C'est radical !

Jean

Niveau : Première, Terminale
Difficulté : : ★★★
Durée : : 20h
Rubrique(s) : Fonctions, Suites, Géométrie, Arithmétique, .

La petite histoire...
Cette fiche s'inspire grandement de l'excellent livre de Benoît Rittaud Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$ aux éditions le Pommier.

Celle-ci vise, au travers divers exercices, de faire de l'histoire des mathématiques autour de la racine carrée. Elle propose de nombreux commentaires historiques. Un certain nombre des exercices proposés montrent les méthodes vraissemblablement utlisées historiquement face aux diverses questions qui occupaient les mathématiciens de l'époque.

La plus ancienne trace de $\sqrt{2}$ que l'on ait retrouvée remonte à la civilisation babylonienne entre 1900 et 1600 avant notre ère. En effet sur la tablette YBC 7289, on peut y voir un carré de côté 30 à partir duquel les babyloniens ont calculé la longueur de la diagonale pour obtenir $42,4263889$. Ainsi ils ont mis en évidence que $\sqrt{2}$ est le nombre par lequel il faut multiplier la longueur du côté d'un carré pour déterminer la longueur de sa diagonale. En faisant le calcul avec nos connaissances modernes, la diagnonale vaut $42,4264069$ environ. Ainsi la valeur trouvée par les babyloniens est remarquable pour l'époque. En tout cas cette approximation était largement suffisante pour les besoins, par exemple pour la construction de bâtiments. En effet, en architecture cette valeur de $\sqrt{2}$ permettait de vérifier que l'on a bien construit un carré. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il n'est pas suffisant d'avoir quatre côtés identiques. On peut vérifer que l'on a un carré en calculant le rapport entre la diagonale et le côté et celui-ci doit être proche de $\sqrt{2}$. D'ailleurs il semblerait qu'ils n'aient pas envisagé de pousser plus loin la précision du calcul et ne soupçonnaient rien des propriétés particulières de $\sqrt{2}$. Cette volonté d'exactitude est plutôt une idée moderne. Dans l'exercice 1, nous verrons d'ailleurs une méthode géométrique qu'ils auraient éventuellement utilisée pour aboutir à leur résultat et nous expliquerons l'efficacité de celle-ci dans l'exercice 4. À titre de comparaison, les Égyptiens à la même époque approchaient $\sqrt{2}$ par $7/5$ ou $10/7$. Les indiens au V$^{\text{è}}$ ou IV$^{\text{è}}$ siècle avant notre ère avaient trouvé $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{3\times4\times34}$. Ces approximations sont moins précises, mais ouvrent l'idée que $\sqrt{2}$ pourrait s'écrire à l'aide de fractions infinies si on cherche à aller plus loin. Cette idée est développée dans l'exercice 9.

En reprenant notre language moderne, les babyloniens ont mis en évidence dans leur algorithme probable de calcul de $\sqrt{2}$ une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. On peut montrer que la limite de cette suite est $\sqrt{2}$. Plus tard en 1669, Newton publie dans De analysi per aequationes numero terminorum infinitas une méthode pour chercher

de façon approchée les racines d'un polynôme. Si nous appliquons cette méthode nous retrouvons la suite (u_n) définie précédemment. Nous préciserons cela dans l'exercice 2. Ainsi les deux premiers exercices vont nous permettre de construire géométriquement des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.
Dans la suite (u_n), les termes de la suite se rappochent de plus en plus de $\sqrt{2}$ et sont plus faciles d'accès qu'un calcul immédiat de $\sqrt{2}$. Ceci nous permet d'avoir des valeurs numériques approchées de $\sqrt{2}$ via les termes de la suite u_n. Nous verrons dans l'exercice 4 que nous avons besoin de calculer très peu de termes de la suite (u_n) pour avoir une excellente approximation de $\sqrt{2}$.

Pour les Grecs de l'Antiquité, le statut de nombre était uniquement réservé aux entiers naturels non nuls. Les fractions a/b, avec a et b des entiers naturels, étaient perçues comme des rapports de nombres ou de longueurs. Il n'y avait d'ailleurs pas de notations claires pour les fractions. De plus ils employaient les mots commensurables et incommensurables pour désigner certains de ces rapports, ce qui renforce l'idée d'une vision géométrique des nombres. Deux nombres x et y sont dits commensurables, s'il existe une unité commune u permettant de mesurer x et y, soit $x = nu$ et $y = mu$, avec m et n entiers. Avec notre langage moderne, cela siginifie que le rapport x/y est un nombre rationnel. Ainsi le nombre $\sqrt{2}$ est incommensurable, car il n'y a pas d'unité commune permettant de mesurer par un entier les longueurs 1 et $\sqrt{2}$. Ainsi $\sqrt{2}$ n'était pas vu comme un nombre mais comme le rapport de la diagonale au côté d'un carré.
Dans l'Antiquité, les rapports de longueurs, avaient d'autres applications. Ils étaient par exemple utilisés pour expliquer l'harmonie entre deux sons. Deux sons étaient considérés comme harmonieux s'ils étaient produits par deux cordes dont les rapports de longueurs étaient simples (par exemple 2/1 correspond à l'octave et 3/2 à la quinte).

Dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie précédemment, si on prend $u_0 = 2$, on peut montrer que tous les termes u_n sont des rationnels. On peut alors se demander si la limite de cette suite est aussi rationnelle. La réponse est négative, ce qui signifie que $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Cela sera traité dans les exercices 7 et 8, dans lesquels on présente une méthode arithmétique et l'autre géométrique.
La découverte de l'incommensurablité (ou irrationalité) de $\sqrt{2}$ est l'œuvre d'une école (voire une secte) fondée par Pythagore au VI$^{\text{è}}$ siècle avant notre ère. Cependant le flou règne sur l'époque, l'auteur de la découverte et la démonstration de ce fait. Selon la légende, Hippase de Métaponte, un disciple de cette école, aurait dévoilé l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et aurait été jeté à la mer pour avoir dévoilé ce secret. Le premier à évoquer l'irrationalité de certaines racines carrées est Platon dans Théétète (grand mathématicien du IV$^{\text{è}}$ siècle avant notre ère), mais il n'y a pas de démonstrations. Ce dernier aurait montré l'irrationalité de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ jusqu'à $\sqrt{17}$. C'est avec Euclide (300 ans avant notre ère) dans le livre X des Éléments que l'on a une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{n}$ pour n supérieur ou égal à 3 et n'étant pas le carré d'un entier (il n'y a pas $\sqrt{2}$, car ce résultat était considéré comme connu de tous). En language géométrique cela signifie que les seuls carrés ayant une aire entière sont ceux ayant des côtés entiers. Dans ce même ouvrage on y trouve aussi les démonstrations de l'irrationnalité de $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. La limitation aux racines carrées pour la recherche de nombres irrationnels est inhérente au fait qu'Euclide ne considère que les longueurs que l'on peut construire à la règle (non graduée) et au compas, ce qui est le cas pour les racines carrées citées. En tout cas, il n'est pas possible de faire de

 Creative Commons :

telles constructions pour tous les réels. Par ailleurs à l'époque, le calcul algébrique sur les racines carrées n'existaient pas et il a donc montré géométriquement que $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ et $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Ces idées montrent qu'il y a un lien étroit entre nombres et constructions géométriques que l'on mettra en évidence dans l'exercice 3 où l'on construira de façon exacte à la règle et au compas $\sqrt{n}$ avec n un entier naturel.

Pour se rapprocher de notre formalisme, il faut attendre l'an mil avec les mathématiciens arabes qui ont considéré les irrationnels comme des nombres. On peut voir cela dans les ouvrages de Al-Karaji traitant d'algèbre (étude des propriétés opératoires) et de l'arithmétique (étude des nombres). Fondée notamment par Al-Khwarizmi au IX$^{\text{è}}$ siècle, l'algèbre a permis de donner au concept d'opération (additions, multiplications) un formalisme qui a conduit plus tard à la définition que l'on connaît de $\sqrt{2}$, via l'unique solution positive de l'équation $x^2 = 2$. Ce formalisme permet d'établir des formules qui sont bien plus difficiles à montrer géométriquement. L'algèbre a donc permis des avancées calculatoires notables. Nous préciserons cela dans l'exercice 5 et nous mettrons en évidence les propriétés algébriques de la racine carrée qui en découlent.

Dans une fiche sur la racine carrée, il faut bien sûr présenter une méthode de calcul effectif d'une racine carrée, donnant autant de chiffres après la virgule que l'on souhaite. Ceci sera traité dans l'exercice 6. La méthode proposée est très proche de la très ancienne méthode, évoquée par le chinois Sun Tzu au IV$^{\text{è}}$ siècle, mais celle-ci est décrite au VI$^{\text{è}}$ siècle par l'indien Aryabhata. Cette méthode a été utilisée par les Arabes de l'époque médiévale, puis par les Occidentaux. Celle-ci a d'ailleurs été enseignée à l'école jusqu'au milieu du $XX^{\text{è}}$ siècle avant l'arrivée des calculatrices.

Enfin, pour le plaisir, dans les trois derniers exercices, nous établissons quelques belles formules faisant intervenir des racines carrées. En particulier dans l'exerice 10, nous montrerons la formule de Viète (1540-1603). La démonstration met encore en évidence le lien fort entre les nombres et la géométrie via un polygone régulier inscrit dans un cerle. Ainsi cette formule fait le lien entre π et des racines carrées.

Exercice 1 (Algorithme de Babylone, Première).
Nous ne sommes pas sûr de la méthode employée par les babyloniens pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ sur la tablette YBC 7289. Il semblerait, vu la précision obtenue, qu'ils aient utilisé la méthode géométrique suivante.
On dispose d'un rectangle $ABCD$ de longueur 2 et de largeur 1.
Nous allons déformer progressivement ce rectangle pour construire un carré de même aire.

1. Soit E un point du segment $[AB]$ et F l'intersection de (AD) avec la parallèle à (ED) passant par B. Montrer que $AE \times AF = AB \times AD = 2$.

 Creative Commons :

2. En déduire comment construire un rectangle dont la longueur est la moyenne de la longueur et de la largeur du premier rectangle et dont la largeur permet d'avoir la même aire que le premier rectangle. Faire cela uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

3. On répète plusieurs fois la construction géométrique précédente sur chaque nouveau rectangle. On appelle (u_n) la suite des longueurs des rectangles obtenus, ce qui signifie que u_n est la longueur du rectangle à l'issue de la n-ième transformation. On pose donc $u_0 = 2$ qui est la longueur du rectangle de départ et u_{n+1} est la longueur du rectangle obtenu par la construction géométrique précédente sur le rectangle de longueur u_n. Expliciter u_1, puis trouver une relation entre u_{n+1} et u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. Les rectangles successifs tendent vers quel type de figure ? Que conjecturez-vous donc sur la limite de la suite (u_n) ?

5. Généralisons la méthode précédente pour construire de façon approchée d'autres racines carrées. Nous disposons toujours d'une règle non graduée et d'un compas. On dispose d'un segment de longueur 1 et a. Comment adapter la méthode précédente pour construire $\sqrt{a}$ de manière approchée ? Dans ce cas, quelle relation a-t-on entre u_{n+1} et u_n pour tout n de $\mathbb{N}$ et que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?



Commentaires sur l'Exercice 1

La méthode précédente nous donne un algorithme pour calculer $\sqrt{2}$ à travers la suite (u_n). Les termes de cette suite nous donnent des valeurs qui s'approchent de plus en plus de $\sqrt{2}$. Nous allons montrer dans l'exercice 4 que cette suite converge bien vers $\sqrt{2}$ et même très rapidement conformément à ce que l'on a pu constater géométriquement dans ce premier exercice. Pour cette raison cet algorithme est encore utilisé par nos machines pour trouver des valeurs approchées de racines carrées. Cet algorithme est appelé algorithme de Babylone. On attache aussi cette formule à Héron d'Alexandrie, un grec du I^{er} siècle de notre ère, car il a consigné cette formule dans ses écrits, dans le problème 8 du tome I des Métriques.

Exercice 2 (Méthode de Newton, Première).

Nous allons faire apparaître la suite (u_n) de l'exercice précédent à l'aide d'une autre interprétation géométrique. Celle-ci intervient trente siècles plus tard. Il s'agit de la méthode de Newton (1643-1727). Voici en quoi elle consiste.
Soit $f : x \mapsto x^2 - 2$. Le but consiste à trouver x_0 dans $\mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) = 0$.
Nous allons approcher x_0 (que l'on ne connaît pas à priori) par la construction d'une suite de points sur l'axe des abscisses. On prend $u_0 = 2$. On note u_1 l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(u_0, f(u_0))$ et de

l'axe des abscisses. Ensuite on construit u_2 de la même façon mais en partant de u_1. On réitère le procédé pour construire pas à pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en construisant par ce procédé géométrique u_{n+1} en fonction de u_n.

1. Dans un repère orthonomré, effectuer les constructions décrites ci-dessous afin de placer u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses. La suite (u_n) semble converger vers quelle abscisse ?

2. Faire un dessin illustrant le lien entre u_{n+1} et u_n, puis montrer que l'on retrouve la suite de l'algorithme de Babylone de l'exercice précédent en donnant la relation qui lie u_{n+1} et u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. Le problème de l'algorithme de Babylone réside dans le fait qu'à chaque étape nous devons effectuer une division par u_n. Informatiquement ceci peut générer de grosses erreurs d'arrondis, car on effectue des divisions par des nombres arrondis. En appliquant cette fois-ci l'algorithme de Newton à $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{x^2}$, expliciter la relation entre u_{n+1} et u_n. On suppose que (u_n) converge vers une limite ℓ strictement positive. Que vaut ℓ et pourquoi cette valeur est intéressante ? Quel est l'intérêt d'avoir choisi cette fonction f plutôt que $x \mapsto x^2 - 2$?



Commentaires sur l'Exercice 2

Les premières traces de cet algorithme datent de 1669 dans l'ouvrage De analysi per aequationes numero terminorum infinitas de Newton. Cependant dans cet ouvrage, Newton n'applique pas le formalisme donné dans cet exercice. Il expose une méthode pour chercher les racines d'un polynôme (en particulier il résout de façon approchée l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$). Cependant sa méthode ne fait apparaître que des méthodes algébriques sans mentionner la notion de dérivée, qui n'existait pas encore. C'est pour cette raison que Newton s'est restreint aux équations polynomiales. C'est ensuite Simpson (1710-1761), qui généralisa cette méthode aux équations du type $f(x) = 0$, en utilisant les dérivées comme nous l'avons fait dans cet exercice. Pour que cette méthode soit efficace, il faut cependant quelques hypothèses sur la dérivée de f que l'on ne précisera pas ici.

Exercice 3 (Construction géométrique de racines carrées d'entiers, Première).

Nous avons construit geométriquement de façon approchée $\sqrt{n}$, avec n entier dans l'exercice 1. Nous allons donner ici une construction exacte, dont les outils sont : un segment de longueur 1, une règle non graduée et un compas.

1.a. Construire géométriquement la longueur $\sqrt{2}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

c. En déduire une construction géométrique de $\sqrt{n}$, avec n un nombre entier.

2. Maintenant nous allons construire $\sqrt{2}$ à l'aide uniquement d'un segment de longueur un et d'un compas.

a. Comment tracer un hexagone régulier $ABCDEF$ dans un cercle de rayon un ?

b. Calculer la longueur AC.

c. À partir de la figure de la question 2.a, comment construire les sommets un triangle rectangle ayant une hypothénuse valant $\sqrt{3}$ et un des côtés valant un ?

d. Comment conclure ?

3. Au passage, comment construire à la règle et au compas tout rationnel p/q, avec p, q dans $\mathbb{N}^*$? Voici quelques indications.

a. Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = p$ et $AC = q$.

b. Soit D le point de $[AC]$ tel que $AD = 1$. Tracer la parallèle à (CB) passant par D.

c. Où peut-on trouver sur la figure la longueur p/q ?



Commentaires sur l'Exercice 3

En 1837, Pierre Laurent Wantzel donne une caractérisation des nombres que l'on peut construire à la règle et au compas (nombres constructibles). Tous les nombres faisant intervenir les quatres opérations usuelles et des racines carrées avec des entiers sont constructible. Ainsi on peut montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible. Par conséquent, à l'aide d'une règle et d'un compas, on ne peut pas construire à partir d'un cube un autre cube ayant un volume double (il fautdrait multiplier les côtés par $\sqrt[3]{2}$).
Nous avons vu que l'on peut construire $\sqrt{2}$ à la règle et au compas, puis nous avons vu que l'on peut finalement construire ce nombre qu'avec le compas. Ceci s'inscrit dans un cadre plus général qui est le théorème de Mohr-Mascheroni. Il affirme que si une construction géométrique est possible à la règle et au compas, alors elle est possible au compas seul.

Exercice 4 (Convergence de l'algorithme de Babylone, Première).
Dans cet exercice nous allons prouver rigoureusement la conjecture émise dans l'exercice 1 au sujet de la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{2}$. Comme dans la fin de l'exercice 1, nous généraliserons cela pour avoir une suite construite suivant le même algorithme qui converge vers $\sqrt{a}$.
Ensuite nous allons étudier la vitesse de convergence de la suite (u_n) (le nombre de termes nécéssaires pour être suffisamment proche de la limite). Nous constaterons la très grande vitesse de convergence.

Pour cela, nous aurons besoin du résultat intuitif suivant que vous verrez en Terminale : « soit (u_n) une suite décroissante telle qu'il existe un réel m tel

que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$. Alors la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et de plus on a : $\ell \geq m$ ».

On rappelle la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$

1.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$ et $u_n \in \mathbb{Q}$ (les élèves de première pourront se contenter d'une preuve heuristique ou admettre ce résultat intuitif).

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 \geq 2$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ appartenant à $\mathbb{R}_+$ puis montrer que $\ell^2 = 2$.

d. Si on adapte la dernière question de l'exercice 1, la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$ converge vers quel nombre ? Faire la preuve de cela.

2. Dans cette dernière question, nous allons voir que l'algorithme de Babylone est excellent dans le sens où il faut calculer très peu de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir une très bonne approximation de $\sqrt{2}$.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$ (les élèves de première pourront se contenter d'une preuve heuristique).

c. On reprend la suite (u_n) mais en démarrant la suite avec $u_0 = 3/2$.

i) Est-ce que cela modifie les résultats des deux questions précédentes ?
ii) Pourquoi ce choix de u_0 est-il plus efficace pour approcher $\sqrt{2}$ par u_n ?
iii)[Terminale] Combien faut-il de termes pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-17} près ?



Commentaires sur l'Exercice 4

(i) Ceci confirme le fait que les babyloniens ont obtenu une très bonne approximation de $\sqrt{2}$ s'ils ont utilisé cet algorithme. Cependant ils n'avaient pas notre formalisme sur les suites pour avoir conscience de la puissance de leur méthode. En regardant le résultat de la dernière question, nous avons eu besoin de calculer très peu de termes pour avoir une très bonne approximation de $\sqrt{2}$.

(ii) Cet algorithme s'appelle aussi méthode de Héron (I^{er} siècle de notre ère), car c'est le premier à en faire mention dans un ouvrage, Les Métriques.

(iii) Pour calculer $\sqrt{p}$, avec p un entier, on est donc passé par une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et $\lim v_n = \sqrt{p}$. Ainsi $\sqrt{p}$ a pu être approché par une suite de nombres rationnels, car les v_n « s'approchent de plus en plus de $\sqrt{p}$ ».

 Creative Commons : BY NC SA

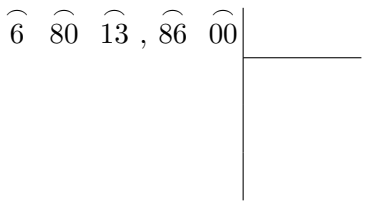
(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si nous voulons généraliser la suite précédente pour calculer $\sqrt[n]{p}$, il faut passer par la suite vérifiant la relation de récurrence :
$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)u_k + \frac{p}{u_k^{n-1}}\right]$ (il faut faire tendre k vers $+\infty$).

Exercice 5 (Quelques propriétés algébriques de la racine carré, Première S).
Dans cet exercice, nous allons d'abord donner une définition rigoureuse de la racine carrée à l'aide de notre formalisme moderne. Nous allons ensuite montrer les propriétés algébriques (les règles de calcul) connues de la racines carrées uniquement à partir de cette définition.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que l'on peut définir sans ambiguïté $\sqrt{a}$ comme l'unique solution positive de $x^2 = a$.

2. En déduire que pour a et b deux nombres réels positifs , on a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercice 6 (Calcul explicite de racines carrées, Première).
Nous allons donner une méthode pour calculer de façon explicite la racine carrée d'un nombre. Voici un exemple pour illustrer cette méthode. Déterminons $\sqrt{68013,86}$ avec deux chiffres après la virgule qui donne à chaque étape la bonne décimale (approximation par défaut).
La disposition ressemble à celle d'une division classique. Sur la partie gauche, vous disposez le nombre dont vous cherchez la racine carrée. À gauche de la virgule, vous faites des paquets de deux chiffres en allant de droite à gauche. À droite de la virgule, vous faites la même chose mais en allant de gauche à droite. Pour les chiffres à gauche de la virgule, vous constatez que 6 est tout seul, il sera donc tout seul dans son paquet. Par ailleurs comme nous voulons deux chiffres après la virgule, nous avons eu besoin de deux groupements de deux chiffres à droite de la virgule. Nous avons donc rajouté deux zéros après 86. Si nous avions eu besoin de 5 chiffres après la virgule, nous aurions rajouté 8 zéros après 86 pour avoir 5 groupes de deux chiffres.



Ensuite nous regardons le premier groupememt de chiffres en partant de la gauche. Ici c'est 6. Nous devons maintenant chercher le plus grand entier dont

le carré ne dépasse pas 6. Ici c'est 2, car on a $2^2 = 4 < 6$ et c'est le plus grand, car on a : $3^2 > 6$. Ainsi vous inscrivez 2 dans le secteur supérieur droit. C'est le premier chiffre de votre résultat final.
Ensuite vous retranchez 2^2 de la tranche de départ qui est ici 6. Inscrivez $2^2 = 4$ juste sous la première tranche et faites la soustraction. Inscrivez les résultats en dessous.

$$\begin{array}{rr|l} 6 & 80\ 13\,,\,86\ 00 & 2 \\ \cline{1-1} \cline{3-3} -4 & (= 2^2) & \\ \cline{1-1} 2 & & \end{array}$$

Abaissez ensuite la deuxième paire de chiffres à côté du résultat de la soustraction précédente. Ici vous abaissez 80.
Après cela, prendre le nombre qui se trouve sur la partie supérieure droite ici 2. Multipliez le par deux. Vous obtenez ici 4, puis écrivez 4 . × . sur la partie inférieure droite.

$$\begin{array}{rr|l} 6 & 80\ 13\,,\,86\ 00 & 2 \\ \cline{3-3} -4 & & 4\,.\times.\,= \\ \cline{1-1} 2 & 80 & \end{array}$$

Les deux « trous » de 4 . × . doivent être remplis avec le même chiffre entre 0 et 9. La multiplication devra donner un résultat inférieur ou égal au nombre qui se trouve à gauche, ici 280. Par ailleurs, il faudra trouver le chiffre le plus grand vérifiant cela. Ici on a $46 \times 6 = 276 < 280$, mais $47 \times 7 = 329 > 280$. Ainsi le deuxième chiffre de votre résultat final est 6 et inscrivez le à côté de 2 dans la partie supérieure droite. Enfin vous retranchez $46 \times 6 = 276$ au nombre 280 qui se trouve à gauche et vous trouvez 4.

 Creative Commons :

$$\begin{array}{rrrrrrr|c} 6 & 80 & 13 & , & 86 & 00 & 26 \\ \cline{8-8} -4 & & & & & & 46 \times 6 = 276 \\ \cline{1-1} 2 & 80 & & & & & \\ -2 & 76 & & & & & \\ \cline{1-2} & 4 & & & & & \end{array}$$

Vous abaissez ensuite à gauche les deux chiffres du groupement suivant à savoir 13 à côté du résultat de la dernière soustraction effectuée qui est 4. Ainsi sur la partie de gauche vous obtenez 413.
Après ceci prendre le nombre qui se trouve sur la partie supérieure droite ici 26. Multipliez le par deux. Vous obtenez ici 52, puis écrivez 52 . × . sur la partie inférieure droite.

$$\begin{array}{rrrrrrr|c} 6 & 80 & 13 & , & 86 & 00 & 26 \\ \cline{8-8} -4 & & & & & & 46 \times 6 = 276 \\ \cline{1-1} 2 & 80 & & & & & 52 \,.\times.\, = \\ -2 & 76 & & & & & \\ \cline{1-2} & 4 & 13 & & & & \end{array}$$

Les deux « trous » de 52 . × . doivent être remplis avec le même chiffre entre 0 et 9. La multiplication devra donner un résultat inférieur ou égal au nombre qui se trouve à gauche, ici 413. Par ailleurs, il faudra trouver le chiffre le plus grand vérifiant cela. Ici vous n'avez pas le choix, il faut mettre 0 dans les deux trous car $521 \times 1 = 521 > 413$. Ainsi le troisième chiffre de votre résultat final est 0, et inscrivez le à côté de 26 dans la partie supérieure droite. Enfin vous retranchez $520 \times 0 = 0$ au nombre 413 qui se trouve à gauche et vous trouvez 413.
Vous poursuivez ce processus jusqu'à arriver à la virgule.

	6	80	13	,	86	00	260
-4							$46 \times 6 = 276$
	2	80					$520 \times 0 = 0$
-2	76						
		4	13				
		$-$	0				
		4	13				

Ensuite nous allons commencer à chercher les chiffres à droite de la virgule. Nous procédons exactement comme avant, nous abaissons le groupement des deux chiffres suivants : 86 à côté du résultat de la dernière soustraction effectuée (sans tenir compte de la virgule). Nous avons donc 41386. De même on multiplie par deux le nombre de la partie supérieure droite, ce qui donne 520 et on dispose l'opération suivante 520 . × . (on ne tient pas compte de la virgule).

	6	80	13	,	86	00	260,
-4							$46 \times 6 = 276$
	2	80					$520 \times 0 = 0$
-2	76						520 . × . =
		4	13				
		$-$	0				
		4	13		86		

Là encore, on veut remplir les deux trous par un même chiffre ne devant pas dépasser 41386 et devant être le plus grand possible. Ici 7 est le chiffre convenable. On inscrit ce résultat sur la partie supérieure droite et c'est le premier chiffre après la virgule de notre racine carrée.
Ensuite on retranche à 41386 le résultat de 5207×7.

 Creative Commons :

6	80	13	,	86	00	$260,7$
-4						$46 \times 6 = 276$
2	80					$520 \times 0 = 0$
-2	76					$5207 \times 7 = 36449$
	4	13				
	$-$	0				
	4	13		86		
	-3	64		49		
		49		37		

Au résultat de la soustraction précédente, on abaisse les deux chiffres suivants (toujours sans tenir compte de la virgule). On obtient 493700. Maintenant nous prenons la partie supérieure droite $260,7$ et on travaille comme s'il n'y avait pas de virgules. On prend donc 2607 et on multiplie ce nombre par 2, ce qui donne 5214 et on dispose le calcul suivant $5214\ .\times .$ dans la partie inférieure droite.

6	80	13	,	86	00	$260,7$
-4						$46 \times 6 = 276$
2	80					$520 \times 0 = 0$
-2	76					$5207 \times 7 = 36449$
	4	13				$5214\ .\times .=$
	$-$	0				
	4	13		86		
	-3	64		49		
		49		37	00	

Là encore on cherche le chiffre le plus grand à mettre dans les deux trous pour que le résultat de $5214\ .\times .$ ne dépasse pas 493700. On trouve ici 9, que l'on place ensuite dans la partie supérieure droite et on trouve $260,79$ qui est notre résultat.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
6 & 80 & 13 & , 86 & 00 & & 260,79 \\
\cline{1-1}\cline{6-6}
-4 & & & & & & 46 \times 6 = 276 \\
\cline{1-1}
2 & 80 & & & & & 520 \times 0 = 0 \\
-2 & 76 & & & & & 5207 \times 7 = 36449 \\
\cline{1-2}
 & 4 & 13 & & & & 52149 \times 9 = 469341 \\
 & - & 0 & & & & \\
\cline{2-3}
 & 4 & 13 & 86 & & & \\
 & -3 & 64 & 49 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 49 & 37 & 00 & & \\
 & & -46 & 93 & 41 & & \\
\cline{3-5}
 & & 2 & 43 & 59 & & \\
\end{array}
$$

Pour la partie gauche et la partie inférieure droite, bien retenir que la virgule n'intervient jamais, on effectue toujours le même algorithme d'abaissement de deux chiffres puis de multiplication par deux du résultat de la partie supérieure droite (sans la virgule). La virgule intervient à la toute fin à la lecture du résultat.

Maintenant à vous de jouer avec $\sqrt{3704}$ où vous donnerez deux chiffres après la virgule.



Commentaires sur l'Exercice 6

(i) Cette méthode nous donne le chiffre exact à chaque étape, mais en terme de calcul elle est moins efficace que l'algorithme de Babylone. La première trace écrite d'une méthode très semblable date du VI^{e} siècle de notre ère, elle est décrite par l'indien Aryabhata au travers de la phrase suivante plutôt elliptique : « divise toujours le rang pair par deux fois la racine carrée. Puis, après avoir soustrait le carré du rang pair, pose le quotient à la prochaine place. Cela te donnera la racine carrée ».

(ii) Nous savons donc calculer toutes les décimales de $\sqrt{2}$ par exemple. Cependant à l'heure actuelle, nous ne savons pas grand chose sur la répartitions des décimales de $\sqrt{2}$. Cette question de la répartition des décimales nous amène à la définition des nombres normaux. Un tel nombre possède une écriture décimale telle que toute séquence finie de chiffre apparaît avec la même fréquence que n'importe quelle autre séquence de même taille. Autrement dit pour un nombre normal, dans son écriture décimale, il y aura autant de 1, de 2, de 3,... (en fait la proportion de chaque chiffre sera de 1/10), tout comme les séquences 27537, 93845 ou 77777 qui figureront dans des

proportions identiques parmi les séquences de 5 chiffres (chacune des séquences apparaît avec une proportion 1/100000). À l'heure actuelle, nous ne savons pas si $\sqrt{2}$ est un nombre normal. Nous ne savons même pas si le chiffre 7 apparaît une infinité de fois dans l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Il est extrêmement difficile de savoir si un nombre est normal. Voici un exemple de nombre normal cependant, qui est le nombre de Champernowne : $0,1234567891011121314151617181920212223242526272829303 1...$, où l'on met côte à côte tous les entiers naturels. Malgré le fait que l'on connaisse très peu de nombres normaux, Émile Borel a montré en 1909 que si l'on tire un nombre réel au hasard, il sera normal avec une probabilité 1.

Exercice 7 (Irrationalité de $\sqrt{2}$ par l'arithmétique, Première).
Nous allons raisonner par l'absurde. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec de plus $\frac{a}{b}$ qui est une fraction irréductible (a et b n'ont pas de diviseurs communs).

1. Soit $u \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si u est pair, alors u^2 l'est aussi.

2. Soit $u \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si u est impair, alors u^2 l'est aussi.

3. Montrer que a est pair, puis b aussi.

4. Conclure.



Commentaires sur l'Exercice 7

(i) Quasiment toutes les preuves sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ utilisent un raisonnement par l'absurde.

(ii) Le plus ancien document qui nous soit parvenu concernant la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ se trouve dans un ouvrage d'Alexandre D'Aphrodise au III$^{\text{è}}$ siècle de notre ère seulement (bien après Euclide !), dans les commentaires des Premiers Analytiques d'Aristote. Dans un ajout très postérieur à Euclide lui-même, on retrouve dans le livre X des Éléments une preuve assez proche de celle d'Alexandre D'Aphrodise. Cette preuve utilise des arguments géométriques et de parité d' entiers, assez proches de la preuve de cet exercice. Elle est cependant particulièrement tortueuse.

(iii) Il est possible que les pythogoriciens ayant découvert l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aient utilisé la preuve suivante. En reprenant les notations de l'exercice, soient j et k les plus grandes puissances de 2 dans a et b. Ainsi $a = 2^j r$ et $b = 2^k s$, avec r et s des nombres impairs. On a donc $p^2 = 2q^2$, puis $2^{2j} r^2 = 2^{2k+1} s^2$. Comme s et r sont impairs, alors $2j = 2k + 1$, ce qui est impossible car un nombre ne peut pas être pair et impair à la fois. Ici nul besoin de supposer a/b irreductible. Lorsqu'Aristote évoque l'irrationalité de $\sqrt{2}$, il mentionne laconiquement « supposer la diagonale commensurable revient à confondre les nombres pairs et impairs ». Cette phrase montre qu'il avait peut-être en tête la preuve que l'on vient de mentionner ou bien celle de notre exercice.

(iv) Pour montrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel si n n'est pas une carré d'entier (il n'existe pas d'entier naturel k tel que $n = k^2$), nous avons besoin de notions du programme de spécialité mathématique. Le début de la preuve est identique, on suppose qu'il existe deux

entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, où la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Ainsi on a $a^2 = nb^2$. La décomposition en facteurs premiers de a s'écrit $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$ et celle de b est $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r}$, avec $p_1, ..., p_r$ la liste des r premiers nombres premiers avec $p_1 = 2,\ p_2 = 3, p_3 = 5, ...$ où p_r désigne le plus grand nombre premier figurant dans la décomposition en facteurs premiers de a et b et $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_r$ sont des entiers naturels. On a donc $a^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_r^{2\alpha_r} = n p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} ... p_r^{2\beta_r}$. Par unicité de la décomposition en facteur premier de a^2, les p_i interviennent au moins $2\beta_i$ fois dans la décomposition en facteurs premiers de a^2, donc on a $2\beta_i \leq 2\alpha_i$, soit $\beta_i \leq \alpha_i$. De plus $n = p_1^{2\alpha_1 - 2\beta_1} p_2^{2\alpha_2 - 2\beta_2} ... p_r^{2\alpha_r - 2\beta_r} = \left(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} p_2^{\alpha_2 - \beta_2} ... p_r^{\alpha_r - \beta_r}\right)^2$, donc n est le carré d'un entier naturel, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ.

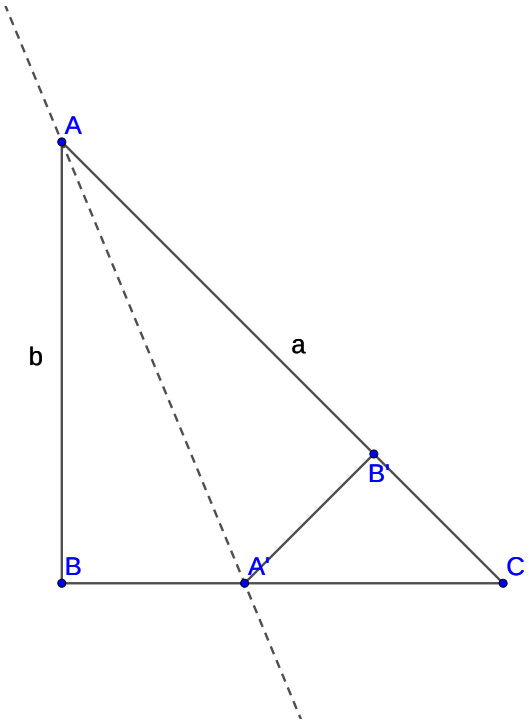
(v) La simplicité de la démonstration de notre exercice fait de $\sqrt{2}$ le plus simples des nombres irrationnels. Les nombres $\sqrt{n}$ sont aussi assez simples. Par contre il faut un raisonnement plus élaboré pour montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. En général il est difficile de montrer qu'un nombre est irrationnel. Par exemple il n'est vraiment pas aisé de montrer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, à tel point que David Hilbert avait affirmé en 1920 lors d'une conférence qu'aucun de ses auditeurs ne vivrait assez vieux pour en voir une démonstration. Cependant Siegel en apporta une preuve du vivant de Hilbert.

Exercice 8 (Irrationalité de $\sqrt{2}$ par la géométrie, Première).
On suppose qu'il existe a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec de plus b choisi le plus petit possible (ce qui est licite car en prenant des entiers naturels de plus en plus petits à un moment on ne pourra pas être plus petit que 1).

1. Montrer que le plus petit triangle rectangle isocèle ayant des longueurs entières a un côté adjacent à l'angle droit valant b.
Soit ABC le triangle rectangle isocèle en B tel que $AB = b$ et $AC = a$.

2. Tracer la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Cette bissectrice coupe (BC) en A'. Tracer le symétrique de B par rapport à l'axe (AA'), que l'on appelera B'.

 Creative Commons :



3. Montrer géométriquement que $a < 2b$.

4. Montrer par des arguments géométriques que les triangles ABC et $A'B'C$ sont semblables (ont les même angles) et que les longueurs du triangle de $A'B'C$ sont des nombres entiers que l'on exprimera.

5. Conclure par des arguments géométriques.

6. Montrer par deux méthodes (une par le calcul et l'autre par des arguments géométriques) que $\sqrt{2} = \frac{2b-a}{a-b}$ et conclure sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Commentaires sur l'Exercice 8

(i) Nous avons vu dans cet exercice qu'en partant d'un triangle rectangle isocèle ABC ayant des côtés de longueurs entières, on a réussi à construire géométriquement un triangle rectangle isocèle $A'B'C$ plus petit ayant lui aussi des côtés de longueurs entières. Si $\sqrt{2}$ avait été rationnel, on aurait pu construire une infinité de triangles rectangles isocèles de plus en plus petit tout en ayant des côtés entiers. Ceci est bien sûr impossible, car on ne peut pas avoir une suite infinie de nombres entiers strictement décroissants, car à un moment ces nombres seront strictement inférieurs à 1.

Ce type de raisonnement, qui consiste à construire des figures de plus en plus petites par soustractions simultanées, est appelé anthyphérèse. Il a été nommé ainsi par Euclide dans le livre 7 de ses Éléments, car *huphaierô* signifie en grec « retrancher graduellement » et *anti* peut aussi signifier prendre des choses qui se font face ou

 Creative Commons :

se correspondent. Euclide a utilisé cette techniques sur les nombres dans le livre VII afin de chercher le plus grand diviseur commun entre deux entiers, d'ailleurs on appelle cet algorithme l'algorithme d'Euclide qui est encore enseigné aujourd'hui. Dans le livre X, il l'a utilisé pour construire des triangles rectangles de plus en plus petits aux même proportions et dont les côtés sont de longeurs entières. Cependant on ignore si Euclide a utlisé cette méthode pour montrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. De façon assez surpenante, il ne l'a mentionné dans aucune preuve d'irrationalité, alors qu'il connaissait le raisonnement anthyphérétique.

(ii) Nous avons obtenus dans les deux dernières questions la relation $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$ par une méthode géométrique et une méthode calculatoire. On peut ainsi appliquer l'idée de anthyphérèse sur des objets géométriques ou sur du calcul. Pour l'aspect calcul, l'idée est de pouvoir écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction avec des dénominateurs de plus en plus petits.

(iii) On vient de voir qu'une suite convergente d'éléments de $\mathbb{Q}$ peut avoir une limite qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. En effet la suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Ainsi on peut dire qu'il manque des éléments dans $\mathbb{Q}$, soit $\mathbb{Q}$ n'est pas « complet ». L'ensemble des limites de suites convergentes de $\mathbb{Q}$ (pour dépasser très largement le programme du lycée, on parle de suite de Cauchy) permet de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{R}$ est un ensemble qui complète $\mathbb{Q}$. Ceci peut être pris comme base pour la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Exercice 9 (Fractions continues, Première).
Pour prolonger l'idée d'approximation de racines carrées par des nombres rationnels des exercices 1 et 4, nous allons écrire certains nombres réels (même irrationnels) comme des fractions imbriquées infinies que l'on appelle fractions continues.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs. On appelle fraction continue (sous réserve d'existence ou de convergence) un nombre de la forme $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\dots}}}}$. Précisons le sens de ... et l'existence de $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\dots}}}}$.
On a le droit d'écrire cette dernière quantité, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\dots+\frac{1}{a_n}}}}}$ existe et dans ce cas, on note $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\dots}}}}$ cette limite.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice nous allons seulement chercher à écrire $\sqrt{a^2+1}$ sous la forme d'une fraction continue $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\dots}}}}$ où tous les a_i sont des entiers naturels non nuls.

1.a. Montrer que : $\sqrt{a^2+1} = a + \frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}$.

b. En déduire, sans se soucier de l'existence, une décomposition en fraction continue de $\sqrt{a^2+1}$, puis de $\sqrt{2}$.

c. Montrer que $\sqrt{a^2+2}-a = \frac{1}{a+\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}}$. En déduire une décomposition $\sqrt{a^2+2}$ en fraction continue (sans se soucier de l'existence), puis de $\sqrt{6}$.

2. Sans se soucier du problème d'existence des fractions continues, quels sont les nombres suivants : $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ et $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}$?

3. Dans la première question, avons décomposé les nombres précédents en fractions continues sans nous soucier de l'existence de ces dernières. Nous allons prouver l'existence de celles-ci dans cette question. Nous ne traiterons que la décomposition en fraction continue de $\sqrt{a^2+1}$. Nous admettrons que si $p/q = r/s$ et si ces deux fractions sont irréductibles, alors $p = r$ et $q = s$ (ce qui est l'unicité de la décomposition d'une fraction sous forme irréductible. Ceux qui suivront le cours de mathématiques expertes en Terminale auront des arguments pour le prouver). On pose $r_1 = a+\sqrt{a^2+1}$ et $r_2 = a-\sqrt{a^2+1}$.

a. Montrer que r_1 et r_2 sont les solutions d'une équation du second degré à préciser.

b. Soit une suite (w_n) définie par $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $w_{n+1} = 2aw_n + w_{n-1}$.

c. Chercher α et β pour avoir $w_0 = a$ et $w_1 = 2a^2+1$. Même question avec $w_0 = 1$ et $w_1 = 2a$.

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on pose } u_n = \frac{r_1^{n+1}+r_2^{n+1}}{2} \text{ et } v_n = \frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{2\sqrt{a^2+1}}.$$

d. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = 2au_n + u_{n-1}$ et $v_{n+1} = 2av_n + v_{n-1}$.

e. Déduire des deux questions précédentes que pour tout n dans $\mathbb{N}$, les nombres u_n et v_n sont des entiers naturels (les élèves de première pourront se contenter d'arguments intuitifs). Étonnant, non ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose p_n/q_n, avec p_n et q_n dans $\mathbb{N}^*$, la fraction irréductible correspondant à $a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ où dans le deuxième terme de la somme on a n fractions imbriquées. On pose $p_0 = a$ et $q_0 = 1$ et donc $p_0/q_0 = a$. Notre but est de montrer que la suite (p_n/q_n) converge vers $\sqrt{a^2+1}$.

a. Calculer p_1 et q_1.

 Creative Commons :

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(a^2+1)q_n + ap_n}{p_n + aq_n}$, puis que cette dernière fraction est irréductible.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $p_{n+1} = 2ap_n + p_{n-1}$ et $q_{n+1} = 2aq_n + q_{n-1}$.

d. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = u_n \quad \text{et} \quad q_n = v_n$ (les élèves de première pourront se contenter d'arguments intuitifs).
Ceci nous permet d'ailleurs de montrer d'une autre manière que u_n et v_n sont des entiers naturels.

e. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{1+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}\right)$.

f. On rappelle que si un réel q vérifie $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n/q_n) = \sqrt{a^2+1}$.



Commentaires sur l'Exercice 9

(i) Les fraction continues apparurent à l'époque de Rafael Bombelli au XVI$^{\text{è}}$ siècle. Ce dernier donna la première méthode systématique de développement en fraction continue de racines carrées d'entiers (nombres de la forme $\sqrt{b}$ avec b un entier naturel) et même des nombres quadratiques (nombres de la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, avec a, b, c des entiers naturels).

(ii) Les fractions continues permettent aussi d'approcher par des rationnels des nombres de la forme $\sqrt{p}$, avec p entier. On a vu en effet dans notre cas particulier que (p_n/q_n) converge vers $\sqrt{a^2+1}$. On peut s'interroger sur la vitesse de convergence afin de savoir si nous avons besoin de calculer beaucoup de termes p_n et q_n grâce aux formules de récurrence afin d'approcher $\sqrt{a^2+1}$ par p_n/q_n. On a grâce à une inégalité de Dirichlet : $\left|\sqrt{a^2+1} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ et donc on peut dire qu'il existe un réel K tel que $\left|\sqrt{a^2+1} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{K}{(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n}}$. Pour $\sqrt{2}$, ceci est moins rapide que pour l'algorithme de Babylone. D'ailleurs en 1847, Joseph-Alfred Serret a démontré que la fraction obtenue au bout de n itérations de l'algorithme de Babylone, est p_{2n}/q_{2n}. Ainsi pour arriver à la même approximation que par l'algorithme de Babylone, il faut faire le double d'itérations par la méthode des fractions continues.

(iii) On dit qu'une fraction continue est simple si tous les a_i sont des entiers. Ce sont ces fractions continues qui nous intéressent. Tout nombre peut s'écrire comme une fraction continue simple. Par exemple, on a : $e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\dots}}}}}}}}$. Voici un autre exemple : $\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}$, mais nous ne connaissons pas tous les quotients de cette fraction continue.

(iv) On peut démontrer qu'un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue s'arrête.
Par ailleurs si x est un nombre irrationnel les coefficients de la fraction continue x, sont

périodiques à partir d'un certain rang (il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq p,\ a_{n+K} = a_n$ avec p un entier) si et seulement si x est un nombre quadratique (voir des exemples dans la question 2). Ainsi les fractions continues qui décomposent des nombres $\sqrt{n}$ avec n entier ont des coefficients périodiques à partir d'un certain rang.

(v) Nous pouvons aussi avoir des fractions continues ascendantes. Par exemple nous avons $\sqrt{2} = 1+\frac{1-\frac{1+\frac{1+\frac{1+\dots}{1331714}}{1154}}{34}}{\frac{6}{2}}$. Nous voyons cependant que les nombres qui interviennent dans cette fraction ne présentent pas de régularité comme pour les fractions continues descendantes.

(vi) Concrètement, pour calculer informatiquement p_n et q_n, on ne fait pas intervenir la formule avec r_1 et r_2 à cause de la présence de $\sqrt{1+a^2}$ que l'on devra approcher. Cependant on a un algorithme pour calculer pas à pas ces nombres grâce aux formules de récurrence : $p_{n+1} = ap_n + p_{n-1}$ et $q_{n+1} = aq_n + q_{n-1}$.

(vii) Les fractions continues pour les nombres quadratiques est simple, cependant les choses deviennent plus difficile pour les autres nombres. Par exemple il n'y a rien qui puisse décrire les quotiens de la fraction continue de $\sqrt[3]{2}$. Il y a aussi une autre difficulté, nous ne savons pas additionner des fractions continues. Nous avons eu facilement les développements en fraction continue de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, mais nous ne savons presque rien sur ce développement pour $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

(viii) En reprenant les notations de l'exercice 8, nous avons $AC = \sqrt{2}AB$ grâce au théorème de Pythagore, puis $\sqrt{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{AB'+B'C}{BC} = 1 + \frac{B'C}{BC}$, car nous avons $AB' = BC$. Ensuite $BC = BA' + A'C$ et $BA' = A'B' = B'C$. On a donc : $\frac{B'C}{BC} = \frac{1}{\frac{BC}{B'C}} = \frac{1}{\frac{BA'+A'C}{B'C}} = \frac{1}{1+\frac{A'C}{B'C}}$. Or $A'C/B'C = \sqrt{2}$ toujours grâce au théorème de Pythagore et donc $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. En répétant la construction géométrique qui permet de passer d'un triangle rectangle isocèle à un autre triangle rectangle isocèle plus petit, on construit un triangle rectangle isocèle $A''B''C$ plus petit que $A'B'C$ pour obtenir de même $\frac{A'C}{A'B} = 1 + \frac{1}{1+\frac{A''C}{B''C}}$ que l'on injecte dans $\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{1+\frac{A'C}{B'C}}$, ce qui donne : $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$ et on peut continuer ainsi à l'infini. La méthode d'anthyphérèse nous permet d'obtenir une fraction continue de $\sqrt{2}$. En continuant indéfiniment ce procédé, nous allons avoir une fraction continue qui converge, car les mesures des triangles rectangles construits va tendre vers 0.
Il semblerait que la première démonstration d'irrationalité à l'aide d'une méthode géométrique faisant intervenir l'anthyphérèse provienne de l'école pythagoricienne. Il auraient montré l'irrationalité du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en utilisant un pentagone régulier et en étudiant le rapport entre une diagonale et le côté de cette figure. D'ailleurs le pentagone étoilé était le symbole de ralliement de cette école.

Cependant le raisonnement géométrique utilisant l'anthyphérèse pour décomposer des nombres en fraction continue fonctionne bien pour $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$, avec l'aide respectivement d'un carré, un triangle équilatéral et un pentagone régulier. Dans les autres cas, les rapporchements géométriques sont moins évidents, donc il faut utiliser des méthodes algébriques comme dans l'exercice ci-dessus pour $\sqrt{1+a^2}$.

 Creative Commons :

Exercice 10 (Formule de Viète et produits infinis, Première, sauf la question 6. pour la Terminale).
On considère le cerle trigonométrique $(\mathcal{C})$. On note A_n l'aire du polygone régulier à n côtés dont $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit (avec $n \geq 3$). Dans la première question, nous établissons une formule de trigonométrie qui sera utile pour la suite.

1. Soit RST le triangle isocèle en S tel que $SR = ST = 1$, et tel que l'angle $\widehat{RST}$ ait pour mesure a, avec a dans $[0, \pi/2[$. En calculant de deux manières différentes l'aire du triangle RST, montrer que : $\sin(a) = 2\sin(a/2)\cos(a/2)$. En déduire que $\cos(a) = 2\cos^2(a/2) - 1$.

2. Montrer que $A_n = n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3. Montrer que $\frac{A_n}{A_{2n}} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = \frac{A_4}{A_8} \times \frac{A_8}{A_{16}} \times ... \times \frac{A_{2^n}}{A_{2^{n+1}}}$. Montrer qu'en calculant P_n de deux manières différentes, on a :
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \times ... \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{2}{2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

5.a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_n}$.

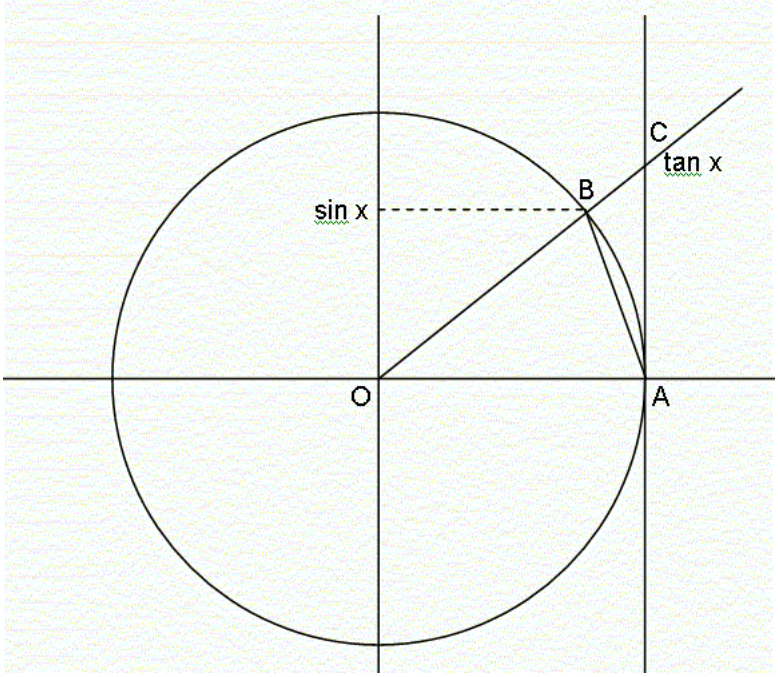
b. En déduire que $\frac{2}{A_{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$ avec n facteurs.

c. Par un argument géométrique, en déduire que :
$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$, avec un nombre infini de facteurs.

6. Dans la question précédente, la conclusion était peu rigoureuse, car nous n'avons pas montré précisément que $A_n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ tendait vers π quand n tend vers $+\infty$. Nous allons préciser ce point dans cette question.
6.a. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$?

b. On considère la figure suivante avec x dans $]0, \pi/2[$ qui est la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$:

 Creative Commons :



Montrer que l'on a bien $AC = \tan(x)$.

c. En comparant des aires sur cette figure, montrer que : $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$.

d. En déduire que $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

e. En déduire que la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ vaut 1 quand x tend vers 0 en étant positif.

f. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \pi$.

Commentaires sur l'Exercice 10

La méthode d'approximation de π via des polygones inscrits dans un cercle a été posée par Archimède en 250 avant J-C. Ceci lui a permis d'avoir l'encadrement $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, en utilisant un polygone à 96 côtés, mais il obtenait ces encadrements à l'aide de polygones incsrits et exinscrits. Les recherches de Viète (1540-1603) en trigonométrie l'ont amené à calculer neuf décimales de π à l'aide de la formule établie dans cet exercice.

De plus, Viète énonce ainsi le premier produit infini connu valant π. Malheureusement, il ne se soucie pas de l'existence (ou la convergence) effective de son produit. Celle-ci ne sera prouvée qu'au XIXème siècle en 1892 par Rudio. Viète utilise des considérations géométriques pour obtenir son résultat.

Cette formule montre le lien entre des racines carrées et le nombre π. D'ailleurs la plupart des récents records sur les décimales de π ont été obtenus grâce à l'obtention de décimales de $\sqrt{2}$. C'est ainsi que Kanada et Takahashi ont obtenu un nombre reccord de déciamles de π en 1999 avec 206 milliards de décimales. Pour faire le lien avec l'algorithme de Newton, en 1997, Kanada et Takahashi ont calculé de 137 milliards de décimales de $\sqrt{2}$ à l'aide d'une machine très puissante qu'ils ont fait fonctionner pendant 7 heures et 31 minutes. Pour obtenir ce résultat ils n'ont eu besoin que d'itérer que 34 fois l'algorithme de Newton ou de Babylone,

 Creative Commons :

ce qui montre la véritable puissance de cet algorithme.

Exercice 11 (Racines carrées imbriquées, Terminale).
Soit $a \in [1, +\infty[$.
Soit $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{a+u_n}$.

1. Montrer qu'il existe un unique x_0 (que l'on précisera) positif tel que : $f(x_0) = x_0$.

2. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ |f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a+y}}$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{|u_n - x_0|}{\sqrt{a+x_0}}$.

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x_0| \leq \frac{x_0}{\sqrt{(a+x_0)^n}}$.

5. Montrer que : $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+....}}}}$. Que reconnaissez-vous si $a = 1$?

6. Quels sont les entier naturels n au moins égaux à 2 tels qu'il existe a dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...}}}}$?



Commentaires sur l'Exercice 11

(i) Si nous poursuivons plus loin la notion de racines impriquées, nous pouvons énoncer quelques belles formules comme $\pi = \lim_{k\to+\infty} 2^k\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$, avec k radicaux imbriqués. Ce type de racines imbiquées ont été étudiées par Srinivasa Ramanujan (1887-1920) et il a établi de nombreuses formules spéctaculaires comme celle-ci, ou par exemple celle-là établie en 1911 : $x+2 = \sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+....}}}}$

(ii) Pour faire le lien avec l'exercice précédent, comme nous avons la formule $\cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2) - 1$, pour α dans $[0, \pi/2]$, alors on a : $2\cos(\alpha/2) = \sqrt{2+2\cos(\alpha)}$ et donc en répétant plusieurs fois cette opération, on trouve :
$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$, avec n racines imbriquées.

(iii) Ramanujan a aussi établi : $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$, $\sqrt{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{98}-\sqrt[3]{28}-1}{3}$
$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.
Une question se pose donc, est-il possible de simplifier des racines imbriquées ? Susan Landau a mis au point en 1989 un algorithme permettant de savoir s'il est possible de simplifier des racines imbriquées. Cela permet dans les calculs en informatique

 Creative Commons :

d'opérer des simplifications de formules (branche de l'informatique qui s'appelle le calcul symbolique).

Exercice 12 ($\sqrt{2}$ en écriture sous forme de série, Terminale).
Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ème de f, c'est-à-dire que l'on dérive f n fois. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note $k! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Montrer que $f^{(n)}$ existe et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1\times3\times...\times(2n-3)}{2^n} \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)^{n-1}}$.

2. Soient g et h deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$, dérivables sur cet intervalle et dont les dérivées sont aussi continues sur cet intervalle. Montrer que : $\int_a^b g'(t)h(t)dt = g(b)h(b) - g(a)h(a) - \int_a^b g(t)h'(t)dt$.

3. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

4. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times4} + \frac{1\times3}{2\times4\times6} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1\times3\times...\times(2(n-1)-1)}{2\times4\times...\times(2n)} + (-1)^n \frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times2n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt$.

5. On note $R_n = \frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{4(n+1)}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n$.

6. En déduire que :
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times4} + \frac{1\times3}{2\times4\times6} + ... + (-1)^{(n-1)} \frac{1\times3\times...\times(2(n-1)-1)}{2\times4\times...\times(2n)} + ... =$
$1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1\times3\times...\times(2k-3)}{2\times4\times...\times(2k)}$.



Commentaires sur l'Exercice 12

(i) En utilisant le même type de raisonnement avec $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, et en regardant $f(1/2)$, on aurait obtenu $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(k!)^2 2^{3k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{64} + \frac{35}{256} + \frac{315}{4096} + \frac{693}{16384} + \cdots$.

(ii) Newton a montré la formule suivante du binôme :
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 ... + \frac{n(n-1)(n-2)...1}{(n-1)!}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Si on prend $a = 1$, on trouve : $(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1!}b + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 ... + \frac{n(n-1)(n-2)...1}{(n-1)!}b^{n-1} + b^n$.
Il est possible de généraliser cette formule pour des exposants fractionnaires. Elle a été énoncée sans démonstration par Newton dans ses Principia Mathematica en 1687, puis prouvée par Euler en 1773. Par exemple pour $n = 1/2$ et $|b| < 1$, on retrouve la racine carrée : $\sqrt{1+b} = (1+b)^{1/2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}b + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}b^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}b^3 ... + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}b^k + ...$, la somme étant infinie et ne s'arrêtant pas. Dans le cas de l'exercice précédent, on a réussi à prolonger cette formule pour $b = 1$.

(iii) Et pour finir cette fiche en beauté, une dernière formule de Ramanujan faisant intervenir des sommes infinies : $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-7\pi n^2}}{\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\pi m^2}} = \sqrt[8]{28} \frac{\sqrt{13+\sqrt{7}}+\sqrt{13+3\sqrt{7}}}{14}$.

 Creative Commons : BY: $ ↻

Indications



Indications sur l'Exercice 1

1. Utiliser le théorème de Thalès dans le triangle ABF.

2. Construire le rectangle comportant A, E et F dans la liste de ses sommets. Commencer par construire E qui est la médiatrice de $[AS]$, avec S sur (AB) tel que $BS = BC$. Ensuite placer F, en suivant les indications de la question précédente, et enfin construire le sommet manquant.

3. La première question permet de voir que tous les rectangles ont la même aire qui vaut 2. Si u_n est la longueur du n-ème rectangle, cela nous permet d'avoir la largeur de celui-ci.

4. Construire les trois premiers rectangles.

5. Les aires de chaque rectangle valent a grâce à la première question. Ici encore, prendre pour u_n la longueur du n-ème rectangle.



Indications sur l'Exercice 2

2. Montrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnée $(u_n, f(u_n))$ est $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$, puis résoudre l'équation $0 = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$.

3. Reprendre l'indication de la question précédente, mais cette fois-ci avec $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{x^2}$, puis constater que $u_{n+1} = 3u_n/2 - u_n^3$. Enfin passer à la limite dans cette dernière relation pour trouver une équation vérifiée par ℓ. Quelle est la limite de $(2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.



Indications sur l'Exercice 3

1.a. Construire un carré de côté un à l'aide de la règle, le compas et le segment de longueur un fournis. Ensuite, calculer la longueur de la diagonale.

1.c. Construire un triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = (n-1)/2$ et $BC = (n+1)/2$. Que vaut AC ?

2.b. Soit U la projection orthogonale de O sur (AC). Que vaut l'angle $\widehat{AOU}$? En déduire AU.

2.c. Tracer la médiatrice de $[AC]$ et y reporter la longueur $\sqrt{3}$.

2.d. Quelle est la longueur du troisième côté du triangle précédent ?

3.c. Si on note F le point d'intersection de (DF) et (AB), montrer que $\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB}$.



Indications sur l'Exercice 4

1.a. Calculer $u_1, u_2, ...,$ pour constater le résultat. Pour les élèves de Terminale vérifier le résultat par récurrence.

1.b. Calculer $u_n^2 - 2$, puis faire apparâitre une identité remarquable de la forme $\frac{(a-b)^2}{4}$.
Pour la montonie, calculer $u_{n+1} - u_n$ et utiliser le résultat que l'on vient de montrer.

1.c. Utiliser le résultat rappelé au début de cet énoncé.
Ensuite passer à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, en sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

 Creative Commons :

2.a. Pour l'inégalité de gauche, utiliser la question 1.b et pour l'inégalité de droite, montrer que : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$ et que : $2u_n \geq 1$.

2.b. On a : $u_n - \sqrt{2} \leq (u_{n-1} - \sqrt{2})^2$, puis $u_{n-1} - \sqrt{2} \leq (u_{n-2} - \sqrt{2})^2$, donc, $u_n - \sqrt{2} \leq (u_{n-2} - \sqrt{2})^{2^2}$, puis montrer que $u_n - \sqrt{2} \leq (u_{n-3} - \sqrt{2})^{2^3}$, et ainsi de suite. Pour les Terminale, faire un raisonnement par récurrence.

2.c. i) Regarder où u_0 intervient dans les questions précédentes.

ii) Constater que u_0 est plus proche de $\sqrt{2}$ dans ce cas.

iii) Il suffit de trouver n tel que $(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} \leq 10^{-17}$ grâce à la question 2.b. Faire des essais successifs à la calculatrice pour les élèves de première et pour les élèves de Terminale, appliquer le logarithme à l'inégalité $(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} \leq 10^{-17}$, puis une deuxième fois, pour isoler n.



Indications sur l'Exercice 5

1. Étudier la monotonie de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, a+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et montrer que $a \leq f(a)$.

2. Calculer $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ et utiliser le caractère unique de la solution dans la question précédente. Même raisonnement pour l'autre égalité.



Indications sur l'Exercice 7

1. Si u est pair, il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $u = 2k$.

2. Si u est impair, il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que : $u = 2k + 1$.

3. De la relation $2b^2 = a^2$, en déduire que a est pair, puis écrire a sous la forme $2m$ avec m dans $\mathbb{N}^*$.

4. La fraction a/b est-elle vraiment irréductible ?



Indications sur l'Exercice 8

1. Montrer qu'un triangle RST rectangle isocèle en S vérifie : $\sqrt{2} = \frac{RS}{RT}$.

2. Pour le tracé de B', montrer que B' est sur le cercle de centre A et de rayon AB et montrer qu'il est aussi sur (AA').

3. Se rappeler de l'inégalité triangulaire dans un triangle.

4. Montrer que $(A'B')$ est perpendiculaire à (AC) à l'aide de la symétrie d'axe (AA'). Ensuite considérer les angles du triangle $A'B'C$.
Montrer que $B'C = a - b$ et en déduire que $A'C = 2b - a$.

5. Se rappeler de la première question.

6. Pour l'argument géométrique, partir du théorème de Pythagore dans le triangle $A'B'C$.
Pour l'agument calculatoire, se rappeler que $2 = a^2/b^2$.



Indications sur l'Exercice 9

1.a. Partir de $a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}$ et multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par $a+\sqrt{a^2+1}$, puis mettre au même dénominateur, et enfin factoriser le numérateur par $\sqrt{a^2+1}$.

1.b. Dans $a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}$, remplacer $\sqrt{a^2+1}$ par $a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}$ et répeter cette manipulation une infinité de fois.

1.c. Utiliser la même démarche que dans les deux questions précédentes.

2. Poser $x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\dots}}}}$ et remarquer que $x=1+\frac{1}{x}$, puis trouver x.

Poser $y=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\dots}}}}}}$, puis montrer que $y=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{y}}}$, puis montrer que $y=\frac{10y+3}{7y+2}$ et trouver y.

3.a. Remarquer que $r_1-a=r_2-a=\sqrt{a^2+1}$.

3.b. Pour i valant 1 ou 2, nous avons $r_i^2=2ar_i+1$ et multiplier cette relation par r_i^{n-1}, puis par multiplication par α et β et addition, en déduire la relation pour $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.c. Écrire les relations correspondantes avec $w_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n$. pour $n=0$ et $n=1$. Constater que $\alpha(a+\sqrt{a^2+1})+\beta(a-\sqrt{a^2+1})=(\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)\sqrt{a^2+1}$.

3.d. Faire le lien entre les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.e. Pour les élèves de première, calculer u_0,u_1,u_2,u_3, puis constater que ces termes sont des entiers naturels , puis comprendre comment la relation $u_{n+1}=2au_n+u_{n-1}$ permet de conserver le caractère entier naturel de proche en proche.
Pour les élèves de Terminale, faire une récurrence dans laquelle votre hypothèse de récurrence à l'ordre n est : u_n et u_{n-1} sont des entiers naturels.

4.a. Montrer que $\frac{p_1}{q_1}=\frac{2a^2+1}{2a}$ Montrer que tout diviseur commun de $2a^2+1$ et $2a$ vaut forcément un en constatant que : $(2a^2+a)-a(2a)=1$. Utiliser ensuite le résultat sur l'irréductibilité des fractions rappelé au début de l'énoncé.

4.b. Montrer que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=a+\frac{1}{a+\frac{p_n}{q_n}}=\frac{(a^2+1)q_n+ap_n}{p_n+aq_n}$. Montrer que que cette fraction est irréductible en montrant que tout diviseur commun de $(a^2+1)q_n+ap_n$ et p_n+aq_n est aussi un diviseur commun de p_n et q_n.

4.c. Utiliser l'unicité de la décomposition en fraction irréductible. Constater que si les relation $p_{n+1}=(a^2+1)q_n+ap_n$ et $q_{n+1}=p_n+aq_n$ sont vraies pour tout n de $\mathbb{N}$, alors les relations $p_n=(a^2+1)q_{n-1}+ap_{n-1}$ et $q_n=p_{n-1}+aq_{n-1}$ sont vraies pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4.d. Pour les élèves de première, vérifier cela pour p_0,p_1,p_2,p_3, puis comprendre comment les relations $u_{n+1}=2au_n+u_{n-1}$ et $p_{n+1}=2ap_n+p_{n-1}$ permettent répercuter la propriété de proche en proche.
Pour les élèves de Terminale, faire une récurrence dans laquelle votre hypothèse de récurrence à l'ordre n est : $p_n=u_n$ et $p_{n-1}=u_{n-1}$.

4.e. Utiliser les expressions de u_n et v_n, puis dans la fraction, multiplier le numérateur et le dénominateur par $2\sqrt{a^2+1}$ et les diviser par $1/r_1^{n+1}$.

4.f. Montrer que $\left|\frac{r_2}{r_1}\right|<1$ et utiliser le résultat rappelé.

 Creative Commons :



Indications sur l'Exercice 10

1. Calculer l'aire de ce triangle en utilisant la hauteur issue de S pour une première méthode et en utilisant la hauteur issue de T pour une deuxième méthode.
Pour obtenir la deuxième formule, élever $\sin(a) = 2\sin(a/2)\cos(a/2)$ au carré et utiliser la relation $\cos^2 = 1-\sin^2$. Bien vérifier que toutes les quantités considérées sont positives avant de prendre la racine carrée.

2. Si on note O le centre du cercle $(\mathcal{C})$, relier chaque sommet du polygone à O. Cela fait n triangles identiques, dont l'angle au sommet O vaut $2\pi/n$. Calculer l'aire de chacun de ces triangles en considérant une hauteur issue de O.

3. Utiliser la question précédente et la formule $\sin(a) = 2\sin(a/2)\cos(a/2)$, avec a bien choisi, afin de simplifier le quotient.

4. Dans $\frac{A_4}{A_8} \times \frac{A_8}{A_{16}} \times ... \times \frac{A_{2n}}{A_{2^{n+1}}}$, remarquer des simplifications. Utiliser aussi la question précédente.

5.a. Pour a bien choisi, utiliser la relation $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.

5.b. Faire d'abord la constatation pour u_2, u_3 et u_4.

5.c. Remarquer que quand n tend vers $+\infty$, le polygone à 2^{n+1} côté se rapproche de $(\mathcal{C})$. Passer à la limite dans la relation de la question précédente.

6.a. $\cos(0) = 1$.

6.c. Calculer l'aire du triangle OAB, de la portion de cercle délimitée par O, A et B et du triangle OAC. Constater que ces aires sont de plus en plus grandes.

6.d. Utiliser la question précédente, en passant à l'inverse.

6.f. Montrer que $2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ et faire tendre n vers $+\infty$ en utilisant la question précédente.



Indications sur l'Exercice 11

1. Commencer par écrire $\sqrt{a+x} - x = \frac{(\sqrt{a+x}-x)(\sqrt{a+x}+x)}{\sqrt{a+x}+x}$.

2. Commencer par écrire $\sqrt{a+x} - \sqrt{a+y} = \frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a+y})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a+y})}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a+y}}$.

3. Utiliser la question précédente avec $x = u_n$ et $y = x_0$.

4. Montrer cela par récurrence en utilisant la question précédente pour l'hérédité.

5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Exprimer u_n qu'avec des racines imbriquées, en exprimant d'abord u_n en fonction de u_{n-1}, puis en fonction de u_{n-2}, puis de u_{n-3},..., jusqu'à u_0.

6. Dans $n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, exprimer a en fonction de n.



Indications sur l'Exercice 12

1. Pour commencer à s'exercer, vérifier la formule pour $n = 2$ ou $n = 3$. Montrer le résultat par un raisonnement par récurrence.

2. Calculer $(gh)'$.

3. Démontrer le résultat par récurrence. Pour l'hérédité, utiliser la question précédente, avec $g : t \mapsto -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $h = f^{(n+1)}$.

4. Utiliser les questions 1 et 3. Remarquer que $2^n \times n! = (2 \times 2 \times ... \times 2) \times (1 \times 2 \times ... \times n)$.

5. Remarquer que $0 \leq \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times(2n)} \leq 1$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}(1+t)^n} \leq 1$.

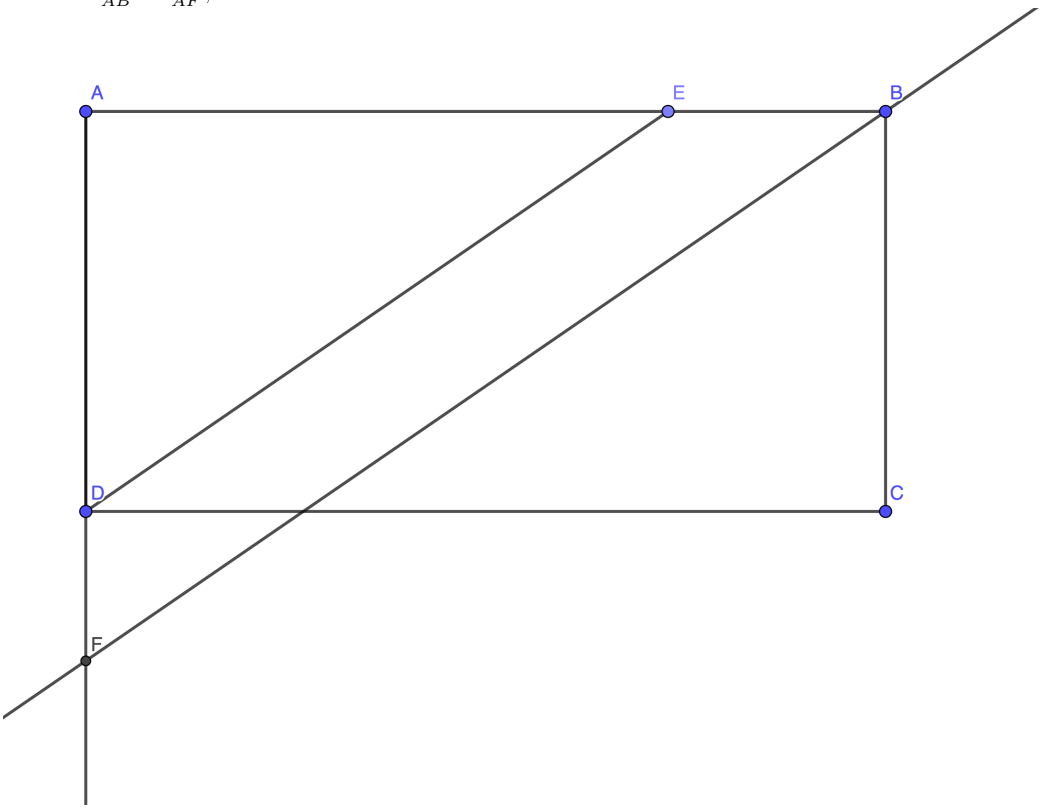
6. Faire tendre n vers $+\infty$ et utiliser la question 5 pour trouver la limite du terme avec l'intégrale.

 Creative Commons :

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1. Dans le triangle ABF, comme (ED) est parallèle à (BF), on a grâce au théorème de Thalès : $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AF}$, soit $AE \times AF = AB \times AD = 2 \times 1 = 2$.

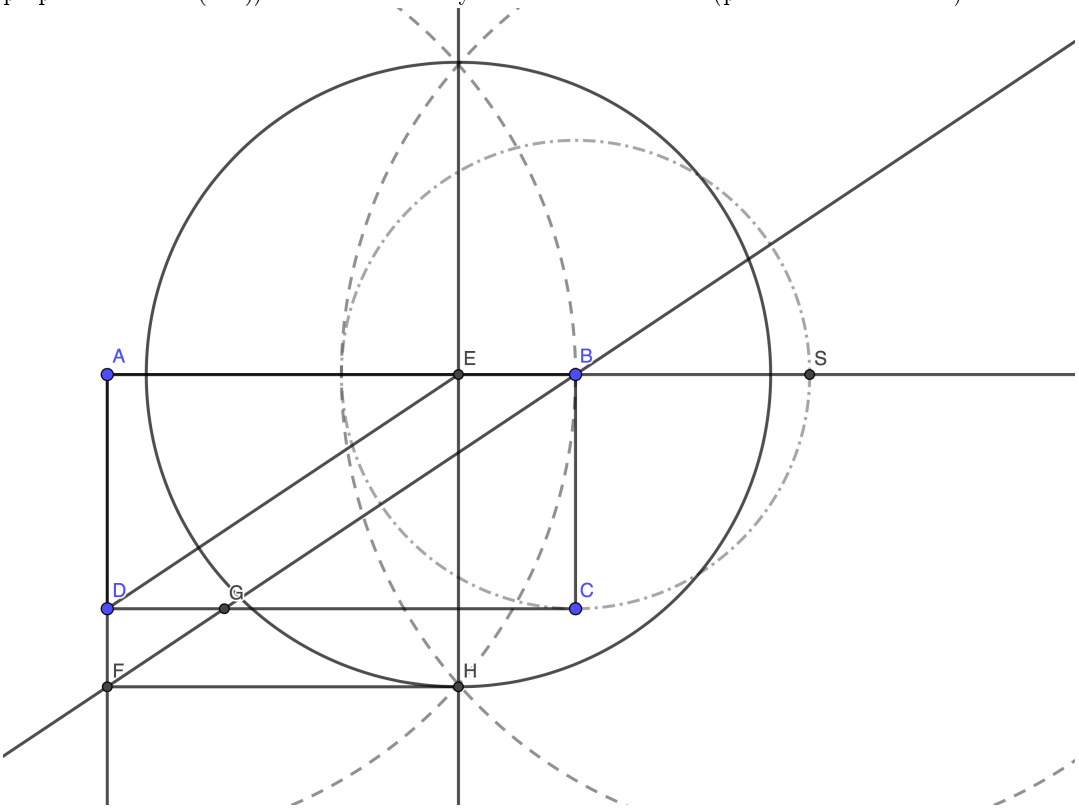


2. Nous allons contruire le point E tel que $AE = \frac{AB+AD}{2}$, c'est-à-dire la moyenne de la longueur AB et de la largeur AD. Sur la droite AB, nous allons reporter la longueur AD. Pour cela à l'aide d'un compas, on reporte la longueur AD à partir de B, pour construire S tel que $BS = AD$. Nous avons donc $AS = AB + AD$. Ainsi pour avoir la moitié de cette longueur, nous avons besoin de construire la médiatrice de $[AS]$. Pour cela nous construisons le cercle de centre A et de rayon AB, puis le cercle de centre S et de même rayon. Ainsi ces deux cercles possèdent deux points d'intersection qui définissent donc la médiatrice de $[AS]$. Soit E le point d'intersection entre cette médiatrice et (AS).
Nous allons construire le rectange ayant pour sommet A, F et E. Ce rectangle est intéressant car d'aprés la question précédente, son aire vaut 2.

Nous avons besoin de construire F et donc la parallèle à (ED) passant par B. Comme (EB) et (DC) sont parallèles, si on reporte sur (DC) la longueur EB, on construit le point G tel que $EBGD$ soit un parallèlogramme. Ainsi (ED) et (BG) sont parallèles et cette dernière droite coupe (AD) en F.
Il faut ensuite construire H pour que $AEHF$ soit un rectangle.

 Creative Commons :

Le point H se trouve sur l'intersection de la médiatrice de $[AS]$ (qui passe par E et qui est perpendiculaire à (AE)) et du cercle de rayon AF et de centre E (pour avoir $AF = EH$).

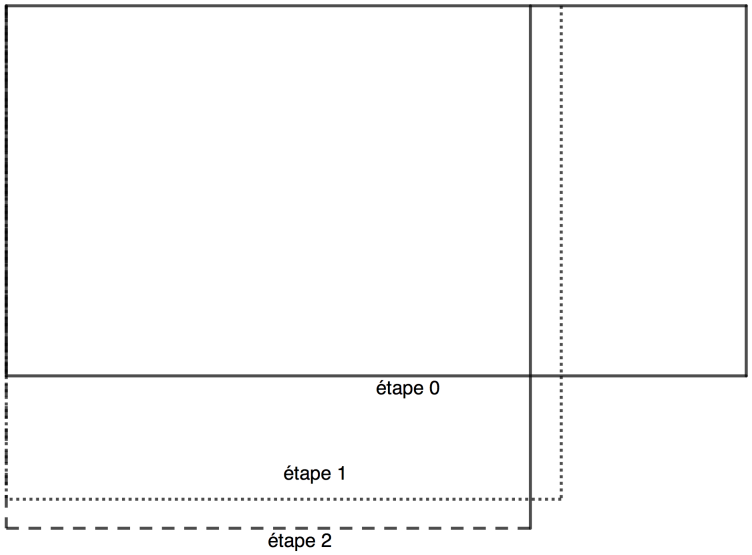


3. u_1 correspond à la longueur $AE = \frac{AB+AD}{2} = \frac{3}{2}$.

Au bout de n étapes, nous avons un rectangle de longueur u_n. De plus grâce au résultat de la question 1, à chaque étape l'aire du rectangle est conservée, car par la construction géométrique de cette question, le produit entre la longueur et la largeur demeure inchangé. Ainsi l'aire des rectangles à chaque étape vaut 2. Par conséquent, la largeur de n-ième rectangle vaut $2/u_n$. La longueur u_{n+1} du $(n+1)$-ième rectangle étant la moyenne de la longueur u_n et de la largeur $2/u_n$ du n-ième rectangle, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

4. Sur la figure suivante, nous avons représenté le rectangle initial $ABCD$, correspondant à l'étape 0, puis le rectangle $AEHF$ de la première étape. Nous avons appliqué notre construction géométrique à ce dernier rectangle pour avoir le rectangle de la deuxième étape.

 Creative Commons :



Ces rectangles vont ressembler de plus en plus à des carrés. Ainsi quand n tend vers $+\infty$, u_n va tendre vers la longueur ℓ d'un carré d'aire 2 (car toutes les aires restent identiques à chaque étape). On aura $\ell^2 = 2$, puis $\ell = \sqrt{2}$. Nous constatons donc géométriquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

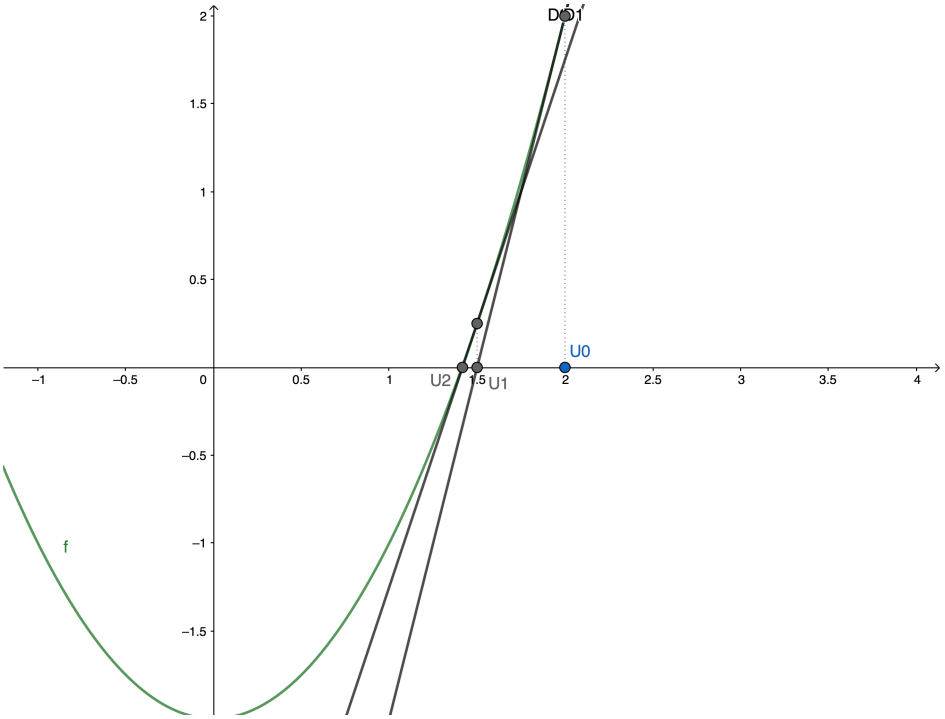
5. De la même façon, nous commençons par construire un rectange $ABCD$, avec $AD = 1$ et $AB = a$. Ensuite, nous construisont de la même manière E tel que $AE = \frac{AB+AD}{2}$. Nous construisons ensuite F, telle que F soit l'intersection de (AD) avec la parallèle à (ED) passant par B. Grâce à la question 1, on a encore $AE \times AF = AB \times AD = a$, donc l'aire du nouveau rectangle reste inchangée et vaut a. On répète ainsi cette construction et nous constatons que nous allons tendre vers un carré d'aire a cette fois-ci et donc de côté de longueur $\sqrt{a}$.
Au bout de n étapes, nous avons un rectangle de longueur u_n et d'aire a. Ainsi la largeur de n-ième rectangle vaut a/u_n. La longueur u_{n+1} du $(n+1)$-ième rectangle étant la moyenne de la longueur u_n et de la largeur a/u_n du n-ième rectangle, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. Les longueurs u_n de ces rectangles vont tendre vers la longueur du côté du carré « limite » à savoir $\sqrt{a}$.

□

Correction de l'Exercice 2

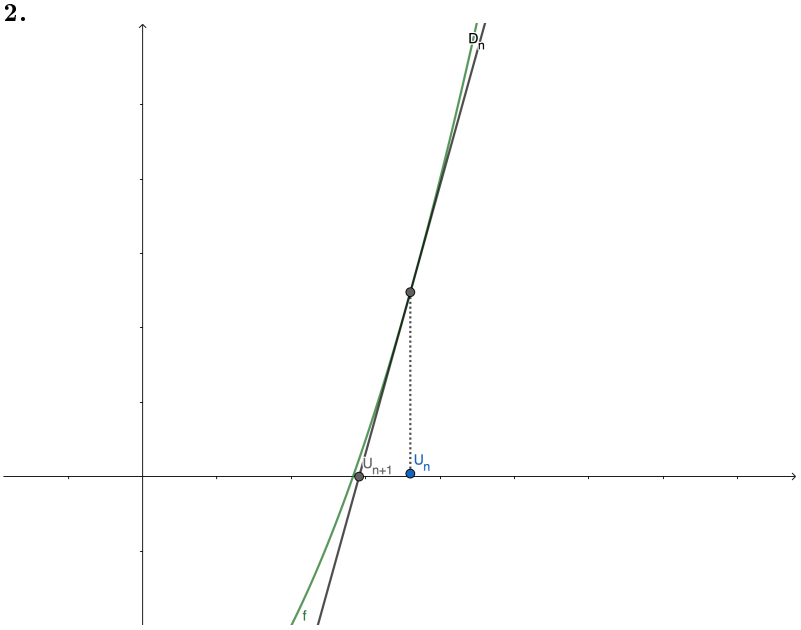
1.

 Creative Commons :



(u_n) semble converger vers l'abscisse positive du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses. Celle-ci vaut x_0 telle que $x_0^2 - 2 = 0$ et donc $x_0 = \sqrt{2}$.

2.



L'équation de la tangente $\mathcal{D}_n$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse u_n est : $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. Pour trouver le point d'intersetion de $\mathcal{D}_n$ avec l'axe des abscisses,

il suffit de chercher x tel que $0 = f'(u_n)(x-u_n) + f(u_n)$, soit $-f(u_n) = f'(u_n)(x-u_n)$, ce qui équivaut à : $-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = x - u_n$ et donc $x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Par définition de u_{n+1}, on a donc :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = u_n - \frac{u_n}{2} + \frac{2}{2u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

On retrouve la même suite que dans l'exercice 1, car nous avons la même initialisation pour u_0 et la même relation qui lie u_{n+1} et u_n.

3. On peut reprendre le même raisonnement que la question précédente pour obtenir : $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Comme nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2/x^3$, alors : $u_{n+1} = u_n - \frac{2-1/u_n^2}{2/u_n^3}$ et en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par u_n^3, on obtient :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2u_n^3 - u_n}{2} = 3u_n/2 - u_n^3.$$

Si (u_n) converge vers ℓ, alors u_n et u_{n+1} tendent vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ (quand n tend vers $+\infty$, u_n et u_{n+1} s'approchent de ℓ) et donc la relation précédente donne : $\ell = 3\ell/2 - \ell^3$, soit $\ell^3 = \ell/2$ soit $\ell^2 = 1/2$, car ℓ est non nul et enfin $\ell = 1\sqrt{2}$, car ℓ est positif. Ainsi la suite $(2u_n)$ converge vers $2\ell = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
Ainsi on construit par l'algorithme de Newton chaque terme de la suite (u_n) que l'on multiplie ensuite par 2, pour pouvoir approcher $\sqrt{2}$ par $2u_n$ pour n suffisamment grand. Pour la fonction $f : x \mapsto 2 - 1/x^2$ l'intérêt réside dans le fait que la relation qui lie u_{n+1} et u_n, à savoir $u_{n+1} = 3u_n/2 - u_n^3$, ne fait pas intervenir de divisions par un nombre que l'on a arrondi, ce qui limite l'amplification des approximations lors des calculs successifs des termes de la suite (u_n).

□

Correction de l'Exercice 3

1.a. $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carrée de côté de longueur un, grâce au théorème de Pythagore. Pour cela on construit un segment $[AB]$ de longueur 2 (en reportant sur une droite deux fois le segment de longueur un à l'aide d'un compas). Ensuite on trace la médiatrice de ce segment comme dans la deuxième question du premier exercice. On note C le milieu de ce segment. À partir de C, on reporte sur cette médiatrice la longueur un, d'où un point D de telle sorte que ACD soit un triangle rectangle isocèle en C. Ensuite, on trace les cercles de rayon un et de centre A et D, ils se coupent en B et en un autre point E. Ainsi $ACDE$ et un carré de côté un et dont la longueur de la diagonale vaut $\sqrt{2}$.

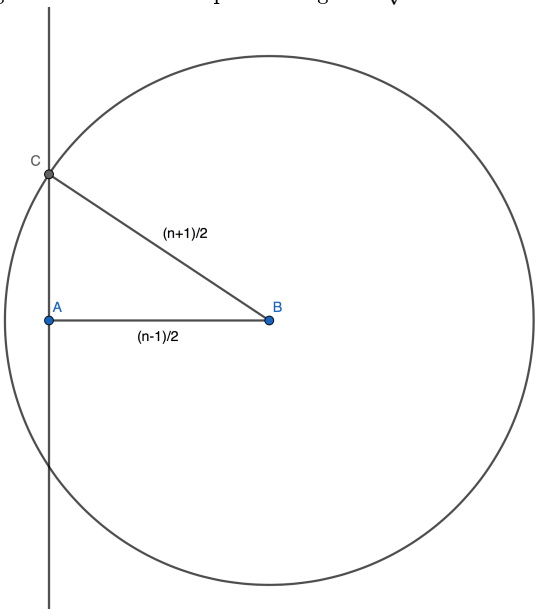
b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons une identité remarquable :
$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = n \times 1 = n.$

c. Nous allons d'abord construire les longueurs $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$. En reportant $n+1$ et $n-1$ fois la longueur un, on obtient deux segments de longueur $n+1$ et $n-1$. Ensuite en traçant les médiatrices de ces deux segments (voir exercice 1 question 2), nous obtenons des segments de longueur $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

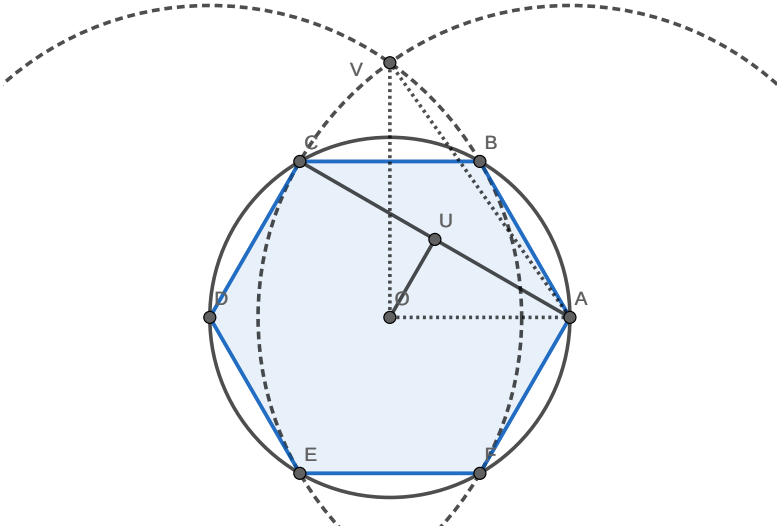
Maintenant nous sommes en mesure de construire de un segment $[AB]$ de longueur $\frac{n-1}{2}$. Ensuite nous traçons la perpendiculaire à (AB) passant par A (voir cette construction dans l'exercice 1 question 1). Nous construisons ensuite le cercle de centre B et de rayon $\frac{n+1}{2}$. Ce cercle coupe la droite précédente en deux points. On nomme C l'un de ces points. Ainsi le

 Creative Commons :

triangle ABC est rectangle en A. Grâce au théorème de Pythagore :
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = n$, grâce à la question précédente. Nous avons donc $AC = \sqrt{n}$ et donc on a réussi à construire géométriquement uniquement à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas la longueur $\sqrt{n}$.



2.a. Comme on dispose d'un segment de longueur un et d'un compas, on peut tracer un cercle de rayon un et de centre O. On choisit un point A du cercle sur lequel on applique la pointe du compas avec un écart valant un (cela est possible car on nous donne un segment de longueur un). On trace un arc qui coupe le cercle en B. Ensuite on pointe le compas avec le même écart sur B et on trace un arc qui coupe le cercle en C. On continue ainsi de suite pour tracer D, E et F. Ainsi les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA, sont des triangles équilatéraux de côté un, car $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$ et $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, car les écarts du compas valaient un. Ainsi les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{FOA}$ valent $\pi/3$. Ainsi on a fait tout le tour du cercle (qui correspond à un angle de 2π) et $ABCDEF$ est un hexagone régulier.



b. Soit U le milieu de $[AC]$. Comme le triangle OAC est isocèle en O (car $OA = OC = 1$), alors (OU) est aussi la hauteur et la bissectrice issue de O du triangle OAC. Dans le triangle OAU rectangle en U, nous avons : $UA = OA \times \sin(\widehat{AOU}) = 1 \times \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $AC = 2 \times AU$, alors $AC = \sqrt{3}$.

c. On prend un écart de compas valant AC. On peut tracer le cercle de centre A et de rayon $AC = \sqrt{3}$ et le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{3}$. On note V l'un des point d'intersection. Nous avons $AV = DV = \sqrt{3}$ et $AO = DO = 1$, donc (VO) est la médiatrice de $[AD]$ et donc (VO) est perpendiculaire à (AD). Le triangle VAO est rectangle en O et $AV = \sqrt{3}$ et $OA = 1$.

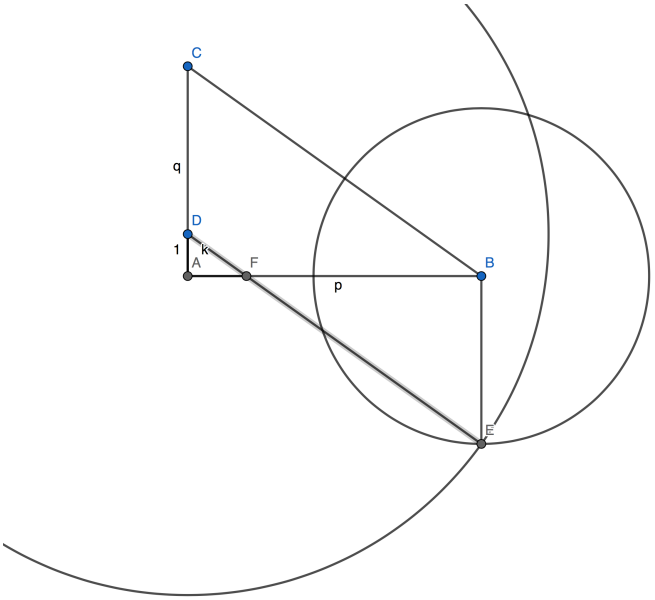
d. Grâce au théorème de Pythagore dans le triangle VAO est rectangle en O :
$VO^2 = AC^2 - AO^2 = 3 - 1 = 2$ et donc $VO = \sqrt{2}$, ce qui nous permet d'avoir $\sqrt{2}$.

3.a. On construit $[AB]$ tel que $AB = p$ en reportant p fois la longueur un. Ensuite on trace la perprendiculaire à (AB) passant par A (voir l'exercice 1 question 2). Ensuite sur cette droite, on place C tel que $AC = q$ en reportant q fois la longueur un à partir de A.

b. On place le point D sur $[AC]$ tel que $AD = 1$ grâce au compas. Reste à tracer la parallèle à (CB) passant par D. Avec le compas, on trace le cercle de centre B et de rayon CD. Ensuite on trace le cercle de centre D et de rayon CB. L'un des points d'intersection de ces deux cercles que l'on appelle E permet d'avoir un parallèlogramme $BCDE$ (en effet on a $DC = BE$ et $BC = DE$ donc les côtés opposés sont égaux).

c. La droite (DE) coupe (AB) en F. On applique le théorème de Thalès au triangle ABC. (FD) et (CB) sont parallèles. Ainsi on a : $\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB}$, soit $\frac{1}{q} = \frac{AF}{p}$ et donc $AF = p/q$.

 Creative Commons :



□

Correction de l'Exercice 4

1.a. Pour les élèves de premières montrons cela par des arguments intuitifs.

u_0 existe bien bien car il est donné par l'énoncé et il est strictement positif et rationnel. Comme u_0 est non nul, on peut calculer $\frac{1}{2}(u_0+\frac{2}{u_0})$. Ainsi u_1 existe et il est strictement positif comme somme et produit de nombres strictement positifs. De plus c'est un rationnel comme somme et produit de nombres rationnels ($\frac{1}{2}(2+\frac{2}{2})$). On procède de même pour montrer que u_2 existe, qu'il est strictement positif et rationnel . Ainsi de suite de proche en proche, on montrer que tous les termes de la suite sont bien définis, strictement positifs et rationnels.

Pour les élèves de Terminale, voici une preuve rigoureuse par récurrence.
Pour n fixé de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ le proposition « u_n existe, c'est nombre strictement positif et rationnel ».
• $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme u_n est non nul, alors on peut écrire $\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$ et donc u_{n+1} existe et de plus ce nombre est strictement positif (somme et produit de nombres strictement positifs). De plus si $u_n = p/q$ avec p et q des entiers naturels non nuls, on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{p}{q}+\frac{2q}{p}) = \frac{p^2+2q^2}{2pq}$ qui est bien un rationnel, car p^2+2q^2 et $2pq$ sont des entiers naturels. Donc u_{n+1} est bien défini et il est strictement positif et rationnel, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$u_n^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}+\frac{2}{u_{n-1}}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2+\frac{4}{u_{n-1}^2}+4\right) - 2 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2+\frac{4}{u_{n-1}^2}-4\right) = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}-\frac{2}{u_{n-1}}\right)^2 \geq 0$. Ainsi on a : $u_n^2 \geq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{u_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{u_n^2-2}{u_n}$. Or on a u_n positif et $u_n^2 \geq 2$, donc : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\frac{u_n^2-a}{u_n} \leq 0$
$(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$. Grâce au rappel du début de cet exercice, la suite (u_n) converge vers une limite ℓ avec $\ell \geq 0$.

Dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, on passe à la limite (quand n tend vers $+\infty$, u_n et u_{n+1} s'approchent de ℓ) et on obtient : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$ soit : $2\ell^2 = \ell^2 + 2$, soit $\ell^2 = 2$, soit $\ell = \sqrt{2}$, car ℓ est positif.

d. Comme dans la question précédente, u_n est défini et strictement positif pour tout n de $\mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$u_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2 + \frac{a^2}{u_{n-1}^2} + 2a\right) - a = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2 + \frac{a^2}{u_{n-1}^2} - 2a\right) =$
$\frac{1}{4}\left(u_{n-1} - \frac{a}{u_{n-1}}\right)^2 \geq 0$.
donc on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^2 \geq a$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{a}{u_n}\right) = -\frac{1}{2}\frac{u_n^2-a}{u_n} \leq 0$.
$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geq 0$. Dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, on passe à la limite et on obtient : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$ soit : $2\ell^2 = \ell^2 + a$, soit $\ell^2 = a$, soit $\ell = \sqrt{a}$, car ℓ est positif.

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la question 1.b., comme la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p \geq \sqrt{2}$. Comme $n+1 \geq 0$, alors : $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.
$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$. Nous avons $2u_n \geq 2\sqrt{2} \geq 1$. Ainsi on a $\frac{1}{2u_n} \leq 1$, puis $\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$.

b. L'inégalité de gauche est vraie grâce à la question précédente pour n dans $\mathbb{N}^*$ et cela est vrai aussi pour u_0. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant plusieurs fois la question précédente : $u_n - \sqrt{2} \leq (u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \leq \left((u_{n-2} - \sqrt{2})^2\right)^2 = (u_{n-2} - \sqrt{2})^{2^2} \leq \left(u_{n-3} - \sqrt{2})^2\right)^{2^2}$, puis :
$u_n - \sqrt{2} \leq \left(u_{n-3} - \sqrt{2})^2\right)^{2^2} = (u_{n-3} - \sqrt{2})^{2^3} \leq ... \leq (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.
Montrons cela plus rigoureusement par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n - \sqrt{2} \leq (u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$.
• On a : $u_0 - \sqrt{2} = (u_0 - \sqrt{2})^1 = (u_n - \sqrt{2})^{2^0}$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On a grâce à la question précédente :
$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2 \leq \left((u_0 - \sqrt{2})^{2^n}\right)^2 = (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$. On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

c. i) Nous n'avons pas spécifié u_0 pour ces deux premières questions et dans la question 1.b (utilisé dans ces deux questions), nous n'avons pas eu besoin de u_0 dans la preuve, donc cela ne change rien.

ii) Avec ce choix de u_0, on a u_0 plus proche de $\sqrt{2}$, donc $u_0 - \sqrt{2}$ sera plus petit. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 - \sqrt{2})^{2^n} = 0$, car on a : $0 \leq u_0 - \sqrt{2} < 1$. Cette dernière quantité tendra d'autant plus vite vers 0 que $u_0 - \sqrt{2}$ sera petit. Ainsi cette convergence

 Creative Commons : BY: $ ↻

rapide, nous permettra d'avoir $u_n - \sqrt{2}$ très proche de 0 rapidement.
Ainsi avec une petite valeur de n et donc peu de calculs, on aura une bonne approximation de $\sqrt{2}$ par u_n.

iii) Il suffit de trouver n tel que $(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} \leq 10^{-17}$. Dans ce cas, grâce à la question 2.b., nous aurons $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-17}$.
Voici un argument pour les élèves de première. On calcule $(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}$ pour différentes valeurs de n, jusqu'à avoir $(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} \leq 10^{-17}$.
On a : $(u_0 - \sqrt{2})^{2^0} = 8.6 \times 10^{-2}$, $(u_0 - \sqrt{2})^{2^1} = 7.4 \times 10^{-3}, (u_0 - \sqrt{2})^{2^2} = 2.9 \times 10^{-9}$ et enfin $(u_0 - \sqrt{2})^{2^4} = 8.6 \times 10^{-18}$. Ainsi $n = 4$ convient, puis $u_4 = \frac{886731088897}{627013566048}$ nous donne une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-17} près et en plus par un nombre rationnel.
Voici une autre méthode pour trouver n pour les élèves de terminale . On a :
$(u_0 - \sqrt{2})^{2^n} \leq 10^{-17} \iff 2^n \ln(u_0 - \sqrt{2}) \leq \ln(10^{-17}) \iff 2^n \geq \frac{\ln(10^{-17})}{\ln(u_0 - \sqrt{2})}$, car $\ln(u_0 - \sqrt{2})$ est négatif, car $0 < u_0 - \sqrt{2} < 1$. Enfin nous devons avoir :
$n \ln(2) \geq \ln\left(\frac{\ln(10^{-17})}{\ln(u_0 - \sqrt{2})}\right)$, soit $n \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(10^{-17})}{\ln(3/2 - \sqrt{2})}\right)}{\ln(2)} \approx 3.9944$.

□

Correction de l'Exercice 5

1. Montrons d'abord l'existence d'une solution positive à l'équation $x^2 = a$.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, a+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a : $f(0) = 0$ et $f(a+1) = a^2 + 2a + 1 \geq 2a \geq a$. Ainsi f est strictement croissante de $[0, a+1]$ dans $[0, (a+1)^2]$ et comme a est dans ce dernier intervalle, alors l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution sur $[0, a+1]$.
Plus rigoureusement pour les Terminales, le fonction f étant continue et strictement croissante sur $[0, a]$, alors le théorème de la bijection affirme que f réalise une bijection de $[0, a+1]$ dans $[0, (a+1)^2]$. Comme a est dans $[0, (a+1)^2]$, alors l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution.

Autre méthode utilisant l'exercice 4 : nous avons montré que (u_n) converge vers ℓ positif tel que $\ell^2 = a$. Ainsi ℓ est une solution de l'équation $x^2 = a$.

Nous allons maintenant montrer l'unicité de cette solution sur $\mathbb{R}_+$.
Soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x_1^2 = a$ et $x_2^2 = a$. On a donc $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Si a est strictement positif, alors x_1 et x_2 sont non nuls et donc strictement positifs. De la relation précédente, on a : $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$. Or nous avons $x_1 + x_2 > 0$, donc $x_1 - x_2 = 0$, soit $x_1 = x_2$.
Si $a = 0$, on a $x_1^2 = 0$, donc $x_1 = 0$. De même $x_2 = 0$ et donc $x_1 = x_2$.
2. Nous avons $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$. Or l'équation $x^2 = ab$ admet une unique solution positive qui est $\sqrt{ab}$. Or $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est aussi une solution de cette équation. Ainsi on a : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
De même nous avons $(\sqrt{a}/\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2/(\sqrt{b})^2 = a/b$. Or l'équation $x^2 = a/b$ admet une unique solution positive qui est $\sqrt{a/b}$. Or $\sqrt{a}/\sqrt{b}$ est aussi une solution de cette équation. Ainsi on a : $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$.

 Creative Commons :

□

Correction de l'Exercice 6
On a successivement :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 37 & 04 & , & 00 & 00 & 6 \\
\cline{7-7}
-36 & & & & & & \\
\cline{1-1}
 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 37 & 04 & , & 00 & 00 & 60 \\
\cline{7-7}
-36 & & & & & & 120 \times 0 = 0 \\
\cline{1-1}
 & 1 & 04 & & & & \\
 & - & 0 & & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & 04 & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 37 & 04 & , & 00 & 00 & 60,8 \\
\cline{7-7}
-36 & & & & & & 120 \times 0 = 0 \\
\cline{1-1}
 & 1 & 04 & & & & 1208 \times 8 = 9664 \\
 & - & 0 & & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & 04 & 00 & & & \\
 & - & 96 & 64 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 7 & 36 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 37 & 04 & , & 00 & 00 & 60,86 \\
\cline{7-7}
-36 & & & & & & 120 \times 0 = 0 \\
\cline{1-1}
 & 1 & 04 & & & & 1208 \times 8 = 9664 \\
 & - & 0 & & & & 12166 \times 6 = 72996 \\
\cline{2-3}
 & 1 & 04 & 00 & & & \\
 & - & 96 & 64 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 7 & 36 & 00 & & \\
 & - & 7 & 29 & 96 & & \\
\cline{3-5}
 & & & 6 & 04 & &
\end{array}$$

$\sqrt{3704}$ vaut donc 60.86 avec une précision de deux chiffres après la virgule.

□

Correction de l'Exercice 7

1. Si u est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $u = 2k$. Ainsi $u^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Comme $2k^2$ est un entier naturel, alors u^2 est un entier naturel pair.

2. Si u est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $u = 2k + 1$. Ainsi $u^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Comme $2k^2 + 2k$ est un entier naturel, alors u^2 est un entier naturel impair.

3. Nous avons $\sqrt{2}b = a$ et donc $2b^2 = a^2$. Ainsi a^2 est pair, alors grâce aux deux cas étudiés dans les deux premières questions, a est donc pair. Ainsi il existe un entier naturel m tel que $a = 2m$. Ainsi nous avons $2b^2 = 4m^2$, puis $b^2 = 2m^2$. Ainsi b^2 est pair et on en déduit de même que b est pair.

4. Ainsi 2 est un diviseur commun de a et b, donc la fraction a/b n'est pas irréductible, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

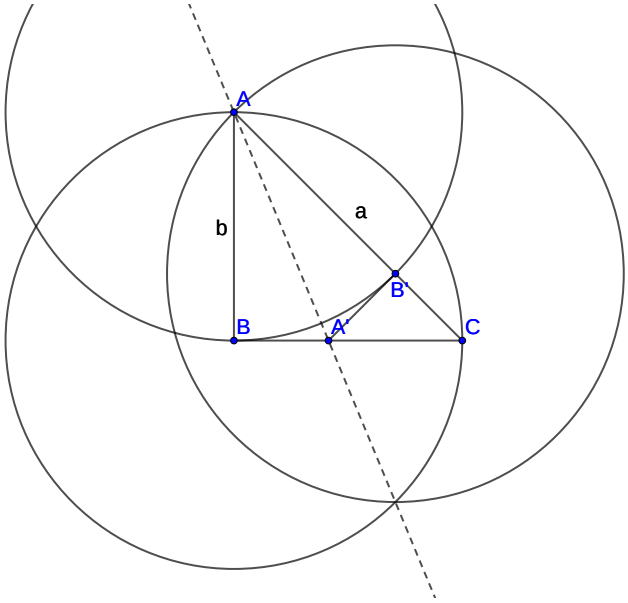
□

Correction de l'Exercice 8

1. Soit RST un triangle rectangle isocèle en S. Grâce au théorème de Pythagore, nous avons $RT^2 = RS^2 + ST^2 = 2RS^2$, puis $RT = \sqrt{2}RS$ et donc $\sqrt{2} = \frac{RT}{RS}$. Ainsi par la réciproque du théorème de Pythagore, si $\sqrt{2} = \frac{u}{v}$ avec u et v des entiers naturels non nuls, alors il est possible de construire un triangle RST rectangle isocèle en S, avec $RT = u$ et $RS = v$.
Lorsque v est minimal, soit $v = b$, alors RS l'est aussi et cela correspond au triangle rectangle isocèle minimal ayant des longueurs entières. Dans ce cas $RS = b$.

2. On rappelle que pour tracer cette bissectrice, on trace le cercle passant par B et de centre A. Celui-ci coupe (AC) en B'. Ensuite nous traçons deux cercle de même rayon de centre B et de centre B'. Ces deux cercles se coupent en A et en un autre point. On relie A à cet autre point, pour obtenir la bissectrice.
Le symétrique de B par rapport à (AA') est noté B'. L'image de A par cette symétrique est A et comme une symétrie conserve les distances, alors $AB = AB'$, ainsi B' est sur le cercle de centre A passant par B. D'autre part comme (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, alors l'image de (AB) par la symétrie d'axe (AA') est (AC) et comme B est sur (AB), alors l'image de B est sur (AC) et donc E est sur (AC). Ainsi B' est l'intersection de (AC) avec le cercle de centre A passant par B.

 Creative Commons :



3. Le triangle ABC n'est pas aplati, donc grâce à l'inégalité triangulaire : $AC < AB + BC$ et donc $a < 2b$.

4. Si on considère la symétrie d'axe (AA'), l'image de A est A, celle de A' est aussi elle-même et enfin l'image de B est B'. Comme une symétrie axiale conserve les angles et les distances, alors $AB'A'$ est un triangle rectangle en B' en tant qu'image du triangle ABA' rectangle en B par la symétrie d'axe (AA'). Ainsi le triangle $A'B'C$ est rectangle en B'. De plus $\widehat{B'CA'}$ vaut 45°, donc l'angle $\widehat{B'A'C}$ aussi (la somme des angles dans le triangle $A'B'C$ vaut 180°). Ainsi le triangle $A'B'C$ est aussi rectangle isocèle tout comme le triangle ABC.

Par construction de B', on a $AB' = AB = b$, ainsi $B'C = AC - AB' = a - b$.
Comme le triangle $A'B'C$ est rectangle isocèle en B', alors $B'C = B'A'$. Ensuite $A'B' = AB'$, grâce à la symétrie d'axe (AA'). Ainsi $A'C = BC - AB' = BC - B'C = b - (a - b) = 2b - a$.
Ainsi $A'C$ et $B'C = B'A'$ sont des nombres entiers.

5. Le triangle rectangle isocèle $A'B'C$ est strictement inclus dans le triangle rectangle isocèle ABC. $A'B'C$ possède des longueurs entières, ce qui contredit la minimalité de la première question. Ainsi cette contradiction nous permet de dire que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

6. Voici l'argument géométrique. Comme le triangle $A'B'C$ est rectangle en B', alors grâce au théorème de Pythagore, nous avons $A'C^2 = A'B'^2 + B'C^2 = 2B'C^2$ et donc $2 = \frac{A'C^2}{B'C^2}$, puis $\sqrt{2} = \frac{A'C}{B'C} = \frac{2b-a}{a-b}$.
Voici l'argument calculatoire. Comme $\sqrt{2} = a/b$, alors $2 = a^2/b^2$, puis
$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{\frac{a^2}{b^2}\times b - a}{a-b} = \frac{\frac{a^2}{b} - a}{a-b} = \frac{a^2-ab}{ab-b^2} = \frac{a}{b} \times \frac{a-b}{a-b} = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Ainsi on a écrit $\sqrt{2}$ sous la forme d'une nouvelle fraction $\frac{2b-a}{a-b}$ avec $2b - a$ et $a - b$ entiers. Nous avons $2 > \sqrt{2} = a/b$ (car $2^2 = 4 > 2 = (\sqrt{2})^2$) et donc $2b > a$, puis $b > a - b$. Or $a - b$ est strictement positif, car $1 < \sqrt{2} = a/b$ et donc $b < a$. On a donc construit une fraction $\frac{2b-a}{a-b}$ avec un numérateur et un dénominateur entiers et le dénominateur est strictement plus

petit que b. On arrive à la même contradiction que dans la question précédente.

□

Correction de l'Exercice 9

1.a. $a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}} = a+\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{\left(2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}\right)(a+\sqrt{a^2+1})} = a+\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1} = \frac{2a^3+2a^2\sqrt{a^2+1}+a+a+\sqrt{a^2+1}}{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1} = \frac{2a^2\sqrt{a^2+1}+2a^3+2a+\sqrt{a^2+1}}{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1} = \frac{2a^2\sqrt{a^2+1}+2a(a^2+1)+\sqrt{a^2+1}}{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1} = \sqrt{a^2+1}\times\frac{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1}{2a^2+2a\sqrt{a^2+1}+1} = \sqrt{a^2+1}$.

b. Dans l'expression $a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}$ de la question précédente, si on remplace $\sqrt{a^2+1}$ de nouveau par le résultat de la question précédente, nous obtenons : $\sqrt{a^2+1} = a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}} = a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}}} = a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}}}$. En poursuivant ce processus, nous conjecturons (la preuve rigoureuse sera faite dans les questions 3 et 4) : $\sqrt{a^2+1} = a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{2a+\frac{1}{\ddots}}}}$.

En remplaçant a par 1, nous avons : $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2a+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}}$.

c. On a : $\frac{1}{a+\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}} = \frac{2}{2a+\sqrt{a^2+2}-a} = \frac{2}{\sqrt{a^2+2}+a} = \frac{2(\sqrt{a^2+2}-a)}{(\sqrt{a^2+2}+a)(\sqrt{a^2+2}-a)} = \frac{2(\sqrt{a^2+2}-a)}{(\sqrt{a^2+2})^2-a^2} = \frac{2(\sqrt{a^2+2}-a)}{2} = \sqrt{a^2+2}-a$.

Grâce à ce qui précède, $\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{a+\frac{\sqrt{a^2+2}-a}{2}} = \frac{1}{2a+\sqrt{a^2+2}-a}$. Nous avons donc $\sqrt{a^2+2}-a = \frac{1}{a+\frac{1}{2a+\sqrt{a^2+2}-a}}$. En réinjectant cette relation une fois dans elle-même, nous obtenons : $\sqrt{a^2+2}-a = \frac{1}{a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\frac{1}{2a+\sqrt{a^2+2}-a}}}}$.

En poursuivant ce processus, nous avons : $\sqrt{a^2+2} = a+\frac{1}{a+\frac{1}{2a+\frac{1}{a+\frac{1}{2a+\frac{1}{\ddots}}}}}$. Ainsi pour $a=2$, on a $\sqrt{6} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots}}}}}$.

2. On pose $x = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}$. On remarque alors que $x = 1+\frac{1}{x}$, ce qui équivaut à $x^2 = x+1$, soit $x^2-x-1=0$. Cette équation admet deux solutions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme x est strictement positif, on obtient : $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}$ et on reconnaît le nombre d'or.

On pose $y = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\ddots}}}}}}$. On a donc :

$y = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{y}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{y}{3y+1}} = 1+\frac{3y+1}{2(3y+1)+y} = 1+\frac{3y+1}{7y+2} = \frac{10y+3}{7y+2}$. Ceci revient à l'équation

 Creative Commons : BY: $ ↻

$y(7y+2)=10y+3$, soit : $7y^2-8y-3=0$. On trouve deux solutions $\frac{8+\sqrt{148}}{14}=\frac{4+\sqrt{37}}{7}$ ou $\frac{4-\sqrt{37}}{7}$. Comme y est positif, alors
$\frac{4+\sqrt{37}}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$.

3.a. Nous avons $r_1-a=\sqrt{a^2+1}$ et $r_2-a=-\sqrt{a^2+1}$, donc $(r_1-a)^2=(r_2-a)^2=a^2+1$, donc r_1 et r_2 sont solutions de $(x-a)^2=a^2+1$ soit $x^2-2ax-1=0$.

b. Soit $i\in\{1,2\}$. Nous avons $r_i^2=2ar_i+1$, car r_i est soltuion de $x^2-2ax-1=0$. Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}^*$, en mutlipliant $r_i^2=2ar_i+1$ par r_i^{n-1}, on obtient $r_i^{n+1}=2ar_i^n+r_i^{n-1}$. On a donc : $r_1^{n+1}=2ar_1^n+r_1^{n-1}$ et $r_2^{n+1}=2ar_2^n+r_2^{n-1}$, puis en multipliant la première relation par α et la deuxième par β, nous obtenons : $\alpha r_1^{n+1}=2a\alpha r_1^n+\alpha r_1^{n-1}$ et $\beta r_2^{n+1}=2a\beta r_2^n+\beta r_2^{n-1}$. En ajoutant ces deux relations, nous avons : $\alpha r_1^{n+1}+\beta r_2^{n+1}=2a(\alpha r_1^n+\beta r_2^n)+\alpha r_1^{n-1}+\beta r_2^{n-1}$. Nous avons donc : $w_{n+1}=2aw_n+w_{n-1}$.

c. Pour $n=0$, nous avons : $a=w_0=\alpha r_1^0+\beta r_2^0=\alpha+\beta$. De même $n=1$, nous avons : $2a^2+1=w_1=\alpha r_1^1+\beta r_2^1=\alpha(a+\sqrt{a^2+1})+\beta(a-\sqrt{a^2+1})$. Ceci donne le système : $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&a\\ \alpha(a+\sqrt{a^2+1})+\beta(a-\sqrt{a^2+1})&=&2a^2+1\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&a\\ (\alpha+\beta)a+\sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&2a^2+1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&a\\ a^2+\sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&2a^2+1\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&a\\ \sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&a^2+1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&a\\ \alpha-\beta&=&\sqrt{a^2+1}\end{array}\right.$ En ajoutant les deux lignes, on obtient $2\alpha=a+\sqrt{a^2+1}$, puis $\alpha=\frac{r_1}{2}$. En retranchant à la première ligne du système la deuxième ligne , on obtient $2\beta=a-\sqrt{a^2+1}$, puis $\beta=\frac{r_2}{2}$.

Le deuxième cas se traite de la même manière. Pour $n=0$, nous avons : $1=w_0=\alpha r_1^0+\beta r_2^0=\alpha+\beta$. De même pour $n=1$, nous avons : $2a=w_1=\alpha r_1^1+\beta r_2^1=\alpha(a+\sqrt{a^2+1})+\beta(a-\sqrt{a^2+1})$. Ceci donne le système $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ \alpha(a+\sqrt{a^2+1})+\beta(a-\sqrt{a^2+1})&=&2a\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ (\alpha+\beta)a+\sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&2a\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ a+\sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&2a\end{array}\right.\iff$
$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ \sqrt{a^2+1}(\alpha-\beta)&=&a\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta&=&1\\ \alpha-\beta&=&\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{array}\right.$ En ajoutant les deux lignes, on obtient $2\alpha=1+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}}$, puis $\alpha=\frac{r_1}{2\sqrt{a^2+1}}$. En retranchant à la première ligne du système la deuxième ligne , on obtient $2\beta=1-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{\sqrt{a^2+1}}$, puis $\beta=-\frac{r_2}{2\sqrt{a^2+1}}$.

d. Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous avons $u_n=\frac{r_1}{2}r_1^n+\frac{r_2}{2}r_2^n$. Ainsi la suite (u_n) s'identifie à une suite du type (w_n) de la question 3.b., avec $\alpha=r_1/2$ et $\beta=r_2/2$. Ainsi grâce à la question 3.b., nous avons : $u_{n+1}=2au_n+u_{n-1}$.
Pour la suite (v_n), on raisonne de la même façon, avec ici $\alpha=\frac{r_1}{2\sqrt{a^2+1}}$ et $\beta=-\frac{r_2}{2\sqrt{a^2+1}}$.

e. Montrons cela que pour (u_n), car le raisonnement pour (v_n) est le même.
$u_0=a$ et $u_1=2a^2+1$, par un calcul direct ou grâce au choix de α et β de la question 3.c.. Ainsi u_0 et u_1 sont des entiers naturels.
On a $u_2=2au_1+u_0$, ainsi par additions et mutliplications d'entiers naturels, u_2 est aussi

 Creative Commons : BY: $ ↻

un entier naturel. De même $u_3 = 2u_2 + u_1$ est un entier naturel et ainsi de suite de proche en proche tous les termes u_n sont des entiers naturels.

Pour les terminales, montrons cela plus rigoureusement par récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n et u_{n-1} sont des entiers naturels ». Nous mettons deux termes dans l'hypothèse de récurrence, car pour calculer un terme de la suite (u_n), nous avons besoin des deux termes précédents.
• $\mathcal{P}(1)$ est vrai car u_0 et u_1 sont des entiers naturels.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Ainsi u_n et u_{n-1} sont des entiers naturels. Or nous avons $u_{n+1} = 2au_n + u_{n-1}$, donc par additions et mutliplications d'entiers naturels, u_{n+1} est aussi un entier naturel. Comme u_n est aussi un entier naturel, alors nous avons $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

4.a. Nous avons : $\frac{p_1}{q_1} = a + \frac{1}{2a} = \frac{2a^2+1}{2a}$. Montrons que cette fraction est bien irréductible. Soit d un diviseur commun de $2a$ et $2a^2+1$. Ainsi il existe u et v dans $\mathbb{N}$ tels que : $2a = du$ et $2a^2 + 1 = dv$. Ainsi on a : $2a^2 = dau$ et $2a^2 + 1 = dv$, puis par soustraction, nous avons : $1 = d(v - au)$. Ainsi d divise 1 et donc : $d = 1$. Le seul diviseur commun de $2a$ et $2a^2+1$ étant 1, alors la fraction $\frac{2a^2+1}{2a}$ est irréductible. Par unicité de l'écriture comme fraction irréductible, nous avons : $p_1 = 2a^2 + 1$ et $q_1 = 2a$.

b. On a : $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\ddots}}}} = a + \cfrac{1}{a + a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$ où dans le deuxième terme de la somme on a $n+1$ fractions imbriquées. Dans l'expression précédente, on reconnaît dans le dénominateur le terme $a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ où dans la fraction on a n fractions imbriquées. $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a + \frac{1}{a + \frac{p_n}{q_n}} = a + \frac{q_n}{aq_n + p_n} = \frac{a^2q_n + ap_n + q_n}{aq_n + p_n} = \frac{(a^2+1)q_n + ap_n}{p_n + aq_n}$.

Montrons que cette dernière fraction est irréductible. Soit d un diviseur commun de $(a^2+1)q_n + ap_n$ et de $p_n + aq_n$. Il existe donc u et v dans $\mathbb{N}$ tels que : $(a^2+1)q_n + ap_n = du$ et $p_n + aq_n = dv$. On a donc : $(a^2+1)q_n + ap_n = du$ et $ap_n + a^2q_n = dav$ et donc en retranchant ces deux relations, on a : $q_n = d(u - av)$, puis en utilisant $p_n + aq_n = dv$, on a : $p_n = d(v - a(u - av))$. Ainsi d divise p_n et q_n. Comme la fraction p_n/q_n est irréductible, alors : $d = 1$.

c. Par unicité de l'écriture comme fraction irréductible, nous avons grâce à la question précédente : $p_{n+1} = (a^2+1)q_n + ap_n$ et $q_{n+1} = p_n + aq_n$. Dans ces deux relations en remplaçant n par $n-1$, on obtient aussi : $p_n = (a^2+1)q_{n-1} + ap_{n-1}$ et $q_n = p_{n-1} + aq_{n-1}$. On a : $p_{n+1} = (a^2+1)q_n + ap_n = (a^2+1)(p_{n-1} + aq_{n-1}) + ap_n =$
$ap_n + (a^2+1)p_{n-1} + a(a^2+1)q_{n-1}$. De la relation $p_n = (a^2+1)q_{n-1} + ap_{n-1}$, on a : $p_n - ap_{n-1} = (a^2+1)q_{n-1}$, puis : $p_{n+1} = ap_n + (a^2+1)p_{n-1} + a(p_n - ap_{n-1}) = 2ap_n + p_{n-1}$. De la même manière : $q_{n+1} = p_n + aq_n = (a^2+1)q_{n-1} + ap_{n-1} + aq_n$. De la relation $q_n = p_{n-1} + aq_{n-1}$, on a : $p_{n-1} = q_n - aq_{n-1}$ et donc :
$q_{n+1} = (a^2+1)q_{n-1} + a(q_n - aq_{n-1}) + aq_n = 2aq_n + q_{n-1}$.

d. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = u_n$.
$u_0 = p_0 = a$ et $u_1 = p_1 = 2a^2 + 1$. On a ensuite $u_2 = 2au_1 + u_0 = 2ap_1 + p_0 = p_2$. De même $u_3 = 2u_2 + u_1 = 2p_2 + p_1 = p_3$ ainsi de suite de proche en proche on a $p_n = u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Pour les terminales, montrons cela plus rigoureusement par récurrence.

 Creative Commons : BY NC SA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = p_n$ et $u_{n-1} = p_{n-1}$ ». Nous mettons deux termes dans l'hypothèse de récurrence, car pour calculer un terme de la suite (u_n) ou (p_n), nous avons besoin des deux termes précédents.
• $\mathcal{P}(1)$ est vrai car $u_0 = p_0$ et $u_1 = p_1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Ainsi $u_n = p_n$ et $u_{n-1} = p_{n-1}$. Or nous avons $u_{n+1} = 2au_n + u_{n-1} = 2ap_n + p_{n-1} = p_{n+1}$, donc $u_{n+1} = p_{n+1}$. Comme $u_n = p_n$, alors nous avons $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.
La deuxième relation se montre de la même manière, car $v_0 = q_0 = 1$ et $v_1 = q_1 = 2a$.

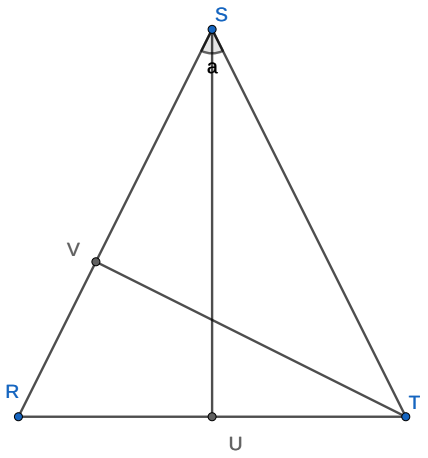
e. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons :
$\frac{p_n}{q_n} = \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{r_1^{n+1}+r_2^{n+1}}{2}}{\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{2\sqrt{a^2+1}}} = \sqrt{a^2+1}\frac{r_1^{n+1}+r_2^{n+1}}{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}} = \sqrt{a^2+1}\left(\frac{1+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}\right)$, en divisant le numérateur et le dénominateur par r_1^{n+1}.

f. Nous avons : $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \left|\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a-\sqrt{a^2+1}}\right| = \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}-a}$, car $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{a^2} = |a| = a$. Par ailleurs $0 < \sqrt{a^2+1} - a < \sqrt{a^2+1} + a$. On a donc : $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}$, car $n+1$ devient aussi très grand que n est grand. En passant à la limite dans la relation de la question précédente, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{a^2+1}$.

□

Correction de l'Exercice 10

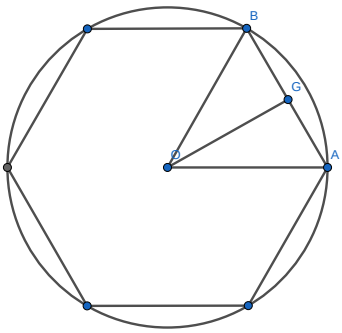
1.



Nous avons : $RS = 1$, puis : $RU = RS \times \sin(\widehat{RST}) = \sin(a/2)$ et
$SU = RS \times \cos(\widehat{RSU}) = \cos(a/2)$ et donc $RT = 2RU = 2\sin(a/2)$. Ainsi l'aire du triangle RST est : $\frac{RT \times SU}{2} = \sin(a/2)\cos(a/2)$, car (SU) est une hauteur du triangle RST.
On note V la projection orthogonale de T sur (RS). Nous avons : $TV = ST \times \sin(\widehat{RST})$. Ainsi l'aire de RST vaut : $\frac{TU \times RS}{2} = \frac{\sin(a)}{2}$.
Nous avons donc calculé la même aire de deux façons différentes, ce qui donne : $\frac{\sin(a)}{2} = \sin(a/2)\cos(a/2)$, puis : $\sin(a) = 2\sin(a/2)\cos(a/2)$.

En élevant cette dernière relation au carré, nous avons : $\sin^2(a) = 4\sin^2(a/2)\cos^2(a/2)$, soit : $1 - \cos^2(a) = 4(1 - \cos^2(a/2))\cos^2(a/2)$, soit :
$\cos^2(a) = 1 + 4\cos^4(a/2) - 4\cos^2(a/2) = (2\cos^2(a) - 1)^2$. Nous avons $\cos(a)$ positif car a est dans $[0, \pi/2[$. De plus comme $a/2$ est dans $[0, \pi/4[$, alors $\cos(a/2)$ est dans $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ et donc $2\cos^2(a)$ est dans $]1, 2]$ et donc $2\cos^2(a) - 1$ est positif, donc la relation
$\cos^2(a) = (2\cos^2(a) - 1)^2$ implique : $\cos(a) = 2\cos^2(a) - 1$.

2. Raisonnons sur une figure pour $n = 6$.



Il faut calculer l'aire du triangle OAB et ensuite la mutliplier par n (car nous avons n triangles identiques dans un polygone régulier à n côtés). On note G le milieu de $[AB]$ qui est aussi la hauteur et la bissectrice issue de O dans le triangle OAB isocèle en O. L'angle $\widehat{AOB}$ vaut $2\pi/n$. En effet l'angle au sommet O de chaque triangle s'obtient en considérant l'angle du tour complet 2π que l'on divise par n, car nous avons n triangles identiques. Ainsi l'angle $\widehat{AOG}$ vaut π/n. Nous avons : $OG = OB \times \cos\left(\widehat{AOG}\right) = 1 \times \cos(\pi/n) = \cos(\pi/n)$. On a aussi : $GB = OB \times \sin\left(\widehat{AOG}\right) = \sin(\pi/n)$. L'aire du triangle AOG vaut $\frac{GB \times OG}{2}$ et donc l'aire du triangle AOB vaut $2 \times \frac{GB \times OG}{2} = GB \times OG = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Le polygone d'aire A_n se découpe en n triangles identiques au triangle AOB, alors : $A_n = n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

3. $\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2n\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, au numérateur, nous avons utilisé la formule de la première question avec $a = \frac{\pi}{2n}$.

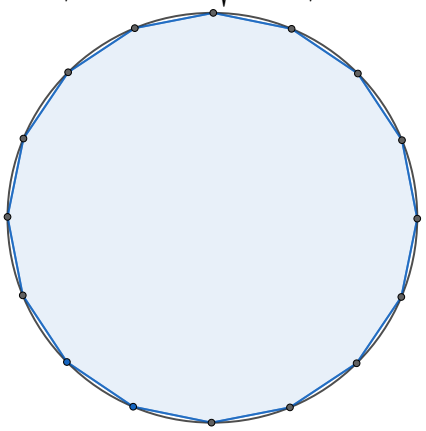
 Creative Commons :

4. D'une part, comme $P_n = \frac{A_4}{A_8} \times \frac{A_8}{A_{16}} \times \frac{A_16}{A_{32}} ... \times \frac{A_{2^{n-1}}}{A_{2^n}} \times \frac{A_{2^n}}{A_{2^{n+1}}}$, nous avons des simplifications dans ce produit de fractions : $A_8, A_{16}, A_{32}, ..., A_{2^{n-1}}, A_{2^n}$. Ainsi il reste $P_n = \frac{A_4}{A_{2^{n+1}}}$. Or grâce à la deuxième question, $A_4 = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$ et $A_{2^{n+1}} = 2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, ainsi $P_n = \frac{2}{2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$. D'autre part la question 3 donne : $P_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \times ... \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. En identifiant les deux valeurs de P_n, on trouve : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \times ... \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{2}{2^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

5.a. On a grâce à la première question : $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ et donc $u_n = 2u_{n+1}^2 - 1$ et donc $u_{n+1}^2 = \frac{1+u_n}{2}$. Or $\pi/2^{n+1}$ est dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, donc $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ est positif, puis $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

b. Grâce à la question 4, nous avons $u_2 \times u_3 \times ...u_n = \frac{2}{A_{2^{n+1}}}$. Or nous avons $u_2 = \cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Grâce à la question précédente, $u_3 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$, puis $u_4 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_3} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$ et donc de proche en proche, en remplaçant les u_k par $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{...}}}}$, avec $k-1$ racines imbriquées, nous avons $\frac{2}{A_{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$ avec n facteurs.

c. Il faut faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente. Il faut trouver la limite de $A_{2^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$. La figure ci-dessous nous montre que lorsque le nombre de côtés d'un polygone régulier de cercle circonscrit $\mathcal{C}$ augmente, l'aire de ce polygone tend vers l'aire du cercle (il est de plus en plus rempli par le polygone). Ainsi visuellement $A_{2^{n+1}}$ tend vers l'aire du cercle trigonométrique à savoir $\pi \times 1^2 = \pi$. En passant à la limite dans la relation de la question précédente, on a :
$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$, avec un nombre infini de facteurs.



6.a. Comme la fonction cosinus est continue, alors $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos(0) = 1$.

b. Dans le triangle AOC rectangle en A, nous avons :

 Creative Commons : BY NC SA

$AC = OA \times \tan(\widehat{AOC}) = 1 \times \tan(x) = \tan(x)$.

c. Dans le triangle OAB, la hauteur issue de B vaut $\sin(x)$ et comme $OA = 1$, alors son aire vaut $\frac{\sin(x)}{2}$.

La portion du disque limitée par (OA), (OB) et l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$, a une aire qui vaut $\pi \times 1^2 \times \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. En effet l'aire du cercle tout entier est $\pi \times 1^2$. La portion de cercle dont on cherche l'aire est la fraction $\frac{x}{2\pi}$ du cercle total (car le cercle total correspond à un angle de 2π).
L'aire du triangle OAC vaut : $\frac{OA \times AC}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$.

Comme le triangle OAB est contenu dans la portion de cercle défini par $\overset{\frown}{AB}$, qui est elle-même contenue dans le triangle OAC, alors les aires de ces trois figures sont dans le même ordre que la relation d'inclusion et donc : $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$.

d. On a donc : $\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, en divisant tout par $\sin(x)$ qui est strictement positif (x est dans $]0, \pi/2[$), on a : $1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$. Comme toutes ces quantités sont strictement positives, alors on peut passer à l'inverse dans ces inégalités, ce qui change le sens de celles-ci : $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

e. Nous avons $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$ et donc grâce à la question précédente, par encadrement, nous avons : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

f. Nous avons $2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$. Comme $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors la question précédente nous dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$, puis la formule $A_n = \pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, nous donne grâce à la question 6.a : $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \pi$.

□

Correction de l'Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :
$f(x) - x = \sqrt{a+x} - x = \frac{(\sqrt{a+x}-x)(\sqrt{a+x}+x)}{\sqrt{a+x}+x} = \frac{(\sqrt{a+x})^2 - x^2}{\sqrt{a+x}+x} = \frac{-x^2+x+a}{\sqrt{a+x}+x}$. Les racines de $-X^2 + X + a$, sont $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Cette dernière racine est strictement négative, donc : $x_0 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a $f(x) - f(y) = \sqrt{x+a} - \sqrt{y+a} = \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{y+a})(\sqrt{x+a}-\sqrt{y+a})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}} = \frac{(\sqrt{x+a})^2 - (\sqrt{y+a})^2}{\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}} = \frac{x-y}{\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}}$. En passant aux valeurs absolues, nous avons :
$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a+y}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $x = u_n$ et $y = x_0$ dans la relation précédente. Mais comme $f(x) = f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(x_0) = x_0$, alors on a : $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{|u_n - x_0|}{\sqrt{a+u_n}+\sqrt{a+x_0}} \leq \frac{|u_n - x_0|}{\sqrt{a+x_0}}$.

4. Montrons cela par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\mathcal{P}(n) : |u_n - x_0| \leq \frac{x_0}{\sqrt{(a+x_0)^n}}$.

• Pour $n = 0$, on a : $|u_n - x_0| = |x_0| = x_0$ et $\frac{x_0}{\sqrt{(a+x_0)^0}} = \frac{x_0}{1} = x_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On a :
$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{|u_n - x_0|}{\sqrt{a+x_0}} \leq \frac{x_0}{\sqrt{(a+x_0)^n} \times \sqrt{a+x_0}} = \frac{x_0}{\sqrt{(a+x_0)^{n+1}}}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

5. On a : $0 \leq \frac{1}{\sqrt{(a+x_0)^n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a+x_0}}\right)^n$. Or on a $\sqrt{a+x_0} > \sqrt{a} \geq 1$ et $0 \leq \frac{1}{\sqrt{a+x_0}} < 1$. Ainsi grâce aux limites d'une suite géométriques, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a+x_0}}\right)^n = 0$ et donc grâce à la

 Creative Commons :

question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_0| = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$.

Comme $u_n = \sqrt{a+u_{n-1}} = \sqrt{a+\sqrt{a+u_{n-2}}} = ... = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$, avec n racines imbriquées, on a donc, grâce à la limite trouvée : $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+....}}}}$

Pour $a = 1$, on trouve : $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$, ce qui correspond au nombre d'or.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ au moins égal à 2. Grâce à la question précédente, il faut trouver a tel que : $n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, soit : $2n-1 = \sqrt{1+4a}$, soit : $4n^2 - 4n + 1 = 1 + 4a$ et donc : $a = n^2 - n = n(n-1)$. Ainsi cela est valable pour tout entier $n \geq 2$.

□

Correction de l'Exercice 12

1. Dans toute la question, il sera possible de dériver les diverses expressions, car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, car $1+x$ est strictement positif pour x dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs aucun des dénominateur ne va s'annuler, car : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1+x > 0$.
Montrons la formule proposée par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\times3\times...\times(2n-3)}{2^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)^{n-1}}$.
• Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Nous avons $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, puis en redérivant cette relation : $f^{(2)}(x) = f''(x) = (f')'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2(x+1)} = (-1)^{2-1}\frac{2\times2-3}{2^2}\frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)^{2-1}}$. Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\times3\times...\times(2n-3)}{2^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)^{n-1}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)^{n-1}}\right) = -\frac{\frac{(1+x)^{n-1}}{2\sqrt{x+1}}+(n-1)\sqrt{1+x}(1+x)^{n-2}}{(1+x)(1+x)^{2n-2}} = -\frac{(1+x)^{n-1}+2(n-1)(1+x)(1+x)^{n-2}}{2\sqrt{1+x}(1+x)^{2n-1}} = \frac{-(2n-1)(1+x)^{n-1}}{2\sqrt{1+x}(1+x)^{2n-1}} = \frac{-(2n-1)}{2\sqrt{1+x}(1+x)^n}$. Ainsi en dérivant la relation donnée par $\mathcal{P}(n)$, nous avons (bien voir que $(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times...\times(2n-3)}{2^n}$ est une constante) :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\times3\times...\times(2n-3)}{2^n}\frac{-(2n-1)}{2\sqrt{1+x}(1+x)^n} =$
$(-1)^n\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2^{n+1}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}(1+x)^n}$. On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

2. La dérivée de gh est $g'h + gh'$ et donc : $\int_a^b (g'(t)h(t) + g(t)h'(t))dt = [g(t)h(t)]_a^b$, soit : $\int_a^b g'(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h'(t)dt = g(b)h(b) - g(a)h(a)$, puis :
$\int_a^b g'(t)h(t)dt = g(b)h(b) - g(a)h(a) - \int_a^b g(t)h'(t)dt$.

3. Montrons la relation par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose
$\mathcal{P}(n) : \sqrt{2} = 1 + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.
• En reprenant la question précédente avec $h : t \mapsto 1-t$ et $g : t \mapsto f'(t)$. On a :
$\forall t \in \mathbb{R}_+, h'(t) = -1$ et $g'(t) = f^{(2)}(t)$. Ainsi : $\int_0^1 (1-t)f^{(2)}(t)dt = \int_0^1 g'(t)h(t)dt = g(1)h(1) - g(0)h(0) - \int_0^1 g(t)h'(t)dt = 0 - f'(0) - \int_0^1 (-1)f'(t)dt = -f'(0) + \int_0^1 f'(t)dt = f'(0) + [f(t)]_0^1 = f'(0) + f(1) - f(0)$ et donc $\sqrt{2} = f(1) = 1 + \frac{f'(0)}{1!} + \int_0^1 (1-t)f^{(2)}(t)dt$, ce qui donne $\mathcal{P}(1)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n) : 1 + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.
En reprenant la question précédente avec $h = f^{(n+1)}$ et $g : t \mapsto -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, on a :
$h' = f^{(n+2)}$ et : $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = -\frac{-(n+1)(1-t)^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(1-t)^n}{(n+1)\times n!} = \frac{(1-t)^n}{n!}$. Ainsi nous avons :

 Creative Commons :

$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^1 g'(t)h(t)dt = g(1)h(1) - g(0)h(0) - \int_0^1 g(t)h'(t)dt =$
$0 - f^{(n+1)}(0) \times \frac{-1}{(n+1)!} - \int_0^1 f^{(n+2)}(t) \times \frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$. En injectant cela dans la formule donnée par $\mathcal{P}(n)$, on obtient :
$\sqrt{2} = 1 + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{3!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

4. On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$ et grâce à la première question, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-3)}{2^n n!} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-3)}{(2 \times 2 \times ... \times 2) \times (1 \times 2 \times ... \times n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-3)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}$.
Par ailleurs, on a toujours grâce à la première question : $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^1 (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^{n+1} n!} \frac{1}{2\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^n n!} \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt$, en imitant le calcul précédent sur le dénominateur.
En injectant ces résultats dans la relation de la question précédente, on obtient bien :
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2(n-1)-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)} + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$, $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$,...,$0 \leq \frac{2n-1}{2n} \leq 1$ et donc :
$0 \leq \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \leq 1$.
De plus, on a : $\forall t \in [0,1]$, $\sqrt{1+t}(1+t)^n \geq 1$ et donc : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} \leq \frac{(1-t)^n}{4}$.
Ainsi par croissance de l'intégrale :
$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4} dt = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{4(n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{4(n+1)}$.
Par conséquent : $0 \leq R_n \leq \frac{1}{4(n+1)}$.

6. Nous avons grâce à la question précédente :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{4(n+1)} \leq (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt = (-1)^n R_n \leq \frac{1}{4(n+1)}$.
Comme nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$, alors par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{4\sqrt{1+t}(1+t)^n} dt = 0$. Ainsi nous passons à la limite dans la relation de la question 4 et nous obtenons notamment la somme infinie de tous les termes de la forme $(-1)^{(n-1)} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2(n-1)-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)}$, quand n décrit $\mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, soit :
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6} + ... + (-1)^{(n-1)} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2(n-1)-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)} + ... =$
$1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2k-3)}{2 \times 4 \times ... \times (2k)}$.

□

 Creative Commons :