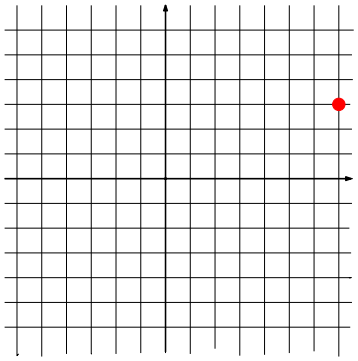
Taxis, briques et cartes

B. Cloez

Niveau : De la Terminale au Supérieur
Difficulté : de ★ pour le premier exercice à ★★★★ pour le dernier
Durée : quatre à cinq heures
Rubrique(s) : Analyse, Algèbre (Groupe symétrique), Géométrie (Distances), Combinatoire (Dénombrement), Probabilités (Discrètes).

La petite histoire...
À Manhattan, les routes forment un quadrillage à angle droit : pour le voir, il suffit de taper « Manhattan map » dans un moteur de recherche. Les avenues sont les lignes verticales et les rues les lignes horizontales. Pour donner son adresse, on peut donc utiliser un système de coordonnées entières : par exemple, si j'habite à l'angle de la $7^{\text{ème}}$ avenue et de la $3^{\text{ème}}$ rue, mon adresse peut être codée par le couple de coordonnées $(7;3)$. Pour aller d'un point à un autre en suivant les rues, on utilise alors une géométrie particulière : la géométrie « du taxi ». Elle est différente de la géométrie classique, dite *euclidienne*, comme vont l'illustrer les exercices suivants.
Manhattan peut ainsi être modélisée par un quadrillage régulier, où chaque point est l'intersection d'une avenue et d'une rue et est relié à chacun de ses quatre voisins par un segment de longueur 1.

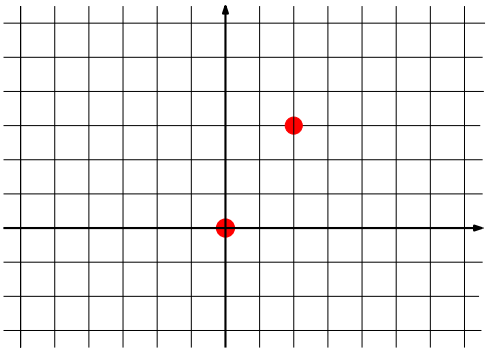


Du point de vue d'un taxi, la distance entre deux points est égale au nombre minimum de segments de longueur 1 qu'il faut parcourir sur ce quadrillage pour les relier.
Quelle est la distance pour aller d'un point $(a;b)$ à un point $(c;d)$? Quel est le nombre minimal de briques qu'il faut déplacer pour transformer un mur en un autre mur ? Quel rapport y a-t-il entre ces questions et la façon de mélanger un jeu de cartes ? C'est ce que vous allez découvrir ici !

Dans cet atelier, nous travaillons avec une distance non usuelle qui correspond à une géométrie non euclidienne. Nous verrons au travers de différents exemples comment les propriétés de cette distance s'appliquent à des problèmes de géométrie dans le plan, de combinatoire ou de probabilités, ou plus concrètement au mouvement des taxis, au déplacement de briques et au mélange de paquets de cartes.
Les points du programme de lycée abordés ici sont l'utilisation d'un repère orthonormé, le comportement des suites géométriques et le raisonnement par récurrence.

Exercice 1 (Un peu de dessin).
On décrit Manhattan par un quadrillage associé à un repère orthornormé du plan. Pour deux points A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et B de coordonnées $(x_B; y_B)$, on supposera que x_A, y_A, x_B et y_B sont des entiers relatifs. Un taxi souhaitant aller du point A au point B en empruntant uniquement ce quadrillage doit uniquement passer par des points de la forme $(x; y)$, avec x et y entiers relatifs. La distance entre deux points pour un taxi est alors définie comme la longueur du plus court chemin lui permettant de relier ces deux points, soit le nombre minimal de segments du quadrillage de longueur 1 permettant de les relier.

1. Commençons par calculer la distance entre deux points $(0; 0)$ et $(2; 3)$.



a. Lorsque cela est possible, dessiner sur le quadrillage l'exemple d'un chemin de longueur ℓ reliant ces deux points, pour $\ell = 3$, $\ell = 5$, $\ell = 7$, $\ell = 8$, $\ell = 9$.

b. Donner la distance (minimale) à parcourir pour un taxi pour aller du point $(0; 0)$ au point $(2; 3)$.

c. Dessiner tous les chemins les plus courts pour relier ces deux points $(0; 0)$ et $(2; 3)$. Combien y en a-t-il ?

d. Si le chauffeur de taxi disposait d'un hélicoptère et pouvait relier ces deux points en choisissant n'importe quel chemin dans le plan, que vaudrait alors la distance entre les deux points ? À combien de chemins dans le plan cette distance correspond-elle ?

 Creative Commons :

2. Un taxi souhaite connaître l'ensemble des lieux à Manhattan se situant à une distance donnée de sa position.

a. Tracer sur le quadrillage tous les points se trouvant à distance 3 de $(0;0)$.

b. En géométrie euclidienne (c'est-à-dire en géométrie usuelle), comment appelle-t-on la figure décrivant l'ensemble des points du plan se trouvant à distance 3 de $(0;0)$?

3. Deux chauffeurs de taxi habitent respectivement en $(0;0)$ et $(2;2)$ à Manhattan. Ils souhaitent se partager Manhattan en fonction de leur lieu de résidence. Ils décident que quand un client cherche un taxi, c'est à celui des deux chauffeurs qui habite le plus près de la position de ce client de prendre la course.

a. Comment appelle-t-on l'ensemble des points équidistants de deux points donnés en géométrie usuelle (c'est-à-dire l'ensemble des points se situant à la même distance de chacun de ces deux points) ?

b. Décrire l'ensemble des points se situant à égale distance en taxi des deux lieux de résidence des chauffeurs.

c. Déterminer les zones de Manhattan revenant à chacun des deux chauffeurs.

Exercice 2 (Un peu de calcul).

Soient A et B deux points du plan, respectivement de coordonnées $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$. On suppose que les coordonnées x_A, y_A, x_B et y_B sont des entiers relatifs. On rappelle qu'un chemin en taxi est un itinéraire formé d'une suite de segments de longueur 1 empruntant uniquement le quadrillage des rues et des avenues. La distance $d(A,B)$ en taxi entre A et B est donnée par

$$d(A,B) = \text{la plus petite longueur de chemin en taxi reliant } A \text{ à } B.$$

1. On détermine tout d'abord une formule explicite pour $d(A,B)$.

a. Montrer que $d(A,B) \leqslant |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$.

b. Montrer que $d(A,B) \geqslant |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ puis conclure.

c. Vérifier cette formule sur l'exemple étudié dans la question **1.b** de l'exercice précédent.

2. On compare à présent d et la distance euclidienne.

a. Rappeler la formule qui donne la distance euclidienne AB entre deux points A et B du plan en fonction de leurs coordonnées.

b. Montrer que

$$AB \leqslant d(A,B) \leqslant \sqrt{2}\, AB.$$

 Creative Commons :

c. Justifier de façon géométrique les affirmations suivantes :

$$(i) \quad AB = 0 \Leftrightarrow A = B\,;$$
$$(ii) \quad AB = BA\,;$$
$$(iii) \quad AC \leqslant AB + BC.$$

3. Montrer géométriquement puis en utilisant l'expression de $d(A, B)$ trouvée dans la question **1** que l'on a de même :

$$(i) \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B\,;$$
$$(ii) \quad d(A, B) = d(B, A)\,;$$
$$(iii) \quad d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C).$$

Exercice 3 (Un problème de briques).
Soient n et k deux entiers naturels. On considère n briques et k colonnes successives sur lesquelles on peut empiler n'importe quel nombre de briques. On cherche à décrire les murs que l'on peut construire sur ces k colonnes à partir des n briques dont on dispose. Un tel mur M sera représenté par $(m_1, ..., m_k)$ où m_i est un entier naturel désignant le nombre de briques sur la $i^{\text{ème}}$ colonne et

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Notons qu'une colonne peut être laissée vide (c'est-à-dire que $m_i = 0$). En particulier, l'empilement de briques en bas à gauche de la figure 1 ne correspond qu'à un seul mur ; le mur $(1, 0, 1)$. Sur cette figure, de gauche à droite, la première ligne correspond aux murs $(2, 0, 0), (0, 2, 0)$ et $(0, 0, 2)$ alors que la deuxième ligne aux murs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 0)$.

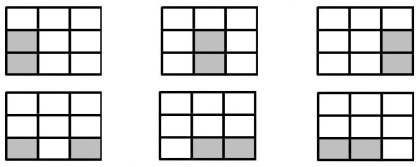


FIGURE 1 – Murs de $n = 2$ briques sur $k = 3$ colonnes (en gris)

1. Dessiner tous les murs à 3 briques constructibles sur 4 colonnes. Combien y en a-t-il ?

 Creative Commons :

2. Pour deux murs M et N sur k colonnes, on note $d_k(M,N)$ le nombre minimum de briques qu'il faut déplacer pour transformer le mur M en le mur N.

a. Calculer les distances $d_k(M,N)$ entre les murs de la figure 2 :

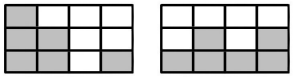


FIGURE 2 – À gauche, le mur $M = (3,2,0,1)$. À droite, le mur $N = (1,2,1,2)$.

b. Montrer que pour tous murs M, N, O sur k colonnes, l'application d_k vérifie

$$\begin{aligned} (i) \quad & d_k(M,N) = 0 \Leftrightarrow M = N \\ (ii) \quad & d_k(M,N) = d_k(N,M) \\ (iii) \quad & d_k(M,N) \leqslant d_k(M,O) + d_k(O,N). \end{aligned}$$

On dit alors que d_k est une distance.

c. Soient $M = (m_1, m_2)$ et $N = (n_1, n_2)$ deux murs ayant le même nombre n de briques ($n = m_1 + m_2$ et $n = n_1 + n_2$) et constructibles sur deux colonnes. Calculer la distance $d_2(M,N)$ en fonction de m_1, m_2, n_1 et n_2.

d. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, si $M = (m_1, ..., m_k)$ et $N = (n_1, ..., n_k)$ sont deux murs sur k colonnes, avec le même nombre de briques, alors

$$d_k(M,N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} |m_i - n_i|.$$

3. (*Bonus*) Combien existe-t-il de murs à n briques constructibles sur k colonnes ?

Exercice 4 (Probabilités : échauffement).
On peut voir les murs de briques comme des histogrammes. À un histogramme correspond une loi de probabilité : en effet, se donner une loi de probabilité P sur $\{1, ..., k\}$ revient à se donner des nombres positifs $p_1, ..., p_k$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_k = 1,$$

 Creative Commons :

et $P(\{i\}) = p_i$ pour tout i de $\{1, ..., k\}$. On peut ainsi représenter la probabilité P par le vecteur $p = (p_1, ..., p_k)$.
Nous allons maintenant utiliser pour des probabilités la distance apparue pour les murs dans la question **2.d** de l'exercice précédent.
Si $p = (p_1, ..., p_k)$ et $q = (q_1, ..., q_k)$ sont deux probabilités sur $\{1, ..., k\}$ on pose

$$d(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} |p_i - q_i|.$$

1. Calculer la distance entre les lois de probabilité p et q définies par

$$p_1 = 1/5, \quad p_2 = 2/5, \quad p_3 = 2/5,$$

et

$$q_1 = 3/5, \quad q_2 = 0 \text{ et } \quad q_3 = 2/5.$$

2. On rappelle que pour tout $A \subset \{1, ..., k\}$,

$$p(A) = \sum_{i \in A} p_i.$$

On va montrer que pour toutes lois de probabilité p et q sur $\{1, ..., k\}$,

$$d(p, q) = \max_{A \subset \{1,...,k\}} (p(A) - q(A)).$$

Cela signifie que $d(p, q)$ est la plus grande des valeurs $p(A) - q(A)$ que l'on peut trouver en parcourant les différentes parties A de $\{1, ..., k\}$ possibles.

a. Montrer que

$$\max_{A \subset \{1,...,k\}} (p(A) - q(A)) \leqslant d(p, q).$$

b. On pose

$$B = \{ \, i \in \{1, ..., n\} \mid p_i \geqslant q_i \}.$$

Montrer que

$$p(B) - q(B) = \sum_{i \in B} |p_i - q_i| = \sum_{i \in B^c} |q_i - p_i|.$$

c. En déduire que

$$d(p, q) = \max_{A \subset \{1,...,k\}} (p(A) - q(A)).$$

 Creative Commons :

Commentaires sur l'Exercice 4

En 1781, le mathématicien français Gaspard Monge, dans son *Mémoire sur la théorie des déblais et remblais*, cherchait à déterminer comment déplacer un tas de sable pour changer sa forme de la façon la plus économique. Ce point rappelle ceux étudiés dans l'exercice **2**, mis

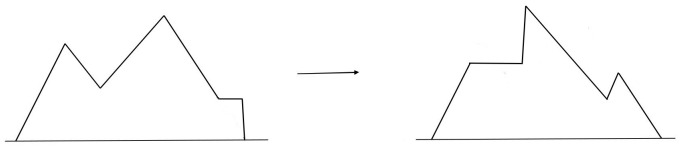


FIGURE 3 – déplacement d'un tas de sable

à part qu'il y a *a priori* beaucoup plus de grains dans un tas de sable que de briques dans un mur. Une manière naturelle d'approcher ce problème est d'utiliser l'analogue continu des histogrammes : les fonctions de densité. L'un des résultat fondamentaux de cette *théorie du transport optimal* est ce que l'on appelle la dualité de Kantorovich, nommé en l'honneur de Leonid Kantorovich qui démontra cette égalité dans les années 1940 et qui est le seul chercheur soviétique à avoir décroché le prix Nobel d'économie. Cette dualité assure que l'on peut voir la distance entre deux probabilités à la fois comme un maximum sur les événements possibles ou comme la minimisation d'un coût de transport. Un aperçu de ce résultat est donné dans la question **2** de l'exercice **4** pour le cas particulier des probabilités sur un ensemble fini (et d'un certain coût de transport).

Exercice 5 (Mélange de cartes).

On considère un jeu de cartes contenant n cartes avec $n \geqslant 3$. N'hésitez pas à vous placer d'abord dans le cas où $n = 5$ si cela vous aide. Pour les jeux de cartes, bien sûr, on pourra considérer les cas $n = 32$ et $n = 52$.

Savoir si l'on a bien mélangé un jeu de cartes n'est pas une chose facile. Tout d'abord, que cela signifie-t-il ? Le but de cet exercice est de donner une première réponse à cette question et d'étudier une technique de mélange.

On numérote les cartes de 1 à n. Une *disposition* du jeu de cartes sera un vecteur de taille n dont les coordonnées sont les nombres de 1 à n présents une et une seule fois, c'est-à-dire un vecteur

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

tel que pour tout i de $\{1,\dots,n\}$, σ_i de $\{1,\dots,n\}$ et tel que pour tous i,j de $\{1,\dots,n\}$, si $i \neq j$ alors $\sigma_i \neq \sigma_j$.



FIGURE 4 – Exemple d'une disposition d'un jeu de 5 cartes : $\sigma = (1,4,5,3,2)$.

1. Commençons par manipuler le concept de disposition.

a. Si $n = 5$, c'est-à-dire que le jeu comprend 5 cartes, les vecteurs suivants sont-ils des dispositions du jeu de cartes

$$(1,2,3,4,5), \qquad (5,1,2,4,3,6), \qquad (5,1,2,4,3), \qquad (5,1,2,4,1)\,?$$

b. Justifier que si $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ est une disposition, alors pour tout j de $\{1,\dots,n\}$ il existe i dans $\{1,\dots,n\}$ tel que $j = \sigma_i$.

c. Combien y-a-t-il de dispositions possibles d'un jeu de n cartes ?

d. Justifier que l'on ne peut pas obtenir toutes les dispositions d'un jeu de cartes uniquement en le coupant un certain nombre de fois.

On appelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des dispositions possibles d'un jeu de n cartes. Ainsi on a montré que le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$, noté $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n)$ vaut

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n.$$

On va étudier une méthode qui permet de bien mélanger un jeu de cartes. Quelle que soit la disposition initiale, on prend la première carte et on la replace au hasard (c'est-à-dire *uniformément* au hasard) dans le paquet. Après une étape de ce mélange, on passe ainsi d'une disposition

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n)$$

à une disposition

$$\sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_N, \sigma_1, \sigma_{N+1}, \dots, \sigma_n)$$

où N est choisi uniformément au hasard parmi les entiers $\{1,\dots,n\}$. C'est-à-dire que N est une variable aléatoire uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Par exemple, si $N = 1$ alors la disposition n'a pas changé et si $N = n$ la première carte est placée en dernière place. Soit S_0 la disposition initiale du jeu et S_k la variable

aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ (c'est-à-dire la disposition aléatoire) correspondant à la disposition du jeu de cartes après k étapes de mélange. Pour un événement A tel que $P(A) > 0$, on note P_A la probabilité conditionnelle sachant A, c'est-à-dire que pour un événement B, on a

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

2.a. Justifier que pour toute disposition $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ de $\mathcal{S}_n$, et tout ℓ de $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_{\{S_0=\sigma\}}[S_1 = (\sigma_2, \ldots, \sigma_\ell, \sigma_1, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_n)] = \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, expliquer pourquoi la probabilité conditionnelle de l'événement $\{S_1 = (\sigma_2, \ldots, \sigma_\ell, \sigma_1, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_n)\}$ sachant $\{S_0 = \sigma\}$ vaut $1/n$.
2.b. Justifier que pour tous σ et σ' de $\mathcal{S}_n$ et tout $k \geqslant 0$, $P_{\{S_k=\sigma\}}[S_{k+1} = \sigma']$ ne dépend pas de k, et calculer sa valeur.
On note maintenant, pour tous σ, σ' de $\mathcal{S}_n$ et tout entier strictement positif k,

$$q_k(\sigma, \sigma') = P_{\{S_0=\sigma\}}[S_k = \sigma']$$

la probabilité de passer en k étapes de la disposition σ à la disposition σ'.

3. Calculons q_k sur quelques exemples.

a. Calculer $q_1(\sigma, \sigma')$ lorsque

$$\sigma = (1, 2, 3, ..., n-1, n), \quad \sigma' = (2, 3, ..., n-1, 1, n),$$

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, ..., n-1, n), \quad \sigma' = (1, 2, n, 4, ..., n-1, 3),$$

puis $q_2(\sigma, \sigma')$ lorsque

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, .., n), \quad \sigma' = (2, 1, 4, 3, ..., n).$$

b. Calculer $q_0(\sigma, \sigma)$ et $q_1(\sigma, \sigma)$ pour toute disposition σ de $\mathcal{S}_n$.

c. Montrer que si k est un entier naturel, $q_k(\sigma, \sigma) \geqslant (1/n)^k$.

4. Montrer que pour tout σ de $\mathcal{S}_n$, on a

$$\sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} q_1(\sigma, \sigma') = 1.$$

5.a. Montrer que pour tout σ' de $\mathcal{S}_n$,

$$P(S_1 = \sigma') = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(S_0 = \sigma) q_1(\sigma, \sigma').$$

 Creative Commons :

5.b. Si k est un entier naturel et σ' est dans $\mathcal{S}_n$, généraliser la formule précédente en

$$\forall i \in \{0, ..., l\}, \quad P(S_k = \sigma') = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} P(S_i = \sigma) q_{k-i}(\sigma, \sigma').$$

6. On considère que le jeu est parfaitement mélangé lorsqu'il est impossible d'avoir la moindre information sur la disposition des cartes. Cela veut dire que toute disposition de cartes est équiprobable : chaque disposition a une probabilité égale d'être réalisée. La loi de la disposition aléatoire est alors la loi uniforme p_U c'est-à-dire que, comme le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ est $n!$

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \qquad p_U(\sigma) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{1}{n!}.$$

Montrer que si le jeu est bien mélangé, alors il le reste lorsque l'on continue à le mélanger par notre méthode (on dit que la distribution uniforme est une *distribution d'équilibre* pour notre procédé).

7. Si k est un entier naturel, on note p_k la loi de probabilité donnant la disposition du jeu de cartes au bout de k étapes :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad p_k(\sigma) = P(S_k = \sigma).$$

On va montrer qu'à chaque étape du mélange le jeu est mieux mélangé, ou plus précisément qu'il s'approche du mélange parfait. Pour cela on introduit une distance (eh oui... il faut bien dire en quel sens on « s'approche » !) en reprenant l'expression étudiée dans le précédent exercice. Si p et q sont deux lois de probabilités sur $\mathcal{S}_n$ décrites par les valeurs $p = (p(\sigma); \sigma \in \mathcal{S}_n)$ et $q = (q(\sigma); \sigma \in \mathcal{S}_n)$ alors on définit "la distance entre p et q" par

$$d(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} |p(\sigma) - q(\sigma)|.$$

On va montrer que le mélange devient asymptotiquement parfait, au sens où

$$\lim_{k \to +\infty} d(p_k, p_U) = 0.$$

a. Montrer que pour tous entiers naturels i et k tels que $i \leqslant k$,

$$d(p_k, p_U) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma, \sigma')(p_i(\sigma) - p_U(\sigma)) \right|.$$

 Creative Commons :

b. En déduire que pour tous entiers naturels i et k tels que $i \leqslant k$,

$$d(p_k, p_U) \leqslant d(p_i, p_U).$$

c. Montrer que pour tous σ, σ' de $\mathcal{S}_n$,

$$q_n(\sigma, \sigma') \geqslant \frac{1}{n^n}.$$

d. À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$d(p_{n+k}, p_U) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} (q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n})(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right|,$$

puis que

$$d(p_{n+k}, p_U) \leqslant r_n \; d(p_k, p_U),$$

où l'on a posé

$$r_n = 1 - \frac{n!}{n^n}.$$

e. Montrer que pour tous entiers naturels k et i,

$$d(p_{kn+i}, p_U) \leqslant r_n^k \, d(p_0, p_U) \leqslant r_n^k.$$

f. Conclure que

$$\lim_{m \to +\infty} d(p_m, p_U) = 0.$$

8. (*Bonus*) Si l'on part d'un jeu rangé $\sigma = (1, \ldots, n)$, existe-t-il un nombre d'étapes k au bout duquel le jeu est parfaitement mélangé ?



Commentaires sur l'Exercice 5

Dans cet exercice, nous avons étudié une méthode (peu standard) pour mélanger un jeu de cartes et nous avons prouvé qu'elle le faisait correctement, au sens où, pour tout $m \geqslant 1$,

$$d(p_m, p_U) \leqslant r_n^{\frac{m}{n}-1}.$$

La distance $d(p_k, p_U)$ tend donc vers 0 exponentiellement vite.
Fixons cependant un seuil assez petit, disons $0,1$. On dira alors que le jeu est « bien mélangé » si $d(p_k, p_U) \leqslant 0,1$. Pour un jeu de 5 cartes, on a $r_5 = 0,9616$; la borne obtenue nous assure que 60 mélanges sont suffisants pour que le jeu soit bien mélangé. C'est beaucoup pour un jeu qui ne contient que 5 cartes ! Le nombre de mélanges nécessaire devient énorme si on passe à 32 ou 52 cartes. Mais est-il bien nécessaire de réaliser tant d'opérations pour bien mélanger un jeu de cartes ? La réponse est non : la technique mathématique que nous avons utilisée est un peu trop grossière. Elle est due à Vincent Doblin, mathématicien français mort à l'âge de 25 ans lors de la Seconde Guerre Mondiale et connu entre autres pour

 Creative Commons :

avoir mis certains de ses travaux sous un pli cacheté qui n'a été ouvert qu'en l'an 2000.
Une méthode plus adaptée à notre problème consisterait à comparer cet algorithme de mélange au problème du collectionneur de coupons, problème présent à la page 116 de l'ouvrage *Mat'la Terminale S*. En 1986, D. Aldous et P. Diaconis ont obtenu dans l'article intitulé *Shuffling Cards and Stopping Times* (littéralement « Mélange de Cartes et Temps d'Arrêt ») l'inégalité suivante :

$$d(p_m, p_U) \leqslant n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

qui est bien plus fine ! Pour $n = 5$, on trouve en utilisant cette majoration qu'un jeu est bien mélangé après 18 mélanges :

$$5\left(1 - \frac{1}{5}\right)^m \leqslant 0,1 \Leftrightarrow m \geqslant 17,531...$$

Pour $n = 32$ et $n = 52$, on trouve respectivement que 182 et 322 mélanges sont nécessaires pour bien mélanger le jeu.
Nous nous sommes ici fixé un seuil arbitraire de $0,1$ et avons déterminé le nombre de mélanges nécessaires pour obtenir un *bon mélange* en regard de ce seuil d'exigence, mais qu'en est-il si on regarde le seuil minimal que l'on peut fixer en fonction du nombre de mélanges ?

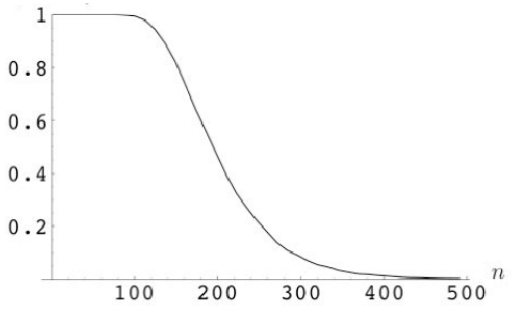


FIGURE 5 – Fonction $k \mapsto \min\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, 1\right)$ dominant la convergence vers la disposition uniforme pour un jeu de 52 cartes

On remarque que la distance entre p_m et p_U reste proche de 1 jusqu'à environ 150 mélanges, descend brusquement vers 200 mélanges et est presque nulle à partir de 350 mélanges. Il y a un phénomène de « seuil », appelé « cut-off » en anglais. La figure 8 représente l'évolution du nombre de tirages auquel on observe ce seuil en fonction du nombre de cartes. Cette courbe ressemble à une droite mais ce n'en est pas une : pour observer le seuil qui nous intéresse, il faut (approximativement) réaliser 20 mélanges pour 10 cartes, 100 mélanges pour 30 cartes, 500 mélanges pour 100 cartes... En fait, on peut montrer qu'il faut réaliser $n\ln(n)$ mélanges pour observer le phénomène de seuil pour un jeu à n cartes.
Revenons maintenant sur la méthode de mélanges en elle-même. Celle-ci n'est pas très rapide si vous devez mélanger un jeu dans le monde réel, mais elle est très simple à implémenter sur un ordinateur et rapidement exécutable, ce qui permet par exemple de simuler une dis-

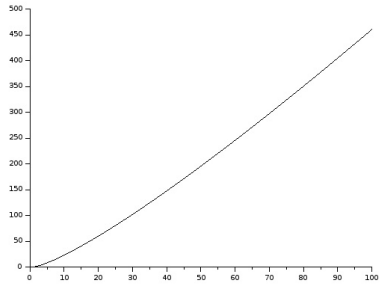


FIGURE 6 – Évolution du seuil (nombres de mélanges nécessaires) en fonction du nombre de cartes dans le jeu pour un mélange par la carte du haut

tribution uniforme. Ce dernier point est d'un intérêt capital pour la simulation informatique de processus aléatoires!
La méthode la plus utilisée en pratique pour mélanger un jeu de cartes est celle du *mélange américain* qui consiste à couper le jeu en 2 puis à entremêler les cartes.

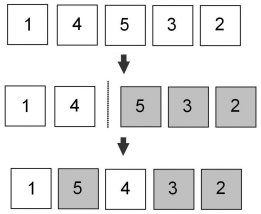


FIGURE 7 – Mélange américain : coupure puis entremêlement

D. Bayer et P. Diaconis ont démontré en 1992 qu'il existe dans ce cas aussi un phénomène de seuil, observé aux alentours de 8 mélanges pour un jeu de 32 cartes et de 9 mélanges pour un jeu de 52 cartes. Notons que l'on parle souvent de 7 mélanges pour un jeu de 52 car c'est pour ce nombre que la distance entre la distribution de la disposition du jeu et la distribution uniforme devient plus petite que $0,5$.
Sur le plan du contenu mathématique, nous avons étudié dans cet exercice une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ où S_{n+1} est obtenu à partir de S_n grâce à un même procédé aléatoire à chaque étape n. On parle de *chaîne de Markov*, du nom du mathématicien russe Andreï Markov (1856-1922). Nous avons montré que la loi de S_n converge (en un certain sens, celui de la distance d) vers la loi d'équilibre pour ce procédé : la loi uniforme sur les dispositions. Une disposition est en fait une bijection de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,n\}$: on parle de *permutations*, et l'ensemble des permutations $\mathcal{S}_n$, qui a une structure particulière (celle d'un groupe), est appelé *groupe symétrique*.

 Creative Commons :

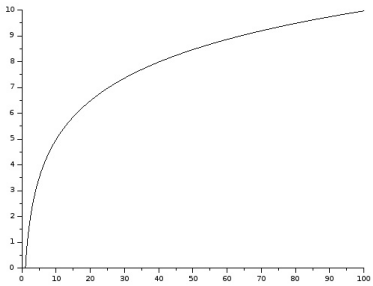


FIGURE 8 – Évolution du seuil (nombres de mélanges nécessaires) en fonction du nombre de cartes dans le jeu pour un mélange américain

Indications



Indications sur l'Exercice 2

1.a. Il suffit de trouver un chemin de taille $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$.

1.b. Justifier quels déplacements devront être effectués.

2.b. On pourra comparer AB^2 et $d(A,B)^2$ et utiliser l'inégalité $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$.



Indications sur l'Exercice 3

2.d. On pourra supposer par exemple que $m_1 \geq n_1$ puis montrer que $n_2 \geq m_2$. Dans ce cas, quelles briques doit-on déplacer ? En déduire que $d_2(M,N) = m_1 - n_1$. Puis établir qu'en général

$$d_2(M,N) = \frac{1}{2}(|m_1 - n_1| + |m_2 - n_2|).$$

3. On pourra considérer $n + k - 1$ emplacements et utiliser le fait que le nombre de façons de choisir i emplacements parmi $n + k - 1$ est donné par $\binom{n+p-1}{i}$.



Indications sur l'Exercice 5

1.d. On pourra se demander si le fait de couper un jeu de cartes ne préserverait pas certaines propriétés de sa disposition.

5.a. On pourra vérifier que $P(S_1 = \sigma) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} P_{\{S_0 = \sigma\}}[S_1 = \sigma]\ P(S_0 = \sigma')$.

6. Il faut montrer que si on a $P(S_0 = \sigma) = p_U(\sigma)$ pour tout σ de $\mathcal{S}_n$, alors on a $P(S_k = \sigma) = p_U(\sigma)$ pour tout $k \geqslant 0$ et tout σ de $\mathcal{S}_n$. On pourra raisonner par récurrence.

7.c. Essayer d'abord de passer de $(1,5,2,4,3)$ à $(1,2,3,4,5)$ en 5 étapes.

 Creative Commons :

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.a. Il n'y a pas de trajet de longueur 3, ni de longueur 8, mais il existe des trajets de longueur 5, de longueur 7 ou de longueur 9 (ces deux derniers cas pouvant être construits en faisant un détour plus ou moins long à partir d'un trajet de longueur 5).
1.b. La distance recherchée est 5 : en effet, il n'existe pas de chemin de longueur $1, 2, 3$ ou 4 (puisqu'il faut se déplacer au moins deux fois vers la droite et trois fois vers le haut) mais il en existe de longueur 5.
1.c. Il y en a 10 : le problème revient à placer dans tous les ordres possibles deux mouvements vers la droite et trois mouvements vers le haut.
1.d. D'après le théorème de Pythagore, la distance à vol d'avion entre ces deux points est $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Il n'existe alors qu'un seul chemin réalisant la distance minimale : le segment reliant ces deux points.
2.a. On obtient douze points situés sur un carré (voir figure 9).

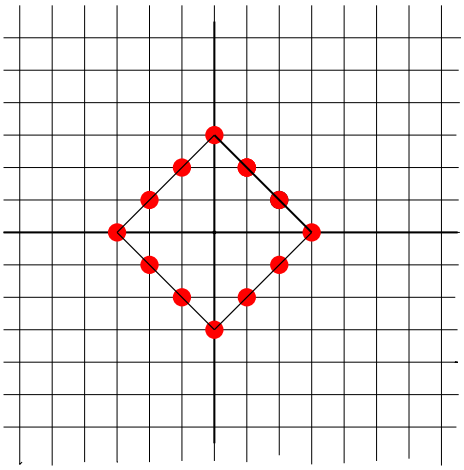


FIGURE 9 – Points à une distance 3 de $(0, 0)$

2.b. Il s'agit du cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon 3.
3.a. Il s'agit de la médiatrice des points $(0; 0)$ et $(2; 2)$.
3.b. On obtient un ensemble « beaucoup plus gros » qu'une droite ; voir la figure 10.
3.c. Le chauffeur habitant le plus près d'un client donné prend la course correspondante ; les zones affectées aux différents chauffeurs sont alors délimitées par la région tracée dans la figure 11. Il reste aux chauffeurs à se répartir les points bleus !

□

Correction de l'Exercice 2

1.a. S'il existe un chemin de longueur ℓ reliant A à B, alors $d(A, B) \leqslant \ell$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un chemin de longueur $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$. Par exemple, le chemin

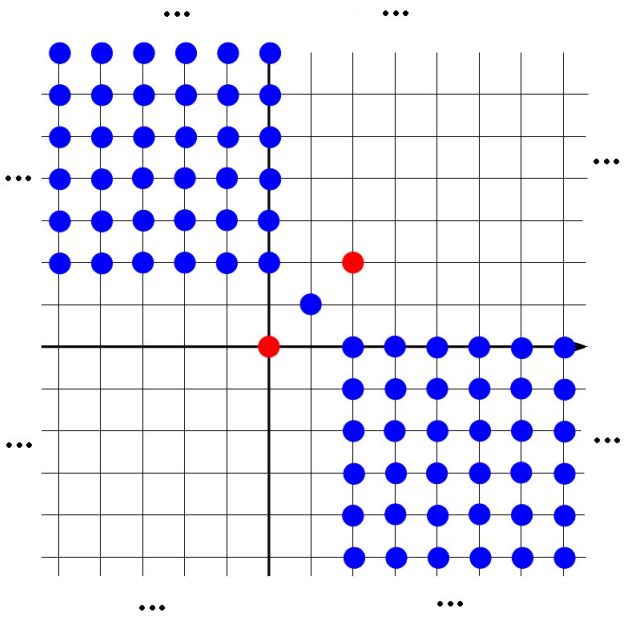


FIGURE 10 – Les points bleus sont les points à égale distance des deux points rouges

parcouru à partir de A en progressant de manière horizontale jusqu'à arriver à l'abscisse x_B puis de manière verticale jusqu'à arriver à l'ordonnée y_B possède cette longueur.

1.b. Le chauffeur doit franchir chaque droite verticale d'abscisse entière séparant les deux points : il doit parcourir pour cela au moins $|x_B - x_A|$ segments horizontaux. Il doit aussi franchir chaque droite horizontale d'ordonnée entière séparant les deux points et parcourir pour cela $|y_B - y_A|$ segments verticaux. De plus, il ne peut pas franchir deux de ces droites simultanément puisque les déplacements se font horizontalement *ou* verticalement. Un chemin en taxi entre A et B doit donc comporter au moins $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ segments de longueur 1. On obtient $d(A, B) \geqslant |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$, d'où

$$d(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

l'égalité en utilisant la question précédente.

1.c. Dans l'exercice précédent, on avait bien

$$d((0;0),(2;3)) = |2 - 0| + |3 - 0| = 5.$$

2.a. La distance euclidienne AB entre A et B est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

d'après le théorème de Pythagore.

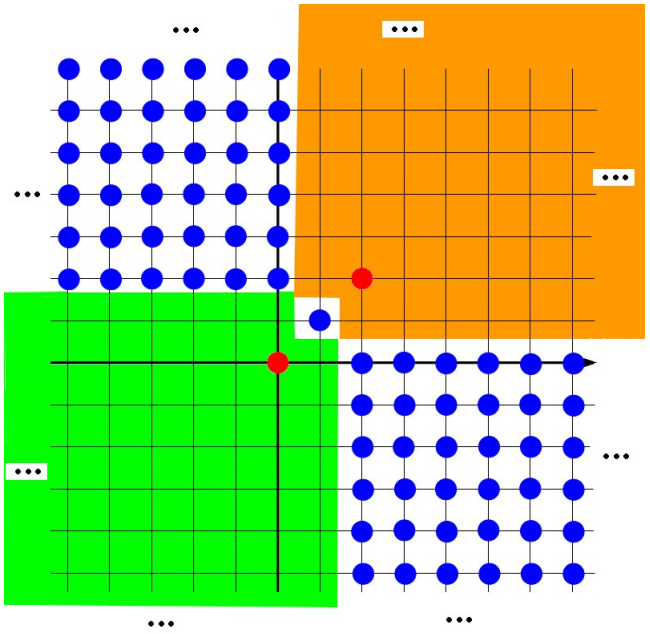


FIGURE 11 – La zone orange est prise en charge par le point $(2;2)$ et la zone verte par $(0;0)$

2.b. On a

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

et

$$d(A,B)^2 = (|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 = (x_B - x_A)^2 + 2|x_B - x_A||y_B - y_A| + (y_B - y_A)^2.$$

On a donc facilement que $AB^2 \leqslant d(A,B)^2$ c'est-à-dire que

$$AB \leqslant d(A,B)$$

puisque AB et $d(A,B)$ sont positifs. On a aussi

$$d(A,B)^2 = (x_B - x_A)^2 + 2|x_B - x_A||y_B - y_A| + (y_B - y_A)^2.$$

Or $2ab \leqslant a^2 + b^2$ pour tout réels a, b puisque $(a-b)^2 \geqslant 0$, et donc

$$2|x_B - x_A||y_B - y_A| \leqslant (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Finalement, $d(A,B)^2 \leqslant 2AB^2$ d'où

$$d(A,B) \leqslant \sqrt{2}AB.$$

2.c. Deux points sont à distance nulle si et seulement si ce sont les mêmes, c'est-à-dire $AB = 0$. Autrement dit, $AB = 0$ si et seulement si $A = B$. La distance entre A et B est la

même qu'entre B et A. La dernière inégalité vient du fait que le chemin le plus court est la ligne droite ; en faisant un détour par C on allonge la distance parcourue.

3.a. Les arguments géométriques sont strictement les mêmes que dans la question précédente en imaginant que l'on parcourt Manhattan en taxi et non plus en hélicoptère. Formellement, on a

$$\begin{aligned} d(A,B) = 0 &\Leftrightarrow |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = 0 \Leftrightarrow |x_B - x_A| = 0 \text{ et } |y_B - y_A| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_A = x_B \text{ et } y_A = y_B \Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

On a

$$d(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = d(B,A).$$

Finalement, comme

$$|x_C - x_A| = |x_C - x_B + x_B - x_A| \leqslant |x_B - x_A| + |x_B - x_A|$$

et

$$|y_C - y_A| = |y_C - y_B + y_B - y_A| \leqslant |y_B - y_A| + |y_B - y_A|$$

la dernière affirmation vient directement.

□

Correction de l'Exercice 3

1.a. Il y en a 20, représentés par

$$(3,0,0,0),\ (0,3,0,0),\ (0,0,3,0),\ (0,0,0,3),\ (2,1,0,0),$$

$$(2,0,1,0),\ (2,0,0,1),\ (1,2,0,0),\ (0,2,1,0),\ (0,2,0,1),$$

$$(1,0,2,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,2,1),\ (1,0,0,2),\ (0,1,0,2),$$

$$(0,0,1,2),\ (1,1,1,0),\ (1,1,0,1),\ (1,0,1,1) \text{ et } (0,1,1,1).$$

En effet, comme on peut le voir sur la figure 12, il y a

- les murs ayant 3 briques sur une seule colonne (et donc 0 brique sur les autres colonnes) ;
- les murs ayant 2 briques sur une colonne et (donc) 1 brique sur une autre colonne ;
- les murs possédant au maximum 1 brique par colonne, c'est-à-dire ceux ayant 3 colonnes avec 1 brique et une colonne vide.

2.a. La distance recherchée est 2. En effet, il suffit de déplacer deux briques de la première colonne vers les colonnes 3 et 4 et on ne peut pas faire moins.

2.b. Si aucune brique n'a besoin d'être déplacée, c'est que les murs sont les mêmes, ce qui montre (i).

Imaginez que vous savez transformer le mur A en le mur B en déplaçant p briques exactement. Alors vous pouvez transformer le mur B en le mur A en (re)déplaçant ces mêmes p briques par le mouvement inverse de celui que vous venez d'effectuer. Donc $d(B,A) \leqslant d(A,B)$, et en permutant les rôles de A et B on obtient $d(A,B) \leqslant d(B,A)$, ce qui montre (ii).

Vous savez déplacer A en B en déplaçant $d(A,B)$ briques, et vous savez déplacer B en C en déplaçant $d(B,C)$ briques. En réalisant coup sur coup ces deux séries de déplacements,

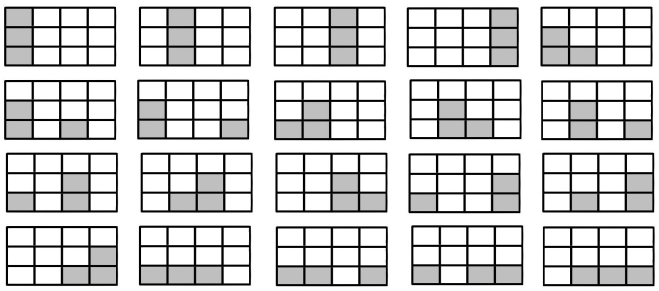


FIGURE 12 – Murs de $n = 3$ briques sur $k = 4$ colonnes (en gris)

vous pouvez transformer le mur A en le mur C en déplaçant exactement $d(A, B) + d(B, C)$ briques. Donc $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$. Remarquons que s'il s'agit effectivement d'une façon de transformer A en C, ce n'est pas forcément la plus rapide, c'est-à-dire celle qui revient à déplacer le moins de briques.

2.c. Supposons que $m_1 \geqslant n_1$ (l'autre cas se traite de manière similaire). On a alors $n_2 \geqslant m_2$ car $m_2 = n - m_1$ et $n_2 = n - n_1$. On doit (et il suffit de) déplacer les $m_1 - n_1 = n_2 - m_2$ briques du premier emplacement sur le deuxième : elles étaient en trop sur la première colonne et doivent être placées sur la deuxième. On a donc bien

$$d_2(M, N) = (m_1 - n_1) = \frac{1}{2}\left(|m_1 - n_1| + |m_2 - n_2|\right).$$

Notons que l'on retrouve la distance des taxis (à un facteur 1/2 près).

2.d. Comme le mur de départ et le mur d'arrivée ont le même nombre de briques et comportent le même nombre de colonnes, à chaque brique « manquante » du mur de départ par rapport à la colonne correspondante du mur d'arrivée correspond une brique surnuméraire sur une autre colonne. Cette remarque permet de voir que la somme

$$S = \sum_{i=1}^{p} |m_i - n_i|$$

des différences entre les nombres de briques de chaque colonne est un nombre pair.

Il est clair qu'une suite optimale de déplacements consiste à réduire S à 0 en un nombre minimal d'opérations. Comme chaque déplacement consiste à enlever une brique d'une colonne et à la placer sur une autre, il réduit nécessairement S de 2 au maximum. Il faut donc au minimum $\frac{S}{2}$ mouvements pour transformer M en N, donc $d_k(M, N) \geqslant \frac{S}{2}$. Si l'on procède à chaque mouvement de façon à retirer une brique en trop sur une colonne du premier mur et la mettre sur une colonne où il en manque, on voit que l'on réduit bien S de 2 lorsque cela est possible. On peut réaliser cette opération tant que S n'est pas nul, donc $\frac{S}{2}$ fois, si bien que

$$d_k(M, N) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} |m_i - n_i|.$$

et donc

$$d_k(M, N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} |m_i - n_i|.$$

3.a. Comme les briques sont indiscernables, on peut les placer sur une ligne puis placer des séparations entre les briques qui correspondent aux différentes colonnes. Deux séparations peuvent se trouver au même endroit, ce qui signifie qu'une colonne est vide. Par exemple, si je dispose de trois briques, je peux les symboliser par une suite de trois zéros 000. Trois colonnes correspondent à deux séparations, si bien que je peux représenter les murs constructibles sur trois colonnes avec trois briques par les séquences ||000, |0|00, |00|0, |000|, 0||00, 0|0|0, 0|00|, 00||0, 00|0| et 000||, qui correspondent respectivement aux murs $(0,0,3)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(0,3,0)$, $(1,0,2)$, $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(2,0,1)$, $(2,1,0)$ et $(3,0,0)$. Pour créer un mur à n éléments sur k colonnes, on doit donc placer $k-1$ séparations parmi les $n+k-1$ choix possibles, ce qui correspond à

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

choix distincts. On vérifie bien que cette formule est cohérente avec le résultat de la question **1.a** puisque $20 = \binom{6}{3}$.

□

Correction de l'Exercice 4

1. On a $d(p,q) = \frac{1}{2}(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$.

2.a. On a

$$\begin{aligned}\max_{A\subset\{1,\dots,k\}}(p(A)-q(A)) &= \max_{A\subset\{1,\dots,k\}}\left(\sum_{i\in A}p_i - \sum_{i\in A}q_i\right) = \max_{A\subset\{1,\dots,k\}}\sum_{i\in A}(p_i-q_i)\\ &\leqslant \max_{A\subset\{1,\dots,k\}}\sum_{i\in A}|p_i-q_i| \leqslant \sum_{i\in\{1,\dots,n\}}|p_i-q_i| = 2d(p,q).\end{aligned}$$

2.b. Par définition de B, on a

$$p(B)-q(B) = \sum_{i\in B}(p_i-q_i) = \sum_{i\in B}|p_i-q_i|,$$

puisque $p_i - q_i \geq 0$ pour tout i dans B. Ce qui entraîne $p_i - q_i = |p_i - q_i|$. Mais aussi, comme $p(B^c) = 1-p(B)$ et $q(B^c) = 1-q(B)$,

$$p(B)-q(B) = q(B^c)-p(B^c) = \sum_{i\in B^c}(q_i-p_i) = \sum_{i\in B^c}|q_i-p_i|,$$

car $p_i - q_i < 0$ pour tout i dans B^c. Ce qui entraîne $|p_i - q_i| = q_i - p_i$.

2.c. En sommant les deux égalités précédentes :

$$2(p(B)-q(B)) = \sum_{i\in B}|p_i-q_i| + \sum_{i\in B^c}|q_i-p_i| = \sum_{i\in\{1,\dots k\}}|q_i-p_i|$$

et donc

$$p(B)-q(B) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,\dots,k\}}|q_i-p_i| = d(p,q).$$

On en déduit que

$$\max_{A\subset\{1,\dots,k\}}(p(A)-q(A)) = p(B)-q(B) = d(p,q).$$

□

 Creative Commons :

Correction de l'Exercice 5

1.a. Le premier et le troisième vecteurs sont des dispositions. Le deuxième n'en est pas une car il contient un 6, et le dernier non plus car il contient deux fois le nombre 1.

1.b. Comme les σ_i sont distincts deux à deux, l'ensemble des σ_i avec $i \in \{1, ..., n\}$ est un ensemble à n éléments. Or ces n éléments appartiennent à $\{1, ..., n\}$, donc cet ensemble est $\{1, ..., n\}$. Pour tout j de $\{1, ..., n\}$, il existe donc i dans $\{1, ..., n\}$ tel que $j = \sigma_i$.

1.c. On a n choix pour la première carte puis $(n-1)$, puis $(n-2)$... donc il y a

$$n \times (n-1) \times ... \times 1 = n!$$

dispositions différentes. Notons que ce nombre prend rapidement des valeurs très grandes : par exemple, pour $n = 32$,

$$32! \geqslant 2.10^{35}.$$

À titre de comparaison, si tous les êtres humains actuellement en vie (environ 7 milliards) avaient pu observer une combinaison toutes les microsecondes (c'est-à-dire toutes les 10^{-6} secondes) depuis le Big Bang (survenu il y a un peu moins de 15 milliards d'années), l'humanité n'aurait pu voir que

$$7 \times 10^9 \times 15 \times 10^9 \times 365,25 \times 24 \times 3600 \times 10^6 \leqslant 3.3110^{33}$$

dispositions de jeu différentes, c'est-à-dire moins d'un cinquantième des dispositions existantes. Notez donc qu'à chaque fois que vous observez une disposition d'un jeu de cartes bien mélangé, il est quasi-certain que vous êtes l'unique personne en tout temps et en tout lieu à avoir vu cette disposition !

1.d. Commençons par un exemple. Si la disposition est

$$(1, 2, 3, 4, 5),$$

alors après une coupe, elle ne peut devenir que l'une des dispositions suivantes

$$(2, 3, 4, 5, 1),\ (3, 4, 5, 1, 2),\ (4, 5, 1, 2, 3),\ (5, 1, 2, 3, 4).$$

Nous n'obtiendrons pas d'autres dispositions en continuant à mélanger de la sorte, et ce quel que soit le nombre de mélanges réalisés. Vous pouvez directement généraliser cette observation pour n cartes : si on part d'une disposition $(1, 2, 3, \ldots, n)$, on ne pourra jamais obtenir la disposition $(2, 1, 3, \ldots, n)$ en coupant le jeu, sauf bien sûr si $n = 2$ mais nous avons $n \geq 3$. En fait, la plupart des dispositions ne pourront être obtenues. Le mélange par coupes successives préserve un ordre entre les cartes : si 1 n'est pas la dernière carte du jeu, la carte suivante sera toujours 2, la suivante 3 et ainsi de suite... On ne peut donc observer que n dispositions différentes.

2.a. Avec les notations de l'exercice, nous avons

$$P_{\{S_0=\sigma\}}[S_1 = (\sigma_2, \ldots, \sigma_\ell, \sigma_1, \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_n)] = P(N = \ell).$$

De plus, comme N est choisi au hasard, $P(N = \ell) = 1/n$.

2.b. La méthode de mélange ne dépend pas du nombre d'étapes effectuées précédemment ; on effectue toujours le même mouvement (on déplace au hasard la première carte), donc la probabilité de transformer une disposition en une autre en une étape ne dépend pas de k. On a donc

$$P_{\{S_k=\sigma\}}\left(S_{k+1} = \sigma'\right) = P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_1 = \sigma'\right).$$

 Creative Commons :

On conclut en remarquant que d'après la question précédente,

$$P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_1=\sigma'\right)=\frac{1}{n}$$

s'il existe ℓ dans $\{1,...,n\}$ tel que

$$\sigma'=(\sigma_2,\ldots,\sigma_\ell,\sigma_1,\sigma_{\ell+1},\ldots,\sigma_n)$$

et $P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_1=\sigma'\right)=0$ sinon.

3.a. On a

$$\begin{aligned}&q_1((1,2,3,...,n-1,n),(2,3,...,n-1,1,n))\\&\quad=P_{\{S_0=(2,3,...,n-1,1,n)\}}[S_1=(1,2,3,...,n-1,n)]=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&q_1((1,2,3,4,...,n-1,n),(1,2,n,4,...,n-1,3))\\&\quad=P_{\{S_0=(1,2,n,4,...,n-1,3)\}}[S_1=(1,2,3,...,n-1,n)]=0,\end{aligned}$$

car on ne peut pas passer de $(1,2,3,4,...,n-1,n)$ à $(1,2,n,4,...,n-1,3)$ en une étape (en effet, la carte 1 est nécessairement déplacée par le premier mouvement si celui-ci ne laisse pas le jeu inchangé). De la même manière

$$q_2((1,2,3,4,..,n),(2,1,4,3,...,n))=0$$

car on ne peut pas inverser le 3 et le 4 en seulement 2 étapes.

3.b. On a

$$q_0(\sigma,\sigma)=1,\quad q_1(\sigma,\sigma)=\frac{1}{n}$$

car sans mélange, le jeu ne change pas, et il est laissé inchangé par un mélange si et seulement si celui-ci consiste à remettre le première carte en première position.

3.c. L'indépendance des mélanges assure que

$$\begin{aligned}P_{\{S_0=\sigma\}}(S_k=\sigma)&\geqslant P(\text{« la première carte est toujours retombée en première position »})\\&=P(\text{« à chaque étape, la première carte est maintenue en place »})\\&=P(\text{« à la première étape, la première carte est maintenue en place »})\\&\quad\times\cdots\times P(\text{« à l'étape } k\text{, la première carte est maintenue en place »})\\&=\underbrace{1/n\times\cdots\times 1/n}_{k\text{ facteurs}}=1/n^k.\end{aligned}$$

Notons que l'on a juste exhibé *une* façon d'arriver à σ en k étapes. Il en existe bien sûr d'autres, comme par exemple celle qui correspond à la suite suivante :

$$S_0=(\sigma_1,\sigma_2,...),\qquad S_1=(\sigma_2,\sigma_3,....,\sigma_{k-1},\sigma_1,\sigma_k,...,\sigma_n),$$

$$S_2=(\sigma_3,....,\sigma_{k-1},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_k,...,\sigma_n),\qquad S_3=(\sigma_4,....,\sigma_{k-1},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_k,...,\sigma_n),$$

$$\ldots$$

$$S_{k-1}=(\sigma_{k-1},\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_{k-2},\sigma_k,...,\sigma_n),\qquad S_k=\sigma.$$

Le passage entre chacune des dispositions décrites ci-dessus se produit avec une probabilité égale à $1/n$. On a donc bien $1/n\times\cdots 1/n=1/n^k$ chances que cela arrive aussi. Calculer

 Creative Commons :

explicitement $q_k(\sigma,\sigma)$ supposerait de dénombrer toutes les suites de dispositions menant de σ à σ en k étapes, ce qui est bien plus compliqué.

4. Nous avons vu dans les questions précédentes que

$$q_1(\sigma,\sigma') = P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_1=\sigma'\right) = \frac{1}{n}$$

si σ' correspond à la disposition σ au déplacement de la première carte près. Si on fixe σ', il y a exactement n dispositions σ qui pourraient convenir. En effet, pour que la disposition soit $\sigma' = (\sigma'_1,\dots,\sigma'_n)$ après avoir mélangé σ en mettant la première carte en k-ième position, on doit avoir

$$(\sigma'_1,\dots,\sigma'_n) = (\sigma_2,\dots\sigma_{k-1},\sigma_1,\sigma_k,\dots,\sigma_n)$$

donc σ doit être une des n dispositions suivantes :

$$(\sigma'_k,\sigma'_1\dots,\sigma'_{k-1},\sigma'_{k+1},\sigma'_n)$$

pour k allant de 1 à n.

5.a. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(S_0=\sigma),\sigma\in\mathcal{S}_n\}$, on voit que

$$\begin{aligned}
P(S_1=\sigma') &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} P\left(\{S_1=\sigma'\}\cap\{S_0=\sigma\}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_1=\sigma'\right)P(S_0=\sigma)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_1(\sigma,\sigma')P(S_0=\sigma).
\end{aligned}$$

5.b. Comme à la question précédente,

$$\begin{aligned}
P(S_k=\sigma') &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} P\left(\{S_k=\sigma'\}\cap\{S_i=\sigma\}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} P_{\{S_i=\sigma\}}\left(S_k=\sigma'\right)P(S_i=\sigma)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')P(S_0=\sigma).
\end{aligned}$$

car

$$P_{\{S_{i+0}=\sigma\}}\left(S_{i+(k-i)}=\sigma'\right) = P_{\{S_0=\sigma\}}\left(S_i=\sigma'\right) = q_{k-i}(\sigma,\sigma')$$

puisque la façon de mélanger ne dépend pas du nombre de mélanges déjà effectués.

6. Supposons que le jeu est bien mélangé, c'est-à-dire que

$$P(S_0=\sigma) = p_U(\sigma) = \frac{1}{n!},$$

pour tout σ de $\mathcal{S}_n$. On a alors, en utilisant la question **5.a.** puis la question **4**, que

$$P(S_1=\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_1(\sigma,\sigma')P(S_0=\sigma) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_1(\sigma,\sigma') = \frac{1}{n!}.$$

On peut ensuite procéder de la même manière par récurrence, car d'après la question **5.b.** :

$$P(S_{k+1}=\sigma') = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_1(\sigma,\sigma')P(S_k=\sigma).$$

 Creative Commons :

7.a. Nous avons vu dans la question **5.b** que

$$p_k(\sigma') = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')p_i(\sigma),$$

et si $p_0 = p_U$ alors $p_k = p_U$ (question **6**). On a donc aussi

$$p_U(\sigma') = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')p_U(\sigma)$$

d'où

$$\begin{aligned} d(p_k,p_U) &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n}\left|p_k(\sigma') - p_U(\sigma')\right| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n}\left|\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')(p_i(\sigma)-p_U(\sigma))\right|. \end{aligned}$$

7.b. En utilisant la question précédente, on trouve que pour tout i dans $\{0,...,k\}$:

$$\begin{aligned} d(p_k,p_U) &= \frac{1}{2}\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n}\left|\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')(p_i(\sigma)-p_U(\sigma))\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')\left|(p_k(\sigma)-p_U(\sigma))\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma')|(p_k(\sigma)-p_U(\sigma))| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}|p_k(\sigma)-p_U(\sigma)|\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma'). \end{aligned}$$

Si $i = k-1$, on a $\sum_{\sigma'\in\mathcal{S}_n} q_{k-i}(\sigma,\sigma') = 1$ et donc

$$d(p_k,p_U) \leqslant d(p_{k-1},p_U).$$

On peut donc montrer la propriété voulue par récurrence. Notons que cette inégalité signifie qu'à chaque étape, la loi de la disposition aléatoire du jeu est plus proche d'un bon mélange.
7.c. Comme dans la question **3.b.**, il suffit de trouver une méthode qui envoie σ sur σ' en n étapes. On peut procéder comme suit. On fixe une « barre virtuelle » à la fin du jeu de cartes, puis on envoie toutes les cartes *sous* cette barre virtuelle en respectant l'ordre des cartes dans la configuration de σ'. Illustrons ce principe sur l'exemple du passage de $(1,5,2,4,3)$ à $(1,2,3,4,5)$: les configurations successives obtenues sont

$$(1,5,2,4,3 \mid),$$
$$(5,2,4,3 \mid 1),$$
$$(2,4,3 \mid 1,5),$$
$$(4,3 \mid 1,2,5),$$
$$(3 \mid 1,2,4,5),$$
$$(\ \mid 1,2,3,4,5).$$

 Creative Commons :

Avec cette méthode, quelle que soit la disposition σ, on arrive à la disposition σ' en n étapes avec une probabilité égale à $\underbrace{1/n \times ... \times 1/n}_{n \text{ facteurs}} = 1/n^n$.

7.d. Tout d'abord, on a

$$d(p_{n+k}, p_U) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} q_n(\sigma, \sigma')(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right|$$

d'après les questions précédentes. De plus, en développant le terme de droite dans l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} (q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n})(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} q_n(\sigma, \sigma')(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) - \sum_{\sigma \in D} \frac{1}{n^n} (P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} q_n(\sigma, \sigma')(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) - \frac{1}{n^n} \left(\sum_{\sigma \in D} P(S_k = \sigma) - \sum_{\sigma \in D} p_U(\sigma) \right) \right| \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} q_n(\sigma, \sigma')(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) - \frac{1}{n^n}(1 - 1) \right| \\
=&\frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} q_n(\sigma, \sigma')(P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
=&d(p_{n+k}, p_U).
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire et le fait que $q_n(\sigma, \sigma') \geqslant \frac{1}{n}$ pour toutes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ donnent alors :

$$\begin{aligned}
d(p_{n+k}, p_U) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \left| \sum_{\sigma \in D} \left(q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n} \right) (P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \sum_{\sigma' \in D} \sum_{\sigma \in D} \left(q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n} \right) \left| P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in D} \sum_{\sigma' \in D} \left(q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n} \right) \left| P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in D} \left| P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \sum_{\sigma' \in D} \left(q_n(\sigma, \sigma') - \frac{1}{n^n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in D} \left| P(S_k = \sigma) - p_U(\sigma)) \right| \left(1 - \frac{n!}{n^n} \right) \\
&= \left(1 - \frac{n!}{n^n} \right) d(p_{n+k}, p_U).
\end{aligned}$$

7.e. Par récurrence,

$$\begin{aligned}
d(p_{nk+i}, p_U) = d(p_{n+n(k-1)+i}, p_U) &\leqslant r_n d(p_{n(k-1)+i}, p_U) = r_n d(p_{n+n(k-2)+i}, p_U) \\
&\leqslant r_n^2 d(p_{n+n(k-1)+i}, p_U) \leqslant \cdots \leqslant r_n^k d(p_i, p_U) \\
&\leqslant r_n^k d(p_0, p_U) \leqslant r_n^k.
\end{aligned}$$

 Creative Commons :

7.f. On a que $n!/n^n > 0$ donc $r_n < 1$. De plus,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n < \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{n \text{ facteurs}} = n^n$$

donc r_n appartient à $]0,1[$ et

$$\lim_{k \to +\infty} r_n^k = 0,$$

on a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} d(p_{nk+i}, p_U) = 0$. En réalisant la division euclidienne de m par i, on peut écrire m sous la forme $nk + i$, d'où le résultat voulu.

□

 Creative Commons :