{nj}}{(nj)!}$ est bornée. Le rayon de convergence de la série entière est donc infini et f_j est définie sur $\mathbb{R}$.

2.

a. Les j racines j -ièmes de l'unité sont les j complexes $\omega_k = e^{\frac{2ki\pi}{j}}$ avec $0 \leq k \leq j-1$. Comme $\omega_k = (\omega_1)^k$, S_p est la somme des j premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison ω_1^p . Si p n'est pas multiple de j , la raison est différente de 1 et $S_p = \frac{\omega_1^{pj} - 1}{\omega_1^p - 1} = 0$. Si p est un multiple de j , les termes de la somme valent tous 1 et $S_p = j$.

b. Compte-tenu de ce qui précède, on peut écrire f_j sous la forme suivante :

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{S_p x^p}{p!} = \frac{1}{j} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\omega_k x^p}{p!} .$$

Pour tout complexe z et tout réel x , la série exponentielle $\sum \frac{(xz)^p}{p!}$ est convergente. Ainsi f_j apparait comme la somme de j exponentielles :

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} e^{\omega_k x}$$

Pour x réel, $f_j(x)$ est réel et donc égal à sa partie réelle ; aussi :

$$f_j(x) = \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} e^{\cos(\frac{2k\pi}{j})x} \cos\left(\sin(\frac{2k\pi}{j})x\right) .$$

c. Pour $j = 3$, on obtient ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) ;$$

et pour $j = 4$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + 2\cos(x)) = \frac{1}{2} (\cos(x) + \cosh(x)) .$$

Ce résultat peut se trouver directement par les développements usuels.

□

Correction de l'Exercice 94

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme pour tout réel θ , $\left| \frac{\cos(n\theta)x^n}{n} \right| \leq \frac{|x^n|}{n}$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|x^n|}{n}$ (puisque $|x| < 1$), assure la convergence normale (en θ) de la série définissant $f_x(\theta)$ sur $\mathbb{R}$. De plus, chaque fonction $\phi_n : \theta \mapsto \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ étant continue, la somme est continue par convergence normale.

Par développements usuels, comme $|x| < 1$:

$$f_x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad \text{et} \quad f_x(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(1+x) .$$

2. ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\phi'_n(\theta) = -\sin(n\theta)x^n$. Pour tout réel θ , $|\phi'_n(\theta)| \leq |x|^n$. La série $\sum \phi'_n$ est donc normalement convergente, f_x est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$f'_x(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)x^n .$$

La série $\sum_{n \geq 1} x^n e^{ni\theta}$ est une série géométrique de raison $xe^{i\theta}$ de module $|x| < 1$. Elle est donc

convergente de somme $\frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$. Aussi :

$$f'_x(\theta) = \Im m\left(-\frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right)$$

Par définition de la partie imaginaire d'un complexe, pour tout x réel :

$$\Im m\left(\frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} - \frac{xe^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{xe^{i\theta}(1 - xe^{-i\theta}) - xe^{-i\theta}(1 - xe^{i\theta})}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})} \right)$$

ce qui donne bien le résultat souhaité : $f'_x(\theta) = \frac{-x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$.

Une primitive de $\theta \mapsto \frac{-x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}$ est $-\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$; cette primitive prenant la valeur $-\ln(1 - x)$ en 0 c'est $f_x(\theta)$. Aussi $f_x(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$.

3. Comme $1 - 2x \cos \theta + x^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = |x - e^{i\theta}|^2$, cette expression est strictement positive si $x \neq \pm 1$: $F(x)$ apparaît alors comme l'intégrale d'une fonction continue sur $[0, \pi]$.

Pour $|x| < 1$, $F(x) = -2 \int_0^\pi f_x(\theta) d\theta$. La suite $\sum \phi_n$ étant normalement convergente sur le segment $[0, \pi]$, la série $\sum \phi_n$ s'y intègre terme à terme ; comme $\int_0^\pi \phi_n(\theta) d\theta = \left[\frac{\sin(n\theta)}{n^2} \right]_0^\pi = 0$

et $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^\infty \phi_n(\theta)$:

$$F(x) = -2 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = 0.$$

Pour $|x| > 1$, $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = x^2 \left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cos(\theta) \frac{1}{x} + 1 \right)$, donc

$$\ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) = 2 \ln(|x|) + \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cos(\theta) \frac{1}{x} + 1\right)$$

soit $F(x) = 2\pi \ln(|x|) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi \ln(|x|)$ puisque $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$.

4.

a. On remarque que Q_n admet pour racines des racines $2n$ -ièmes de l'unité. On compare Q_n à U_{2n} donné par $U_{2n}(x) = x^{2n} - 1$. Comme $U_{2n}(x) = \prod_{k=-(n-1)}^n (x - e^{\frac{ik\pi}{n}})$, ces deux poly-

nômes ont en commun les racines $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ pour $k \in [-(n-1), n-1]$. La racine 1 (correspondant au cas $k = 0$) est double dans Q_n et simple dans U_{2n} et la racine -1 (correspondant au cas $k = n$) n'apparaît que dans U_{2n} . Ainsi, les deux polynômes étant unitaires et de degré $2n$, $Q_n(x)(x+1) = U_{2n}(x)(x-1)$ (mêmes racines comptées avec leur multiplicité et même coefficient dominant).

b. Par le théorème sur les sommes de Riemann, la fonction $\Phi : \theta \mapsto \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$ étant continue sur le segment $[0, \pi]$ pour $x \neq \pm 1$:

$$F(x) = \lim_n \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \lim_n \frac{\pi \ln(Q_n(x))}{n}$$

puisque $1 - 2x \cos \theta + x^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$.

Si $x \in]-1, 1[$, l'expression de Q_n trouvée précédemment donne alors $\lim Q_n(x) = \frac{1-x}{1+x} > 0$;

$\ln(Q_n(x))$ a une limite réelle donc $F(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Alors

$$Q_n(x) = |Q_n(x)| = x^{2n}(1 - x^{-2n}) \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

d'où $\ln(Q_n(x)) = 2n \ln(|x|) + o(1)$ et $F(x) = 2\pi \ln(|x|)$.

□

Correction de l'Exercice 95

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit la relation $\mathcal{P}(n)$ pour $n \geq 3$ définie par les trois inégalités
$$\begin{cases} |a_{n-3}| \leq Ak^{n-1} \\ |a_{n-2}| \leq Ak^{n-2} \\ |a_{n-1}| \leq Ak^{n-1} \end{cases}.$$

Supposons la réalisée ; par inégalité triangulaire , on a alors :

$$|a_n| \leq Ak^{n-3}(k^2 + k + 1).$$

Il suffit donc de choisir k tel que $k^2 + k + 1 \leq k^3$, pour que la relation $\mathcal{P}(n)$ soit héréditaire. Choisissons $k = 2$ et étudions $\mathcal{P}(3)$. En choisissant A tel que $A \geq \max(|a_0|, \frac{|a_1|}{2}, \frac{|a_2|}{4})$, $\mathcal{P}(3)$ est réalisée. Par le principe de récurrence, pour $k = 2$ et $A = \max(|a_0|, \frac{|a_1|}{2}, \frac{|a_2|}{4})$, pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq A2^n$.

Remarque : A est non nul car si $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, la suite est identiquement nulle.

La série $A \sum x^n 2^n$ ayant un rayon de convergence égal à $\frac{1}{2}$, le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{2}$.

2. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

a. Pour $|x| < R$, on multiplie la relation de récurrence par x^n et les séries $\sum_{n \geq 3} a_{n-k} x^{n-k}$ (avec $k \in \{1, 2, 3\}$) étant convergentes , en sommant on obtient :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n = x \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2} - x^3 \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3} x^{n-3}$$

soit

$$S(x) - (-4 + 2x + 4x^2) = x(S(x) - (-4 + 2x)) + x^2(S(x) + 4) - x^3 S(x)$$

donc $(x^3 - x^2 - x + 1)S(x) = -4 + 2x + 4x^2 + 4x - 2x^2 + 4x^2 = -4 + 6x + 6x^2$ et finalement

$$S(x) = \frac{-4 + 6x + 6x^2}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{-4 + 6x + 6x^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

b. Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(x^2-1) + b(x+1) + c(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

et est donc égale à $S(x)$ si et seulement si
$$\begin{cases} a + c = 6 \\ b - 2c = 6 \\ -a + b + c = -4 \end{cases} \quad \text{soit } (a, b, c) = (7, 4, -1).$$

Par les développements usuels et l'unicité du développement en série entière

$$a_n = -a + b(n+1) + c(-1)^n = -3 + (-1)^{n+1} + 4n$$

Remarque : le rayon de convergence est égal à 1.

c. La relation de récurrence s'écrit aussi $a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3}$ soit pour $n \geq 3$, $b_n = b_{n-2}$. Aussi si n est pair, $b_n = b_2 = a_2 - a_1 = 2$ et si n est impair $b_n = b_1 = a_1 - a_0 = 6$.

Or par télescopage $a_n - a_0 = \sum_{k=1}^n b_k$. Si $n = 2p$, la somme contient autant d'indices pairs que d'impairs et

$$a_{2p} = p(b_1 + b_2) - 4 = 8p - 4 = 4n - 4$$

et si $n = 2p + 1$, il y a un indice impair de plus :

$$a_{2p+1} = p(b_1 + b_2) + b_1 + a_0 = 8p + 2 = 4n - 2$$

On retrouve donc bien les résultats précédents.

□

Correction de l'Exercice 96

[Retour à l'énoncé](#)

La suite $(a_n)_n$ est entièrement définie par les relations données : elle est unique.

On suppose que la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, f est donc définie sur $I =]-R, R[$. Par application du théorème sur les produits de Cauchy de séries entières, f^2 est développable en série entière et sur I

$$f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = a_{n+1}$. Ainsi

$$\forall x \in]-R, R[, x f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = f(x) - a_0 = f(x) - 1 \quad (E)$$

$f(x)$ est donc solution de l'équation $xy^2 - y + 1 = 0$. Cette équation admet des solutions si et seulement si $x \leq \frac{1}{4}$ donc $R \leq \frac{1}{4}$. Les solutions sont données par $y = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$

où $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$. Si $f(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$, $\varepsilon(x) = \frac{2xf(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$; ε est donc une fonction continue sur $] -R, R[$; elle est donc constante. Si $\varepsilon(x) = 1$, la fonction f n'est pas continue en 0. Il n'y a donc qu'une fonction qui convienne :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Il reste à vérifier qu'elle est développable en série entière avec $R > 0$. $x \mapsto 1 - \sqrt{1-4x}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence de $\frac{1}{4}$. Le terme constant de son développement est nul et le premier terme non nul est $2x$. $f : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ prolongée par $f(0) = 1$ est donc développable en série entière $\sum b_n x^n$ et par l'unicité du développement

en série entière dans (E) ses coefficients vérifient les relations définissant la suite $(a_n)_n$. La suite $(a_n)_n$ est donc la suite des coefficients du développement en série entière de f . Or

$$\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$$

et

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$$

ainsi $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Par la formule de Stirling :

$$a_n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{(\sqrt{2\pi n})^2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(\frac{e}{n}\right)^n \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \sim \frac{e2^{2n}}{n\sqrt{n\pi}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Comme $\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = -n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ a pour limite -1 , $e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim 1$; ainsi

$$a_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Correction de l'Exercice 97

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme $|re^{i\theta}| = r < 1$, $S(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{ni\theta}$ et $\overline{S(re^{i\theta})} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{-ni\theta}$. Aussi par théorème sur le produit de Cauchy de séries entières en r :

$$|S(re^{i\theta})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} e^{(2k-n)i\theta} \right) r^n$$

Posons $f_n(\theta) = r^n \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} e^{(2k-n)i\theta}$. La série $\sum f_n$ est absolument convergente. De plus

$$|f_n(\theta)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |a_{n-k}| r^n.$$

Le majorant est le terme général d'une série entière convergente comme produit de Cauchy de la série $\sum |a_n| r^n$ par elle-même; la série $\sum f_n$ est donc une série de fonctions continues normalement convergente sur le segment $[0, 2\pi]$. Aussi par théorème d'intégration terme à terme :

$$I(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta$$

Or si p est un entier naturel non nul, $\int_0^{2\pi} e^{pi\theta} d\theta = 0$; aussi si n est impair, $\int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = 0$

et si $n = 2p$, $\int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta = 2\pi a_p^2 r^{2p}$. On a donc $I(r) = 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} a_p^2 r^{2p}$.

2. Soit M un majorant de $|S|$ sur la boule unité ouverte. Alors $I(r) \leq 2\pi M^2$.

Posons $I_n(r) = 2\pi \sum_{p=0}^n a_p^2 r^{2p}$. Comme pour tout entier n et tout réel $r < 1$, $I_n(r) \leq I(r)$,

$I_n(r) \leq 2\pi M^2$. Ainsi par passage à la limite en 1, pour tout n , $J_n = \sum_{p=0}^n a_p^2 \leq M^2$. La suite

$(a_n)_n$ étant constituée d'entiers, il y en a au plus M^2 non nul. En effet, si il y en a strictement plus que M^2 , en choisissant n plus grand que les indices de $M^2 + 1$ d'entre eux, on obtient $J_n > M^2$. La suite $(a_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang : S est polynomiale.

□

Correction de l'Exercice 98

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$. La fonction Arcsin étant développable en série entière de rayon de convergence 1, f définie sur $[-1, 1]$ est aussi développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.

2. Le terme général du produit de Cauchy de la série entière donnant Arcsin par lui même est trop compliqué pour être simplifié. Une autre méthode consiste à trouver une équation différentielle vérifiée par f ou l'une de ses dérivées.

f est indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{2 \text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \text{Arcsin}(x)}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

soit

$$\forall x \in] -1, 1[, (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$$

3. f étant paire et nulle en 0, son développement en série entière est de la forme

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Par théorème, les développements en série entière de ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme soit pour $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{2n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} x^{2n}.$$

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient alors :

$$2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{2(n+1)(2n+1)a_{n+1}}_{\text{terme de } f''(x)} - \underbrace{2n(2n-1)a_n}_{\text{terme de } x^2 f''(x)} - \underbrace{2na_n}_{\text{terme de } x f'(x)} \right) x^{2n} = 2$$

et par unicité du développement en série entière $a_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} = 4n^2 a_n;$$

soit $a_{n+1} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$ et par itérations $a_n = \frac{2^{n-1}((n-1)!)^2}{n!p_n}$ où $p_n = \prod_{k=1}^n (2k-1)$ et

en ajoutant les pairs : $p_n = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$ ainsi

$$a_n = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n(2n-1)!}$$

formule encore valable pour $n = 1$. On a donc

$$\forall x \in]-1, 1[, (\operatorname{Arcsin} x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-2} (n-1)!^2}{n(2n-1)!} x^{2n}.$$

□

Correction de l'Exercice 99

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}$.

$$\frac{a_{n+1} x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} = \frac{n+1}{2n+3} x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

Par le critère de D'Alembert, F est définie si $|x| < \sqrt{2}$ et diverge si $|x| > \sqrt{2}$. Le rayon de convergence de la série proposée est donc $\sqrt{2}$.

En $x = \sqrt{2}$, comme en ajoutant les nombres pairs au produit des impairs figurant au dénominateur $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$, $a_n (\sqrt{2})^{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^n \sqrt{2}}{(2n+1)!}$.

Par la formule de Stirling :

$$a_n (\sqrt{2})^{2n+1} \sim \frac{2\sqrt{2}\pi n \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} = e \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-(2n+1)}.$$

Or $\ln \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-(2n+1)} = -(2n+1) \ln(1 + \frac{1}{2n}) \sim -1$; on a donc $e \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-(2n+1)} \sim 1$ et

$$a_n (\sqrt{2})^{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

F n'est pas définie en $\sqrt{2}$ puisque la série $\sum \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ est divergente et par imparité elle ne l'est pas en $-\sqrt{2}$. Le domaine de définition de F est donc $D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

1. F étant la somme d'une série entière sur D , par théorème, elle y est continument dérivable et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}$$

En utilisant le rapport calculé en question précédente : $(2n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n$. En multipliant par $2x^{2n+2}$, on obtient alors :

$$2(2n+3)a_{n+1}x^{2n+2} - (2n+1)a_n x^{2n} x^2 - a_n x^{2n} x = 0$$

En sommant ces relations pour n variant de 0 à l'infini, on reconnaît les trois sommes :

$$2(F'(x) - a_0) - x^2 F'(x) - x F(x) = 0$$

Comme $a_0 = 1$, F est la solution de l'équation différentielle

$$(2 - x^2)y' - xy = 2$$

vérifiant $y(0) = 0$.

Les solutions de l'équation homogène associée sur D sont $x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$. Recherchons alors la solution sous la forme $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{2-x^2}}$ (méthode de variations de la constante) avec $u(0) = 0$. On obtient

$$u'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Soit $u(x) = 2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Ainsi

$$F(x) = \frac{2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

□

Correction de l'Exercice 100

[Retour à l'énoncé](#)

1. Démontrons par récurrence la propriété suivante

$$(\mathcal{P}(n)) \quad \forall k \in [0, n], 0 < u_k \leq 1.$$

L'énoncé nous donne $\mathcal{P}(0)$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ réalisée. Pour tout $k \in [0, n]$, $0 < \frac{u_k}{n-k+2} < 1$ ainsi $u_{n+1} \in]0, 1]$. $\mathcal{P}(n+1)$ est réalisée.

Par récurrence, on a vérifié que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$. La série $\sum x^n$ ayant un rayon de convergence égal à 1, R , rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$, est supérieur ou égal à 1.

2.

a. Par théorème de régularité des séries entières, f est continument dérivable sur $] -R, R[$ et

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}x^n.$$

$\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{n-k+2}x^n$ est le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum u_n x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n+2}$.

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$. g est définie sur $] -1, 1[$ (la suite $\left(\frac{1}{n+2}\right)_n$ est bornée) et vérifie

$$x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x = -\ln(1-x) - x$$

Le rayon de convergence de la série entière de somme g est donc 1. Ainsi pour $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{-\ln(1-x) - x}{x^2}$ et $g(0) = 0$.

Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, pour $x \in] -1, 1[$:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{n-k+2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}x^n = f'(x)$$

b. Calculons une primitive de g . g étant prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable au voisinage de 0. Effectuons une intégration par parties avec $u(t) = \ln(1-t) + t$ de dérivée $u' : t \mapsto \frac{t}{t-1}$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. uv ayant une limite finie (et égale à 0) en 0, pour $x \in]-1, 1[$:

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt = [u(t)v(t)]_{t \rightarrow 0}^x - \int_0^x \frac{dt}{t-1} = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1 ;$$

et $f(x) = \lambda e^G(x)$. Comme $f(0) = 1$ et $G(0) = 0$, $\lambda = 1$. Ainsi :

$$f(x) = e(1-x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

□

Correction de l'Exercice 101

[Retour à l'énoncé](#)

1. On remarque que le trinôme figurant sous la racine a deux racines réelles positives $a_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $a_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Pour tout $a > 0$ et $x < a$, $\frac{1}{\sqrt{a-x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{a}}}$; aussi, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a-x}}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à a . Comme $h(x) = \frac{1}{\sqrt{a_1-x}} \frac{1}{\sqrt{a_2-x}}$, c'est le produit de deux fonctions développables en séries entières, elle est développable en série entière avec un rayon de convergence minorée par a_2 .

h étant développable en série entière, il en est de même de h' et $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$.

2. h est indéfiniment dérivable sur $] -a_2, a_2[$ et $h'(x) = -\frac{x-3}{(\sqrt{1-6x+x^2})^3}$ soit

$$(1-6x+x^2)h'(x) + (x-3)h(x) = 0.$$

L'expression a pour coefficient constant $a_1 - 3a_0$. Les coefficients en x^n pour $n \geq 1$ des termes de l'expression précédente sont :

$h'(x)$	$xh'(x)$	$x^2h'(x)$	$xh(x)$	$h(x)$
$(n+1)a_{n+1}$	na_n	$(n-1)a_{n-1}$	a_{n-1}	a_n

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle :

$$\begin{cases} a_1 = 3a_0 = 3 \\ \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + na_{n-1} = 0 \end{cases}$$

3. Les coefficients de g vérifient les mêmes relations que h pour $n \geq 1$, aussi le développement en série entière de $(1-6x+x^2)g'(x) + (x-3)g(x)$ a des coefficients nuls pour $n \geq 1$; c'est donc une constante égale à $g'(0) - 3g(0) = 1$. g est donc la solution s'annulant en 0 de l'équation différentielle du premier ordre :

$$(1-6x+x^2)y'(x) + (x-3)y(x) = 1$$

dont h est solution de l'équation homogène associée. Par la méthode de la variation de la constante, on cherche g sous la forme $g = uh$. On a alors $h(x)(1-6x+x^2)u'(x) = 1$ soit

$u'(x) = h(x)$. Comme $g(0) = 0$, $u(0) = 0$; u est la primitive de h qui s'annule en 0 donc $u(x) = \int_0^x h(t)dt$ et $g(x) = h(x) \int_0^x h(t)dt$.

□

Correction de l'Exercice 102

[Retour à l'énoncé](#)

1. $P_0 = 1$ donc $a_0 = 1$; $P_1 = 1+X$ donc $a_1 = 1$. $P_2 = (1+X+X^2)^2 = 1+2X+3X^2+2X^3+X^4$ donc $a_2 = 3$.

P_n est le produit de n polynômes à coefficients positifs, il en est de même de P_n aussi

$$0 \leq a_n \leq P_n(1) = 3^n$$

puisque $P_n(1)$ est la somme des coefficients de P_n .

On en déduit donc que le rayon de convergence de la série $\sum 3^n x^n$ étant égal à $\frac{1}{3}$, celui de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à $\frac{1}{3}$.

2. Soit b_n le coefficient en X^{n-1} de P_n et c_n celui en X^{n+1} . On remarque que $X^2 P_1(\frac{1}{X}) = P_1$ donc $P_n = X^{2n} P_n\left(\frac{1}{X}\right)$. En comparant les coefficients en X^{n+1} on obtient $c_n = b_n$.

3. On remarque que $P_{n+1} = P_1 P_n$ donc en égalant les coefficients en X^{n+1} , pour $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = a_n + b_n + c_n = a_n + 2b_n.$$

Comme $P_n = P_1^n$, en dérivant, on obtient $P'_n = n(2X+1)P_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et en égalant les termes en X^n :

$$(n+1)b_n = n(2a_{n-1} + b_{n-1}) = n\left(2a_{n-1} + \frac{a_n - a_{n-1}}{2}\right) = n\frac{3a_{n-1} + a_n}{2}$$

En reportant dans la première égalité après multiplication par $n+1$, on a alors :

$$\forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n + n(3a_{n-1} + a_n) = (2n+1)a_n + 3na_{n-1}$$

que l'on peut écrire :

$$\forall n \geq 1, (n+1)(n+1)a_{n+1} = 2na_n + 3(n-1)a_{n-1} + a_n + 3a_{n-1} \quad (*)$$

le terme général de la série donnant f' est de la forme $na_n x^{n-1}$ puisque par théorème de dérivation des séries entières, ce développement s'obtient à partir de celui de f par dérivation terme à terme. En multipliant la relation (*) par x^n et en sommant pour $n \geq 1$ (les séries de termes généraux $na_n x^n$, $(n-1)a_{n-1} x^n$ et $a_{n-1} x^n$ étant convergentes) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n+1)a_{n+1}x^n = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 3x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 3x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1}$$

soit

$$f'(x) - a_1 = 2xf'(x) + 3x^2 f'(x) + f(x) - a_0 + 3xf(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle suivante ($a_0 = a_1 = 1$) :

$$(3x^2 + 2x - 1)y'(x) + (3x + 1)y(x) = 0$$

4. le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ se factorise en remarquant que -1 est racine

$$3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1) .$$

Comme $(3X - 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, il existe deux réels a et b tels que

$$3X + 1 = a(3X - 1) + b(X + 1)$$

soit $\begin{cases} 3a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases}$; d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$. Ainsi sur $] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{3t + 1}{3t^2 + 2t - 1} dt = \frac{\ln(1 - 3x)}{6} + \frac{3 \ln(x + 1)}{2}$$

et comme $f(0) = 1$:

$$f(x) = e^{-\varphi(x)} = (1 - 3x)^{-\frac{1}{6}} (1 + x)^{-\frac{3}{2}} .$$

Le rayon de convergence est donc $\frac{1}{3}$ puisque f ne peut pas être prolongée par continuité en $\frac{1}{3}$.

□

Correction de l'Exercice 103

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Le système différentiel proposé équivaut à $\frac{dX}{dt} = X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Etudions la matrice A : son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} s - 2 & 1 \\ -4 & s + 3 \end{vmatrix} = (s - 2)(s + 3) + 4 = s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2) .$$

Cette matrice a donc deux valeurs propres 1 et -2. Le système $AU = U$ avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

équivaut à $u_1 = u_2$; un vecteur propre associé à 1 est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le système $AU = -2U$ équivaut à $4u_1 = u_2$; un vecteur propre associé à -2 est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

X est solution du système différentiel proposé si et seulement si :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \ X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à l'existence de (α, β) tels que :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} \\ y(t) = \alpha e^t + 4\beta e^{-2t} \end{cases} .$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Le système différentiel proposé équivaut à $\frac{dX}{dt} = X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Comme la somme des éléments de chaque ligne est égal à $s = 1$, on déduit que, si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$AU = sU = U$. U est donc vecteur propre associé à 1.

La deuxième colonne et la troisième sont opposées donc $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé

à la valeur propre nulle.

Le polynôme caractéristique de A de degré 3 a déjà deux racines réelles : il est donc scindé dans $\mathbb{R}$. Il reste à trouver la troisième valeur propre s_3 et un vecteur propre associé : la trace de A est la somme des valeurs propres ; ainsi $s_3 + 1 = -1$. La dernière valeur propre est -2 . W (non nul) est vecteur propre associé si et seulement si $AW + 2W = 0$ soit

$$\begin{cases} 3w_1 + w_2 - w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 0 \end{cases}$$

(la troisième ligne n'a pas besoin d'être écrite car elle est combinaison linéaire des deux premières). Ainsi $w_2 = -2w_1$ (par somme des équations) puis $w_3 = w_1$ (par différence).

Le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On obtient donc l'ensemble des solutions directement par le cours puisque A est diagonalisable. (x, y, z) est solution si et seulement si il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda U + \mu e^t V + \nu e^{-2t} W$$

soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \lambda + \nu e^{-2t} \\ y(t) = \lambda - 2\nu e^{-2t} + \mu e^{-t} \\ z(t) = \lambda + \nu e^{-2t} + \mu e^{-t} \end{cases}$$

3. On commence par essayer de réduire la matrice A . Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(\lambda) = - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Par transformations élémentaires $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ après mise en facteur de $1 - \lambda$ en colonne 3, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = - \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et finalement : $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)((1-\lambda)^2+1)(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$; A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec comme valeurs propres $s_1 = 1$, $s_2 = 1+i$ et $\overline{s_2} = 1-i$. On commence par chercher les solutions complexes du système différentiel proposé.

Un vecteur propre V_1 associé à s_1 est $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$V_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à s_2 si $\begin{cases} -iu - v + w = 0 \\ 2u - (1+i)v + w = 0 \end{cases}$. Par différence des 2 équations, on obtient $-(i+2)u + iv = 0$ soit $v = (1-2i)u$ et par report dans la première équation $w = (1-i)u$. Un vecteur propre associé à s_2 est donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ et A étant

réelle, un vecteur propre associé à $\overline{s_2}$ est donc $\overline{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \\ 1+i \end{pmatrix}$. Les solutions complexes sont

donc de la forme $X = \alpha e^t V_1 + \mu e^{(1+i)t} V_2 + \nu e^{(1-i)t} \overline{V_2}$ avec $(\alpha, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$. X est à valeurs réelles si et seulement si $X = \overline{X}$. Les trois solutions $t \mapsto e^t V_1$, $t \mapsto e^{(1+i)t} V_2$ et $t \mapsto e^{(1-i)t} \overline{V_2}$ formant une base de l'ensemble des solutions, cela impose $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\nu = \overline{\mu}$. En posant $2\mu = \beta + i\gamma$, on obtient les solutions réelles sous la forme

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \Re(\beta + i\gamma)e^{it} \\ \Re((\beta + i\gamma)e^{it}(1-2i)) \\ \Re((\beta + i\gamma)e^{it}(1-i)) \end{pmatrix}$$

Ainsi, X est solution si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} \beta \cos(t) - \gamma \sin(t) \\ \alpha + \beta(\cos(t) + 2\sin(t)) + \gamma(2\cos(t) - \sin(t)) \\ \alpha + \beta(\cos(t) + \sin(t)) + \gamma(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$. Par le théorème de Cauchy-Schwarz, X est la solution de $X' = AX$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On commence par essayer de réduire la matrice A . Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} -s & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -s & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{vmatrix}$$

Par transformations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + sL_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + sL_4$, et développement

suivant la première colonne deux fois on obtient :

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3-s^2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1-s^2 \\ 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3-s^2 & -5 \\ 0 & -1 & -1-s^2 \\ 1 & 0 & -s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-s^2 & -5 \\ -1 & -1-s^2 \end{vmatrix}$$

soit

$$\chi_A(s) = (s^2 - 3)(s^2 + 1) - 5 = s^4 - 2s^2 - 8 = (s^2 - 2)^2 - 9 = (s^2 + 2)(s^2 - 4).$$

Les valeurs propres complexes de A sont donc $\pm\sqrt{2}i$ et ± 2 .

Soit s une valeur propre de A . Un vecteur propre $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ vérifie $AU = sU$; les deux

dernières lignes de ce système donnent alors $u_1 = su_3$ et $u_2 = su_4$. Pour connaître les vecteurs propres associés à s , il suffit alors de trouver le lien entre u_3 et u_4 par l'une des deux premières lignes de $AU = sU$.

$s = 2\varepsilon$. U vérifie donc $\begin{cases} u_1 = 2\varepsilon u_3 \\ u_2 = 2\varepsilon u_4 \\ 4u_3 = 3u_3 - 5u_4 \end{cases}$. Le vecteur $U_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre

associé à 2 et $U_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à -2 .

$s = \varepsilon\sqrt{2}i$. U vérifie donc $\begin{cases} u_1 = i\varepsilon\sqrt{2}u_3 \\ u_2 = i\varepsilon\sqrt{2}u_4 \\ -2u_3 = 3u_3 - 5u_4 \end{cases}$. Le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre

associé à $\sqrt{2}i$ et $U_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à $-\sqrt{2}i$.

Ainsi il existe des complexes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \alpha e^{2t} U_1 + \beta e^{-2t} U_2 + \gamma e^{\sqrt{2}it} U_3 + \delta e^{-\sqrt{2}it} U_4$$

Remarque : $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont les coordonnées de $X(0)$ dans la base de $\mathbb{C}^4$ constituée de (U_1, U_2, U_3, U_4) . En exprimant $X(0)$ on a alors :

$$\begin{cases} -10(\alpha - \beta) + \sqrt{2}i(\gamma - \delta) = 0 \\ 2(\alpha - \beta) + \sqrt{2}i(\gamma - \delta) = 1 \\ -5(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 1 \\ (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 0 \end{cases}$$

soit par les deux premières équations $\begin{cases} \alpha - \beta = -\frac{1}{12} \\ \gamma - \delta = -\frac{1}{6\sqrt{2}} \end{cases}$ et par les deux dernières

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{6} \\ \delta + \gamma = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{On obtient alors } \alpha = -\frac{1}{8}, \beta = -\frac{1}{24}, \gamma = \bar{\delta} = \frac{1}{12} - \frac{5\sqrt{2}}{24}i. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{5e^{2t}}{8} + \frac{5e^{-2t}}{24} + 2\Re\left(\left(\frac{1}{12} - \frac{5i\sqrt{2}}{24}\right)e^{\sqrt{2}it}\right) = \frac{5e^{2t}}{8} + \frac{e^{-2t}}{24} + \frac{\cos(\sqrt{2}t)}{6} + \frac{5\sin(\sqrt{2}t)}{12} \\ y(t) = -\frac{e^{2t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{24} + 2\Re\left(\left(\frac{1}{12} - \frac{5i\sqrt{2}}{24}\right)e^{\sqrt{2}it}\right) = -\frac{e^{2t}}{8} - \frac{e^{-2t}}{24} + \frac{\cos(\sqrt{2}t)}{6} + \frac{5\sin(\sqrt{2}t)}{12} \end{cases}.$$

5. On commence par exprimer x'' et y'' en fonction de x, y, x' et y' . Par différence des équations, on a directement :

$$x'' = 2x' - 2x + y' - 2y$$

puis par report :

$$y'' = -2x' + x - y' + y.$$

Deux méthodes sont alors possibles :

- On remarque que $x'' + y'' = -x - y$ donc $z = x + y$ est solution de $z'' + z = 0$. Aussi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z : t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t).$$

En remplaçant alors y par $z - x$ dans l'expression de x'' , on obtient que x est solution de l'équation linéaire à coefficients constants :

$$x'' - 2x' + 2x + x' - 2x = z'(t) - 2z(t) = (-2\alpha + \beta) \cos(t) - (2\beta + \alpha) \sin(t)$$

soit :

$$(E) \quad x'' - x = (-2\alpha + \beta) \cos(t) - (2\beta + \alpha) \sin(t)$$

d'équation caractéristique associée $s^2 - s = 0$ (de racines 0 et 1). Aussi, l'équation homogène associée a pour solution $t \mapsto \gamma + \delta e^t$ avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Si f est solution de $x'' - x' = e^{it}$, on alors sa partie réelle solution de $x'' - x' = \cos(t)$ et sa partie imaginaire solution de $x'' - x' = \sin(t)$.

Cherchons une solution particulière de $x'' - x' = e^{it}$. i n'étant pas racine de $s^2 - s = 0$, une solution particulière est de la forme $t \mapsto \lambda e^{it}$ avec λ complexe. On obtient alors par report :

$$(-1 - i)\lambda = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Une solution particulière de $x'' - x' = \cos(t)$ est donc $x \mapsto \Re\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)e^{it}\right)$

soit $x \mapsto -\frac{\cos(t) + \sin(t)}{2}$ et une solution particulière de $x'' - x' = \sin(t)$ est

$$x \mapsto \Im\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)e^{it}\right) \text{ soit } x \mapsto \frac{\cos(t) - \sin(t)}{2}.$$

Par principe de superposition, une solution particulière de (E) est :

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \left(-(-2\alpha + \beta)(\cos(t) + \sin(t)) - (2\beta + \alpha)(\cos(t) - \sin(t)) \right)$$

soit

$$x_0(t) = \frac{(\alpha - 3\beta) \cos(t) + (3\alpha + \beta) \sin(t)}{2}$$

Comme $y(t) = z(t) - x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - x(t)$, on obtient ainsi que (x, y) est solution si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{\alpha - 3\beta}{2} \cos(t) + \frac{3\alpha + \beta}{2} \sin(t) + \gamma + \delta e^t \\ y(t) &= \frac{\alpha + 3\beta}{2} \cos(t) + \frac{-3\alpha + \beta}{2} \sin(t) - \gamma - \delta e^t \end{cases}.$$

- Soit $X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$. X est solution de $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On commence par essayer de réduire la matrice A . Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} 2-s & 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1-s & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{vmatrix}$$

On calcule ce déterminant (les opérations élémentaires effectuées sont précisées :

$$\chi_A(s) \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - C_3} \begin{vmatrix} 2-s & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1-s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -s & s \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{vmatrix} 2-s & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1-s & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s \end{vmatrix}$$

puis par développement ligne 4 :

$$\chi_A(s) = -s \begin{vmatrix} 2-s & 1 & -2 \\ -2 & -1-s & 1 \\ 1 & 1 & -s \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2} -s \begin{vmatrix} 1-s & 1 & -2 \\ s-1 & -1-s & 1 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} -s \begin{vmatrix} 1-s & 1 & -2 \\ 0 & -s & -1 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix}$$

et par développement colonne 1 :

$$\chi_A(s) = -s(1-s)(s^2+1).$$

Cherchons dans un premier temps les solutions complexes puisque A est diagonalisable dans $\mathbb{C}[X]$. Les valeurs propres de A sont $\pm i$, 0 et 1.

A la valeur propre 0 est associé le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (puisque $C_3 = C_4$).

Un vecteur propre $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $s_4 = 1$ vérifie $u_3 = u_1$, $u_4 = u_2$

et $2u_1 + u_2 - 2u_1 - 2u_2 = u_1$ soit $u_1 = -u_2$. Le vecteur $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Un vecteur propre $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $s_1 = i$ vérifie, par les deux dernières

lignes du système $AX = iX$, $iu_3 = u_1$ (soit $u_3 = -iu_1$) et $iu_4 = u_2$ (soit $u_4 = -iu_2$); En reportant dans la première ligne on a alors $2u_1 + u_2 + 2iu_1 + 2iu_2 = iu_1$ soit

$$(2+i)u_1 = -(1+2i)u_2. \text{ Le vecteur } U_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2-i \\ 2-i \\ -1+2i \end{pmatrix} \text{ convient. A la valeur propre } -i$$

est associé $\overline{U_1} = U_2$. Les solutions complexes sont donc donnés par les solutions de la forme

$$X : t \mapsto \lambda e^{it} U_1 + \mu e^{-it} U_2 + \gamma U_3 + \delta e^t U_4$$

avec $(\lambda, \mu, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$. X est une solution réelle si et seulement si $X = \overline{X}$. (U_1, U_2, U_3, U_4) formant une base de $\mathbb{C}^4$ cela impose $\mu = \overline{\lambda}$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$. Posons $2\lambda = \alpha_1 + i\beta_1$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) &= \Re((\alpha_1 + i\beta_1)(2-i)e^{it}) + \gamma + \delta e^t \\ y(t) &= \Re((\alpha_1 + i\beta_1)(-1+2i)e^{it}) - \gamma - \delta e^t \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(t) &= (2\alpha_1 + \beta_1) \cos(t) + (\alpha_1 - 2\beta_1) \sin(t) + \gamma + \delta e^t \\ y(t) &= (-\alpha_1 - 2\beta_1) \cos(t) + (-2\alpha_1 + \beta_1) \sin(t) - \gamma - \delta e^t \end{cases}$$

On peut vérifier que les deux solutions coïncident. En calculant dans la seconde méthode

$$z(t) = x(t) + y(t) = (\alpha_1 - \beta_1) \cos(t) - (\alpha_1 + \beta_1) \sin(t)$$

posons $\alpha = \alpha_1 - \beta_1$ et $\beta = -(\alpha_1 + \beta_1)$. Alors

$$\frac{\alpha - 3\beta}{2} = 2\alpha_1 + \beta_1 \quad \text{et} \quad \frac{3\alpha + \beta}{2} = \alpha_1 - 2\beta_1$$

On retrouve bien les mêmes valeurs pour x et donc pour $y = z - x$.

□

Correction de l'Exercice 104

[Retour à l'énoncé](#)

Comme $X'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_1 + \mu e^{\mu t} X_2$, on obtient en écrivant $X' - AX = 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{\lambda t} (\lambda X_1 - AX_1) + e^{\mu t} (\mu X_2 - AX_2) = 0$$

En évaluant en 0, on obtient alors :

$$(1) \lambda X_1 - AX_1 = -(\mu X_2 - AX_2)$$

puis en évaluant en 1, compte-tenu de ce qui précède :

$$(2) (e^\lambda - e^\mu)(\lambda X_1 - AX_1) = 0$$

Comme $\lambda \neq \mu$, $e^\lambda - e^\mu \neq 0$ aussi $\lambda X_1 - AX_1 = 0$ et $\mu X_2 - AX_2 = 0$. X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A respectivement associés à λ et μ . $t \mapsto e^{\lambda t} X_1$ et $t \mapsto e^{\mu t} X_2$ sont donc solutions du système différentiel proposé.

□

Correction de l'Exercice 105[Retour à l'énoncé](#)

On remarque que le système proposé équivaut par somme et différence des équations à :

$$\begin{cases} (x+y)'(t) = (t+1)(x+y)(t) + e^{t+\frac{t^2}{2}} \\ (x-y)'(t) = (1-t)(x-y)(t) + e^{t-\frac{t^2}{2}} \end{cases}$$

$x+y$ est donc solution de l'équation différentielle linéaire :

$$z'(t) - (t+1)z(t) = e^{t+\frac{t^2}{2}}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{t+\frac{t^2}{2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode de variation de la constante, cherchons z sous la forme $t \mapsto u(t)e^{t+\frac{t^2}{2}}$ avec u fonction inconnue. L'équation en z devient après simplification par $e^{t+\frac{t^2}{2}} \neq 0$

$$u'(t) = 1$$

Ainsi, il existe un réel α tel que :

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x(t) + y(t) = (t + \alpha)e^{t+\frac{t^2}{2}}.$$

De même, $x-y$ est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$z'(t) - (1-t)z(t) = e^{t-\frac{t^2}{2}}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{t-\frac{t^2}{2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode de variation de la constante, cherchons z sous la forme $t \mapsto u(t)e^{t-\frac{t^2}{2}}$ avec u fonction inconnue. L'équation en z devient après simplification par $e^{t-\frac{t^2}{2}} \neq 0$

$$u'(t) = 1$$

Ainsi, il existe un réel β tel que :

$$(2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x(t) + y(t) = (t + \beta)e^{t-\frac{t^2}{2}}.$$

Par différence et somme des résultats obtenus en (1) et (2), on a alors que (x, y) est solution du système différentiel proposé si et seulement si il existe un couple de réels (a, b) (en posant $\alpha = 2a$ et $\beta = 2b$) tels que pour tout réel t :

$$\begin{cases} x(t) &= te^t \cosh(\frac{t^2}{2}) + ae^{t+\frac{t^2}{2}} + be^{t-\frac{t^2}{2}} \\ x(t) &= te^t \sinh(\frac{t^2}{2}) + ae^{t+\frac{t^2}{2}} - be^{t-\frac{t^2}{2}} \end{cases}.$$

□

Correction de l'Exercice 106[Retour à l'énoncé](#)

1. De la première équation, on tire

$$y(t) = (t^2 + 1)x'(t) - tx(t) - 2t^2 + 1$$

et en dérivant :

$$y'(t) = (t^2 + 1)x''(t) + tx'(t) - x(t) - 4t$$

puis en reportant dans la seconde :

$$(t^2 + 1)^2 x''(t) + ((t^2 + 1)t + (t^2 + 1)t) x'(t) + (-(t^2 + 1) - 1 - t^2) x(t) = u(t)$$

avec $u(t) = 4t(t^2 + 1) - t(1 - 2t^2) + 3t = 6t(1 + t^2)$, soit en divisant par $t^2 + 1 \neq 0$:

$$(E) \quad (t^2 + 1)x''(t) + 2tx'(t) - 2x(t) = 6t$$

Lz système initial équivaut donc à (E) et $y(t) = (t^2 + 1)x'(t) - tx(t) - 2t^2 + 1$.

2. Commençons par chercher les solutions de l'équation différentielle précédente développables en série entière. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout réel t tel que $|t| < R$,

$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Par théorème, x est indéfiniment dérivable sur $] - R, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi :

$$\begin{aligned} t^2 x''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n \\ x''(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n \\ tx'(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n \\ x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ (t^2 + 1)x''(t) + 2tx'(t) - 2x(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 + n - 2)a_n) t^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, x est solution si et seulement si :

$$\forall n \neq 1, (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 + n - 2)a_n = 0 \quad \text{et} \quad 6a_3 = 6$$

Comme $n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2)$, a_1 est quelconque (il n'intervient dans aucune de ces relations) et :

$$\forall n \neq 1, (n+1)a_{n+2} = -(n-1)a_n$$

Ainsi si $b_n = (n-1)a_n$, on obtient que pour $n \neq 1$, $b_{n+2} = -b_n$. On remarque que les suites $(b_{2p})_p$ et $(b_{2p+1})_{p \geq 1}$ sont des suites géométriques de raison -1 , on obtient alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, (2p-1)a_{2p} = (-1)^p(-a_0) = (-1)^{p+1}a_0 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 2, 2pa_{2p+1} = (-1)^{p-1}2a_3$$

On a alors :

$$x(t) = a_0 x_0(t) + a_1 t + x_3(t)$$

avec $x_0(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p}}{2p-1}$ et $x_3(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} t^{2p+1}}{p}$; Il reste à vérifier que le rayon de convergence de cette série est non nul.

En écrivant $x_0(t) = 1 + t \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} t^{2p-1}}{2p-1}$, on reconnaît le développement en série entière

de Arctan : x_0 est donc défini sur $] -1, 1[$ et coïncide sur cet intervalle avec $x_2 : t \mapsto 1+t \text{Arctan}(t)$. De même, par les développements usuels, la série définissant x_3 est convergente sur $] -1, 1[$ et coïncide sur cet intervalle avec $x_4 : t \mapsto t \ln(1+t^2)$. On a donc vérifié que x est une solution développable en série entière sur $] -1, 1[$ si et seulement si elle est de la forme précédente.

On vérifie que ces solutions s'étendent à $\mathbb{R}$: x_2 est solution sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation homogène associée à (E) car $x_2'(t) = \frac{t}{t^2+1} + \text{Arctan}(t)$ et $x_2''(t) = \frac{2}{t^2+1} - 2\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$. L'application $t \mapsto t$ est une seconde solution de l'équation homogène associée à (E). La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée à (E) est donc $t \mapsto a_0 x_2(t) + a_1 t$ avec $(a_1, a_0) \in \mathbb{R}^2$.

On vérifie que x_4 est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque $x_4'(t) = \frac{2t^2}{t^2+1} + \ln(1+t^2)$ et $x_4''(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} + \frac{2t}{1+t^2}$. x est donc de la forme

$$x(t) = a_0 (1 + t \text{Arctan}(t)) + a_1 t + t \ln(1+t^2)$$

avec $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$.

3. On trouve alors y par $y(t) = (t^2+1)x'(t) - tx(t) - 2t^2 + 1$. Par les calculs précédents de $x_2'(t)$ et $x_4'(t)$, on a successivement :

$$(t^2+1)x_2'(t) - tx_2(t) = t + (t^2+1)\text{Arctan}(t) - t - t^2\text{Arctan}(t) = \text{Arctan}(t)$$

$$(t^2+1)x_4'(t) - tx_4(t) = 2t^2 + (t^2+1-t^2)\ln(1+t^2) = 2t^2 + \ln(1+t^2)$$

soit finalement

$$y(t) = a_0 \text{Arctan}(t) + a_1 + \ln(1+t^2) + 1.$$

□

Correction de l'Exercice 107

[Retour à l'énoncé](#)

1. Posons $g = f' + af$. La résolution de l'équation différentielle $f' + af = g$ équivaut à $e^{ax}(f'(x) + af(x)) = e^{ax}g(x)$ puisque $x \mapsto e^{ax}$ ne s'annule jamais.

On a ainsi $\frac{d}{dx}(e^{ax}f(x)) = e^{ax}g(x)$; soit :

$$f(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} g(t) dt + \lambda e^{-ax}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit α la partie réelle de a . Comme $|e^{ax}| = e^{\alpha x}$:

$$(*) |f(x)| \leq e^{-\alpha x} |\lambda| + e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} |g(t)| dt.$$

g est de limite nulle en $+\infty$. Aussi comme $\alpha > 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, t \geq A \implies |g(t)| < \frac{\alpha \varepsilon}{2}$$

Sur $[0, A]$, g est continue donc bornée; soit M un majorant de g sur $[0, A]$, ce qui permet la majoration suivante :

$$\int_0^A e^{\alpha t} |g(t)| dt \leq \frac{M}{\alpha} (e^A - 1) = M_1$$

et pour $x > A$:

$$\int_A^x e^{\alpha t} |g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} (e^{\alpha x} - e^{\alpha A}) \leq \frac{\varepsilon}{2} e^{\alpha x}$$

En reportant ces majorations dans (*), on obtient que pour $x > A$:

$$|f(x)| \leq e^{-\alpha x} (M_1 + |\lambda|) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\alpha > 0$, le premier terme est de limite nulle en $+\infty$. Aussi il existe $B > 0$ tel que :

$$x > B \implies e^{-\alpha x} (M_1 + |\lambda|) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $x > \max(A, B)$, $|f(x)| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que f est de limite nulle en $+\infty$.

2. Posons de nouveau $g = f' + af$ avec a complexe. Pour tout complexe b , $g' + bg = f'' + (a+b)f' + abg$. Ainsi $g' + bg = f'' + f' + f$ si $ab = 1$ et $a+b = 1$. a et b sont les solutions de $t^2 - t + 1 = 0$ soit $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Posons $a = e^{i\pi/3}$ et $b = e^{-i\pi/3}$. Par la question 1, comme $g' + bg$ est de limite nulle en $+\infty$ avec b de partie réelle strictement positive, $g = f' + af$ l'est aussi ; $f' + af$ (avec $\Re(a) = \frac{1}{2} > 0$) est de limite nulle en $+\infty$ et donc $\lim_{+\infty} f = 0$. □

Correction de l'Exercice 108

[Retour à l'énoncé](#)

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $s^2 - 2s + 1$ de racine double 1. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc $x \mapsto (ax+b)e^x$. Il reste à chercher une solution particulière de $(E) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{x}{2}e^x + \frac{x}{2}e^{-x} - x^2$.

Soit $(E_1) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x$. En multipliant par e^{-x} , on a alors :

$$\frac{d^2}{dx^2} (e^{-x}y(x)) = \frac{x}{2}$$

Une solution particulière est donnée par $e^{-x}y_1(x) = \frac{x^3}{6}$ soit $y_1(x) = \frac{x^3}{6}e^x$.

Soit $(E_2) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x$. On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_2 : x \mapsto (cx+d)e^{-x}$ puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On obtient :

$$e^{-x}(-2c + cx + d - 2(c - cx - d) + cx + d) = xe^{-x} \implies 4cx + 4d - 4c = x$$

soit $c = d = \frac{1}{4}$ et $y_2(x) = \frac{x+1}{4}e^{-x}$.

Soit $(E_1) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2$. On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_3 : x \mapsto cx^2 + dx + f$ puisque 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On obtient :

$$2c - 2(2cx + d) + cx^2 + dx + f = x^2 \implies \begin{cases} c & = 1 \\ d - 4c & = 0 \\ f + 2c - 2d & = 0 \end{cases}$$

soit $y_3(x) = x^2 + 4x + 6$

Par principe de superposition, une solution particulière de (E) est $\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} - y_3$. Les solutions générales de (E) sont donc :

$$x \mapsto \left(\frac{x^3}{12} + ax + b\right)e^x + \frac{x+1}{8}e^{-x} - x^2 - 4x - 6.$$

2. Procédons par analyse -synthèse. Supposons y solution de (E) . Comme toute solution y vérifie (E) $y'(x) = xe^{-x} - y(-x)$, y' est de même classe que y . Les solutions sont donc indéfiniment dérivables. En dérivant l'équation proposée, on a alors :

$$y''(x) - y'(-x) = (1-x)e^{-x}$$

mais en évaluant l'équation (E) en $-x$, on obtient :

$$y'(-x) + y(x) = -xe^x$$

aussi, par somme, toute solution de l'équation initiale vérifie

$$(E') \quad y''(x) + y(x) = (1-x)e^{-x} - xe^x$$

équation linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $s^2 + 1 = 0$. La solution générale de l'équation homogène associée à (E') est donc $x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$.

Une solution particulière de $y''(x) + y(x) = (1-x)e^{-x}$ peut être cherchée sous la forme $y_1 : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ puisque -1 n'est pas solution de $s^2 + 1 = 0$. On obtient alors après simplification par e^{-x} :

$$(\alpha x + \beta - 2\alpha) + \alpha x + \beta = 1 - x \implies \begin{cases} 2\alpha &= -1 \\ 2\beta - 2\alpha &= 1 \end{cases}$$

soit $y_1(x) = -\frac{x}{2}$.

Une solution particulière de $y''(x) + y(x) = xe^x$ peut être cherchée sous la forme $y_2 : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x$ puisque 1 n'est pas solution de $s^2 + 1 = 0$. On obtient alors après simplification par e^x :

$$(\alpha x + \beta + 2\alpha) + \alpha x + \beta = x \implies \begin{cases} 2\alpha &= 1 \\ 2\beta + 2\alpha &= 0 \end{cases}$$

soit $y_2(x) = \frac{x-1}{2}$.

Les solutions de (E') sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) - \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^x$.

Les solutions de (E) sont solutions de (E') . Cherchons parmi elles celles qui vérifient (E) .

Si $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) - \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^x$, on a alors :

$$\begin{cases} y'(x) &= -a \sin(x) + b \cos(x) + \frac{x-1}{2}e^{-x} - \frac{x}{2}e^x \\ y(-x) &= a \cos(x) - b \sin(x) + \frac{x}{2}e^x + \frac{x+1}{2}e^{-x} \end{cases}$$

soit

$$y'(x) + y(-x) = (b-a)(\cos(x) - \sin(x)) + xe^{-x}.$$

Les solutions de (E) sont celles pour lesquelles $a = b$ soit

$$x \mapsto a(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{x}{2}e^{-x} - \frac{x-1}{2}e^x.$$

3. u réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $Y(X) = y(\ln(X))$ donc Y est de même classe que y car $\ln$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, on obtient par dérivation $y'(x) = e^x Y'(e^x)$ et $y''(x) = e^{2x} Y''(e^x) + e^x Y'(e^x)$. L'équation proposée devient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} Y''(e^x) - e^{2x} Y(e^x) = e^{3x}$$

et après simplification par $e^{2x} : \forall x \in \mathbb{R}, Y''(e^x) - Y(e^x) = e^x$;

Ainsi pour tout $X > 0$ $Y''(X) - Y(X) = X$. Une solution particulière est $X \mapsto -X$ et la solution générale de l'équation homogène associée $X \mapsto ae^X + be^{-X}$. En utilisant la bijection u , on obtient ainsi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = -e^x + ae^{e^x} + be^{-e^x}$$

avec a et b réels.

4. $y : x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E_0) , $x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$, si et seulement si :

$$\forall x > 0, (\alpha(\alpha-1)(x+1) - \alpha - 2x)x^{\alpha-1} = 0$$

Il faut et il suffit que $\alpha(\alpha-1) = 2$ et $\alpha(\alpha-1-1) = 0$ soit $\alpha = 2$. $y_0 : x \mapsto x^2$ est donc une solution particulière de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur $I = \mathbb{R}^{+*}$. On pose alors $y(x) = x^2 u(x)$ avec u de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . y est solution de (E) si et seulement si u vérifie pour tout $x > 0$:

$$x(x+1)(2u(x) + 4xu'(x) + x^2u''(x)) - (2xu(x) + x^2u'(x)) - x^2u(x) = 3x^2$$

soit après simplification par x^2 :

$$x(x+1)u''(x) + (4x+3)u'(x) = 3$$

équation linéaire (E') du premier ordre en $u' = v$ donnée par

$$x(x+1)v'(x) + (4x+3)v(x) = 3.$$

Pour la solution générale de l'équation homogène associée, cherchons Φ une primitive de $x \mapsto -\frac{4x+3}{x(x+1)} = -\frac{3}{x} - \frac{1}{x+1}$ soit $\Phi(x) = -3\ln(x) - \ln(x+1)$. Les solutions générales de l'équation homogène associée à (E') sont donc $x \mapsto \frac{\lambda}{x^3(x+1)}$. Par la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution sous la forme $v(x) = \frac{\lambda(x)}{x^3(x+1)}$, on obtient

$$\frac{\lambda'(x)}{x^2} = 3$$

soit comme solution particulière $\lambda(x) = x^3$. Les solution de (E') sont donc :

$$v(x) = \frac{\alpha}{x^3(x+1)} + \frac{1}{x+1}$$

avec α réel. Pour intégrer la fraction rationnelle $\frac{1}{x^3(x+1)}$, il faut la décomposer. Or

$$\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$$

aussi en divisant par x^3 :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

soit

$$u'(x) = \alpha \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1}$$

On obtient donc :

$$\forall x > 0, u(x) = \ln(x+1) + \alpha \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) + \beta$$

et les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour lesquelles il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$y(x) = \left(u(x) = \ln(x+1) + \alpha \left(\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) + \beta \right) x^2.$$

5. Supposons y solution polynomiale de degré n de coefficient dominant a_n .

$(x^2 + 3)y''(x) + xy'(x) - y(x)$ est de degré au plus n et le coefficient de x^n vaut $a_n(n(n-1) + n - 1) = (n^2 - 1)a_n$.

Si y est constant, $y = -1$; on vient d'obtenir une solution particulière de (E). Si $n \geq 1$, le coefficient de x^n doit s'annuler donc $n = 1$; $xy'(x) - y(x) = 1$ et $y(x) = ax - 1$.

Une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E) est $x \mapsto x$. Pour toute solution y de (E_0) , posons $y(x) = xu(x)$. y solution de (E_0) équivaut alors à u solution de :

$$(x^2 + 3)(xu''(x) + 2u'(x)) + x(xu'(x) + u(x)) - xu(x) = 0$$

soit u' solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E') \quad (x^2 + 3)xv'(x) + (2(x^2 + 3) + x^2)v(x) = 0.$$

Comme $\frac{2(x^2 + 3) + x^2}{x(x^2 + 3)} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2 + 3}$, une primitive de $x \mapsto \frac{2(x^2 + 3) + x^2}{x(x^2 + 3)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est

$$\phi : x \mapsto 2 \ln(x) + \frac{\ln(x^2 + 3)}{2}.$$

Les solutions de (E') sont donc $v_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-\phi(x)} = \frac{\lambda}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}}$. On a alors :

$$u(x) = \lambda \int_1^x \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 + 3}} + \mu$$

Les solutions générales de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc :

$$y(x) = \lambda x \int_1^x \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 + 3}} + \mu x - 1$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

6. Sur $I = \mathbb{R}^{+*}$, toute solution de (E) vérifie $y''(x) = \frac{xy + 2y'}{x}$. Aussi si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geq 2$) sur I , le numérateur est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ ainsi que le dénominateur, donc y'' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ soit y de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Comme y est de classe $\mathcal{C}^2$, par récurrence, elle est indéfiniment dérivable. En dérivant deux fois (E), on obtient alors :

$$xy^{(4)}(x) + 2y^{(3)}(x) - 2y^{(3)}(x) - 2y'(x) - xy''(x) = 0$$

soit en tenant compte de l'équation initiale

$$xy^{(4)}(x) - xy''(x) = 2y'(x) = xy''(x) - xy(x)$$

et après simplification par x non nul sur I :

$$y^{(4)}(x) - y''(x) = -y''(x) - y(x).$$

$z = y'' - y$ est donc solution de $z'' - z = 0$ soit

$$y''(x) - y(x) = ae^x + be^{-x}$$

avec (a, b) réels. On a ainsi trouvé une condition nécessaire sur y . Il faut maintenant chercher parmi ces solutions celles qui conviennent. En reportant dans (E) l'équation initiale, on a alors :

$$y'(x) = \frac{a}{2}xe^x + \frac{b}{2}xe^{-x}$$

ce qui donne en posant $\alpha = \frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{b}{2}$, $y(x) = \alpha e^x(x-1) + \beta e^{-x}(1-x) + \gamma$ et en reportant dans (E) on obtient $\gamma = 0$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \alpha e^x(x-1) - \beta e^{-x}(1-x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

□

Correction de l'Exercice 109

[Retour à l'énoncé](#)

$f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)$ est indéfiniment dérivable ; par calculs usuels

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)}{3\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f''(x) = -\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)}{9(1-x^2)} + \frac{x}{1-x^2} \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right)}{3\sqrt{1-x^2}}$$

soit

$$9(1-x^2)f''(x) = -f(x) + 9xf'(x)$$

Par le théorème de Cauchy, f est donc la solution de l'équation différentielle

$$9(1-x^2)y'' - 9xy' + y = 0$$

sur l'intervalle $] -1, 1[$ (où $1-x^2$ ne s'annule pas) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Supposons f développable en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Par théorème de dérivation des séries entières, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

En reportant dans l'équation différentielle on obtient alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (9(n+2)(n+1)a_{n+2} - 9n(n-1)a_n - 9na_n + a_n) x^n = 0$$

et par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 9(n+2)(n+1)a_{n+2} = (9n^2 + 1)a_n$$

avec $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = \frac{1}{3}$. Par récurrence immédiate, tous les termes d'indice pair sont nuls, ce qui était prévisible puisque f est impaire. Les termes impairs sont définis par $a_1 = \frac{1}{3}$ et la relation de récurrence :

$$a_{2p+1} = \frac{36p^2 - 36p + 10}{18p(2p+1)} a_{2p-1} = \frac{18p^2 - 18p + 5}{9p(2p+1)} a_{2p-1}.$$

a_1 étant non nul, il en est de même de tous les termes d'indice impair. De plus si x est non nul $\frac{a_{2p+1}x^{2p+1}}{a_{2p-1}x^{2p-1}}$ a pour limite x^2 ; aussi, par le critère de d'Alembert, si $|x| < 1$, la série $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ converge et si $|x| > 1$, elle diverge. La série $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ a donc un rayon de convergence égal à 1. Sa somme est la solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$, c'est donc f .

Il reste à écrire a_{2p+1} en fonction de a_1 :

$$a_{2p+1} = \frac{1}{9^p p!} \prod_{k=1}^p \frac{18k^2 - 18k + 5}{2k + 1} a_1$$

D'où

$$f(x) = \frac{x}{3} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2p+1} p!} \prod_{k=1}^p \frac{18k^2 - 18k + 5}{2k + 1} x^{2p+1}.$$

□

Correction de l'Exercice 110

[Retour à l'énoncé](#)

1. Cherchons les solutions de (E) développables en série entière sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Par théorème, y est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned} xy''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ xy(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ xy'' + 2y' - xy &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+1} - a_{n-1})x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, (n+1)(n+2)a_{n+1} = a_{n-1}$. Tous les termes impairs sont donc nuls et pour $(2p+1)2pa_{2p} = a_{2p-2}$ soit par récurrence immédiate ou report de termes $a_{2p} = \frac{a_0}{(2p+1)!}$. Ainsi $y(x) = a_0 y_0(x)$ avec

$y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$ développement en série entière de rayon infini dans lequel on reconnaît

$y_0(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$ (prolongée par continuité en 0). Cette fonction étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle y est indéfiniment dérivable. $\sinh$ ne s'annule qu'en 0 et $y_0(0) = 1$ donc y_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2.

a. Comme $y = uy_0$, $y' = u'y_0 + uy'_0$ et $y'' = u''y_0 + 2u'y'_0 + uy''_0$. ainsi

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = u''(x)xy_0(x) + 2u'(x)(xy'_0(x) + y_0(x)) + u(x) \underbrace{(xy''_0(x) + 2y'_0(x) - xy_0(x))}_{=0}$$

Comme $xy_0(x) = \sinh(x)$, $xy'_0(x) + y_0(x) = \cosh(x)$, u' vérifie l'équation différentielle :

$$(E') \quad \sinh(x)v'(x) + 2\cosh(x)v(x) = 0$$

b. Résolvons (E') sur $\mathbb{R}^{+*}$ intervalle où $\sinh$ ne s'annule pas. Une primitive de $x \mapsto -\frac{2\cosh(x)}{\sinh(x)}$ étant $x \mapsto -2\ln(|\sinh(x)|)$, $v(x) = \lambda e^{-2\ln|\sinh x|} = \frac{\lambda}{\sinh^2(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et en intégrant $u(x) = \frac{-\lambda \cosh(x)}{\sinh(x)} + \mu$. En changeant λ en $-\lambda$, on obtient $y(x) = \lambda \frac{\cosh(x)}{x} + \mu \frac{\sinh(x)}{x}$.

3. Une solution sur $\mathbb{R}$ vérifie ce qui précède sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme elle est continue en 0, cela impose $\lambda = 0$. Ainsi la restriction de y à $[0, +\infty[$ est de la forme $x \mapsto \mu \frac{\sinh(x)}{x}$. Le même raisonnement sur $\mathbb{R}^{-*}$ donne que la restriction de y à $] -\infty, 0]$ est de la forme $x \mapsto \mu' \frac{\sinh(x)}{x}$. La valeur en 0 est la même par prolongement à droite ou à gauche donc $\mu = \mu'$. On retrouve les solutions développables en série entière de la première question. Elles sont de classe $\mathcal{C}^2$. L'ensemble des solutions est engendré par y_0 : c'est un espace vectoriel de dimension 1 (ce qui n'est pas en contradiction avec le cours puisque $x \mapsto x$ s'annule sur $\mathbb{R}$).

□

Correction de l'Exercice 111

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Soit y fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En multipliant l'équation par $2y'$, on obtient :

$$\frac{d}{dx} (y'^2 + y^2) = -2y'(x)y(x)e^{-x^2}$$

et par intégration, l'existence d'un réel K tel que pour tout x :

$$y'^2(x) + y^2(x) + \int_0^x 2y'(t)y(t)e^{-t^2} dt = K$$

avec $K = y'^2(0) + y^2(0)$.

b. Or par intégration par parties :

$$\int_0^x 2y'(t)y(t)e^{-t^2} dt = \left[y^2(t)e^{-t^2} \right]_0^x + 2 \int_0^x y^2(t)te^{-t^2} dt$$

On remarque alors que $J = \int_0^x y^2(t)te^{-t^2} dt \geq 0$ pour tout x : on intègre une quantité positive sur $[0, x]$ lorsque $x \geq 0$ et lorsque $x < 0$, la quantité intégrée est négative mais $\int_0^x y^2(t)te^{-t^2} dt = -\int_x^0 y^2(t)te^{-t^2} dt$. Aussi :

$$\int_0^x 2y'(t)y(t)e^{-t^2} dt = y^2(x)e^{-x^2} - y^2(0) + J$$

avec $J \geq 0$, d'où :

$$y^2(x) \leq y'^2(x) + (1 + e^{-x^2})y^2(x) \leq K - J + y^2(0) \leq y'^2(0) + 2y^2(0).$$

ce qui prouve que y est bornée.

2. On a immédiatement $y_0(x) = \sin(x - a)$, fonction strictement positive sur $]a, a + \pi[$ et vérifiant $y_0(a + \pi) = 0$ et $y'_0(a + \pi) = -1$. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit $W(x) = y(x)y'_0(x) - y'(x)y_0(x)$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée :

$$W'(x) = y(x)y''_0(x) - y''(x)y_0(x)$$

En utilisant les équations différentielles dont y ou y_0 est solution, on a alors :

$$W'(x) = -y_0(x)(y(x) + y''(x)) = e^{-x^2}y_0(x)y(x)$$

Supposons que y ne s'annule pas sur $I =]a, a + \pi[$: elle y garde un signe constant et quitte à changer y en $-y$, on peut donc supposer $y(x) > 0$ sur I . Par continuité en a et $a + \pi$, $y(a) \geq 0$ et $y(a + \pi) \geq 0$. On a donc :

$$\begin{cases} W(a) = y(a) \geq 0 \\ W(a + \pi) = -y(a + \pi) \leq 0 \\ \forall x \in]a, a + \pi[, W'(x) > 0 \end{cases}$$

ce qui est absurde car W ne peut pas être strictement croissante sur $[a, a + \pi]$ puisque $W(a) \geq 0 \geq W(a + \pi)$. On a ainsi prouvé par un raisonnement par l'absurde que y s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a + \pi[$.

□

Correction de l'Exercice 112

[Retour à l'énoncé](#)

Soit $N(t) = f(t^2, \cosh(t), e^t)$. $N(0) = f(0, 1, 1) = 0$. Par la règle de la chaîne, N est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout t :

$$N'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, \cosh(t), e^t) + \sinh t \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \cosh(t), e^t) + e^t \frac{\partial f}{\partial z}(t^2, \cosh(t), e^t)$$

et ainsi $N'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 1) = 3$. Comme $N(0) = 0$, $N(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 3t$.

Soit $D(t) = f(t, \cos(t), \cosh(t))$. $D(0) = f(0, 1, 1) = 0$. Par la règle de la chaîne, D est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout t :

$$F'_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \cos(t), \cosh(t)) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(t, \cos(t), \cosh(t)) + \sinh t \frac{\partial f}{\partial z}(t, \cos(t), \cosh(t))$$

et ainsi $D'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 1) = 1$. Comme $D(0) = 0$, $D(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$.

Finalement : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t^2, \cosh(t), e^t)}{f(t, \cos(t), \cosh(t))} = 3$.

□

Correction de l'Exercice 113

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$. Cette série entière a pour rayon de convergence 1 puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et que pour $t > 1$, le terme général ne tend pas vers 0. φ est normalement convergente sur $I = [-1, 1]$ puisque sur cet intervalle $\frac{|t|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme

somme d'une série normalement convergente de fonctions continues, φ est définie et continue sur $[-1, 1]$. En dehors de I , φ n'est pas définie.

Comme f est la composée de φ et de la fonction continue $(x, y) \mapsto x + y$, le domaine de définition de f est

$$D = \{(x, y), |x + y| \leq 1\}.$$

2. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est de classe $\mathcal{C}^1$, aussi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de D à savoir $U = \{(x, y), |x + y| < 1\}$. De plus :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi'(x + y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x + y)^n}{n}.$$

3. φ' s'obtient par dérivation terme à terme donc

$$\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1 - t)$$

et comme $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = (1 - t) \ln(1 - t) + t$ d'où pour $(x, y) \in D$

$$f(x, y) = (1 - x - y) \ln(1 - x - y) + x + y$$

et pour $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\ln(1 - x - y).$$

□

Correction de l'Exercice 114

[Retour à l'énoncé](#)

1. Par les théorèmes généraux, en dehors de la droite D d'équations $y = x$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit (a, a) un point de D et (x, y) de limite (a, a) .

Par le théorème des accroissements finis, si $x \neq y$, il existe z dans l'intervalle de bornes x et y tels que $\varphi(x, y) = f'(z)$ et si $x = y$, $z = x$. Comme z tend vers a lorsque x et y tendent vers a et que f' est continue :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} \varphi(x, y) = f'(a) = \varphi(a, a).$$

φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a déjà vu que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de D et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)}{(x - y)^2}.$$

Compte-tenu de la symétrie entre x et y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{f(x) - f(y) - (x - y)f'(y)}{(x - y)^2}.$$

Au point (a, a) , étudions l'existence de dérivées partielles. Soit $\varphi_1(t) = \varphi(t, a) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ si $t \neq a$. Par développement limité à l'ordre 2 dev f en $a :=$:

$$\varphi_1(t) = f'(a) + \frac{t-a}{2} f''(a) + o(t-a)$$

Comme $\varphi_1(a) = f'(a)$, φ_1 est dérivable en a de dérivée $\frac{f''(a)}{2}$; ce qui prouve que φ admet en (a, a) une dérivée partielle par rapport à x valant $\frac{f''(a)}{2}$. Par symétrie du problème, φ admet aussi en (a, a) une dérivée partielle par rapport à y valant $\frac{f''(a)}{2}$.

Il reste à étudier la continuité de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en (a, a) .

Si $x \neq y$, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2} \int_x^y (y-t) f''(t) dt.$$

On remarque que $\int_x^y (y-t) dt = \frac{(y-x)^2}{2}$ donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{(x-y)^2} \int_x^y (y-t) (f''(t) - f''(a)) dt.$$

f étant de classe $\mathcal{C}^2$, f'' est continue. Aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid t - a \mid < \alpha \implies \mid f''(t) - f''(a) \mid < \varepsilon.$$

Soit x et y tels que $\sup(|x-a|, |y-a|) < \alpha$.

Si $x = y$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{f''(x)}{2}$ et $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $x \neq y$, soit $s = \pm 1$ du signe de $y - x$:

$$\left| \int_x^y (y-t) (f''(t) - f''(a)) dt \right| \leq s \int_x^y |y-t| |f''(t) - f''(a)| dt.$$

Le segment de bornes x et y est inclus dans $]a - \alpha, a + \alpha[$, aussi, pour tout t entre x et y , $|y-t| = s(y-t)$. On a alors :

$$\left| \frac{1}{(x-y)^2} \int_x^y (y-t) (f''(t) - f''(a)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{(x-y)^2} s^2 \int_x^y (y-t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \sup(|x-a|, |y-a|) < \alpha \implies \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, a) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui prouve la continuité de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$. Par symétrie des expressions en x et y , il en est de même de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. En conclusion, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. □

Correction de l'Exercice 115

[Retour à l'énoncé](#)

1. Le segment joignant (a, b) à $(a+x, b+y)$ est inclus dans D .

Soit $\varphi(t) = f(a + tx, b + ty)$ définie sur $[0, 1]$. f étant $\mathcal{C}^1$, il en est de même de φ et par la règle de la chaîne :

$$\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(a + tx, b + ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a + tx, b + ty)$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à φ entre 0 et 1, on obtient l'existence d'un réel $t \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + x, b + y) - f(a, b) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t)$$

ce qui est exactement le résultat souhaité.

2. On déduit de la question précédente que :

$$|f(a + x, b + y) - f(a, b)| \leq |x| \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + |y| \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$$

et finalement :

$$|f(a + x, b + y) - f(a, b)| \leq \sup(|x|, |y|) \left(\sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \sup_D \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right) \leq k \sup(|x|, |y|)$$

On obtient alors comme $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$ et $u_{n+1} = f(u_{n-1}, u_n)$ que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$(*) \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k \sup(|u_n - u_{n-1}|, |u_{n+1} - u_n|).$$

Posons $a = \sup(|u_1 - u_0|, |u_2 - u_1|)$ et regardons les premières majorations obtenues :

$$\begin{cases} |u_3 - u_2| \leq k \sup(|u_1 - u_0|, |u_1 - u_2|) = ka \leq a \\ |u_4 - u_3| \leq k \sup(|u_2 - u_1|, |u_3 - u_2|) \leq ka \\ |u_5 - u_4| \leq k \sup(|u_3 - u_2|, |u_4 - u_3|) \leq k^2 a \end{cases}.$$

La puissance de k ne semble augmenter que tous les 2 pas. Montrons par récurrence que pour $n \geq 1$, $|u_n - u_{n-1}| \leq k^p a$ où $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ autrement dit si $n = 2p + 1$ ou $n = 2p + 2$. Effectuons la récurrence sur p . Elle a été initialisée pour $p = 0$ ou $p = 1$. Supposons la vraie au rang p . Soit n tel que $p + 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Si n est impair $n = 2p + 3$. On a alors :

$$|u_n - u_{n-1}| \leq k \sup(|u_{2p+1} - u_{2p}|, |u_{2p+2} - u_{2p+1}|) \leq k k^p a = k^{p+1} a$$

Si n est pair $n = 2p + 4$. On a alors comme $k^{p+1} < k^p$:

$$|u_n - u_{n-1}| \leq k \sup(|u_{2p+2} - u_{2p+1}|, |u_{2p+3} - u_{2p+2}|) \leq k k^p a = k^{p+1} a$$

La propriété est héréditaire sur p . On a ainsi vérifié que pour $n \geq 1$, $|u_n - u_{n-1}| \leq k^p a$ où $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Soit la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ de terme général $v_n = k^p$ avec $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Sa somme partielle V_{2n} de rang $2n$ vaut :

$$V_{2n} = 2 \sum_{p=0}^{n-1} k^p$$

Comme $k \in [0, 1[$, V_{2n} est une suite convergente de limite $\frac{2}{1-k}$. Comme $V_{2n+1} = V_{2n} + k^n$, $(V_{2n+1})_n$ est convergente et de même limite que (V_{2n}) . La série $\sum v_n$ est convergente.

Or pour $n \geq 1$, $|u_n - u_{n-1}| \leq av_n$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n - u_{n-1}$ est absolument convergente donc convergente, ce qui prouve la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Comme $u_n \in]0, 1[$, sa limite $\ell \in [0, 1]$. ℓ n'est pas nécessairement dans D . On ne peut donc pas parler de $f(\ell, \ell)$.

Soit $(u'_n)_n$ une suite définie par $(u'_0, u'_1) \in D$ et pour tout n , $u'_{n+2} = f(u'_n, u'_{n+1})$. On a alors

$$|u'_{n+2} - u_{n+2}| \leq k \sup(|u'_n - u_n|, |u'_{n+1} - u_{n+1}|)$$

ce qui est la même relation que (*) en remplaçant la suite de terme général $u_n - u_{n-1}$ par celle de terme général $u'_n - u_n$.

Par les calculs faits précédemment, on a donc si $p = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

$$\forall n \geq 1, |u_n - u'_n| \leq k^p \sup(|u_0 - u'_0|, |u_1 - u'_1|)$$

Lorsque n tend vers l'infini, il en est de même de p donc $(u_n - u'_n)_n$ est de limite nulle. Les deux suites ont donc même limite; la limite ne dépend donc pas des valeurs initiales de la suite.

□

Correction de l'Exercice 116

[Retour à l'énoncé](#)

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2$. Etudions les courbes de niveau.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0 \iff x + y + 1 = 0.$$

C_0 est donc une droite.

Si z n'est pas nul

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = z \iff x^2 + y^2 + 1 - \frac{1}{z}(x + y + 1) = 0.$$

Cette équation s'écrit :

$$\left(x - \frac{1}{2z}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2z}\right)^2 - \rho(z) = 0$$

avec $\rho(z) = -1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{z} + 1\right)^2 - 3 \right)$. C'est celle d'un cercle, d'un point ou du vide suivant le signe de $\rho(z)$.

Or :

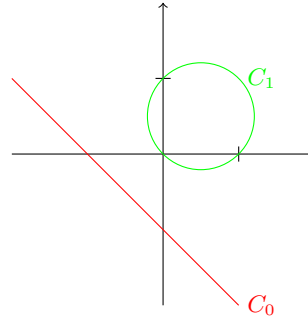
$$\rho(z) > 0 \iff \frac{1}{z} \in]-\infty, -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}, +\infty[\iff z \in \left] \frac{-1}{\sqrt{3}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right[\setminus \{0\}.$$

Dans ce cas, C_z est un cercle centré en $(\frac{1}{2z}, \frac{1}{2z})$ et de rayon $\sqrt{\rho(z)}$.

Si $\rho(z) = 0$ (donc $z = \frac{-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$) C_z est réduit au point $(\frac{1}{2z}, \frac{1}{2z})$.

Si $\rho(z) < 0$, C_z est vide. Donc f ne prend ses valeurs que dans l'intervalle $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right]$.

Pour $z = 1$, $\rho(1) = \frac{1}{2}$. C_1 est un cercle centré en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On remarque que ce cercle passe par l'origine. Pour $z = -1$, $\rho(-1) < 0$. C_{-1} est donc vide.



2. D'après la question précédente, f ne prend donc que les valeurs de l'intervalle $\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$. Elle a donc comme maximum $M = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ atteint en un unique point $(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4})$ et un minimum $m = \frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ atteint en un unique point $(\frac{-\sqrt{3}+1}{4}, \frac{-\sqrt{3}+1}{4})$.

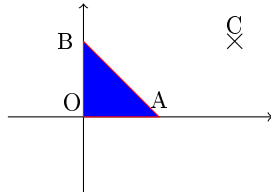
□

Correction de l'Exercice 117

[Retour à l'énoncé](#)

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 5$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2y$. En un point critique, ses deux dérivées partielles s'annulent donc $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Il n'y a qu'un point critique $C = (2, 1)$.

2.



T est un triangles de sommet $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$. T est borné car pour tout point de T , $\sup(|x|, |y|) \leq 1$. De plus, les ensembles $F_1 = \{(x, y), x \geq 0\}$, $F_2 = \{(x, y), y \geq 0\}$ et $F_3 = \{(x, y), 1 - x - y \geq 0\}$ sont fermés comme images réciproques de $\mathbb{R}^+$ par des fonctions continues. Leur intersection T est donc fermé.

f est continue sur le fermé borné T : elle y admet un maximum. Le point critique C n'est pas élément de l'intérieur de T (en bleu sur la figure), aussi le maximum est atteint sur le bord (en rouge sur la figure).

Sur le segment $[OA]$, $f(x, 0) = x^2 - 5x = \phi(x)$. Comme $\phi'(x) < 0$ sur $[0, 1]$, $f([OA]) = [-4, 0]$.

Sur le segment $[OB]$, $f(0, y) = y^2$. Aussi comme y varie de 0 à 1, la $f([OB]) = [-1, 0]$.

Sur le côté AB , $y = 1 - x$ et

$$f(x, 1 - x) = x(x + y) - (1 - x)^2 - 5x = -(1 - x)^2 - 4x$$

Cette fonction reste strictement négative lorsque $x \in [0, 1]$. Aussi le maximum de f sur T vaut 0 et est atteint en O .

3. g est définie continue, positive sur T et nulle sur le bord. Elle admet un minimum et un maximum sur le fermé borné T . Le minimum vaut 0 et est atteint sur tout le bord. Le maximum est donc atteint à l'intérieur de T .

A l'intérieur de T , g est de classe $\mathcal{C}^1$: le maximum est atteint en un point critique. Or

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y \left(\sqrt{1-x-y} - \frac{x}{2\sqrt{1-x-y}} \right) = \frac{y(2-3x-2y)}{2\sqrt{1-x-y}}$$

et compte-tenu de la symétrie en (x, y) , $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{x(2-2x-3y)}{2\sqrt{1-x-y}}$. En un point intérieur à T , x et y sont non nuls; aussi, en un point critique

$$2x + 3y = 3x + 2y = 5 \iff x = y = \frac{2}{5}.$$

Comme il n'y a qu'un point critique et que le maximum M est atteint en un point critique

$$M = g\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}.$$

□

Correction de l'Exercice 118

[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{xy}$, c'est le quotient de deux fonctions polynômiales en (x, y) (donc de classe $\mathcal{C}^1$) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - \frac{x+y}{x^2} = \frac{(x+y)(x-y)}{x^2y}$$

et par symétrie $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(x+y)(y-x)}{xy^2}$. Comme x et y sont supposés strictement positifs, les dérivées partielles s'annulent si et seulement si $x = y$. On a donc une demi-droite de points critiques et $f(x, x) = 4$ pour tout x .

2. P est polynômiale en t de degré au plus 2. le coefficient de t^2 est $x+y$ non nul lorsque $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comme P reste positif sur $\mathbb{R}$, son discriminant Δ est négatif. Or

$$P(t) = (x+y)t^2 + 4t + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

donc $\Delta = 4(4 - f(x, y))$. On en déduit donc que $f(x, y) \leq 4$. La valeur 4 est atteinte lorsque $x = y$, c'est donc le maximum de la fonction.

3. Soit $Q(t) = \sum_{k=1}^n \left(t\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2$. Comme somme de polynômes de degré 2, c'est un polynôme de degré au plus 2 dont le coefficient en t^2 vaut $\sum_{k=1}^n x_k \neq 0$ puisque les x_k sont strictement positifs. Ce trinôme reste positif sur $\mathbb{R}$ aussi son discriminant Δ est négatif. Or

$$Q(t) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) t^2 + 2nt + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$$

donc $\Delta = 4(n^2 - g(x_1, \dots, x_n))$. Ainsi $g(x_1, \dots, x_n) \leq n^2$ et on remarque que la valeur n^2 est atteinte lorsque $x_1 = x_2 = \dots = x_n$: c'est donc le maximum de g sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

□

Correction de l'Exercice 119[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Phi_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\partial_i(\Phi_a) = a_i$. Ainsi $\nabla(\Phi_a) = a$.
2. Par définition d'une limite :

$$\exists R > 0, \|x\| > R \implies u(x) > u(0).$$

Le disque fermé de centre R centré en 0 est un fermé borné : l'application continue u y admet donc un minimum m atteint en un point b . On a alors :

$$\forall x, \|x\| \leq R \implies u(x) \geq u(b) = m$$

et en particulier $u(0) \geq u(b)$; aussi

$$\forall x, \|x\| > R \implies u(x) > u(0) \geq u(b) = m$$

ce qui prouve que $u(b)$ est un minimum absolu.

3. Il s'agit donc de prouver que pour tout a de $\mathbb{R}^n$, il existe b tel que $\nabla(f)(b) = a$.
Soit $u = f - \Phi_a$. Comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\nabla(u) = \nabla(f) - a$. u étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue. De plus, comme $|\Phi_a(x)| \leq \|a\| \|x\|$:

$$\forall x, u(x) \geq f(x) - \|a\| \|x\| = \|x\| \left(\frac{f(x)}{\|x\|} - \|a\| \right)$$

Lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, il en est de même du minortant de u donc de u . Par la question 2, u admet donc un minimum atteint en un point b . u étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, b est un point critique de u où le gradient s'annule ce qui prouve que $\nabla(f)(b) = a$. Tout élément a a un antécédent par $\nabla(f) : \nabla(f)$ est surjective.

□

Correction de l'Exercice 120[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Si $M = (x, y)$ et $A = (a_1, a_2)$, $f_A(M) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$. Aussi comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f_A est de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de A donc sur l'ouvert $U_A = \mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ et

$$\nabla(f_A)(M) = \left(\frac{x - a_1}{AM}, \frac{y - a_2}{AM} \right) = \frac{\overrightarrow{MA}}{AM}$$

En A , f_A a pour première application partielle $f_A(x, a_2) = |x - a_1|$ qui n'est pas dérivable en a_1 : f_A n'a pas de dérivées partielles en A ; U_A est le plus grand ouvert sur lequel f_A est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. $f = f_B + f_C - f_A$; aussi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = U_A \cap U_B \cap U_C$ ouvert comme intersection de 3 ouverts et

$$\nabla(f)(M) = \frac{\overrightarrow{MB}}{BM} + \frac{\overrightarrow{MC}}{CM} - \frac{\overrightarrow{MA}}{AM}.$$

En A , B ou C , deux des trois fonctions ont des dérivées partielles, la troisième n'en ayant pas : aussi f n'y admet pas de dérivées partielles.

2. Comme $MB \geq MA - AB$ et $MC \geq MA - AC$ par inégalités triangulaires inversées,

$$f(M) \geq MA - AB - AC$$

ce qui prouve que $f(M)$ tend vers l'infini lorsque MA tend vers l'infini.

La suite de la question a déjà été vue dans l'exercice précédent en question 2.

Soit $\ell = AB = AC$, $f(A) = 2\ell$. Par définition d'une limite, il existe R tel que

$$AM > R \implies f(M) > 2\ell.$$

Sur D le disque fermé centré en A de rayon R (qui est donc un fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f application continue atteint un minimum en un point M_0 . On a alors que si M est élément du disque, $f(M) \geq f(M_0)$ et si M n'est pas élément du disque $f(M) > f(A) \geq f(M_0)$; ce qui prouve que f a un minimum en M_0 .

3.

a. On a donc $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. En faisant le produit scalaire successivement avec chacun des vecteurs, on obtient :

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = -1 \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -1 \\ \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -1 \end{cases}$$

soit $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = -\frac{1}{2}$. Chacun des angles $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}), (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}), (\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$ a donc une mesure de $\pm \frac{2\pi}{3}$ puisque leur cosinus vaut $-\frac{1}{2}$.

Si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étant unitaires, ils sont égaux et la somme des trois vecteurs étant nulle, $\vec{v} = -2\vec{u}$ ce qui est impossible car $\vec{v}$ ne serait plus unitaire. On a prouvé par l'absurde que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ et par symétrie du problème les trois angles $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}), (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}), (\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$ sont égaux et valent $\pm \frac{2\pi}{3}$. Il suffit d'écrire l'égalité et la valeur de deux des trois angles pour obtenir le dernier.

b. En un point critique, le gradient s'annule; aussi c'est un point autre que les sommets du triangle où

$$\nabla(f)(M) = \frac{\overrightarrow{MB}}{BM} + \frac{\overrightarrow{MC}}{CM} - \frac{\overrightarrow{MA}}{AM} = \vec{0}.$$

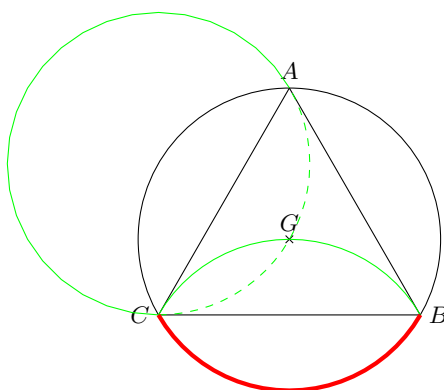
Les 3 vecteurs $\frac{\overrightarrow{MB}}{BM}, \frac{\overrightarrow{MC}}{CM}, -\frac{\overrightarrow{MA}}{AM}$ étant unitaires, d'après la question précédente, on cherche les points M tels que :

$$(1) \quad (\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = (\widehat{\overrightarrow{MC}, -\overrightarrow{MA}}) = -\frac{2\pi}{3}$$

ou

$$(2) \quad (\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = (\widehat{\overrightarrow{MC}, -\overrightarrow{MA}}) = \frac{2\pi}{3}$$

Etudions tout d'abord le système (1) : $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = (\widehat{\overrightarrow{MC}, -\overrightarrow{MA}}) = -\frac{2\pi}{3}$.



$(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = -\frac{2\pi}{3}$ est un arc de cercle $\mathcal{C}_1$ d'extrémités B et C . G le centre de gravité (ou isobarycentre) du triangle ABC appartient à cet arc de cercle. C'est le symétrique par

rapport à BC de l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas A .
 $(\widehat{MC}, -\widehat{MA}) = -\frac{2\pi}{3}$ équivaut à $(\widehat{MC}, \widehat{MA}) = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$. C' est un arc de cercle d'extrémités A et C : c'est le symétrique par rapport à AC de l'arc $\widehat{AC}$ du cercle $\mathcal{C}$ contenant B car sur l'arc $\widehat{AC}$ précité, l'angle $(\widehat{MC}, \widehat{MA}) = (\widehat{BC}, \widehat{BA}) = -\frac{\pi}{3}$. L'intersection des deux arcs (tracés en vert sur la figure) est donc vide, l'un étant intérieur au triangle et l'autre extérieur.

Passons au deuxième système : $(\widehat{MB}, \widehat{MC}) = (\widehat{MC}, -\widehat{MA}) = \frac{2\pi}{3}$.
 $(\widehat{MB}, \widehat{MC}) = \frac{2\pi}{3}$ est un arc de cercle d'extrémités B et C , symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à BC : c'est donc l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas A .
 $(\widehat{MC}, -\widehat{MA}) = \frac{2\pi}{3}$ équivaut à $(\widehat{MC}, \widehat{MA}) = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$. C'est donc l'arc $\widehat{AC}$ du cercle $\mathcal{C}$ contenant B . L'intersection qui définit $\mathcal{E}$ est donc l'arc $\widehat{BC}$ (privé des points B et C) du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas A (en rouge sur la figure).

c. L'arc de cercle est paramétrable par une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$; en effet, si (a, b) sont les composantes de G et R le rayon de $\mathcal{C}$, on peut choisir $\phi(\theta) = (a + R \cos(\theta), b + R \sin(\theta))$ avec $\theta_C < \theta < \theta_B$ (on peut ordonner ainsi θ en choisissant bien les mesures de θ en C et B modulo 2π) pour l'arc $\mathcal{E}$.

Soit $g(\theta) = f \circ \phi(\theta)$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $g'(\theta) = \langle \nabla(f)(\phi(\theta)), \phi'(\theta) \rangle$. Sur $\mathcal{E}$, le gradient s'annule donc g' aussi : g est constante. f est donc constante sur $\mathcal{E}$.

Soit M_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ de limite C ; par exemple, $M_n = \phi\left(\theta_C + \frac{\theta_B - \theta_C}{n}\right)$. Comme f est continue, $\lim f(M_n) = f(C)$. Or f est constante sur $\mathcal{E}$, donc cette constante est égale à $f(C) = CB - CA = 0$ (le triangle est équilatéral).

4. Le minimum de f est obtenu soit en un point critique où f est nulle, soit pour l'un des 3 sommets du triangle. Comme $f(A) = 2\ell > 0$ et $f(B) = f(C) = 0$, le minimum de la fonction est 0 et est atteint sur $\mathcal{E}'$ l'arc $\widehat{BC}$ incluant les points B et C du cercle $\mathcal{C}$ ne contenant pas A .

f reste donc positive, ce qui équivaut à $\forall M \in \mathbb{R}^2, MB + MC \geq MA$ avec égalité sur $\mathcal{E}'$.

□

Correction de l'Exercice 121

[Retour à l'énoncé](#)

f est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale en (x, y) et on a immédiatement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P'(x + iy) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = iP'(x + iy).$$

Ces deux dérivées partielles sont aussi polynomiales en (x, y) donc de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = P''(x + iy) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -P''(x + iy)$$

ce qui prouve que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

propriété qui s'énonce en les polynômes complexes sont harmoniques (de laplacien nul).

□

Correction de l'Exercice 122[Retour à l'énoncé](#)

1. Comme pour x non nul, $|f(x, y)| \leq x^2$, on peut prolonger f sur l'axe Δ d'équation $x = 0$ en posant $f(0, y) = 0$ pour tout y .

2. En dehors de l'axe Δ , par les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Etudions l'existence de dérivées partielles en $(0, b)$.

$\frac{f(x, b)}{x} = x \sin\left(\frac{b}{x}\right)$ donc $\left|\frac{f(x, b)}{x}\right| \leq |x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, b)}{x} = 0$. f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0, b)$ qui vaut 0. De plus, f étant nulle en tout point de Δ , f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0, b)$ qui vaut 0. Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

En dehors des points de l'axe, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)$. Le premier terme de cette expression est de limite nulle comme vu précédemment. Si y est nul, le second est constant et vaut -1 donc cette dérivée partielle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Si y est non nul, le second terme n'a pas de limite donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est continue en aucun point de l'axe Δ . f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Par définition :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$$

Or $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -x$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$.

Par définition :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y).$$

Comme les dérivées partielles de f sont nulles sur Δ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$.

La fonction n'étant pas de classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz ne s'applique pas.

□

Correction de l'Exercice 123[Retour à l'énoncé](#)

1. g est de la même classe que f . Par la règle de la chaîne, en posant $m = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m)$$

Puis en réitérant et en utilisant le théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(m) \right) + \sin(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(m) + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m) \right) \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(m) + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m) - r \sin(\theta) \left(-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(m) \right) + \dots \\ &\quad \dots r \cos(\theta) \left(-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(m) + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m) \right) \\ &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m) + r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) \dots \\ &\quad - 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(m) + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m)\end{aligned}$$

Ainsi r étant non nul

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = \Delta(f)(m) - \frac{1}{r^2} \left(r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(m) \right)$$

Ainsi :

$$\Delta(f)(m) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \langle \nabla(f)(m), m \rangle .$$

□

Correction de l'Exercice 124

[Retour à l'énoncé](#)

1. On intègre en x (les "constantes d'intégration" ne dépendent pas de x mais dépendent de y) ; on obtient directement $f(x, y) = \frac{x^4 y}{4} + \frac{x^3 y^2}{3} + g(y)$ avec g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (pour que f le soit).

2. L'équation différentielle $u' = 2u$ s'intègre en $u(x) = \lambda e^{2x}$; en appliquant ce résultat aux applications partielles $x \mapsto f(x, y)$, on obtient :

$$f(x, y) = g(y) e^{2x}$$

avec g de la classe de f donc de classe $\mathcal{C}^1$.

3. De même, l'équation différentielle $u' = yu$ s'intègre en $u(x) = \lambda e^{xy}$; en appliquant ce résultat aux applications partielles $x \mapsto f(x, y)$, on obtient :

$$f(x, y) = g(y) e^{xy}$$

avec g de la classe de f donc de classe $\mathcal{C}^1$.

4. L'équation différentielle $xu' = 2u$ s'intègre en $u(x) = \lambda x^2$; en appliquant ce résultat aux applications partielles $x \mapsto f(x, y)$, on obtient :

$$f(x, y) = g(y) x^2$$

avec g de la classe de f donc de classe $\mathcal{C}^1$.

5. L'équation différentielle $xu' = yu$ s'intègre en $u(x) = \lambda x^y$; en appliquant ce résultat aux applications partielles $x \mapsto f(x, y)$, on obtient :

$$f(x, y) = g(y) x^y$$

avec g de la classe de f donc de classe $\mathcal{C}^1$.

6. La forme de U évoque un passage en polaires. On pose donc $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. En utilisant l'équation du gradient en polaires, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 1$$

Soit $g(r, \theta) = r + h(\theta)$ avec h de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\theta = \text{Arctan}(\frac{y}{x})$, on obtient finalement :

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $\phi = h \circ \text{Arctan}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Si f existe, f est de classe $\mathcal{C}^2$ car ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$. Or

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin(x)}{y} \right) (x, y) = -\frac{\sin(x)}{y^2} \neq -\frac{\sin(y)}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin(y)}{x} \right) (x, y)$$

Si f existe, elle ne vérifie pas le théorème de Schwarz en étant de classe $\mathcal{C}^2$. Par l'absurde, on a vérifié que ce système n'a pas de solution.

8. On commence comme précédemment en intégrant l'équation en x ; on obtient :

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{x} + g(y)$$

avec g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Puis en dérivant :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + g'(y)$$

ainsi $g(y) = \frac{y^3}{3} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où :

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{3} - \frac{y}{x} + \lambda$$

□

Correction de l'Exercice 125

[Retour à l'énoncé](#)

1.

a. Pour tout réel y , $\cosh(2y) \geq 1$ donc $\frac{1}{\cosh(2y)} \in]0, 1]$ et pour tout réel x , $\cos(2x) \in [-1, 1]$, aussi $u(x, y) \in [-1, 1]$.

De plus, pour tout $t \in [-1, 1]$, $t = u\left(\frac{\text{Arccos}(t)}{2}, 0\right)$ donc $u(\mathbb{R}^2) = [-1, 1]$. z est donc défini

si $u(x, y) \neq \pm 1$, ce qui impose $\cos(2y) = 0$ et $\cos(2x) = \pm 1$ soit $y = 0$ et $x = \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $D = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$.

L'ensemble des points (x, y) tels que $\cos^2(2x) - 1 = 0$ est fermé (image réciproque de $\{0\}$)

par une application continue) ainsi que la droite $y = 0$. Comme intersection de deux fermés, le complémentaire de D est fermé. Ainsi D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. L'application $u : (x, y) \mapsto \frac{\cos 2x}{\cosh 2y}$ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas. z est donc de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Par la règle de la chaîne, en dehors des points $m_k = (\frac{k\pi}{2}, 0)$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -2 \frac{\sin 2x}{\cosh 2y} F' \left(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{\sinh(2y) \cos(2x)}{\cosh^2(2y)} F' \left(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y} \right) \end{cases}$$

et en recommençant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = -4 \frac{\cos 2x}{\cosh 2y} F' (u(x, y)) + 4 \frac{\sin^2 2x}{\cosh^2 2y} F'' (u(x, y)) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) = 4 \frac{\sinh(2y) \sin(2x)}{\cosh^2(2y)} F' (u(x, y)) + 4 \frac{\sinh(2y) \sin(2x) \cos(2x)}{\cosh^3(2y)} F'' (u(x, y)) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = -4 \frac{(\cosh^2(2y) - 2 \sinh^2(2y)) \cos(2x)}{\cosh^3(2y)} F' (u(x, y)) + 4 \frac{\sinh^2(2y) \cos^2(2x)}{\cosh^4(2y)} F'' (u(x, y)) \end{cases}$$

2.

a. En utilisant les calculs de la première question et la relation $\cosh^2(2y) - \sinh^2(2y) = 1$:

$$\Delta(z)(x, y) = \alpha(x, y) F' (u(x, y)) + \beta(x, y) F'' (u(x, y))$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= -\frac{4 \cos(2x)}{\cosh^3(2y)} (\cosh^2(2y) + \cosh^2(2y) - 2 \sinh^2(2y)) = -\frac{8 \cos(2x)}{\cosh^3(2y)} \\ \beta(x, y) &= \frac{4}{\cosh^4(2y)} (\cosh^2(2y)(1 - \cos^2(2x)) + (\cosh^2(2y) - 1) \cos^2(2x)) \\ &= \frac{4(\cosh^2(2y) - \cos^2(2x))}{\cosh^4(2y)} \end{aligned}$$

Comme $\cosh^2(2y) \neq 0$, en multipliant l'équation $\Delta(z)(x, y) = 0$ par $\frac{\cosh^2(2y)}{4}$, on obtient :

$$(1 - u(x, y)^2) F'' (u(x, y)) - 2u(x, y) F' (u(x, y)) = 0$$

soit

$$\forall t \in [-1, 1], (1 - t^2) F''(t) - 2t F'(t) = 0.$$

b. En intégrant deux fois cette équation, on obtient successivement l'existence d'une constante réelle α telle que

$$\forall t \in [-1, 1], (1 - t^2) F'(t) = \alpha$$

puis d'une seconde constante β réelle telle que

$$\forall t \in [-1, 1], F(t) = \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) + \beta.$$

Ainsi il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout couple (x, y) :

$$z(x, y) = \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{\cosh(2y) + \cos(2x)}{\cosh(2y) - \cos(2x)} \right) + \beta.$$

□

Correction de l'Exercice 126

[Retour à l'énoncé](#)

1. On vérifie aisément que $\phi(t, z) \in A$ lorsque $(t, z) \in B$.

Soit $(x, y) \in A$: cherchons ses antécédents dans B . On doit donc résoudre $\begin{cases} x = tz \\ y = t - tz \end{cases}$. Il

est immédiat que $t = x + y > 0$ et $z = \frac{x}{t} = \frac{x}{x + y}$. Tout élément de A a un unique antécédent dans B donc ϕ est bijective et

$$\phi^{-1}(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x + y} \right).$$

$(t, z) \mapsto tz$ et $(t, z) \mapsto t - tz$ sont polynômiales en (t, z) donc de classe $\mathcal{C}^1$: ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B .

$(x, y) \mapsto x + y$ est polynômiale en (x, y) donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x, y) \mapsto \frac{x}{x + y}$ est une rationnelle en (x, y) (quotient de deux fonctions polynômiales) donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Ainsi ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

2. On utilise le changement de variables préconisé en première question. Soit la fonction g définie sur B par $g(t, z) = f(tz, t - tz)$ soit $f(x, y) = g\left(x + y, \frac{x}{x + y}\right)$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de cette classe et par la règle de la chaîne avec $(x, y) = \phi(t, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, z) + \frac{y}{(x + y)^2} \frac{\partial g}{\partial z}(t, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, z) - \frac{x}{(x + y)^2} \frac{\partial g}{\partial z}(t, z) \end{aligned}$$

Ainsi compte-tenu de l'expression de ϕ , l'équation proposée devient

$$2 \frac{\partial g}{\partial t}(t, z) + 2g(t, z) = (t + 2) \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

A z fixé, en posant $u(t) = g(t, z)$, on a alors :

$$(E_u) \quad u'(t) + u(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

La solution de l'équation sans second membre est $t \mapsto \alpha e^{-t}$.

Cherchons une solution particulière de $u'(t) + u(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right) e^{\frac{it}{2}}$ sous la forme

$v : t \mapsto (at + b) e^{\frac{it}{2}}$. On a alors :

$$(at + b) e^{\frac{it}{2}} + \left(a + (at + b) \frac{i}{2}\right) e^{\frac{it}{2}} = \left(\frac{t}{2} + 1\right) e^{\frac{it}{2}}$$

soit $\begin{cases} a(1 + \frac{i}{2}) = \frac{1}{2} \\ a + b = 1 \end{cases}$ donc $a = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5}$ et $b = \frac{3+i}{5}$. La partie réelle de v est solution de l'équation initiale. Une solution particulière de E_u est donc

$$t \mapsto \frac{2t+3}{5} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t-1}{5} \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

La solution générale de l'équation en g est donc :

$$g(t, z) = h(z)e^{-t} + \frac{2t+3}{5} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t-1}{5} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et la solution générale de l'équation proposée est alors :

$$f(x, y) = h\left(\frac{x}{x+y}\right) e^{-(x+y)} + \frac{2x+2y+3}{5} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{x+y-1}{5} \sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

□

Correction de l'Exercice 127

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $M = (x, y)$ et $A = (a_1, a_2)$, $f_A(M) = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$. Aussi comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f_A est de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de A donc sur l'ouvert $U_A = \mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ et

$$\nabla(f_A)(M) = \left(\frac{x-a_1}{AM}, \frac{y-a_2}{AM} \right) = \frac{\overrightarrow{MA}}{AM}.$$

2. On remarque que $MF^2 - MF'^2 = (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2 = -4cx$. Aussi :

$$MF + MF' = 2a \iff MF - MF' = -\frac{2cx}{a}.$$

On a alors

$$MF + MF' = 2a \iff \begin{cases} MF = a - \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{cases}$$

Or $MF = a - \frac{cx}{a} \iff \begin{cases} a \geq \frac{cx}{a} \\ MF^2 = (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \end{cases}$. En développant les carrés

on obtient :

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

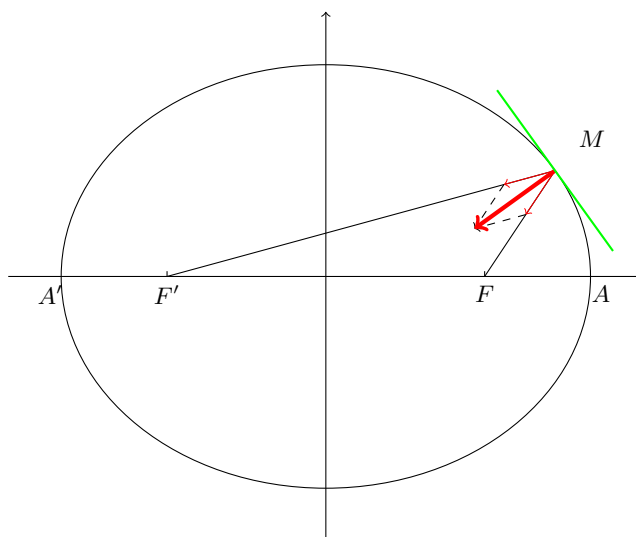
soit après division par b^2 , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dans cette équation, $|x| \leq a$, donc $\left|\frac{cx}{a}\right| \leq c < a$. La première condition du système est donc vérifiée.

Les mêmes calculs et mêmes arguments en changeant c en $-c$ (qui ont même carré), donnent

$$MF' = a + \frac{cx}{a} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a donc bien vérifié que l'ensemble des points M vérifiant $MF + MF' = 2a$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Soit la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ les foyers de cette ellipse.



Soit $g(M) = MF + MF' - 2a$. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points où g s'annule. F et F' n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathcal{E}$ et $\nabla(g)(M) = \frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$. Le gradient ne s'annule qu'en des points où les vecteurs unitaires (en rouge sur la figure) $\frac{\overrightarrow{MF}}{MF}$ et $\frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$ sont opposés c'est à dire sur le segment FF' . La droite FF' a pour équation $y = 0$ et ne rencontre $\mathcal{E}$ qu'aux points $A = (a, 0)$ et $A' = (-a, 0)$ qui ne sont pas entre F et F' . Aussi ce gradient (en rouge épais sur la figure) est non nul en tout point de $\mathcal{E}$ et est donc un vecteur normal à la courbe; or c'est un vecteur directeur de la bissectrice (intérieure) de MF et MF' . La tangente à l'ellipse en M (en vert sur la figure) est donc la droite orthogonale passant par M (bissectrice extérieure).

□

Correction de l'Exercice 128

[Retour à l'énoncé](#)

1. Soit $f(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 4yz$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ car polynomiale en (x, y, z) et de gradient $2(x + y + z, x + y - z, x - y + z)$ qui ne s'annule qu'en $O = (0, 0, 0)$. Tous les points de $\mathcal{S}$ autres que O sont donc réguliers.

Soit $A = (a, b, c)$ un point de $\mathcal{S}$ autre que O . Son plan tangent a pour équation :

$$(\Pi_A) \quad (a + b + c)x + (a + b - c)y + (a - b + c)z = 0.$$

Comme ce plan passe toujours par O ainsi que la droite $\mathcal{D}$, il suffit qu'il contienne un vecteur directeur de la droite par exemple $u = (2, 1, -2)$. u est élément de Π_a si et seulement si

$$a + 5b - c = 0$$

soit $a = c - 5b$. Comme le point A appartient à la surface, $4(c - 2b)^2 = 4bc$ soit

$$c^2 - 5bc + 4b^2 = (c - 4b)(c - b) = 0.$$

Si $c = b$, $A = (-4b, b, b)$ et le plan tangent après simplification par $2b \neq 0$ est le même pour tous ces points (qui forment une droite) et a pour équation

$$(\Pi_1) \quad x + 2y + 2z = 0.$$

Si $c = 4b$, $A = (-b, b, 4b)$ et le plan tangent après simplification par $2b \neq 0$ est le même pour tous ces points (qui forment une droite) et a pour équation

$$(\Pi_2) \quad 2x - 2y + z = 0.$$

Deux plans tangents à $\mathcal{S}$ contiennent $\mathcal{D}$.

2. Π_1 a pour vecteur normal $N_1 = (1, 2, 2)$ et Π_2 a pour vecteur normal $N_2 = (2, -2, 1)$. On remarque que leur produit scalaire $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$: les deux plans sont orthogonaux et (u, N_1, N_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

□

Correction de l'Exercice 129

[Retour à l'énoncé](#)

1. Si $a = 0$, l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $x = 0$ a pour équation $y^2 - z^2 = 0$; c'est donc l'union des deux droites d'équations $\Delta_0 \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ et $\Delta'_0 \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$.

Si $a = 1$, l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan Π_1 a pour équation $y = 0$. C'est la droite Δ_1 d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (c'est l'axe Oz).

Si $a = -1$, l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan Π_{-1} a pour équation $z = 0$. C'est la droite Δ_2 d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (c'est l'axe Oy).

Si $a > 1$, $a(a-1)(a+1) + y^2(a+1) + z^2(a-1) \geq a(a-1)(a+1) > 0$, l'intersection de Π_a est $\mathcal{S}$ est donc vide.

De même, si $a < -1$, $a(a-1)(a+1) + (a+1)y^2 + (a-1)z^2 \leq a(a-1)(a+1) < 0$, l'intersection de Π_a est $\mathcal{S}$ est donc vide.

Si $a \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, les coefficients de y^2 et z^2 sont de signes opposés ; la constante étant non nulle, l'intersection de Π_a et de $\mathcal{S}$ est une hyperbole.

2. En utilisant la question précédente, on voit que la surface $\mathcal{S}$ est dans la partie de l'espace $-1 \leq x \leq 1$. Une droite incluse dans $\mathcal{S}$ est donc incluse dans ce même ensemble, ce qui impose au vecteur directeur d'avoir une première composante nulle. Une droite incluse dans $\mathcal{S}$ doit être contenue dans un plan d'équation $x = a$. Ce sont donc les 4 droites trouvées

précédemment les axes Oy et Oz et les deux droites d'équations respectives $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ et

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}.$$

3. Soit $f(x, y, z) = x(x-1)(x+1) + y^2(x+1) + z^2(x-1)$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale en (x, y, z) et de gradient $\nabla(f)(x, y, z) = (3x^2 - 1 + y^2 + z^2, 2(x+1)y, 2(x-1)z)$. Vérifions que les points de $\mathcal{S}$ sont tous réguliers. Si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$, la première composante du gradient est non nulle. Si $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, le gradient s'annule si et seulement si $y = z = 0$ et $x^2 = \frac{1}{3}$ mais ces

points ne sont pas éléments de $\mathcal{S}$.

Le plan tangent à $\mathcal{S}$ sera donc de la forme $z = c$ si et seulement si en ce point de $\mathcal{S}$ les deux premières composantes du gradient sont nulles ce qui impose $y = 0$ et $3x^2 - 1 + z^2 = 0$. Le point étant régulier, $x \neq 1$. Comme le point appartient à la surface et que $x \neq 1$, $x^2 + x + z^2 = 0$. On obtient alors $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1) = 0$. x étant différent de 1, $x = -\frac{1}{2}$ et $z^2 = \frac{1}{4}$ soit $z = \pm \frac{1}{2}$.

Deux points répondent à la question : ce sont les points $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

□